



**T.C.  
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÜSTEL FONKSİYONLARI KORUYAN BERNSTEİN-STANCU  
OPERATÖTLERİ İÇİN BİR ÇALIŞMA**

**İBRAHİM ÇAKIR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN  
DOÇ. DR. FUAT USTA**

**DÜZCE, 2022**

**T.C.**  
**DÜZCE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÜSTEL FONKSİYONLARI KORUYAN BERNSTEİN-STANCU**  
**OPERATÖTLERİ İÇİN BİR ÇALIŞMA**

İbrahim ÇAKIR tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Doç. Dr. Fuat USTA  
Düzce Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Doç. Dr. Fuat USTA  
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Merve İLKHAN KARA  
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU  
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 14/01/2022

## BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

14/01/2022

İbrahim ÇAKIR

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Fuat Usta'ya ve "Düzce Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü" hocalarına ve maddi manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme en içten dileklerle teşekkür ederim.

14/01/2022

İbrahim ÇAKIR

# İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ .....	vi
KISALTMALAR .....	vii
ÖZET .....	viii
ABSTRACT .....	ix
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	4
2.1. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIĞI: .....	5
2.2. TEOREM (WEİSRTRASS 1885).....	6
2.3. TEOREM (BERNSTEİN 1912) .....	6
2.4. TEOREM (KOROVKİN 1953) .....	7
3. POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER .....	8
3.1. BERNSTEİN OPERATÖRÜ .....	8
3.2. KANTOROVİCH OPERATÖRÜ .....	9
3.3. BERNSTEİN-CHLODOVSKY OPERATÖRÜ .....	10
3.4. FAVARD-SZASZ-MİRAKJAN OPERATÖRÜ .....	11
3.5. BASKAKOV OPERATÖRÜ.....	12
3.6. DURRMEYER OPERATÖRÜ.....	12
3.7. BLEİMANN-BUTZER-HAHN OPERATÖRÜ .....	13
3.8. KİNG OPERATÖRÜ .....	14
4. $e^{-2x}$ , İ KORUYAN BERNSTEİN-STANCU OPERATÖLERİ .....	15
5. $(B_n^{\alpha,\beta})_{n \geq 1}$ DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ .....	23
6. $(B_n^{\alpha,\beta})_{n \geq 1}$ 'NİN NOKTASAL YAKINSAKLIĞI .....	28
6.1. SONUÇ .....	31
7. SAYISAL ÖRNEKLER .....	32
7.1. ÖRNEK 1: .....	32
7.2. ÖRNEK 2: .....	33
8. SONUÇ .....	34
9. KAYNAKLAR .....	35
ÖZGEÇMİŞ.....	37

## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 7.1. $\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f,x)$ yaklaşım operatörümüzü $f(x) = -\sin(10x)e^{-3x} + 0.3$ fonksiyonu üzerinden $\alpha = 1, \beta = 2$ ve $n = 1000$ için. ....	32
Şekil 7.2. $\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f,x)$ yaklaşım operatörümüzü $f(x) = \frac{x^{10}}{3} + \frac{x^2}{2} - 3xe^{-x}$ fonksiyonu üzerinden $\alpha = 1, \beta = 2$ ve $n = 1000$ için. ....	33



## KISALTMALAR

BBH	Bleimann-Butzer-Hahn Operatörü
$\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}$	Modifiye edilmiş Bernstein-Stancu operatörü
$B_n(f;x)$	Bernstein operatörü
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_n(f;x)$	Bernstein-Chlodovsky operatörü
$C_b(I_n)$	$C(I_n)$ üzerindeki tüm sınırlı fonksiyonlardan oluşan uzay
$C(I_n)$	$I_n$ üzerindeki tüm sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı
$C_2^*[0,\infty)$	$[0,\infty)$ üzerindeki tüm sürekli reel değerli fonksiyonların ağırlıklı uzayı
$D_n(f;x)$	Durrmeyer operatörü
$F_n(f;x)$	Favard-Szász-Mirakjan operatörü
$K_n(f;x)$	Kantorovich operatörü
$L(f;x)$	$L$ operatörünün $f$ fonksiyonuna uygulanması
$L_n(f;x)$	Baskakov operatörü
$V_n(f;x)$	King operatörü
$W^*(f;\delta)$	$f$ fonksiyonunun süreklilik modülü
$\ \cdot\ _\infty$	Banach normlu uzayı

