



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

MURAT SALDAMLI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ İZZETTİN DEMİR**

DÜZCE, 2019

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

MURAT SALDAMLI tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

DR. ÖĞR. ÜYESİ İZZETTİN DEMİR
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

DR. ÖĞR. ÜYESİ İZZETTİN DEMİR
Düzce Üniversitesi

PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

DOÇ. DR. AHMET OCAK AKDEMİR
Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 24/06/2019

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

24 Haziran 2019

MURAT SALDAMLI

TEŐEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca ve tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan Değerli Danışman Hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi İzzettin DEMİR'e

Çalışma sürecimde ve her anımda yanımda olan Babam Yaşar SALDAMLI, Annem Müşerref SALDAMLI ve Ablam Selma KUNDAK'a

Ve yine bu süreçte sabrıyla, desteğiyle varlığını her an hissettiğim sevgili Eşim Aslı SALDAMLI'ya

Ve tabii bu süreçte beni bir an bile yalnız bırakmayan canım oğlum Kemal SALDAMLI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

24 Haziran 2019

MURAT SALDAMLI

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
KISALTMALAR.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Metrik Uzaylar Üzerine Temel Kavramlar	3
2.2. Sabit Nokta Kavramı ve Banach Büzülme Prensipleri	5
3. KOMPLEKS DEĞERLİ METRİK UZAYLARDA ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ.....	8
3.1. Sabit Nokta Teoremleri	10
4. KOMPLEKS DEĞERLİ b -METRİK UZAYLARDA ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ.....	19
4.1. Sabit Nokta Teoremleri	20
5. KOMPLEKS DEĞERLİ b -METRİK UZAYLARDA BAZI YENİ SABİT NOKTA SONUÇLARI	28
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	36
7. KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ.....	40

KISALTMALAR

\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^+	Pozitif reel sayılar kümesi
\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
(X, d)	Metrik uzay
(X, d_b)	b -metrik uzay
$\{x_n\}$	Dizi
$B(x_0, r)$	x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$D(x_0, r)$	x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$S(x_0, r)$	x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
Tx	x noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü
T^n	T dönüşümünün n . iterasyonu
$T^n x$	x noktasının T dönüşümü altındaki n . iterasyonu

ÖZET

SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

MURAT SALDAMLI

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: DR. ÖĞR. ÜYESİ İZZETTİN DEMİR

Haziran 2019, 39 sayfa

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu tanıtılmış, ikinci bölümde ise kolaylık sağlamak amacıyla metrik uzaylara ve sabit nokta teorisine ilişkin temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde kompleks değerli metrik uzay kavramı ifade edilmiş ve bu uzay üzerinde bazı büzülme şartlarını sağlayan dönüşümler yardımıyla sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Ayrıca bu teoremler örnekler ile desteklenmiştir. Dördüncü bölümde kompleks değerli metrik uzayın bir genellemesi olan kompleks değerli b -metrik uzay kavramı verilerek çeşitli sabit nokta teoremleri araştırılmıştır. Son bölümde ise kompleks değerli b -metrik uzay üzerinde bazı yeni sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır.

Anahtar sözcükler: Sabit nokta, Kompleks değerli b -metrik uzay.

ABSTRACT

ON FIXED POINT THEOREMS

MURAT SALDAMLI

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. İZZETTİN DEMİR

June 2019, 39 pages

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the subject of the thesis is introduced, in the second chapter, with aim of making easier, basic concepts related to metric spaces and fixed point theory are given. In the third chapter, the concept of a complex valued metric space is expressed and the fixed point theorems are established for mappings satisfying some contractive conditions on this space. Also, these theorems are supported with examples. In the fourth chapter, the concept of a complex valued b -metric space, which is a generalization of complex valued metric space, is presented and various fixed point theorems are investigated. Finally, some new fixed point theorems are proved on complex valued b -metric space.

Keywords: Fixed point, Complex valued b -metric space.

1. GİRİŞ

Metrik uzay kavramı ilk olarak 1906 da Fransız matematikçi Maurice Fréchet [1] tarafından yazılan "Sur Quelques Da Calcul Fonctionnel" isimli doktora teziyle literatüre girmiştir. Fréchet, matematikteki limit, süreklilik gibi önemli kavramların sadece Öklid uzayında değil farklı uzaylarda da kullanılabilmesi adına üzerinde tanımlanan uzayda herhangi iki eleman arasındaki "mesafe" kavramını tanımlamıştır. Böylece daha soyut kavramlar ve sonuçlar elde edilmiştir. Bunun yanısıra metrik uzaylar kavramı Hausdorff uzaylar [2], Topolojik uzaylar [3] ve Düzgün uzaylar [4] gibi çok sayıda soyut yapıya da temel oluşturmuştur.

1912 de Brouwer, \mathbb{R}^n üzerindeki bir kapalı yuvardan kendisine giden herhangi bir sürekli dönüşümün bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermiştir. 1922 de ise Polonyalı matematikçi Stefan Banach [5] doktora tezinde "Daralma (Büzülme) Teoremi" olarak da bilinen sabit nokta teoremini ispatlamış ve böylece sabit noktanın varlığı hakkındaki en kullanışlı ve en kolay sonuçlardan birini ortaya koymuştur. Sabit nokta teorisi diferansiyel ve integral denklemlerin çözümünün varlığını ve tekliğini araştırmak amacıyla da kullanılmaktadır. Bu pratik sonuçları sebebiyle sabit nokta teorisi günümüzde tıp, haberleşme (telekomünikasyon, interpolasyon, ekstrapolasyon, quantizer tasarlama, sinyal sentezleri, filtre sentezleri) ve ekonomi olmak üzere daha bir çok alana sıklıkla uygulanmaktadır.

Metrik uzaylar üzerinde tanımlı fonksiyonlara ilişkin en ilgi uyandıran teoremlerden birisi "Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremi" dir [5]. Bu teoremden esinlenen Ciric [6], Dass ve Gupta [7], O'Regan [8, 9] ve Berinde [10, 11] gibi çok sayıda bilim adamı farklı büzülme dönüşümleri sunarak sabit nokta teoremlerine farklı bir boyut kazandırmıştır. Sabit nokta teorisi üzerindeki araştırmalar sonucunda bazı yeni sabit nokta teoremleri elde edilirken bazılarında ise daha önce verilen sabit nokta teoremlerinin genelleştirilmiş durumları ifade edilmiştir. Matematikçiler bu araştırmalarda sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eden şartlar elde etmeye çalışmışlardır. Sabit nokta teoremlerinin çalışıldığı genelleştirilmiş

metrik uzaylara bulanık metrik uzaylar [12], kısmi metrik uzaylar [13], b -metrik uzaylar [14], G -metrik uzaylar [15], konik metrik uzaylar [16], kısmi b -metrik uzaylar [17], D -metrik uzaylar [18] ve genelleştirilmiş b -metrik uzaylar [19] örnek olarak verilebilir. Bu genelleştirmeler çoğunlukla iki nokta arasındaki uzaklığı temel alır.

Son yıllarda Azam ve diğ. [20] metrik fonksiyonun değer kümesini \mathbb{C} olarak kompleks değerli metrik kavramını tanımlamış ve bazı sabit nokta teoremleri elde etmiştir. Azam ve diğ. tarafından " (X, d) bir tam kompleks değerli metrik uzay olsun. $\delta + \mu < 1$ olacak şekildeki δ, μ negatif olmayan reel sayıları için aşağıdaki şartı sağlayan $S, T : X \rightarrow X$ dönüşümleri alınsın:

$$\forall x, y \in X \text{ için } d(Sx, Ty) \lesssim \delta d(x, y) + \mu \frac{d(x, Sx) d(y, Ty)}{1 + d(x, y)}$$

Bu takdirde, S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir." şeklinde ortaya konulan teorem kompleks değerli metrik uzaylarda bazı büzülme koşullarını sağlayan dönüşümlerin ortak sabit noktaya sahip olduğunun gösterilmesi bakımından temel oluşturmaktadır. Daha sonra pek çok yazar tarafından bu uzaylar üzerinde çeşitli sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Rouzkard ve diğ. [21], Azam ve diğ. [20] nin sonuçlarını genelleştirerek bazı sabit nokta teoremleri vermiştir. Ahmad ve diğ. [22] bir kapalı yuvar üzerinde rasyonel ifadeleri sağlayan dönüşümler yardımıyla bu uzaylar üzerinde sabit nokta teoremleri araştırmıştır. Daha sonra, Rao ve diğ. [23] hem b -metrik uzayların [14] hem de kompleks değerli metrik uzayların bir genellemesi olan kompleks değerli b -metrik uzayları tanıtmış ve çeşitli sabit nokta sonuçları elde etmiştir. Kompleks değerli metrik uzaylar üzerindeki sabit nokta çalışmaları daha birçok matematikçi tarafından yapılmakta olup bu alandaki çalışmalar büyük bir hız kazanmaktadır [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30].

Bu çalışmada öncelikle metrik uzaylarla ilgili temel tanım ve teoremler araştırılmıştır. Daha sonra Banach Sabit Nokta teoremi ispat edilmiştir. Ayrıca kompleks değerli metrik uzay ve kompleks değerli b -metrik uzay tanımları verilmiştir. Bunun yanı sıra, bu uzaylar üzerinde sabit nokta teoremlerini inceleyen bazı makaleler çalışılmıştır. Son olarak kompleks değerli b -metrik uzayda bazı sabit nokta teoremleri elde edilerek özgün bir çalışma yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Metrik Uzaylar Üzerine Temel Kavramlar

Tanım 2.1. [31] X boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir. (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

(M1) Her $x, y \in X$ için $0 \leq d(x, y)$,

(M2) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M3) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

(M4) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Her $(x, y) \in X \times X$ ikilisinin d fonksiyonu altındaki görüntüsüne x ile y arasındaki mesafe denir. (M1) aksiyomu bu mesafenin negatif olamayacağını ifade eder. (M2) aksiyomu birbirine eşit iki nokta arasındaki mesafenin sıfır olduğunu, (M3) aksiyomu ise x noktasının y ye uzaklığı ile y noktasının x e uzaklığının eşit olduğunu gösterir. Üçgen eşitsizliği olarak bilinen son aksiyom aynı doğrultuda olmayan üç farklı noktanın bir üçgen belirttiğini ve bu üçgende iki kenar toplamının üçüncü kenardan daima büyük olduğunu ifade eder.

Örnek 2.2. [31] $X = \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlanan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe \mathbb{R} üzerinde alışılmış metrik denir.

Tanım 2.3. [31] (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ reel sayısına karşılık $n > n_0$ özelliğindeki her n dogal sayısı için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4. [31] (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ reel sayısına karşılık her $n, m > n_0$ doğal sayısı için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.5. [31] (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay, $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ bir dönüşüm ve $a \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $d_1(x, a) < \delta$ iken $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$ olacak şekilde

bir $\delta > 0$ sayısı varsa f dönüşümüne a noktasında süreklidir denir. Eğer f dönüşümü X in her noktasında sürekli ise f dönüşümüne X üzerinde süreklidir denir.

Önerme 2.6. [31] $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, (X, d) metrik uzayında iki dizi olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$ olur.

Önerme 2.7. [31] (X, d) metrik uzayındaki yakınsak bir dizinin her alt dizisi de yakınsaktır ve aynı noktaya yakınsar.

Teorem 2.8. [31] (X, d) metrik uzayındaki yakınsak her $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

İspat. $\{x_n\}$ (X, d) uzayında yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda $x_n \rightarrow x$ olacak biçimde bir $x \in X$ vardır. Buradan, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n \geq n_0$ için $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı bulunur. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$$

elde edilir. O halde $\{x_n\}$ bir Cauchy dizidir. □

Tanım 2.9. [31] Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise bu uzaya tam metrik uzay denir.

Örnek 2.10. [32] $X = \mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde, her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$$

ile tanımlı $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ metriği alınsın. Bu durumda (X, d) metrik uzayı tam değildir.

Tanım 2.11. [32] (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun. Bu takdirde,

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$D(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$$

kümesine de x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Teorem 2.12. [32] Metrik uzayda yakınsak bir dizinin limiti tektir.