## ÖZET

### ÜSTEL FONKSİYONLARI KORUYAN BERNSTEİN-STANCU OPERATÖTLERİ İÇİN BİR ÇALIŞMA

İbrahim ÇAKIR

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Fuat USTA

Mart 2022, 36 sayfa

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu kısımda tezde ele alınan konu ve bu konuyla ilgili olan literatürdeki diğer çalışmalara kısaca değinilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılacak bazı tanım ve teoremlere temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde genel bir literatür taraması lineer pozitif operatörler ve özelliklerine kronolojik bir sıra halinde yer verilmiştir. Dördüncü bölümde üstel fonksiyonları koruyan Bernstein-Stancu operatörünün modifiye edilmiş yeni versiyonunu tanıtmaya ayrılmıştır. Beşinci bölümde modifiye edilmiş Bernstein-Stancu operatörünün yaklaşım özelliklerine yer verilmiştir. Altıncı bölümde modifiye edilmiş Bernstein-Stancu operatörünün noktasal yakınsaklığına ve yakınsamayı gösterebilmek için Vronskaya tipi teoremi, hem hedeflenen yakınsama derecesini hem de yaklaşım hatası için üst sınıra izin verecek nicel ortalamada sunuyoruz. Yedinci bölümde modifiye edilmiş operatörün sayısal örneklerine yer verilmiştir. Sekizinci bölümde ise sonuç ve öneriler kısmına ayrılmıştır.

**Anahtar sözcükler:** Bernstein operatörü, Bernstein-Stancu operatörü, Pozitif lineer operatör, Üstel fonksiyonları koruyan Bernstein-Stancu operatörü, Vronskaya tipi teoremler.

## ABSTRACT

### A STUDY FOR BERNSTEIN-STANCU OPERATORS KEEPING EXPONENTIAL FUNCTIONS

İbrahim ÇAKIR

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fuat USTA

March 2022, 36 pages

This thesis consists of eight chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second part, some definitions and theorems that will be used in the thesis, basic concepts are given. In the third part, a general literature review is given to linear positive operators and their properties in chronological order. Approximation properties of the modified Bernstein-Stancu operator are given. In the sixth section, we present the point convergence of the modified Bernstein-Stancu operator and the Vronoskaya type theorem in quantitative mean that will allow both the targeted degree of convergence and the upper bound for the approximation error. Numerical examples are given. The eighth chapter is reserved for conclusions and suggestions.

**Keywords:** Bernstein operator, Bernstein-Stancu operator, Positive linear operator, Bernstein-Stancu operator conserving exponential functions, Vronoskaya type theorems.

# 1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi, ortaya çıkıp yaygınlaşması 19. yüzyıla dayanan ve bu yüzyıldan günümüze kadar dünyadaki birçok matematikçi tarafından çalışılan matematiksel analizin önemli araştırma konularından biridir. Sadece matematikte değil temel bilimler ve mühendislik bilimleri başta olmak üzere diğer alanlardaki birçok bilimsel probleme ışık tutması, yaklaşım teorisinin günden güne öneminin artmasına neden olmuştur. Özellikle bu alanda yapılan bilimsel çalışmaların çağımıza yön veren bilgisayar hesaplamaları ile zenginleştirilmesi bu alanın günümüzde de hala eski etkinliğini sürdürmesini sağlamıştır. Bu yüzden yaklaşım teorisi, matematikte analizin, harmonik analiz, fonksiyonel analiz, nümerik analizi, fourier analizi gibi birçok dalıyla ilişkili olmasının yanı sıra; operatör teorisi, olasılık teorisi, sayılar teorisi, istatistik teorisi gibi diğer bilim dallarıyla iç içedir. Buna ek olarak yaklaşım teorisi fizikte ve mühendislikte veri gösterimi, sinyal işleme, termografik görüntüleme, dalgacık nalizi gibi birçok konuda kullanılmaktadır.

Yaklaşım teorisinin temel amacı; ele alınan bir fonksiyonun daha basit ve daha çok elementer özelliğe sahip diğer fonksiyonlar yardımıyla bir gösterimini elde etmektir. Örneğin bir fonksiyon kuvvet serisine açılırken onun kuvvet serisi işlem yapmak yerine kuvvet serisinin kısmi toplamıyla işlem yapmak bizim için daha kullanışlı olacaktır. Bu şekilde gösterimler fonksiyon hakkında birçok bilgiye daha kolay ulaşmamızı sağlar. Aksi durumda o fonksiyon hakkında bilgi sahibi olmaya çalışırken içinden çıkılması zor ispatlarla ve hatta karmaşık bilgisayar hesaplamalarıyla karşılaşılabilir. Bazen bilgisayar yardımıyla bazı bilgiler elde edilse bile bu elde edilen yaklaşık sonuca nasıl ulaşıldığını görememek ya da sonuca daha iyi bir yaklaşımla ulaşma isteği böyle durumlarda polinom yaklaşımının tercih edilmesine neden olur. Bu durumda polinom ailesi bizim için daha iyi özelliklere sahip fonksiyon tanımını üstlenmiş olur. İşte bu yüzden yaklaşım teorisi, belli özelliklere sahip fonksiyon uzayının elemanlarının bu uzayın bir alt uzayından olan iyi özelliklere sahip fonksiyonlar cinsinden gösterimini elde etmeyi temel alır.

Pozitif lineer operatörler yaklaşım teorisinde kullanılan basit fakat güçlü kavramlardan biridir. Örneğin Weierstrass teoremi pozitif lineer operatörler (Bernstein operatörü)

kullanarak ispatlanabilir. Bu teorem eğer  $[0, 1]$  üzerinde sürekli sürekli bir fonksiyon ise verilen herhangi bir  $\varepsilon > 0$  için öyle bir  $P(x)$  polinomu vardır ki

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

şartını sağlar.

1912'de Berntein bu teoremin yeni bir ispatını verdi ve  $B_n(f;x)$  Bernstein polinom operatörünü tanıttı.

$[0, 1]$  kapalı aralığında  $n \geq 1$  ve  $x \in [0, 1]$  için,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right); \quad (1.1)$$

ve  $n$  değeri sonsuza yaklaştırıldıkça  $|f(x) - B_n(f;x)| < \varepsilon$ ,  $0 \leq x \leq 1$  olduğunu gösterdi.

Bernstein operatörü birçok kullanışlı özelliğe sahiptir ve matematikçilerin yoğun ilgi gösterdiği bir konu olmuştur. Ancak bu operatörle ilgili bazı dezavantajlar vardır bunlardan biri yavaş yakınsamadır. Yıllar boyunca operatörü genelleştirmek ve incelemek için birçok araştırma yapıldı. "Bernstein-benzeri" operatörlerin özellikleri 1953'te Pavel Korovkin [1] yaklaşım teorisinde "Pozitif Lineer Operatör" kavramını tanıttı ve ilgili bir makale 1952'de Herald Bohman [2] tarafından yayınlanmıştı. Ufuk açıcı sonuç şimdi Bohman-Korovkin Teoremi olarak bilinir.

Hemen ardından sınırsız aralığa açılımı literatürde yaygınlaşmıştır. Bunla birlikte sonsuz aralıklarda polinomla tek türlü yaklaşım beklenemez bu nedenle operatörlerin aralığının rasyonel fonksiyonlardan kaynaklandığı yerde bir değişiklik yapmaya çalışmak doğaldır. 1969'da Stancu daha iyi sonuçlar elde etmek için aralıkları başka bir şekilde seçmek istiyor. Stancu  $n \rightarrow \infty$  giderken iki ardışık aralık arasındaki mesafenin 0'a yaklaşma eğiliminde olduğunu gördü ve aşağıdaki Bernstein-Stancu polinomları olarak adlandırılan lineer pozitif operatörü tanımladı:

$$B_n^{\alpha,\beta}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) \quad (1.2)$$

Burada  $f \in [0, 1]$ ,  $n \geq 1$ ,  $\alpha, \beta \in R$ , ve  $0 \leq \alpha \leq \beta$  'dır.

Eğer  $\alpha = \beta = 0$  alınırsa Bernstein polinomu olduğu açıktır. Diğer yandan King'in [3] yaklaşım teorisi üzerinde muazzam bir etkisi vardır ve bir dizi iyi bilinen operatör dizisine ince bir şekilde uygulanmıştır [4],[5],[6],[7],[8],[9],[10],[11],[12]. King'in temel motivasyonu geçmişe oranla daha iyi yaklaşan standart Bernstein operatörleri için  $x$  birim fonksiyonu yerine ikinci dereceden fonksiyonu korumaktır. King'in fikri ile ilgili olarak, yenilikçi makale Acar [13]'a aittir.