İspat. (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ de bu uzayda bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin birbirinden farklı $x, y \in X$ noktalarına yakınsadığı kabul edilsin. Bu takdirde $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$ olmak üzere $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ dir. Gerçekten de $z \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $z \in X$ noktası olduğu varsayılınsın. Buradan $d(x, z) < \varepsilon$ ve $d(y, z) < \varepsilon$ olur. Dolayısıyla

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $2\varepsilon = d(x, y)$ olmasıyla çelişir. Buradan $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ olur. Diğer taraftan $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsadığından her $n \geq n_0$ sayısı için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer şekilde $\{x_n\}$ dizisi y noktasına yakınsadığından her $n \geq n_1$ sayısı için $x_n \in B(y, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda her $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ için $x_n \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon)$ olur. Bu ise $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ olmasıyla çelişir. Böylece $\{x_n\}$ dizisi tek bir noktaya yakınsar. \square

2.2. Sabit Nokta Kavramı ve Banach Büzülme Prensibi

Tanım 2.13. [10] X boştan farklı bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası varsa bu noktaya T dönüşümünün bir sabit noktası denir. Bu durumda $Tx = x$ denkleminin çözümleri T nin sabit noktalarıdır. T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir.

Örnek 2.14. $X = \mathbb{R}$ olsun. $Tx = x^2 + 3x + 1$ olacak şekildeki $T : X \rightarrow X$ dönüşümü için $F(T) = \{-1\}$ dir.

Örnek 2.15. $X = \mathbb{R}$ olsun. $Tx = x^3$ olacak şekildeki $T : X \rightarrow X$ dönüşümü için $F(T) = \{-1, 0, 1\}$ dir.

Tanım 2.16. [33] (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

şartını sağlayan bir $\alpha \geq 0$ reel sayısı varsa T dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlıyor denir.

Tanım 2.17. [33] (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlıyor olsun. $d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)$ eşitsizliğinde $\alpha \in [0, 1)$ olması halinde T dönüşümüne büzülme dönüşümü denir.

Teorem 2.18 (Banach Büzülme Prensibi). [5] (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümü (X, d) uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Keyfi bir $x_0 \in X$ noktası alınsın.

$$Tx_{n-1} = x_n, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Şimdi $\{x_n\}$ dizinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. T bir büzülme dönüşümü olduğundan,

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &= d(Tx_1, Tx_0) \leq \alpha d(x_1, x_0) \\ d(x_3, x_2) &= d(Tx_2, Tx_1) \leq \alpha d(x_2, x_1) \leq \alpha^2 d(x_1, x_0) \\ &\vdots \\ d(x_{n+1}, x_n) &\leq \alpha^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

elde edilir. $m > n$ olmak üzere her $m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + \alpha^n) d(x_1, x_0) \\ &= \alpha^n (\alpha^{m-n-1} + \alpha^{m-n-2} + \dots + 1) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri bulunur. $0 < \alpha < 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$ ve bundan dolayı $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. (X, d) uzayı tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi bir $x_0 \in X$ noktasına yakınsar. Şimdi x_0 noktasının tek bir sabit nokta olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned} d(Tx_0, x_0) &\leq d(Tx_0, x_n) + d(x_n, x_0) \\ &= d(Tx_0, Tx_{n-1}) + d(x_n, x_0) \\ &\leq \alpha d(x_0, x_{n-1}) + d(x_n, x_0) \end{aligned}$$

olur. Buradan $n \rightarrow \infty$ iken $d(Tx_0, x_0) = 0$ olur; yani $Tx_0 = x_0$ bulunur. Son olarak bu noktanın tekliği gösterilsin. Bunun için $x_0 \neq y_0$ ve $Ty_0 = y_0$ olacak biçimde bir $y_0 \in X$ noktasının var olduğu kabul edilsin.

$$d(x_0, y_0) = d(Tx_0, Ty_0) \leq \alpha d(x_0, y_0)$$

elde edilir. Bu durum $0 < \alpha < 1$ olmasıyla çelişir. Böylece ispat tamamlanır. \square



3. KOMPLEKS DEĞERLİ METRİK UZAYLARDA ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ

İlk olarak, kompleks değerli metrik uzaylara ilişkin temel tanımlar ve sabit nokta teoremlerinin ispatında kullanılacak olan iki önemli lemma verilecektir.

\mathbb{C} bir kompleks sayılar kümesi ve $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olsun. \mathbb{C} kümesi üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir \preceq kısmi sıralama bağıntısı tanımlansın.

$$z_1 \preceq z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1) \leq \operatorname{Re}(z_2) \text{ ve } \operatorname{Im}(z_1) \leq \operatorname{Im}(z_2)$$

Diğer bir deyişle, aşağıdaki koşullardan birisinin sağlanması $z_1 \preceq z_2$ olduğu sonucunu ortaya çıkarır:

- (i) $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ ve $\operatorname{Im}(z_1) < \operatorname{Im}(z_2)$,
- (ii) $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$ ve $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$,
- (iii) $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$ ve $\operatorname{Im}(z_1) < \operatorname{Im}(z_2)$,
- (iv) $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ ve $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$.

Bu çalışma boyunca (i), (ii) ve (iii) koşullarından birisi sağlanırsa $z_1 \preceq z_2$ ve sadece (iii) koşulu sağlanırsa $z_1 \prec z_2$ yazılır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} 0 \preceq z_1 \preceq z_2 &\Rightarrow |z_1| < |z_2| \\ z_1 \preceq z_2 \text{ ve } z_2 \prec z_3 &\Rightarrow z_1 \prec z_3 \text{ [20]}. \end{aligned}$$

Tanım 3.1. [20] X boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümüne X üzerinde bir kompleks değerli metrik denir.

- (CM1) Her $x, y \in X$ için $0 \preceq d(x, y)$,
- (CM2) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (CM3) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,
- (CM4) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \preceq d(x, z) + d(z, y)$.

O halde (X, d) ikilisine bir kompleks değerli metrik uzay denir.

Tanım 3.2. [20] (X, d) bir kompleks değerli metrik uzay ve $\{x_n\}$ X üzerinde bir dizi olsun. $0 \prec c$ olmak üzere her $c \in \mathbb{C}$ sayısına karşılık her $n > n_0$ için $d(x_n, x) \prec c$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir ve bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

ile gösterilir. $0 \prec c$ olmak üzere her $c \in \mathbb{C}$ sayısına karşılık her $m, n > n_0$ için $d(x_m, x_n) \prec c$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Lemma 3.3. [20] (X, d) bir kompleks değerli metrik uzay ve $\{x_n\}$ X üzerinde bir dizi olsun. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisinin bir $x \in X$ noktasına yakınsaması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} |d(x_n, x)| = 0$ olmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) $\{x_n\}$ dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsasın. Bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı için

$$c = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} + i \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

alınsın. Bu takdirde, $0 \prec c \in \mathbb{C}$ dir. Hipotezden, her $n > n_0$ için $d(x_n, x) \prec c$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunur. Buradan, her $n > n_0$ için $|d(x_n, x)| < |c| = \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ elde edilir. Böylece, $\lim_{n \rightarrow \infty} |d(x_n, x)| = 0$ sonucuna ulaşılır.

(\Leftarrow) $\lim_{n \rightarrow \infty} |d(x_n, x)| = 0$ ve $0 \prec c$ olmak üzere bir $c \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı alınsın. Bu takdirde, bir $z \in \mathbb{C}$ için

$$|z| < \delta \Rightarrow z \prec c$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısı vardır. O halde, bu δ sayısına karşılık her $n > n_0$ için $|d(x_n, x)| < \delta$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu ise her $n > n_0$ için $d(x_n, x) \prec c$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ olduğunu ifade eder. Böylece $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsar. \square

Lemma 3.4. [20] (X, d) bir kompleks değerli metrik uzay ve $\{x_n\}$ X üzerinde bir dizi olsun. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} |d(x_n, x_{n+m})| = 0$ olmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olsun. Bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı için

$$c = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} + i \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

alınsın. Dolayısıyla, $0 \prec c \in \mathbb{C}$ dir. Hipotez gereğince, her $n > n_0$ için $d(x_n, x_{n+m}) \prec c$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunur. Bu takdirde, her $n > n_0$ için $|d(x_n, x_{n+m})| < |c| = \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ elde edilir. O halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} |d(x_n, x_{n+m})| = 0$ olur.

(\Leftarrow) $\lim_{n \rightarrow \infty} |d(x_n, x_{n+m})| = 0$ ve $0 \prec c$ olmak üzere bir $c \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı alınsın.

Buna göre, bir $z \in \mathbb{C}$ için

$$|z| < \delta \Rightarrow z \prec c$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısı vardır. O halde, bu δ sayısına kaşılık her $n > n_0$ için $|d(x_n, x_{n+m})| < \delta$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla her $n > n_0$ için $d(x_n, x_{n+m}) \prec c$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. \square

3.1. Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 3.5. [34] (X, d) bir tam kompleks değeri metrik uzay olsun. $\alpha + \beta + \gamma < 1$ olacak şekildeki α, β, γ negatif olmayan reel sayıları için aşağıdaki şartı sağlayan $S, T : X \rightarrow X$ dönüşümleri alınsın: Her $x, y \in X$ için,

$$d(Sx, Ty) \lesssim \alpha d(x, y) + \beta \frac{d(x, Sx) d(y, Ty)}{1 + d(x, y)} + \gamma \frac{d(x, Sx) d(y, Ty)}{1 + d(x, y) + d(x, Ty) + d(y, Sx)}$$

Bu takdirde, S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \in X$ olsun. (X, d) uzayında, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere, $x_{2n+1} = Sx_{2n}$ ve $x_{2n+2} = Tx_{2n+1}$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Şimdi, $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) \\ &\lesssim \alpha d(x_{2n}, x_{2n+1}) + \beta \frac{d(x_{2n}, Sx_{2n}) d(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d(x_{2n}, x_{2n+1})} \\ &\quad + \gamma \frac{d(x_{2n}, Sx_{2n}) d(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n}, Tx_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, Sx_{2n})} \\ &\lesssim \alpha d(x_{2n}, x_{2n+1}) + \beta \frac{d(x_{2n}, x_{2n+1}) d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d(x_{2n}, x_{2n+1})} \\ &\quad + \gamma \frac{d(x_{2n}, x_{2n+1}) d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n}, x_{2n+2}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+1})} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda,

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \lesssim 1 + d(x_{2n}, x_{2n+1}) \lesssim 1 + d(x_{2n}, x_{2k+1}) + d(x_{2n}, x_{2n+2})$$

eşitsizliklerinden,

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \lesssim \frac{\alpha}{1 - \beta - \gamma} d(x_{2n}, x_{2n+1})$$

dir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} d(x_{2n+2}, x_{2n+3}) &= d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) = d(Sx_{2n+2}, Tx_{2n+1}) \\ &\lesssim \alpha d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + \beta \frac{d(x_{2n+2}, Sx_{2n+2}) d(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d(x_{2n+2}, x_{2n+1})} \\ &\quad + \gamma \frac{d(x_{2n+2}, Sx_{2n+2}) d(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+2}, Tx_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, Sx_{2n+2})} \\ &\lesssim \alpha d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + \beta \frac{d(x_{2n+2}, x_{2n+3}) d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d(x_{2n+2}, x_{2n+1})} \\ &\quad + \gamma \frac{d(x_{2n+2}, x_{2n+3}) d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+2}, x_{2n+2}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+3})} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) \lesssim 1 + d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) \lesssim 1 + d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+3})$$

olduğundan

$$d(x_{2n+2}, x_{2n+3}) \lesssim \frac{\alpha}{1 - \beta - \gamma} d(x_{2n+1}, x_{2n+2})$$

elde edilir. Bu ise, $h = \frac{\alpha}{1 - \beta - \gamma} < 1$ olmak üzere,

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \lesssim h d(x_n, x_{n+1}) \lesssim \dots \lesssim h^{n+1} d(x_0, x_1)$$

olduğunu ifade eder. Böylece, $m > n$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\lesssim d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\lesssim [h^n + h^{n+1} + \dots + h^{m-1}] d(x_0, x_1) \\ &\lesssim \left[\frac{h^n}{1 - h} \right] d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda,

$$|d(x_n, x_m)| \leq \frac{h^n}{1-h} |d(x_0, x_1)|$$

eşitsizliği sağlanır. O halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} h^n = 0$ olduğundan, Lemma 3.4 gereğince, $\{x_n\}$ dizisi (X, d) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, d) uzayı tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$ olacak