Sabitleri ve  $e^{2ax}, a > 0$ 'ı koruyan modifiye Szász-Mirakjan operatörlerini tanıttı. Bu fikir yaklaşım teorisinde bir dizi nitelikli makaleye ilham kaynağı oldu ve birçok iyi bilinen operatör dizisinde de başarıyla uygulandı. Daha ayrıntılı olarak [14]'de,  $a > 0$  için [15],[16]'de  $e^{ax}$  ve  $e^{2ax}$  Bernstein, Szász-Mirakjan gibi bazı iyi bilinen pozitif lineer operatörlerin modifiye yardımıyla korunmuştur. Mirakjan ve Baskakov operatörleri kısa bir süre sonra [17]'de sabit ve  $e^{-x}$ , [18]'de sabit ve  $e^{-2x}$  benzer şekilde korunmuştur. Benzer motivasyonla ilgili olarak en son makale uygun bir fonksiyon ve Vronovskaya tipi teoremler kullanarak tasarlanan sınırsız ve sınırlı aralıklar üzerinde tanımlanan genel bir doğrusal ve pozitif yaklaşım prosedürü sınıfını elde eden Usta'ya [19] aittir.

Bu tez sabit ve  $e^{-2x}$ 'i koruyan Bernstein-Stancu operatörlerinin geliştirilmiş bir versiyonunu tanıtmayı amaçlamaktadır. Bu arada bu yeni tanımlanan operatörlerin hem ağırlıklı fonksiyon uzayları hemde sürekli fonksiyon uzayları için yaklaşım özelliklerini sunuyoruz. Ek olarak bu operatörlerin belirli aralıklarla orijinal operatörlerden daha iyi hata tahminine sahip olduğunu göstermek için teorik arka plan sağlıyoruz.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

**Tanım 2.1.**  $X \neq \emptyset$  bir küme ve  $R$  reel sayılar cismi olsun.

- 1)  $\forall x, y \in X$  için  $x + y \in X$ 'dir. (Kapalılık özelliği)
- 2)  $\forall x, y, z \in X$  için  $(x + y) + z = x + (y + z)$ 'dir. (Birleşme özelliği)
- 3)  $\forall x \in X$  için  $x + \theta = \theta + x = \theta$  olacak şekilde  $\theta \in X$  vardır. (Birim eleman)
- 4)  $\forall x \in X$  için  $x + (-x) = (-x) + x = \theta$  olacak şekilde  $-x \in X$  vardır. (Ters eleman)
- 5)  $\forall x, y \in X$  için  $x + y = y + x$ 'dir. (Değişme özelliği)

Yani  $(X, +)$  toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur.

$\forall x, y \in X$  ve  $\alpha, \beta \in R$  için;

- 6)  $\alpha x \in X$ 'dir.
- 7)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ 'dir.
- 8)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ 'dir.
- 9)  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ 'dir.
- 10)  $1_R x = x 1_R = x$ 'dir. (Burada  $1_R, R$ 'nin birim elemanıdır. )

Yukarıda verilen şartları sağlayan  $X$  e  $R$  üzerinde vektör uzayı denir.

**Tanım 2.2.**  $X$  bir vektör uzayı olsun,  $x, y \in X$  keyfi vektörler ve  $\alpha$  skaler olmak üzere

- 1)  $\|x\| \geq 0$
- 2)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- 3)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- 4)  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  özelliklerini sağlayan  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $X$  uzayı üzerinde bir norm ve  $(X, \|\cdot\|)$  ikilisine bir normlu uzay denir.

**Tanım 2.3.**  $X$  ve  $Y$  boş olmayan iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer  $X$ 'den alınan herhangi bir  $f$  fonksiyonu  $Y$ 'de bir  $g$  fonksiyonuna karşılık getiren bir  $L$  kuralı varsa bu durumda  $X$  uzayında bir operatör tanımlanmış olur ve

$$g(x) = L(f; x)$$

biçiminde gösterilir.  $X$  uzayı  $L$  operatörünün tanım bölgesidir ve  $X = D(L)$  ile gösterilir. Bu durumda  $L(f;x) = g(x)$ ,  $Y$  uzayının bir elemanı olur ve bu şekilde  $g$  fonksiyonlarının kümesine  $L$  operatörünün değer kümesi denir. Bu kümede  $R(L)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.4.**  $X$  ve  $Y$  fonksiyon uzayları olmak üzere  $X$  kümesinden  $Y$  kümesine tanımlı olan bir  $L$  dönüşümüne operatör denir. Bu durumda  $L$  operatörü  $X$  uzayında tanımlı her  $f$  fonksiyonuna  $Y$  uzayında bir  $Lf$  fonksiyonuna karşılık getirir. Bu  $Lf$  fonksiyonunun  $x$  noktasında aldığı değer  $L(f;x)$  ile gösterilir. Eğer her  $f, g \in X$  ve her  $\alpha, \beta \in R$  için,

$$L(\alpha f + \beta g;x) = \alpha L(f;x) + \beta L(g;x)$$

koşulunu sağlıyorsa ise  $L(f;x)$  operatörüne lineerdir denir.

Eğer  $L$  operatörünü pozitif bir  $f$  fonksiyonunu pozitif bir  $Lf$  fonksiyonuna dönüştürüyorsa; yani her  $x \in X$  için

$$f(x) \geq 0 \quad \text{iken} \quad L(f;x) \geq 0$$

şartı sağlanıyorsa ise,  $L(f;x)$  operatörüne pozitif lineer operatör denir.

## 2.1. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIĞI:

Kapalı bir  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan tüm reel değerli fonksiyonların kümesine  $C[a, b]$  fonksiyon uzayı denir.  $f \in C[a, b]$  olmak üzere bu uzay üzerindeki norm:

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

ile gösterilir. Eğer her  $x \in [a, b]$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

şartını sağlıyorsa  $f_n$  fonksiyonlar dizisi  $f$  fonksiyonuna  $C[a, b]$  normunda düzgün yakınsaktır ve

$$f_n \Rightarrow f$$

ile gösterilir. Yaklaşım teorisinde düzgün yakınsaklık kavramı ilk kez Weierstrass tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

## 2.2. TEOREM (WEIERSTRASS 1885)

$f(x) \in C[a, b]$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $P_n(x)$  polinomu vardır.

Yani özetle, kapalı bir aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta düzgün yakınsayan bir polinom fonksiyonu vardır. İleri 1885 yılında Weierstrass tarafından verilmiş olan bu temel teoremin bir çok ispatı yapılmıştır. Weierstrass tarafından verilen ispatı çok karmaşık olması sebebi ile birçok matematikçi tarafından bu teoremin daha basit bir ispatını verebilmek için uzunca bir süre bu teorem üzerinde çalışmışlardır. Weierstrass'tan sonra Bernstein tarafından 1912 yılında aşağıdaki teoremi vermiştir.

## 2.3. TEOREM (BERNSTEIN 1912)

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $f$  fonksiyonunun Bernstein polinomu :

$$B_n(f; x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ile tanımlanır ve  $f \in C[0, 1]$  olmak üzere her  $\varepsilon > 0$  için

$$|f(x) - B_n(f; x)| < \varepsilon$$

'dir.

Bernstein bu teoremiyle  $[0, 1]$  aralığında  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir polinomun varlığından söz etmemiş aynı zamanda bu polinomu açık bir şekilde göstermiştir. Böylelikle Weierstrass'ın yaklaşım teoremi daha basit ve anlaşılabilir bir şekilde ispatlanmıştır.

1953 yılında ise Korovkin, lineer pozitif operatörler yardımıyla  $f$  fonksiyonuna yaklaşma problemine dair çok önemli bir teorem vermiştir.

#### 2.4. TEOREM (KOROVKİN 1953)

$f(x) \in C[a, b]$  ve tüm reel ekseninde  $|f(x)| \leq M_f$  olsun. Eğer  $L_n(f)$  lineer pozitif operatör dizisi,

her  $x \in [a, b]$  ve  $e_i = t^i$  olmak üzere  $i = 0, 1, 2$  için

$$L_n(e_i; x) \Rightarrow x^i$$

şartlarını sağlıyorsa bu durumda  $[a, b]$  aralığında

$$L_n(f; x) \Rightarrow f(x).$$

Korovkin teoremi lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaklığını ispatlamada oldukça etkili bir yöntem vermiştir. Bernstein polinomlarında  $[0, 1]$  aralığında lineer pozitif olduğundan dolayı bu operatörlerin  $[0, 1]$  aralığında sürekli olan  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsadığını Korovkin teoremi yardımıyla kolaylıkla gösterilebilir.