şekilde bir $u \in X$ noktası vardır. Buradan,

$$\begin{aligned}
d(u, Su) &= z \lesssim d(u, x_{2n+2}) + d(x_{2n+2}, Su) \\
&= d(u, x_{2n+2}) + d(Tx_{2n+1}, Su) \\
&\lesssim d(u, x_{2n+2}) + \alpha d(x_{2n+1}, u) + \beta \frac{d(u, Su) d(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d(x_{2n+1}, u)} \\
&\quad + \gamma \frac{d(u, Su) d(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d(x_{2n+1}, u) + d(x_{2n+1}, Su) + d(u, Tx_{2n+1})} \\
&\lesssim d(u, x_{2n+2}) + \alpha d(x_{2n+1}, u) + \beta \frac{z d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d(x_{2n+1}, u)} \\
&\quad + \gamma \frac{z d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d(x_{2n+1}, u) + d(x_{2n+1}, Su) + d(u, x_{2n+2})}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|d(u, Su)| &\leq |d(u, x_{2n+2})| + \alpha |d(x_{2n+1}, u)| + \beta \frac{|z| |d(x_{2n+1}, x_{2n+2})|}{1 + |d(x_{2n+1}, u)|} \\
&\quad + \gamma \frac{|z| |d(x_{2n+1}, x_{2n+2})|}{1 + |d(x_{2n+1}, u)| + |d(x_{2n+1}, Su)| + |d(u, x_{2n+2})|}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece, $n \rightarrow \infty$ iken $|d(u, Su)| = 0$ olur ve (CM2) gereğince $Su = u$ elde edilir. Benzer şekilde $Tu = u$ bulunur. O halde, u noktası S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır. S ve T dönüşümlerinin sabit noktasının tek olduğunu göstermek için $u \neq u^*$ olacak şekilde bir $u^* \in X$ sabit noktası alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
d(u, u^*) &= d(Su, Tu^*) \\
&\lesssim \alpha d(u, u^*) + \beta \frac{d(u, Su) d(u^*, Tu^*)}{1 + d(u, u^*)} + \gamma \frac{d(u, Su) d(u^*, Tu^*)}{1 + d(u, u^*) + d(u, Tu^*) + d(u^*, Su)} \\
&= \alpha d(u, u^*)
\end{aligned}$$

olduğundan $(1 - \alpha)|d(u, u^*)| \leq 0$ ve dolayısıyla $d(u, u^*) = 0$ sonucuna ulaşılır. Bu ise $u = u^*$ çelişkisine neden olur. Sonuç olarak, u noktası S ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktasıdır. \square

Uyarı 3.6. Yukarıdaki teoremden $\gamma = 0$ alınırsa o zaman bu teorem ile [20, Teorem 4] çakışır.

Sonuç 3.7. [34] (X, d) bir tam kompleks değerli metrik uzay olsun. $\alpha + \beta + \gamma < 1$ olacak şekildeki α, β, γ negatif olmayan reel sayıları için aşağıdaki şartı sağlayan bir $T : X \rightarrow X$ dönüşümü alınsın: Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \lesssim \alpha d(x, y) + \beta \frac{d(x, Tx)d(y, Ty)}{1 + d(x, y)} + \gamma \frac{d(x, Tx)d(y, Ty)}{1 + d(x, y) + d(x, Ty) + d(y, Tx)}$$

Bu takdirde, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 3.5 de $T = S$ alınırsa ispat açıktır. □

Sonuç 3.8. [34] (X, d) bir tam kompleks değerli metrik uzay olsun. $\alpha + \beta + \gamma < 1$ olacak şekildeki α, β, γ negatif olmayan reel sayıları için aşağıdaki şartı sağlayan bir $T : X \rightarrow X$ dönüşümü alınsın: Her $x, y \in X$ için,

$$d(T^n x, T^n y) \lesssim \alpha d(x, y) + \beta \frac{d(x, T^n x)d(y, T^n y)}{1 + d(x, y)} + \gamma \frac{d(x, T^n x)d(y, T^n y)}{1 + d(x, y) + d(x, T^n y) + d(y, T^n x)}$$

Bu takdirde, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Sonuç 3.6 gereğince $T^n p = p$ olacak şekilde bir $p \in X$ vardır. $Tp \neq p$ olduğu kabul edilsin. Buradan,

$$\begin{aligned} d(Tp, p) &= d(TT^n p, T^n p) = (T^n Tp, T^n p) \\ &\lesssim \alpha d(Tp, p) + \beta \frac{d(Tp, T^n Tp)d(p, T^n p)}{1 + d(Tp, p)} + \gamma \frac{d(Tp, T^n Tp)d(p, T^n p)}{1 + d(Tp, p) + d(Tp, T^n p) + d(p, T^n Tp)} \\ &= \alpha d(Tp, p) + \beta \frac{d(Tp, T^n Tp)d(p, p)}{1 + d(Tp, p)} + \gamma \frac{d(Tp, T^n Tp)d(p, p)}{1 + d(Tp, p) + d(Tp, T^n p) + d(p, T^n Tp)} \\ &= \alpha d(Tp, p) \end{aligned}$$

elde edilir.

$0 < \alpha < 1$ olduğundan $|d(Tp, p)| \leq \alpha |d(Tp, p)| < |d(Tp, p)|$ ve bu da bir çelişkidir.

Böylece $Tp = p$ dir. Dolayısıyla,

$$Tp = T^n p = p$$

bulunur. O halde T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. □

Teorem 3.9. [35] (X, d) bir tam kompleks değerli metrik uzay olsun. $S, T : X \rightarrow X$ dönüşümleri, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere, $x \neq y$, $d(x, Sx) + d(x, y) + d(x, Ty) \neq 0$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$d(Sx, Ty) \lesssim \alpha \left[\frac{d(x, Sx)d(x, Ty) + [d(x, y)]^2 + d(x, Sx)d(x, y)}{d(x, Sx) + d(x, y) + d(x, Ty)} \right]$$

şartını veya $d(x, Sx) + d(x, y) + d(x, Ty) = 0$ ise $d(Sx, Ty) = 0$ şartını sağlasın. Bu takdirde, S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \in X$ olsun. (X, d) uzayında, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere, $x_{2n+1} = Sx_{2n}$ ve $x_{2n+2} = Tx_{2n+1}$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Şimdi, $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
& d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \\
&= d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) \\
&\lesssim \alpha \left[\frac{d(x_{2n}, Sx_{2n})d(x_{2n}, Tx_{2n+1}) + [d(x_{2n}, x_{2n+1})]^2 + d(x_{2n}, Sx_{2n})d(x_{2n}, x_{2n+1})}{d(x_{2n}, Sx_{2n}) + d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n}, Tx_{2n+1})} \right] \\
&= \alpha \left[\frac{d(x_{2n}, x_{2n+1})d(x_{2n}, x_{2n+2}) + [d(x_{2n}, x_{2n+1})]^2 + d(x_{2n}, x_{2n+1})d(x_{2n}, x_{2n+1})}{d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n}, x_{2n+2})} \right] \\
&= \alpha d(x_{2n}, x_{2n+1}) \left[\frac{d(x_{2n}, x_{2n+2}) + 2d(x_{2n}, x_{2n+1})}{d(x_{2n}, x_{2n+2}) + 2d(x_{2n}, x_{2n+1})} \right] \\
&= \alpha d(x_{2n}, x_{2n+1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
& d(x_{2n}, x_{2n+1}) \\
&= d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}) \\
&\lesssim \alpha \left[\frac{d(x_{2n-1}, Sx_{2n-1})d(x_{2n-1}, Tx_{2n}) + [d(x_{2n-1}, x_{2n})]^2 + d(x_{2n-1}, Sx_{2n-1})d(x_{2n-1}, x_{2n})}{d(x_{2n-1}, Sx_{2n-1}) + d(x_{2n-1}, x_{2n}) + d(x_{2n-1}, Tx_{2n})} \right] \\
&= \alpha \left[\frac{d(x_{2n-1}, x_{2n})d(x_{2n-1}, x_{2n+1}) + [d(x_{2n-1}, x_{2n})]^2 + d(x_{2n-1}, x_{2n})d(x_{2n-1}, x_{2n})}{d(x_{2n-1}, x_{2n}) + d(x_{2n-1}, x_{2n}) + d(x_{2n-1}, x_{2n+1})} \right] \\
&= \alpha d(x_{2n-1}, x_{2n}) \left[\frac{d(x_{2n-1}, x_{2n+1}) + 2d(x_{2n-1}, x_{2n})}{d(x_{2n-1}, x_{2n+1}) + 2d(x_{2n-1}, x_{2n})} \right] \\
&= \alpha d(x_{2n-1}, x_{2n})
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$d(x_{n+1}, x_n) \lesssim \alpha d(x_n, x_{n-1}) \lesssim \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \lesssim \dots \lesssim \alpha^n d(x_1, x_0)$$

olur. Böylece, $m > n$ olacak şekilde her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\lesssim d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&\lesssim [\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \dots + \alpha^{m-1}]d(x_1, x_0) \\
&\lesssim \left[\frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \right] d(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda,

$$|d(x_n, x_m)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} |d(x_0, x_1)|$$

eşitsizliği sağlanır. O halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$ olduğundan, Lemma 3.4 gereğince, $\{x_n\}$ dizisi (X, d) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, d) uzayı tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ olacak şekilde bir $p \in X$ noktası vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} d(p, Sp) &= z \lesssim d(p, x_{2n+2}) + d(x_{2n+2}, Sp) \\ &= d(p, x_{2n+2}) + d(Sp, Tx_{2n+1}) \\ &\lesssim d(p, x_{2n+2}) \\ &\quad + \alpha \left[\frac{d(p, Sp)d(p, Tx_{2n+1}) + [d(p, x_{2n+1})]^2 + d(p, Sp)d(p, x_{2n+1})}{d(p, Sp) + d(p, x_{2n+1}) + d(p, Tx_{2n+1})} \right] \\ &= d(p, x_{2n+2}) \\ &\quad + \alpha \left[\frac{d(p, Sp)d(p, x_{2n+2}) + [d(p, x_{2n+1})]^2 + d(p, Sp)d(p, x_{2n+1})}{d(p, Sp) + d(p, x_{2n+1}) + d(p, x_{2n+2})} \right] \end{aligned}$$

olduğu için,

$$|z| \leq |d(p, x_{2n+2})| + \alpha \left[\frac{|z||d(p, x_{2n+2})| + |d(p, x_{2n+1})|^2 + |z||d(p, x_{2n+1})|}{|z + d(p, x_{2n+1}) + d(p, x_{2n+2})|} \right]$$

elde edilir. Böylece, $n \rightarrow \infty$ iken $|d(p, Sp)| = 0$ olur ve (CM2) gereğince $Sp = p$ elde edilir. Benzer şekilde $Tp = p$ bulunur. O halde, p noktası S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

S ve T dönüşümlerinin sabit noktasının tek olduğunu göstermek için $p \neq p^*$ olacak şekilde bir $p^* \in X$ sabit noktası alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d(p, p^*) &= d(Sp, Tp^*) \\ &\lesssim \alpha \left[\frac{d(p, Sp)d(p, Tp^*) + [d(p, p^*)]^2 + d(p, Sp)d(p, p^*)}{d(p, Sp) + d(p, p^*) + d(p, Tp^*)} \right] \\ &= \alpha \left[\frac{d(p, p)d(p, p^*) + [d(p, p^*)]^2 + d(p, p)d(p, p^*)}{d(p, p) + d(p, p^*) + d(p, p^*)} \right] \end{aligned}$$

olduğundan $|d(p, p^*)| \leq \frac{\alpha}{2} |d(p, p^*)| \leq \alpha |d(p, p^*)| < |d(p, p^*)|$ elde edilir ve bu ise bir çelişkisine neden olur. Sonuç olarak, p noktası S ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktasıdır.

İkinci olarak, herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_{2n}, Sx_{2n}) + d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n}, Tx_{2n+1}) = 0$ olduğunda $d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) = 0$ elde edilir. Buradan, $x_{2n} = Sx_{2n} = x_{2n+1} = Tx_{2n+1} = x_{2n+2}$ olduğundan $x_{2n+1} = Sx_{2n} = x_{2n}$ dir. Yani $k_1 = Sl_1 = l_1$ olacak şekilde k_1 ve l_1 noktaları vardır. Benzer düşünceyle $k_2 = Tl_2 = l_2$ olacak şekilde k_2 ve l_2 noktaları vardır. $d(l_1, Sl_1) + d(l_1, l_2) + d(l_1, Tl_2) = 0$ olduğundan $d(Sl_1, Tl_2) = 0$ olur. Buradan, $k_1 = Sl_1 = Tl_2 = k_2$ ve $k_1 = Sl_1 = Sk_1$ elde edilir. Benzer şekilde $k_2 = Tk_2$ dir. $k_1 = k_2$ alındığında $Sk_1 = Tk_1 = k_1$ olduğu görülür. O halde $k_1 = k_2$ noktası S ve T dönüşümlerinin bir ortak sabit noktasıdır.