### 3. POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER

#### 3.1. BERNSTEİN OPERATÖRÜ

Bernstein polinomu (Bernstein Operatörü) Sergei Bernstein tarafından tanıtıldı.  $f \in C[0, 1]$  ve  $n \in \mathbb{N}$  fonksiyonu için Bernstein operatörü şu şekilde tanımlanır:

$$B_n(f; x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \rho_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad (3.1)$$

burada

$$\rho_{n,k} := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, 0 \leq x \leq 1.$$

Genel olarak  $f, [a, b]$  üzerinde tanımlı ise ;

$$B_n(f; x; [a, b]) := \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^n (x-a)^k (b-x)^{n-k} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right).$$

$B_n(f; 0) = f(0)$  ve  $B_n(f; 1) = f(1)$  olduğu açıktır. Bunu göstermek kolaydır.

1)  $B_n(1; x) = 1$

2)  $B_n(t; x) = x$

3)  $B_n(t^2; x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n}x$

D. Stancu tarafından gösterilmiştir [20].

$$f(x) - B_n(f; x) =: R_n(f; x) = -\frac{x(1-x)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \rho_{n-1,k}(x) \left[ x, \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, f \right] \quad (3.2)$$

ve özdeşlik artık Bernstein operatörü için Stancu kalanı olarak adlandırılmaktadır. [20]'de Stancu, iki sayının farkı için kullanışlı bir formül elde etti. Dizinin monotonluğunu

incelemek için ardışık Bernstein polinomları  $B_n$ ,

$$B_{n+1}(f;x) - B_n(f;x) = -\frac{x(1-x)}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \rho_{n-1,k}(x) \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n+1}, \frac{k+1}{n}; f \right] \quad (3.3)$$

Formül, Bernstein operatörü için Aramă-Popoviciu tipi formül olarak bilinir.

### 3.2. KANTOROVİCH OPERATÖRÜ

Bernstein operatörleri süreksiz fonksiyonlara yaklaşım için uygun değildir. Bu bağlamda, 1930'da Kantorovich makalesinde "S. Bernstein formunun polinomlarını takip eden bazı gelişmeler üzerine" entegre edilebilen fonksiyonlar için tanımlanmış bir operatör tanıttı.  $f(x)$ ,  $[0, 1]$  üzerinde integrallenebilir olduğunu ve

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

olduğunu varsayalım.

Daha sonra Kantorovich operatörünü  $K_n(f;x)$  olarak tanımlar.

$$\begin{aligned} K_n(f;x) &= \frac{d}{dx} B_{n+1}(F;x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (n+1) \left[ F\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - F\left(\frac{k}{n+1}\right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (n+1) \left[ \int_0^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt - \int_0^{\frac{k}{n+1}} f(t) dt \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt \end{aligned}$$

Kantorovich operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$1) K_n(1;x) = 1$$

$$2) K_n(t; x) = \frac{n}{n+1}x + \frac{1}{2(n+1)}$$

$$3) K_n(t^2; x) = \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}x^2 + \frac{2n}{(n+1)^2}x + \frac{1}{3(n+1)^2}$$

### 3.3. BERNSTEİN-CHLODOVSKY OPERATÖRÜ

Sınırsız aralıklar için Bernstein polinomlarının genelleştirilmesi tanıtıldı. I. Clodovsky tarafından 1937'de [21].  $b_n$  artan bir dizi olsun öyle ki;

$$1) b_n \in R^+$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

$f, [0, \infty)$  üzerinde tanımlı ve her sonlu aralıkta  $[0, a] \subset [0, \infty)$  sınırlandırılmış bir fonksiyon olsun. Her  $n \in N$  için Bernstein-Chlodovsky operatörü aşağıdaki gibidir:

$$C_n(f; x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \rho_{n,k} \left( \frac{x}{b_n} \right) f\left(b_n \frac{k}{n}\right) & , x \in [0, b_n] \text{ ise} \\ f(x) & , x > b_n \text{ ise} \end{cases}$$

burada  $\rho_{n,k}(x)$  temel Bernstein polinomlarıdır.  $b_n = 1$  için  $C_n(f; x)$  operatörü klasik Bernstein operatörüdür. Bernstein-Chlodovsky operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$1) C_n(1; x) = 1$$

$$2) C_n(t; x) = x$$

$$3) C_n(t^2; x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{b_n}{n}x$$

$$4) C_n(t^3; x) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3 + \frac{3(n-1)}{n^2}b_nx^2 + \left(\frac{b_n}{n}\right)^2x$$

$$5) C_n(t^4; x) = \frac{x^4}{n^3}(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) + 6b_n(n^2 - 3n + 2)\frac{x^3}{n^3} + 7b_n^2(n-1)\frac{x^2}{n^3} + \frac{x}{n^3}b_n^3$$

Dikkat edilecek olursa  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$  durumunda  $C_n(f; x)$  operatörü  $f$  fonksiyonuna yakınsar.

$b_n = n$  ve  $a \in R$  için

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} C_n(e^{at}; x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k} e^{ak} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n} e^a\right)^k \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}(e^a - 1)\right)^n \\
&= e^{e^a - 1} \\
&\neq e^{ax}
\end{aligned}$$

Operatörünün  $e^{ax}$ 'e yakınsamadığı görülüyor. Ayrıca bir başka örnek olarak ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n(t^2; x) = x^2 + x \neq x^2$$

olduğu görülüyor.

### 3.4. FAVARD-SZASZ-MİRAKJAN OPERATÖRÜ

Favard-Szász-Mirakjan Operatörü 1941'de Mirakjan tarafından tanıtıldı ve üzerinde çalışıldı. Favard tarafından 1944'te ve ayrıca 1950'de Szász tarafından:  $M > 0$  ve  $\alpha \in N$  için

$C_M[0, \infty) := \{f \in C[0, \infty) : |f(x)| \leq M e^{\alpha x}\}$  Favard-Szász-Mirakjan Operatörü  $F_n : C_M[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$  üzerinde ;

$$F_n(f; x) := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx} \frac{(nk)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

olarak tanımlandı.

Operatörün özellikleri;

1)  $F_n(1; x) = 1$

2)  $F_n(t; x) = x$

3)  $F_n(t^2; x) = x^2 + \frac{1}{n}x$

### 3.5. BASKAKOV OPERATÖRÜ

$C_2^*[0, \infty)$ ,  $[0, \infty)$  üzerindeki tüm sürekli reel değerli fonksiyonların ağırlıklı uzayı olsun.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1+x^2}$$

$f \in C_2^*[0, \infty)$  ve  $x \in [0, \infty)$ , Baskakov operatörü, Baskakov tarafından 1957'de [22] tanıtilan operatör aşağıdaki gibidir:

$$L_n(f; x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Baskakov operatörünün özellikleri;

- 1)  $L_n(1; x) = 1$
- 2)  $L_n(t; x) = x$
- 3)  $L_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x(1+x)}{n}$

### 3.6. DURRMEYER OPERATÖRÜ

"Laplace Dönüşümünün Bir Tersine Çevirme Formülü" başlıklı makalesinde 1967'de J. L. Durrmeyer yaklaşık olarak aşağıdaki operatörü tanıttı:  $[0, 1]$  üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar:

$$D_n(f; x) := \int_0^1 f(u)K(x, u)du \quad , \quad x \in [0, 1] \quad ve \quad n \in N$$

burada;

$$K_n(x, u) := (n+1) \sum_{k=0}^n \rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(u)$$

ve

$$\rho_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Dolayısıyla;

$$D_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_0^1 (n+1) \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} f(u) du$$

ve

$$\int_0^1 (n+1) \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} f(u) du$$

ifadesi Bernstein operatöründeki  $f\left(\frac{k}{n}\right)$ , nin yerini alır. Bu nedenle,  $f$ 'nin değerini tek bir noktada değiştirmek Durrmeyer operatörü üzerinde muhtemelen önemli ölçüde hiçbir etkiye sahip olmayacaktır. Ama Bernstein operatörünü önemli ölçüde değiştirecektir.