S ve T dönüşümlerinin sabit noktasının tek olduğunu göstermek için $k_1 \neq k_1^*$ olacak şekilde bir $k_1^* \in X$ sabit noktası alınsın. $d(k_1, Sk_1) + d(k_1, k_1^*) + d(k_1, Tk_1^*) = 0$ olduğunda $d(k_1, k_1^*) = d(Sk_1, Tk_1^*) = 0$ dir. Bu ise $k_1^* = k_1$ çelişmesine neden olur. O halde S ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır. \square

Sonuç 3.10. [35] (X, d) bir tam kompleks değerli metrik uzay olsun. $T : X \rightarrow X$ dönüşümü, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere, $x \neq y$, $d(x, Tx) + d(x, y) + d(x, Ty) \neq 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \lesssim \alpha \left[\frac{d(x, Tx)d(x, Ty) + [d(x, y)]^2 + d(x, Tx)d(x, y)}{d(x, Tx) + d(x, y) + d(x, Ty)} \right]$$

şartını veya $d(x, Tx) + d(x, y) + d(x, Ty) = 0$ ise $d(Tx, Ty) = 0$ şartını sağlasın. Bu takdirde, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 3.9 de $T = S$ alınırsa ispat açıktır. \square

Sonuç 3.11. [35] (X, d) bir tam kompleks değerli metrik uzay olsun. $T : X \rightarrow X$ dönüşümü, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere, $x \neq y$, $d(x, T^n x) + d(x, y) + d(x, T^n y) \neq 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$d(T^n x, T^n y) \lesssim \alpha \left[\frac{d(x, T^n x)d(x, T^n y) + [d(x, y)]^2 + d(x, T^n x)d(x, y)}{d(x, T^n x) + d(x, y) + d(x, T^n y)} \right]$$

şartını veya $d(x, T^n x) + d(x, y) + d(x, T^n y) = 0$ ise $d(T^n x, T^n y) = 0$ şartını sağlasın. Bu takdirde, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Sonuç 3.10 gereğince $T^n p = p$ olacak şekilde bir $p \in X$ vardır. $Tp \neq p$ olduğu kabul edilsin. Buradan,

$$\begin{aligned} d(Tp, p) &= d(TT^n p, T^n p) = d(T^n Tp, T^n p) \\ &\lesssim \alpha \left[\frac{d(Tp, T^n Tp)d(Tp, T^n p) + [d(Tp, p)]^2 + d(Tp, T^n Tp)d(Tp, p)}{d(Tp, T^n Tp) + d(Tp, p) + d(Tp, T^n p)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left[\frac{d(Tp, TT^n p)d(Tp, T^n p) + [d(Tp, p)]^2 + d(Tp, TT^n p)d(Tp, p)}{d(Tp, TT^n p) + d(Tp, p) + d(Tp, T^n p)} \right] \\
&= \alpha \left[\frac{d(Tp, Tp)d(Tp, p) + [d(Tp, p)]^2 + d(Tp, Tp)d(Tp, p)}{d(Tp, Tp) + d(Tp, p) + d(Tp, p)} \right] \\
&= \frac{\alpha}{2}d(Tp, p) \\
&\prec \alpha d(Tp, p).
\end{aligned}$$

$0 < \alpha < 1$ olduğundan $|d(Tp, p)| < \alpha |d(Tp, p)| < |d(Tp, p)|$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $Tp = p$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$Tp = T^n p = p$$

dir. O halde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. □

Örnek 3.12. [35] $X = \{0, \frac{1}{2}, 2\}$ kümesi verilsin ve aşağıdaki şekilde tanımlanan bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü olsun.

$$\forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = |x - y|\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = |x - y|(1 + i).$$

(X, d) nin bir tam kompleks değerli metrik uzay olduğu kolayca görülür. $S, T : X \rightarrow X$ dönüşümü

$$S(0) = 0, S(\frac{1}{2}) = 0, S(2) = \frac{1}{2}$$

$$T(0) = 0, T(\frac{1}{2}) = 2, T(2) = 0$$

şeklinde tanımlasın.

İlk olarak, Teorem 3.9 da $x = \frac{1}{2}$ ve $y = 0$ alınsın. $T(0) = 0$ ve $S(\frac{1}{2}) = 0$ dir.

$$d(Sx, Ty) = 0 \preceq \alpha \left(\frac{1+i}{2}\right)$$

olduğundan $\alpha \geq 0$ olur. Eğer $0 < \alpha < 1$ alınırsa Teorem 3.9 un tüm şartları sağlanmış olur.

İkinci olarak, Teorem 3.9 da $x = 2$ ve $y = \frac{1}{2}$ alınsın. $S(2) = \frac{1}{2}$ ve $T(\frac{1}{2}) = 2$ dir.

$$d(Sx, Ty) = \frac{1+i}{2} \preceq \alpha \frac{3(1+i)}{2}$$

olduğundan $\alpha \geq \frac{1}{3}$ olur. Eğer $0 < \alpha < 1$ alınırsa Teorem 3.9 un tüm şartları sağlanmış olur.

Son olarak, Teorem 3.9 da $x = 2$ ve $y = 0$ alınsın. $S(2) = \frac{1}{2}$ ve $T(0) = 0$ dir.

$$d(Sx, Ty) = \frac{1+i}{2} \lesssim \alpha 2(1+i)$$

olduğundan $\alpha \geq \frac{1}{4}$ olur. Eğer $0 < \alpha < 1$ alınırsa Teorem 3.9 un tüm şartları sağlanmış olur. Bu durumda 0 noktası S ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktasıdır.

Örnek 3.13. [35] Örnek 3.12 de tanımlanan (X, d) tam kompleks değerli metrik uzayı alınsın. $T : X \rightarrow X$ dönüşümü

$$T(0) = 0, \quad T\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad T(2) = \frac{1}{2}$$

şeklinde tanımlasın. İlk olarak, Sonuç 3.10 da $x = \frac{1}{2}$ ve $y = 0$ alınsın. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = 0 \lesssim \alpha \left(\frac{1+i}{2}\right)$$

olduğundan $\alpha \geq 0$ olur. Eğer $0 < \alpha < 1$ alınırsa Sonuç 3.10 nun tüm şartları sağlanmış olur.

İkinci olarak Sonuç 3.10 da $x = 2$ ve $y = \frac{1}{2}$ alınsın. Buradan,

$$d(Tx, Ty) = \frac{1+i}{2} \lesssim \alpha \frac{3(1+i)}{2}$$

olduğundan $\alpha \geq \frac{1}{3}$ olur. Eğer $0 < \alpha < 1$ alınırsa Sonuç 3.10 nun tüm şartları sağlanmış olur.

Son olarak, Sonuç 3.10 da $x = 2$ ve $y = 0$ alınsın. Dolayısıyla

$$d(Tx, Ty) = \frac{1+i}{2} \lesssim \alpha \frac{20(1+i)}{11}$$

olduğundan $\alpha \geq \frac{11}{40}$ olur. Benzer şekilde, $0 < \alpha < 1$ alınırsa Sonuç 3.10 nun tüm şartları sağlanır. O halde 0 noktası T dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır.

4. KOMPLEKS DEĞERLİ b -METRİK UZAYLARDA ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ

İlk olarak, kompleks değerli b -metrik uzaylara ilişkin temel kavramlar verilecektir.

Tanım 4.1. [23] X boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $d_b : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümüne X üzerinde bir kompleks değerli b -metrik denir.

(CbM1) Her $x, y \in X$ için $0 \lesssim d_b(x, y)$,

(CbM2) Her $x, y \in X$ için $d_b(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(CbM3) Her $x, y \in X$ için $d_b(x, y) = d_b(y, x)$,

(CbM4) Her $x, y \in X$ için $d_b(x, y) \lesssim s[d_b(x, z) + d_b(z, y)]$ olacak şekilde bir $s \geq 1$ reel sayısı vardır.

O halde (X, d_b) ikilisine bir kompleks değerli b -metrik uzay denir.

Uyarı 4.2. [23] Yukarıdaki tanımda $s = 1$ alınırsa o zaman bu tanım ile Tanım 3.1 çakışır.

Tanım 4.3. [23] (X, d_b) bir kompleks değerli b -metrik uzay ve $\{x_n\}$ X üzerinde bir dizi olsun. $0 \prec c$ olmak üzere her $c \in \mathbb{C}$ sayısına karşılık her $n > n_0$ için $d_b(x_n, x) \prec c$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir ve bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ile gösterilir. $0 \prec c$ olmak üzere her $c \in \mathbb{C}$ sayısına karşılık her $m, n > n_0$ için $d_b(x_n, x_m) \prec c$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 4.4. [23] Bir (X, d_b) kompleks değerli b -metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya bir tam kompleks değerli b -metrik uzay denir.

Aşağıdaki iki lemmanın ispatı sırasıyla Lemma 3.3 ve Lemma 3.4 ün ispatlarına benzer şekilde elde edilir.

Lemma 4.5. [23] (X, d_b) bir kompleks değerli b -metrik uzay ve $\{x_n\}$ X üzerinde bir dizi olsun. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisinin bir $x \in X$ noktasına yakınsaması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} |d_b(x_n, x)| = 0$ olmasıdır.

Lemma 4.6. [23] (X, d_b) bir kompleks değerli b -metrik uzay ve $\{x_n\}$ X üzerinde bir dizi olsun. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} |d_b(x_n, x_{n+m})| = 0$ olmasıdır.

4.1. Sabit Nokta Teoremleri

Aşağıdaki teorem, [20, Teorem 4] ün kompleks değerli b -metrik uzaylara bir genellemesidir.

Teorem 4.7. [25] (X, d_b) bir tam kompleks değerli b -metrik uzay olsun. $s\lambda + \mu < 1$ olacak şekildeki λ, μ negatif olmayan reel sayıları için aşağıdaki şartı sağlayan $S, T : X \rightarrow X$ dönüşümleri alınsın: Her $x, y \in X$ için,

$$d_b(Sx, Ty) \lesssim \lambda d_b(x, y) + \frac{\mu d_b(x, Sx) d_b(y, Ty)}{1 + d_b(x, y)}$$

Bu takdirde, S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. (X, d_b) uzayında x_0 keyfi noktası alınsın. $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere, $x_{2n+1} = Sx_{2n}$ ve $x_{2n+2} = Tx_{2n+1}$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d_b(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) \\ &\lesssim \lambda d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) + \frac{\mu d_b(x_{2n}, Sx_{2n}) d_b(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1})} \\ &= \lambda d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) + \frac{\mu d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1})} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$|d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})| \leq \lambda |d_b(x_{2n}, x_{2n+1})| + \frac{\mu |d_b(x_{2n}, x_{2n+1})| |d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})|}{|1 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1})|}$$

dir. $|1 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1})| > |d_b(x_{2n}, x_{2n+1})|$ olduğu için,

$$|d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})| \leq \lambda |d_b(x_{2n}, x_{2n+1})| + \mu |d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})|$$

elde edilir. Böylece

$$|d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})| \leq \frac{\lambda}{1 - \mu} |d_b(x_{2n}, x_{2n+1})|$$

olur. Benzer şekilde,

$$|d_b(x_{2n+2}, x_{2n+3})| \leq \frac{\lambda}{1 - \mu} |d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})|$$

sağlanır. $s\lambda + \mu < 1$ ve $s \geq 1$ olduğundan $\lambda + \mu < 1$ olur. Bu ise $\delta = \frac{\lambda}{1-\mu} < 1$ olmak üzere

$$|d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})| \leq \delta |d_b(x_{2n}, x_{2n+1})| \leq \delta^2 |d_b(x_{2n-1}, x_{2n})| \leq \dots \leq \delta^{2n+1} |d_b(x_0, x_1)|$$

eşitsizliğini verir. Buradan, her $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için,

$$\begin{aligned} & |d_b(x_n, x_m)| \\ & \leq s |d_b(x_n, x_{n+1})| + s |d_b(x_{n+1}, x_m)| \\ & \leq s |d_b(x_n, x_{n+1})| + s^2 |d_b(x_{n+1}, x_{n+2})| + s^2 |d_b(x_{n+2}, x_m)| \\ & \leq s |d_b(x_n, x_{n+1})| + s^2 |d_b(x_{n+1}, x_{n+2})| + s^3 |d_b(x_{n+2}, x_{n+3})| + s^3 |d_b(x_{n+3}, x_m)| \\ & \leq s |d_b(x_n, x_{n+1})| + s^2 |d_b(x_{n+1}, x_{n+2})| + s^3 |d_b(x_{n+2}, x_{n+3})| \\ & \quad + \dots + s^{m-n-2} |d_b(x_{m-3}, x_{m-2})| + s^{m-n-1} |d_b(x_{m-2}, x_{m-1})| + s^{m-n-1} |d_b(x_{m-1}, x_m)| \\ & \leq s |d_b(x_n, x_{n+1})| + s^2 |d_b(x_{n+1}, x_{n+2})| + s^3 |d_b(x_{n+2}, x_{n+3})| \\ & \quad + \dots + s^{m-n-2} |d_b(x_{m-3}, x_{m-2})| + s^{m-n-1} |d_b(x_{m-2}, x_{m-1})| + s^{m-n} |d_b(x_{m-1}, x_m)| \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} & |d_b(x_n, x_m)| \\ & \leq s \delta^n |d_b(x_0, x_1)| + s^2 \delta^{n+1} |d_b(x_0, x_1)| \\ & \quad + \dots + s^{m-n-2} \delta^{m-3} |d_b(x_0, x_1)| + s^{m-n-1} \delta^{m-2} |d_b(x_0, x_1)| + s^{m-n} \delta^{m-1} |d_b(x_0, x_1)| \\ & \leq s^n \delta^n |d_b(x_0, x_1)| + s^{n+1} \delta^{n+1} |d_b(x_0, x_1)| \\ & \quad + \dots + s^{m-3} \delta^{m-3} |d_b(x_0, x_1)| + s^{m-2} \delta^{m-2} |d_b(x_0, x_1)| + s^{m-1} \delta^{m-1} |d_b(x_0, x_1)| \\ & = s^n \delta^n |d_b(x_0, x_1)| [1 + s\delta + (s\delta)^2 + \dots + (s\delta)^{m-n-1}] \\ & \leq \frac{(s\delta)^n}{1 - s\delta} |d_b(x_0, x_1)| \end{aligned}$$

bulunur ki $s\delta < 1$ olması sebebiyle $n \rightarrow \infty$ için $|d_b(x_n, x_m)| \rightarrow 0$ olur. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, d_b) uzayı tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$ olacak şekilde bir $u \in X$ vardır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
d_b(u, Su) &= z \lesssim sd_b(u, x_{2n+2}) + sd_b(x_{2n+2}, Su) \\
&= sd_b(u, x_{2n+2}) + sd_b(Tx_{2n+1}, Su) \\
&\lesssim sd_b(u, x_{2n+2}) + s\lambda d_b(u, x_{2n+1}) + \frac{s\mu d_b(u, Su)d_b(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d_b(u, x_{2n+1})} \\
&= sd_b(u, x_{2n+2}) + s\lambda d_b(u, x_{2n+1}) + \frac{s\mu d_b(u, Su)d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d_b(u, x_{2n+1})}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri bulunur. Böylece, $n \rightarrow \infty$ için $|d_b(u, Su)| = 0$ ve $Su = u$ elde edilir. Benzer şekilde $Tu = u$ dur. Bu takdirde, u noktası S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır. S ve T dönüşümlerinin sabit noktasının tek olduğunu göstermek için $u \neq u^*$ olacak şekilde bir $u^* \in X$ sabit noktası alınsın. O halde,

$$\begin{aligned}
d_b(u, u^*) &= d_b(Su, Tu^*) \\
&\lesssim \lambda d_b(u, u^*) + \frac{\mu d_b(u, Su)d_b(u^*, Tu^*)}{1 + d_b(u, u^*)} \\
&< d_b(u, u^*)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $|d_b(u, u^*)| < |d_b(u, u^*)|$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak, u noktası S ve T dönüşümlerinin bir tek sabit noktasıdır. \square

Sonuç 4.8. [25] (X, d_b) bir tam kompleks değerli b -metrik uzay olsun. $s\lambda + \mu < 1$ olacak şekildeki λ, μ negatif olmayan reel sayıları için aşağıdaki şartı sağlayan bir $T : X \rightarrow X$ dönüşümü alınsın: Her $x, y \in X$ için,

$$d_b(Tx, Ty) \lesssim \lambda d_b(x, y) + \frac{\mu d_b(x, Tx)d_b(y, Ty)}{1 + d_b(x, y)}$$

Bu takdirde, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 4.7 de $S = T$ alınırsa ispat açıktır. \square

Sonuç 4.9. [25] (X, d_b) bir tam kompleks değerli b -metrik uzay olsun. $s\lambda + \mu < 1$ olacak şekildeki λ, μ negatif olmayan reel sayıları için aşağıdaki şartı sağlayan bir $T : X \rightarrow X$ dönüşümü alınsın: Her $x, y \in X$ için,

$$d_b(T^n x, T^n y) \lesssim \lambda d_b(x, y) + \frac{\mu d_b(x, T^n x)d_b(y, T^n y)}{1 + d_b(x, y)}$$

Bu takdirde, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Sonuç 4.8 den $T^n u = u$ olacak şekilde bir $u \in X$ vardır. $Tu \neq u$ olduğu kabul edilsin. Böylece,

$$\begin{aligned}
d_b(Tu, u) &= d_b(TT^n u, T^n u) = d_b(T^n Tu, T^n u) \\
&\preceq \lambda d_b(Tu, u) + \frac{\mu d_b(Tu, T^n Tu) d_b(u, T^n u)}{1 + d_b(Tu, u)} \\
&\preceq \lambda d_b(Tu, u) + \frac{\mu d_b(Tu, T^n Tu) d_b(u, u)}{1 + d_b(Tu, u)} \\
&= \lambda d_b(Tu, u).
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $|d_b(Tu, u)| \leq \lambda |d_b(Tu, u)| < |d_b(Tu, u)|$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda $Tu = u$ olur, yani T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. \square

Örnek 4.10. [25] $X = \mathbb{C}$ verilsin. $z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ olmak üzere $d_b : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü

$$d_b(z_1, z_2) = |x_1 - x_2|^2 + i|y_1 - y_2|^2$$

şeklinde tanımlansın. (X, d_b) uzayının bir tam kompleks değerli b -metrik uzay olduğunu göstermek için (CbM4) şartının sağlandığını göstermek yeterlidir. $z_1, z_2, z_3 \in X$ verilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
d_b(z_1, z_2) &= |x_1 - x_2|^2 + i|y_1 - y_2|^2 \\
&= |x_1 - x_3 + x_3 - x_2|^2 + i|y_1 - y_3 + y_3 - y_2|^2 \\
&\preceq |x_1 - x_3|^2 + |x_3 - x_2|^2 + 2|x_1 - x_3||x_3 - x_2| \\
&\quad + i[|y_1 - y_3|^2 + |y_3 - y_2|^2 + 2|y_1 - y_3||y_3 - y_2|] \\
&\preceq |x_1 - x_3|^2 + |x_3 - x_2|^2 + |x_1 - x_3|^2 + |x_3 - x_2|^2 \\
&\quad + i[|y_1 - y_3|^2 + |y_3 - y_2|^2 + |y_1 - y_3|^2 + |y_3 - y_2|^2] \\
&= 2[|x_1 - x_3|^2 + |x_3 - x_2|^2 + i|y_1 - y_3|^2 + i|y_3 - y_2|^2] \\
&= 2[d_b(z_1, z_3) + d_b(z_3, z_2)].
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $s = 2$ dir.

Şimdi, $z = x + iy$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanan bir $T : X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin.

$$T(z) = T(x + iy) = \begin{cases} 0, & x, y \in \mathbb{Q}, \\ 2, & x \in \mathbb{Q}^c, y \in \mathbb{Q}, \\ 2i, & x \in \mathbb{Q}^c, y \in \mathbb{Q}^c, \\ 2 + 2i, & x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

$x = \frac{1}{\pi}$ ve $y = 0$ alınsın. $\lambda \in [0, 1)$ olduğundan

$$\begin{aligned} d_b(Tx, Ty) &= d_b\left(T\frac{1}{\pi}, T0\right) \\ &= d_b(2, 0) = 4 \\ &> \lambda \frac{1}{\pi^2} = \lambda d_b\left(\frac{1}{\pi}, 0\right) + \frac{\mu d_b\left(\frac{1}{\pi}, T\frac{1}{\pi}\right) d_b(0, T0)}{1 + d_b\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)} \end{aligned}$$

bulunur. Fakat $n > 1$ için $T^n z = 0$ olduğu dikkate alınır, $2\lambda + \mu < 1$ olacak şekildeki tüm $\lambda, \mu \geq 0$ reel sayıları ve her $x, y \in X$ için

$$d_b(T^n x, T^n y) = 0 \lesssim \lambda d_b(x, y) + \frac{\mu d_b(x, T^n x) d_b(y, T^n y)}{1 + d_b(x, y)}$$

elde edilir. Bu durumda Sonuç 4.9 daki tüm şartlar sağlanmış olur. Böylece 0 noktası T dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır.

Teorem 4.11. [26] (X, d_b) bir tam kompleks değerli b -metrik uzay olsun. $s\lambda + s\mu < 1$ olacak şekildeki λ, μ negatif olmayan reel sayıları için aşağıdaki şartı sağlayan bir $T : X \rightarrow X$ dönüşümü alınsın: Her $x, y \in X$ için,

$$d_b(Tx, Ty) \lesssim \frac{\lambda d_b^2(x, y)}{1 + d_b(x, y)} + \mu d_b(y, Ty)$$

Bu durumda, T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. (X, d_b) uzayında x_0 keyfi noktası alınsın. $x_{2n+1} = Tx_{2n}$ olacak şekilde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned} d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d_b(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}) \\ &\lesssim \frac{\lambda d_b^2(x_{2n}, x_{2n+1})}{1 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1})} + \mu d_b(x_{2n+1}, Tx_{2n+1}) \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda d_b^2(x_{2n}, x_{2n+1})}{1 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1})} + \mu d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})$$

olur. Buradan,

$$|d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})| \leq \frac{\lambda |d_b(x_{2n}, x_{2n+1})| |d_b(x_{2n}, x_{2n+1})|}{|1 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1})|} + \mu |d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})|$$

elde edilir. $|1 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1})| > |d_b(x_{2n}, x_{2n+1})|$ olduğundan,

$$|d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})| \leq \lambda |d_b(x_{2n}, x_{2n+1})| + \mu |d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})|$$

bulunur. Böylece,

$$|d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})| \leq \frac{\lambda}{1 - \mu} |d_b(x_{2n}, x_{2n+1})|$$

olur. Benzer şekilde,

$$|d_b(x_{2n+2}, x_{2n+3})| \leq \frac{\lambda}{1 - \mu} |d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})|$$

elde edilir. $s\lambda + s\mu < 1$ ve $s \geq 1$ olduğundan $\lambda + \mu < 1$ olur. Bu ise $\delta = \frac{\lambda}{1 - \mu} < 1$ olmak üzere,

$$|d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})| \leq \delta |d_b(x_{2n}, x_{2n+1})| \leq \delta^2 |d_b(x_{2n-1}, x_{2n})| + \dots + \delta^{n+1} |d_b(x_0, x_1)|$$

olur. $m > n$ olmak üzere her $m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} & |d_b(x_n, x_m)| \\ & \leq s |d_b(x_n, x_{n+1})| + s |d_b(x_{n+1}, x_m)| \\ & \leq s |d_b(x_n, x_{n+1})| + s^2 |d_b(x_{n+1}, x_{n+2})| + s^2 |d_b(x_{n+2}, x_m)| \\ & \leq s |d_b(x_n, x_{n+1})| + s^2 |d_b(x_{n+1}, x_{n+2})| + s^3 |d_b(x_{n+2}, x_{n+3})| + s^3 |d_b(x_{n+3}, x_m)| \\ & \leq s |d_b(x_n, x_{n+1})| + s^2 |d_b(x_{n+1}, x_{n+2})| + s^3 |d_b(x_{n+2}, x_{n+3})| \\ & \quad + \dots + s^{m-n-2} |d_b(x_{m-3}, x_{m-2})| + s^{m-n-1} |d_b(x_{m-2}, x_{m-1})| + s^{m-n-1} |d_b(x_{m-1}, x_m)| \\ & \leq s |d_b(x_n, x_{n+1})| + s^2 |d_b(x_{n+1}, x_{n+2})| + s^3 |d_b(x_{n+2}, x_{n+3})| \\ & \quad + \dots + s^{m-n-2} |d_b(x_{m-3}, x_{m-2})| + s^{m-n-1} |d_b(x_{m-2}, x_{m-1})| + s^{m-n} |d_b(x_{m-1}, x_m)| \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
& |d_b(x_n, x_m)| \\
& \leq s\delta^n |d_b(x_0, x_1)| + s^2\delta^{n+1} |d_b(x_0, x_1)| \\
& \quad + \dots + s^{m-n-2}\delta^{m-3} |d_b(x_0, x_1)| + s^{m-n-1}\delta^{m-2} |d_b(x_0, x_1)| + s^{m-n}\delta^{m-1} |d_b(x_0, x_1)| \\
& \leq s^n\delta^n |d_b(x_0, x_1)| + s^{n+1}\delta^{n+1} |d_b(x_0, x_1)| \\
& \quad + \dots + s^{m-3}\delta^{m-3} |d_b(x_0, x_1)| + s^{m-2}\delta^{m-2} |d_b(x_0, x_1)| + s^{m-1}\delta^{m-1} |d_b(x_0, x_1)| \\
& = s^n\delta^n |d_b(x_0, x_1)| [1 + s\delta + (s\delta)^2 + \dots + (s\delta)^{m-n-1}] \\
& \leq \frac{(s\delta)^n}{1 - s\delta} |d_b(x_0, x_1)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $n \rightarrow \infty$ için, $s\delta < 1$ olduğundan, $|d_b(x_n, x_m)| \rightarrow 0$ olur. Yani $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. (X, d_b) uzayı tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$ olacak şekilde bir $u \in X$ vardır. Şimdi $|d_b(u, Tu)| = |z| > 0$ olacak şekilde bir $z \in X$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
z = d_b(u, Tu) & \lesssim sd_b(u, x_{2n+2}) + sd_b(x_{2n+2}, Tu) \\
& = sd_b(u, x_{2n+2}) + sd_b(Tx_{2n+1}, Tu) \\
& \lesssim sd_b(u, x_{2n+2}) + \frac{s\lambda d_b^2(x_{2n+1}, u)}{1 + d_b(x_{2n+1}, u)} + s\mu d_b(u, Tu)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece

$$|z| = |d_b(u, Tu)| \leq s|d_b(u, x_{2n+2})| + \frac{s\lambda |d_b^2(x_{2n+1}, u)|}{|1 + d_b(x_{2n+1}, u)|} + s\mu |d_b(u, Tu)|$$

olur. $n \rightarrow \infty$ olduğunda $|z| = |d_b(u, Tu)| \leq s\mu |d_b(u, Tu)| < |d_b(u, Tu)|$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $|z| = 0$ olduğundan $Tu = u$ olur. Son olarak T dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğu gösterilsin. u^* T 'nin başka bir sabit noktası kabul edilsin. Bu durumda

$$d_b(u, u^*) = d_b(Tu, Tu^*) \lesssim \frac{\lambda d_b^2(u, u^*)}{1 + d_b(u, u^*)} + \mu d_b(u^*, Tu^*)$$

olur. Buradan,

$$|d_b(u, u^*)| \lesssim \frac{\lambda |d_b(u, u^*)| |d_b(u, u^*)|}{|1 + d_b(u, u^*)|} + \mu |d_b(u^*, Tu^*)|$$

elde edilir.

$$|1 + d_b(u, u^*)| > |d_b(u, u^*)|$$

olduğu için

$$|d_b(u, u^*)| < \lambda |d_b(u, u^*)| + \mu |d_b(u^*, u^*)| = \lambda |d_b(u, u^*)|$$

sonucuna ulaşılır. Bu da bir çelişkidir. Yani u noktası T dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır. \square

Sonuç 4.12. [26] (X, d_b) bir tam kompleks değerli b -metrik uzay olsun. $s\lambda + s\mu < 1$ olacak şekildeki λ, μ negatif olmayan reel sayıları için aşağıdaki şartı sağlayan bir $T : X \rightarrow X$ dönüşümü alınsın: Her $x, y \in X$ için,

$$d_b(T^n x, T^n y) \lesssim \frac{\lambda d_b^2(x, y)}{1 + d_b(x, y)} + \mu d_b(y, T^n y)$$

Bu durumda, T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 4.11 den $T^n u = u$ olacak biçimde bir $u \in X$ vardır. $Tu \neq u$ olduğu kabul edilsin. Buradan,

$$\begin{aligned} d_b(Tu, u) &= d_b(TT^n u, T^n u) = d_b(T^n Tu, T^n u) \\ &\lesssim \frac{\lambda d_b^2(Tu, u)}{1 + d_b(Tu, u)} + \mu d_b(u, T^n u) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$|d_b(Tu, u)| \leq \frac{\lambda |d_b^2(Tu, u)|}{|1 + d_b(Tu, u)|} + \mu |d_b(u, u)|$$

bulunur.

$$|1 + d_b(Tu, u)| > |d_b(Tu, u)|$$

olduğundan

$$|d_b(Tu, u)| < \lambda |d_b(Tu, u)|$$

sonucuna ulaşılır ki bu bir çelişkidir. O halde $Tu = u$ olur, yani T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. \square

5. KOMPLEKS DEĞERLİ b -METRİK UZAYLARDA BAZI YENİ SABİT NOKTA SONUÇLARI

Bu bölümde, daha önce verilen bazı sabit nokta teoremleri genelleştirilerek yeni sabit nokta teoremleri elde edilecektir.

İlk olarak, aşağıdaki teoremde gösterildiği gibi, Teorem 3.5 in kompleks değerli b -metrik uzaylara bir genellemesi yapılacaktır.

Teorem 5.1. (X, d_b) bir tam kompleks değerli b -metrik uzay olsun. $s\alpha + \beta + \gamma < 1$ olacak şekildeki α, β, γ negatif olmayan reel sayıları için aşağıdaki şartları sağlayan $S, T : X \rightarrow X$ dönüşümleri alınsın: Her $x, y \in X$ için,

$$d_b(Sx, Ty) \lesssim \alpha d_b(x, y) + \beta \frac{d_b(x, Sx) d_b(y, Ty)}{1 + d_b(x, y)} + \gamma \frac{d_b(x, Sx) d_b(y, Ty)}{1 + d_b(x, y) + d_b(x, Ty) + d_b(y, Sx)}$$

Bu takdirde, S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \in X$ olsun. $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ için $x_{2n+1} = Sx_{2n}$ ve $x_{2n+2} = Tx_{2n+1}$ olacak şekilde X deki elemanlardan oluşan bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Şimdi, $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned} d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d_b(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) \\ &\lesssim \alpha d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) + \beta \frac{d_b(x_{2n}, Sx_{2n}) d_b(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1})} \\ &\quad + \gamma \frac{d_b(x_{2n}, Sx_{2n}) d_b(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) + d_b(x_{2n}, Tx_{2n+1}) + d_b(x_{2n+1}, Sx_{2n})} \\ &\lesssim \alpha d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) + \beta \frac{d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1})} \\ &\quad + \gamma \frac{d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) + d_b(x_{2n}, x_{2n+2}) + d_b(x_{2n+1}, x_{2n+1})} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) \lesssim 1 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) \lesssim 1 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) + d_b(x_{2n}, x_{2n+2})$$

eşitsizliklerinden,

$$d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \lesssim \frac{\alpha}{1 - \beta - \gamma} d_b(x_{2n}, x_{2n+1}).$$

olur. Benzer işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
d_b(x_{2n+2}, x_{2n+3}) &= d_b(x_{2n+3}, x_{2n+2}) = d_b(Sx_{2n+2}, Tx_{2n+1}) \\
&\lesssim \alpha d_b(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + \beta \frac{d_b(x_{2n+2}, Sx_{2n+2}) d_b(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d_b(x_{2n+2}, x_{2n+1})} \\
&\quad + \gamma \frac{d_b(x_{2n+2}, Sx_{2n+2}) d_b(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d_b(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + d_b(x_{2n+2}, Tx_{2n+1}) + d_b(x_{2n+1}, Sx_{2n+2})} \\
&\lesssim \alpha d_b(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + \beta \frac{d_b(x_{2n+2}, x_{2n+3}) d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d_b(x_{2n+2}, x_{2n+1})} \\
&\quad + \gamma \frac{d_b(x_{2n+2}, x_{2n+3}) d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d_b(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + d_b(x_{2n+2}, x_{2n+2}) + d_b(x_{2n+1}, x_{2n+3})}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$d_b(x_{2n+2}, x_{2n+1}) \lesssim 1 + d_b(x_{2n+2}, x_{2n+1}) \lesssim 1 + d_b(x_{2n+2}, x_{2n+1}) + d_b(x_{2n+1}, x_{2n+3})$$

olduğundan

$$d_b(x_{2n+2}, x_{2n+3}) \lesssim \frac{\alpha}{1 - \beta - \gamma} d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})$$

dir. Dolayısıyla, $h = \frac{\alpha}{1 - \beta - \gamma}$ olmak üzere,

$$d_b(x_{n+1}, x_{n+2}) \lesssim h d_b(x_n, x_{n+1}) \lesssim \dots \lesssim h^{n+1} d_b(x_0, x_1)$$

sağlanır. Buradan, $m > n$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
d_b(x_n, x_m) &\lesssim s d_b(x_n, x_{n+1}) + s d_b(x_{n+1}, x_m) \\
&\lesssim s d_b(x_n, x_{n+1}) + s^2 d_b(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^2 d_b(x_{n+2}, x_m) \\
&\lesssim s d_b(x_n, x_{n+1}) + s^2 d_b(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d_b(x_{n+2}, x_{n+3}) + s^3 d_b(x_{n+3}, x_m) \\
&\lesssim s d_b(x_n, x_{n+1}) + s^2 d_b(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d_b(x_{n+2}, x_{n+3}) \\
&\quad + \dots + s^{m-n-1} d_b(x_{m-2}, x_{m-1}) + s^{m-n} d_b(x_{m-1}, x_m)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
d_b(x_n, x_m) &\lesssim s h^n d_b(x_0, x_1) + s^2 h^{n+1} d_b(x_0, x_1) + s^3 h^{n+2} d_b(x_0, x_1) \\
&\quad + \dots + s^{m-n-1} h^{m-2} d_b(x_0, x_1) + s^{m-n} h^{m-1} d_b(x_0, x_1) \\
&\lesssim s^n h^n d_b(x_0, x_1) + s^{n+1} h^{n+1} d_b(x_0, x_1) + s^{n+2} h^{n+2} d_b(x_0, x_1) \\
&\quad + \dots + s^{m-2} h^{m-2} d_b(x_0, x_1) + s^{m-1} h^{m-1} d_b(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (sh)^n d_b(x_0, x_1) [1 + sh + (sh)^2 + \dots + (sh)^{m-n-1}] \\
&\lesssim \frac{(sh)^n}{1-sh} d_b(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda,

$$|d_b(x_n, x_m)| \leq \frac{(sh)^n}{1-sh} |d_b(x_0, x_1)|$$

eşitsizliği sağlanır. O halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} (sh)^n = 0$ sebebiyle, Lemma 3.4 den, $\{x_n\}$ dizisi (X, d_b) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, d_b) uzayı tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$ olacak şekilde bir $u \in X$ noktası vardır. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
d_b(u, Su) &= z \lesssim s d_b(u, x_{2n+2}) + s d_b(x_{2n+2}, Su) \\
&= s d_b(u, x_{2n+2}) + s d_b(Tx_{2n+1}, Su) \\
&\lesssim s d_b(u, x_{2n+2}) + s \alpha d_b(x_{2n+1}, u) + s \beta \frac{d_b(u, Su) d_b(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d_b(x_{2n+1}, u)} \\
&\quad + s \gamma \frac{d_b(u, Su) d_b(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{1 + d_b(x_{2n+1}, u) + d_b(x_{2n+1}, Su) + d_b(u, Tx_{2n+1})} \\
&\lesssim s d_b(u, x_{2n+2}) + s \alpha d_b(x_{2n+1}, u) + s \beta \frac{z d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d_b(x_{2n+1}, u)} \\
&\quad + s \gamma \frac{z d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{1 + d_b(x_{2n+1}, u) + d_b(x_{2n+1}, Su) + d_b(u, x_{2n+2})}
\end{aligned}$$

olduğu gerçeğinden aşağıdaki durum bulunur:

$$\begin{aligned}
|d_b(u, Su)| &\leq s |d_b(u, x_{2n+2})| + s \alpha |d_b(x_{2n+1}, u)| + s \beta \frac{|z| |d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})|}{|1 + d_b(x_{2n+1}, u)|} \\
&\quad + s \gamma \frac{|z| |d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})|}{|1 + d_b(x_{2n+1}, u) + d_b(x_{2n+1}, Su) + d_b(u, x_{2n+2})|}
\end{aligned}$$

Böylece, $n \rightarrow \infty$ iken $|d_b(u, Su)| = 0$ olur ve $(CbM2)$ den $Su = u$ elde edilir. Benzer şekilde $Tu = u$ bulunur. O halde, u noktası S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

Şimdi, S ve T dönüşümlerinin sabit noktasının tek olduğu gösterilsin. Bunun için $u \neq u^*$ olacak şekilde bir $u^* \in X$ sabit noktası alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
&d_b(u, u^*) \\
&= d_b(Su, Tu^*) \\
&\lesssim \alpha d_b(u, u^*) + \beta \frac{d_b(u, Su) d_b(u^*, Tu^*)}{1 + d_b(u, u^*)} + \gamma \frac{d_b(u, Su) d_b(u^*, Tu^*)}{1 + d_b(u, u^*) + d_b(u, Tu^*) + d_b(u^*, Su)}
\end{aligned}$$

$$= \alpha d_b(u, u^*)$$

gereğince $(1 - \alpha)|d_b(u, u^*)| \leq 0$ ve buradan $d_b(u, u^*) = 0$ dır. Bu ise $u = u^*$ çelişkesine neden olur. Sonuç olarak, u noktası S ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktasıdır. \square

Sonuç 5.2. (X, d_b) bir tam kompleks değerli b -metrik uzay olsun. $s\alpha + \beta + \gamma < 1$ olacak şekildeki α, β, γ negatif olmayan reel sayıları için aşağıdaki şartı sağlayan $T : X \rightarrow X$ dönüşümü alınsın: Her $x, y \in X$ için,

$$d_b(Tx, Ty) \lesssim \alpha d_b(x, y) + \beta \frac{d_b(x, Tx) d_b(y, Ty)}{1 + d_b(x, y)} + \gamma \frac{d_b(x, Tx) d_b(y, Ty)}{1 + d_b(x, y) + d_b(x, Ty) + d_b(y, Tx)}$$

Bu takdirde, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 5.1 de $T = S$ alınırsa kolaylıkla elde edilir. \square

Sonuç 5.3. (X, d_b) bir tam kompleks değerli b -metrik uzay olsun. $s\alpha + \beta + \gamma < 1$ olacak şekildeki α, β, γ negatif olmayan reel sayıları için aşağıdaki şartı sağlayan bir $T : X \rightarrow X$ dönüşümü alınsın: Her $x, y \in X$ için,

$$d_b(T^n x, T^n y) \lesssim \alpha d_b(x, y) + \beta \frac{d_b(x, T^n x) d_b(y, T^n y)}{1 + d_b(x, y)} + \gamma \frac{d_b(x, T^n x) d_b(y, T^n y)}{1 + d_b(x, y) + d_b(x, T^n y) + d_b(y, T^n x)}$$

Bu takdirde, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Sonuç 5.2 den $T^n p = p$ olacak şekilde bir $p \in X$ vardır. $Tp \neq p$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} d_b(Tp, p) &= d_b(TT^n p, T^n p) = (T^n Tp, T^n p) \\ &\lesssim \alpha d_b(Tp, p) + \beta \frac{d_b(Tp, T^n Tp) d_b(p, T^n p)}{1 + d_b(Tp, p)} + \gamma \frac{d_b(Tp, T^n Tp) d_b(p, T^n p)}{1 + d_b(Tp, p) + d_b(Tp, T^n p) + d_b(p, T^n Tp)} \\ &= \alpha d_b(Tp, p) + \beta \frac{d_b(Tp, T^n Tp) d_b(p, p)}{1 + d_b(Tp, p)} + \gamma \frac{d_b(Tp, T^n Tp) d_b(p, p)}{1 + d_b(Tp, p) + d_b(Tp, T^n p) + d_b(p, T^n Tp)} \\ &= \alpha d_b(Tp, p) \end{aligned}$$

olur. $0 < \alpha < 1$ gereğince $|d_b(Tp, p)| \leq \alpha |d_b(Tp, p)| < |d_b(Tp, p)|$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tp = p$ dir. Böylece,

$$Tp = T^n p = p$$

elde edilir. Buradan T dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğu anlaşılır. \square

Aşağıdaki teorem, kompleks değerli b -metrik uzaylara Teorem 3.9 un bir genellemesidir.

Teorem 5.4. (X, d_b) bir tam kompleks değerli b -metrik uzay olsun. $S, T : X \rightarrow X$ dönüşümleri, $0 \leq \alpha < \frac{1}{s}$ olmak üzere, $x \neq y$, $d_b(x, Sx) + d_b(x, y) + d_b(x, Ty) \neq 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$d_b(Sx, Ty) \lesssim \alpha \left[\frac{d_b(x, Sx)d_b(x, Ty) + [d_b(x, y)]^2 + d_b(x, Sx)d_b(x, y)}{d_b(x, Sx) + d_b(x, y) + d_b(x, Ty)} \right]$$

şartını veya $d_b(x, Sx) + d_b(x, y) + d_b(x, Ty) = 0$ ise $d_b(Sx, Ty) = 0$ şartını sağlasın. Bu takdirde, S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \in X$ olsun. (X, d_b) uzayında, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere, $x_{2n+1} = Sx_{2n}$ ve $x_{2n+2} = Tx_{2n+1}$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Şimdi, $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned} & d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \\ &= d_b(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) \\ &\lesssim \alpha \left[\frac{d_b(x_{2n}, Sx_{2n})d_b(x_{2n}, Tx_{2n+1}) + [d_b(x_{2n}, x_{2n+1})]^2 + d_b(x_{2n}, Sx_{2n})d_b(x_{2n}, x_{2n+1})}{d_b(x_{2n}, Sx_{2n}) + d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) + d_b(x_{2n}, Tx_{2n+1})} \right] \\ &= \alpha \left[\frac{d_b(x_{2n}, x_{2n+1})d_b(x_{2n}, x_{2n+2}) + [d_b(x_{2n}, x_{2n+1})]^2 + d_b(x_{2n}, x_{2n+1})d_b(x_{2n}, x_{2n+1})}{d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) + d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) + d_b(x_{2n}, x_{2n+2})} \right] \\ &= \alpha d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) \left[\frac{d_b(x_{2n}, x_{2n+2}) + 2d_b(x_{2n}, x_{2n+1})}{d_b(x_{2n}, x_{2n+2}) + 2d_b(x_{2n}, x_{2n+1})} \right] \\ &= \alpha d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) \end{aligned}$$

olur. Benzer işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} & d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) \\ &= d_b(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}) \\ &\lesssim \alpha \left[\frac{d_b(x_{2n-1}, Sx_{2n-1})d_b(x_{2n-1}, Tx_{2n}) + [d_b(x_{2n-1}, x_{2n})]^2 + d_b(x_{2n-1}, Sx_{2n-1})d_b(x_{2n-1}, x_{2n})}{d_b(x_{2n-1}, Sx_{2n-1}) + d_b(x_{2n-1}, x_{2n}) + d_b(x_{2n-1}, Tx_{2n})} \right] \\ &= \alpha \left[\frac{d_b(x_{2n-1}, x_{2n})d_b(x_{2n-1}, x_{2n+1}) + [d_b(x_{2n-1}, x_{2n})]^2 + d_b(x_{2n-1}, x_{2n})d_b(x_{2n-1}, x_{2n})}{d_b(x_{2n-1}, x_{2n}) + d_b(x_{2n-1}, x_{2n}) + d_b(x_{2n-1}, x_{2n+1})} \right] \\ &= \alpha d_b(x_{2n-1}, x_{2n}) \left[\frac{d_b(x_{2n-1}, x_{2n+1}) + 2d_b(x_{2n-1}, x_{2n})}{d_b(x_{2n-1}, x_{2n+1}) + 2d_b(x_{2n-1}, x_{2n})} \right] \\ &= \alpha d_b(x_{2n-1}, x_{2n}) \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$d_b(x_{n+1}, x_n) \lesssim \alpha d_b(x_n, x_{n-1}) \lesssim \alpha^2 d_b(x_{n-1}, x_{n-2}) \lesssim \dots \lesssim \alpha^n d_b(x_1, x_0)$$

elde edilir.

Böylece, $m > n$ olacak şekilde her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d_b(x_n, x_m) &\lesssim s[d_b(x_n, x_{n+1}) + d_b(x_{n+1}, x_m)] \\ &\lesssim s d_b(x_n, x_{n+1}) + s^2 d_b(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^2 d_b(x_{n+2}, x_{n+3}) \\ &\quad + \dots + s^{m-n-1} d_b(x_{m-2}, x_{m-1}) + s^{m-n-1} d_b(x_{m-1}, x_m) \\ &\lesssim s d_b(x_n, x_{n+1}) + s^2 d_b(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^2 d_b(x_{n+2}, x_{n+3}) \\ &\quad + \dots + s^{m-n-1} d_b(x_{m-2}, x_{m-1}) + s^{m-n} d_b(x_{m-1}, x_m) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d_b(x_n, x_m) &\lesssim s \alpha^n d_b(x_0, x_1) + s^2 \alpha^{n+1} d_b(x_0, x_1) + \dots + s^{m-n} \alpha^{m-1} d_b(x_0, x_1) \\ &\lesssim s^n \alpha^n d_b(x_0, x_1) + s^{n+1} \alpha^{n+1} d_b(x_0, x_1) + \dots + s^{m-1} \alpha^{m-1} d_b(x_0, x_1) \\ &= (s \alpha)^n d_b(x_0, x_1) [1 + s \alpha + (s \alpha)^2 + (s \alpha)^3 + \dots + (s \alpha)^{m-n-1}] \\ &\lesssim \frac{(s \alpha)^n}{1 - s \alpha} d_b(x_0, x_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde,

$$|d_b(x_n, x_m)| \leq \frac{(s \alpha)^n}{1 - s \alpha} |d_b(x_0, x_1)|$$

eşitsizliği sağlanır. O halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} (s \alpha)^n = 0$ gereğince, Lemma 3.4 den, $\{x_n\}$ dizisi (X, d_b) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, d_b) uzayı tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ olacak şekilde bir $p \in X$ noktası vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} d_b(p, Sp) &= z \lesssim s[d_b(p, x_{2n+2}) + d_b(x_{2n+2}, Sp)] \\ &= s[d_b(p, x_{2n+2}) + d_b(Sp, Tx_{2n+1})] \\ &\lesssim s d_b(p, x_{2n+2}) \\ &\quad + s \alpha \left[\frac{d_b(p, Sp) d_b(p, Tx_{2n+1}) + [d_b(p, x_{2n+1})]^2 + d_b(p, Sp) d_b(p, x_{2n+1})}{d_b(p, Sp) + d_b(p, x_{2n+1}) + d_b(p, Tx_{2n+1})} \right] \\ &= s d_b(p, x_{2n+2}) \\ &\quad + s \alpha \left[\frac{d_b(p, Sp) d_b(p, x_{2n+2}) + [d_b(p, x_{2n+1})]^2 + d_b(p, Sp) d_b(p, x_{2n+1})}{d_b(p, Sp) + d_b(p, x_{2n+1}) + d_b(p, x_{2n+2})} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$|z| \leq s|d_b(p, x_{2n+2})| + s\alpha \left[\frac{|z||d_b(p, x_{2n+2})| + |d_b(p, x_{2n+1})|^2 + |z||d_b(p, x_{2n+1})|}{|z + d_b(p, x_{2n+1}) + d_b(p, x_{2n+2})|} \right]$$

olduğu gerçeğinden, $n \rightarrow \infty$ iken $|d_b(p, Sp)| = 0$ dir ve böylece (CbM2) den $Sp = p$ elde edilir. Benzer şekilde $Tp = p$ olur. O halde, p noktası S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

S ve T dönüşümlerinin sabit noktasının tek olduğunu göstermek için $p \neq p^*$ olacak şekilde bir $p^* \in X$ sabit noktası alınsın. Buradan,

$$\begin{aligned} d_b(p, p^*) &= d_b(Sp, Tp^*) \\ &\lesssim \alpha \left[\frac{d_b(p, Sp)d_b(p, Tp^*) + [d_b(p, p^*)]^2 + d_b(p, Sp)d_b(p, p^*)}{d_b(p, Sp) + d_b(p, p^*) + d_b(p, Tp^*)} \right] \\ &= \alpha \left[\frac{d_b(p, p)d_b(p, p^*) + [d_b(p, p^*)]^2 + d_b(p, p)d_b(p, p^*)}{d_b(p, p) + d_b(p, p^*) + d_b(p, p^*)} \right] \end{aligned}$$

gereğince $|d_b(p, p^*)| \leq \frac{\alpha}{2}|d_b(p, p^*)| \leq \alpha|d_b(p, p^*)| < |d_b(p, p^*)|$ bulunur. Bu da bir çelişkidir. Sonuç olarak, p noktası S ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktasıdır.

İkinci olarak, herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $d_b(x_{2n}, Sx_{2n}) + d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) + d_b(x_{2n}, Tx_{2n+1}) = 0$ iken $d_b(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) = 0$ bulunur. Dolayısıyla, $x_{2n} = Sx_{2n} = x_{2n+1} = Tx_{2n+1} = x_{2n+2}$ olduğundan $x_{2n+1} = Sx_{2n} = x_{2n}$ elde edilir. Yani $k_1 = Sl_1 = l_1$ olacak şekilde k_1 ve l_1 noktaları vardır. Aynı düşünceyle $k_2 = Tl_2 = l_2$ olacak şekilde k_2 ve l_2 noktaları bulunur. $d_b(l_1, Sl_1) + d_b(l_1, l_2) + d_b(l_1, Tl_2) = 0$ gerçeğinden $d_b(Sl_1, Tl_2) = 0$ elde edilir. Buradan, $k_1 = Sl_1 = Tl_2 = k_2$ ve $k_1 = Sl_1 = Sk_1$ dir. Benzer şekilde $k_2 = Tk_2$ olur. $k_1 = k_2$ alındığında $Sk_1 = Tk_1 = k_1$ sonucuna ulaşılır. Böylece $k_1 = k_2$ noktası S ve T dönüşümlerinin bir ortak sabit noktasıdır.

S ve T dönüşümlerinin sabit noktasının tek olduğunu göstermek için $k_1 \neq k_1^*$ olacak şekilde bir $k_1^* \in X$ sabit noktası alınsın. $d_b(k_1, Sk_1) + d_b(k_1, k_1^*) + d_b(k_1, Tk_1^*) = 0$ olduğunda $d_b(k_1, k_1^*) = d_b(Sk_1, Tk_1^*) = 0$ dir. Bu ise $k_1^* = k_1$ çelişkesine neden olur. O halde S ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır. \square

Aşağıdaki iki sonucun ispatı sırasıyla Sonuç 3.10 ve Sonuç 3.11 deki ispatlara benzer şekilde yapılır.

Sonuç 5.5. (X, d_b) bir tam kompleks değerli b -metrik uzay olsun. $T : X \rightarrow X$ dönüşümü, $0 \leq \alpha < \frac{1}{s}$ olmak üzere, $x \neq y$, $d_b(x, Tx) + d_b(x, y) + d_b(x, Ty) \neq 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$d_b(Tx, Ty) \lesssim \alpha \left[\frac{d_b(x, Tx)d_b(x, Ty) + [d_b(x, y)]^2 + d_b(x, Tx)d_b(x, y)}{d_b(x, Tx) + d_b(x, y) + d_b(x, Ty)} \right]$$

şartını veya $d_b(x, Tx) + d_b(x, y) + d_b(x, Ty) = 0$ ise $d_b(Tx, Ty) = 0$ şartını sağlasın. Bu takdirde, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 5.6. (X, d_b) bir tam kompleks değerli b -metrik uzay olsun. $T : X \rightarrow X$ dönüşümü, $0 \leq \alpha < \frac{1}{s}$ olmak üzere, $x \neq y$, $d_b(x, T^n x) + d_b(x, y) + d_b(x, T^n y) \neq 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$d_b(T^n x, T^n y) \lesssim \alpha \left[\frac{d_b(x, T^n x)d_b(x, T^n y) + [d_b(x, y)]^2 + d_b(x, T^n x)d_b(x, y)}{d_b(x, T^n x) + d_b(x, y) + d_b(x, T^n y)} \right]$$

şartını veya $d_b(x, T^n x) + d_b(x, y) + d_b(x, T^n y) = 0$ ise $d_b(T^n x, T^n y) = 0$ şartını sağlasın. Bu takdirde, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk olarak metrik uzaylardaki sabit nokta teorisine ilişkin temel tanım ve teoremler verilmiştir. Daha sonra Azam ve diğ. [20] tarafından literatüre kazandırılan kompleks değerli metrik uzaylar tanımlanmış ve bu uzaylar üzerinde bazı sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca bu teoremler örnekler ile desteklenmiştir. Bunun yanı sıra kompleks değerli metrik uzayların genelleştirilmiş bir versiyonu olan kompleks değerli b -metrik uzaylar üzerinde çalışılmış ve literatürde var olan çeşitli teoremler araştırılmıştır. Daha sonra ise kompleks değerli metrik uzaylardaki bazı teoremler b -metrik anlamda çalışılarak yeni sabit nokta sonuçları elde edilmiştir.

Benzer şekilde, kompleks değerli metrik uzaylardaki sabit nokta teoremleri b -metrik anlamda genelleştirilerek özgün çalışmalar yapılabilir.

7. KAYNAKLAR

- [1] M. M. Fréchet, “Sur quelques points du calcul fonctionnel,” *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, vol. 22, no. 1, pp. 1–72, 1906.
- [2] F. Hausdorff, “Grundzuge der mengenlehre, reprint of the 1914 berlin edition,” *New York: Chelsea*, 1965.
- [3] P. Alexandroff, “Zur begründung dern-dimensionalen mengentheoretischen topologie,” *Mathematische Annalen*, vol. 94, no. 1, pp. 296–308, 1925.
- [4] A. Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*. Paris, 1938.
- [5] S. Banach, “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales,” *Fund. math*, vol. 3, no. 1, pp. 133–181, 1922.
- [6] L. B. Ćirić and B. Fisher, *Fixed Point Theory: contraction mapping principle*. Faculty of Mechanical Engineering, 2003.
- [7] B. K. Dass and S. Gupta, “An extension of banach contraction principle through rational expression,” *Indian J. pure appl. Math*, vol. 6, no. 12, pp. 1455–1458, 1975.
- [8] D. O’Regan, *Existence theory for nonlinear ordinary differential equations*. Springer Science & Business Media, 1997, vol. 398.
- [9] R. P. Agarwal, D. O’Regan, and M. Sambandham, “Random and deterministic fixed point theory for generalized contractive maps,” *Applicable Analysis*, vol. 83, no. 7, pp. 711–725, 2004.
- [10] V. Berinde, *Iterative approximation of fixed points*. Springer, 2007, vol. 1912.
- [11] ———, “Coupled fixed point theorems for ϕ -contractive mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces,” *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 75, no. 6, pp. 3218–3228, 2012.
- [12] M. Grabiec, “Fixed points in fuzzy metric spaces,” *Fuzzy sets and systems*, vol. 27, no. 3, pp. 385–389, 1988.
- [13] S. G. Matthews, “The topology of partial metric spaces,” 1992.
- [14] S. Czerwik, “Contraction mappings in b -metric spaces,” *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, vol. 1, no. 1, pp. 5–11, 1993.
- [15] Z. Mustafa and B. Sims, “A new approach to generalized metric spaces,” *Journal of Nonlinear and convex Analysis*, vol. 7, no. 2, pp. 289–297, 2006.

- [16] L.-G. Huang and X. Zhang, "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings," *Journal of mathematical Analysis and Applications*, vol. 332, no. 2, pp. 1468–1476, 2007.
- [17] S. Shukla, "Partial b-metric spaces and fixed point theorems," *Mediterranean Journal of Mathematics*, vol. 11, no. 2, pp. 703–711, 2014.
- [18] B. C. Dhage, "Generalised metric space and mappings with fixed point," 1992.
- [19] T. Kamran, M. Samreen, and Q. UL Ain, "A generalization of b-metric space and some fixed point theorems," *Mathematics*, vol. 5, no. 2, p. 19, 2017.
- [20] A. Azam, B. Fisher, and M. Khan, "Common fixed point theorems in complex valued metric spaces," *Numerical Functional Analysis and Optimization*, vol. 32, no. 3, pp. 243–253, 2011.
- [21] F. Rouzkard and M. Imdad, "Some common fixed point theorems on complex valued metric spaces," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 64, no. 6, pp. 1866–1874, 2012.
- [22] J. Ahmad, A. Azam, and S. Saejung, "Common fixed point results for contractive mappings in complex valued metric spaces," *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2014, no. 1, p. 67, 2014.
- [23] K. Rao, P. R. Swamy, and J. R. Prasad, "A common fixed point theorem in complex valued b-metric spaces," *Bulletin of Mathematics and Statistics research*, vol. 1, no. 1, 2013.
- [24] S. M. Aghayan, A. Zireh, and A. Ebadian, "Common best proximity points in complex valued b-metric spaces," *Cogent Mathematics*, vol. 4, no. 1, p. 1329887, 2017.
- [25] A. A. Mukheimer, "Some common fixed point theorems in complex valued-metric spaces," *The Scientific World Journal*, vol. 2014, 2014.
- [26] A. Dubey, R. Shukla, and R. Dubey, "Some fixed point theorems in complex valued b-metric spaces," *Journal of Complex Systems*, vol. 2015, 2015.
- [27] P. P. Murthy, B. Fisher, and R. Kewat, "Periodic points of rational inequality in a complex valued metric space," *Filomat*, vol. 31, no. 7, pp. 2143–2150, 2017.
- [28] H. Nashine, M. Imdad, and M. Hasan, "Common fixed point theorems under rational contractions in complex valued metric spaces," *J. Nonlinear Sci. Appl*, vol. 7, pp. 42–50, 2014.
- [29] W. Sintunavarat, Y. J. Cho, and P. Kumam, "Urysohn integral equations approach by common fixed points in complex-valued metric spaces," *Advances in Difference Equations*, vol. 2013, no. 1, p. 49, 2013.
- [30] R. K. Verma, "Fixed point theorems using (clcs) property in complex valued b-metric spaces," *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, pp. 269–292, 2017.

- [31] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*. Wiley New York, 1978, vol. 1.
- [32] Y. Soykan, *Metrik uzaylar ve topolojisi*. Nobel Akademik Yayıncılık, 2012.
- [33] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed point theory*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [34] D. Kumar and A. Chacko, "Some results on common fixed points for rational type contraction mappings in complex valued metric spaces," *International Journal of Maps in Mathematics-IJMM*, vol. 1, no. 1, pp. 1–14, 2018.
- [35] G. Saluja, "Some common fixed point theorems using rational contraction in complex valued metric spaces," *Palestine Journal of Mathematics*, vol. 7, no. 1, 2018.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Murat SALDAMLI
Doğum Tarihi ve Yeri : Sivas 1985
Yabancı Dili : İngilizce
Eposta : muratsaldamli@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2019
Lisans	Matematik Bölümü	Uludağ Üniversitesi	2011
Lise	Sayısal	Sivas Selçuk Anadolu Lisesi	2003

A. Uluslararası Sempozyum :

- A1. M. Saldamlı and İ. Demir, “Common Fixed Point Results in Complex Valued b-Metric Spaces,” *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2019)*, 10-13 March 2019, Istanbul-Turkey.
- A2. İ. Demir and M. Saldamlı, “Common Fixed Soft Element Results in Soft A-Metric Spaces,” *International Conference on Mathematics and Related Sciences (ICMRS 2018)*, 30th April to 4th May 2018, Antalya-Turkey.