Durrmeyer operatörünün özellikleri:

1)  $D_n(1; x) = 1$

2)  $D_n(t; x) = \frac{n}{n+2}x + \frac{1}{n+2}$

3)  $D_n(t^2; x) = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)}x^2 + \frac{4n}{(n+2)(n+3)}x + \frac{2}{(n+2)(n+3)}$

### 3.7. BLEİMANN-BUTZER-HAHN OPERATÖRÜ

1980'de Bleimann, Butzer ve Hahn [23] Bernstein tipi bir operatör tanıttı.  $C[0, \infty)$  üzerinde  $f \in C[0, \infty)$  ve  $n \in N$  için

$$L_n(f; x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n-k+1}\right)$$

Favard-Szász-Mirakjan ve Baskakov operatörleri gibi, Bleiman-Butzer-Hahn operatörü (kısaca BBH)  $[0, \infty)$  üzerinde tanımlanır. Ancak toplamların sonlu olduğunu belirtmekte fayda vardır.

BBH operatörünün özellikleri:

1)  $L_n(1; x) = 1$

2)  $L_n\left(\frac{t}{t+1}; x\right) = \frac{nx}{(n+1)(x+1)}$

3)  $L_n\left(\left(\frac{t}{t+1}\right)^2; x\right) = \frac{nx(1+nx)}{(1+n)^2(x+1)^2}$

### 3.8. KING OPERATÖRÜ

2003 yılında, J. P. King [3] , hem  $x^2$ 'yi hemde 1'i koruyan bir operatör tanıttı.

Bu operatör  $V_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$V_n(f; x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (r_n(x))^k (1 - r_n(x))^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right). \quad (3.4)$$

Burada

$$r_n(x) = \begin{cases} x^2 & , n = 1 \text{ ise} \\ \frac{-1 + \sqrt{4n(n-1)x^2 + 1}}{2(n-1)} & , n > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

King operatörünün özellikleri:

1)  $V_n(1; x) = 1$

2)  $V_n(t; x) = r_n(x)$

3)  $V_n(t^2; x) = x^2$

$V_1(f; x) = (1 - x^2)f(0) + x^2f(1)$  olduğundan  $V_n(t; x) = r_n(x)$  ,  $n > 1$  için bir polinom operatörü değildir. King operatörü ,  $f$  noktasında interpolasyon yapması bakımından Bernstein operatörüne benzer. Aralığın uç noktaları gerçekten de  $r_n = 0$  olduğun

$$\begin{aligned} V_n(f; 0) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (r_n(0))^k (1 - r_n(0))^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= f(0) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (r_n(0))^k f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= f(0) \end{aligned}$$

Benzer şekilde  $r_n(1) = 1$  ve  $V_n(f; 1) = f(1)$  olduğunu ifade eder.

#### 4. $e^{-2x}$ , İ KORUYAN BERNSTEIN-STANCU OPERATÖLERİ

Bu ve bundan sonraki bölümlerde  $\left[\frac{\alpha}{n+\beta}, \frac{n+\alpha}{n+\beta}\right]$  aralığı  $I_n$  ile temsil edeceğiz.  $I_n$  üzerindeki tüm sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı için  $C(I_n)$  notasyonunu kullanacağız. Bu şekilde  $C(I_n)$ 'deki tüm sınırlı fonksiyonlardan oluşan uzay için  $C_b(I_n)$ 'i kullanacağız. Burada  $C_b(I_n)$  üzerinde tanımlı Banach normlu uzayı  $\|\cdot\|_\infty$  ile tanımlanmıştır. Ek olarak  $C_*(I_n)$  ve  $C_0(I_n)$ ,  $I_n$  üzerinde tanımlı reel değerli sınırlı sürekli fonksiyonlar uzayının alt uzayları olsun.

$$C_*(I_n) = \left\{ f \in C(I_n) : \exists \lim_{x \rightarrow \frac{\alpha}{n+\beta}} f(x) \in \mathbb{R} \wedge \lim_{x \rightarrow \frac{n+\alpha}{n+\beta}} f(x) \in \mathbb{R} \right\}$$

ve

$$C_0(I_n) = \left\{ f \in C(I_n) : \exists \lim_{x \rightarrow \frac{\alpha}{n+\beta}} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow \frac{n+\alpha}{n+\beta}} f(x) = 0 \right\}$$

Şimdi daha geniş anlamda inceleyecek olursak:

$$\mathcal{F}_m = \left\{ f \in C(I_n) : \sup_{x \in I_n} \rho_m(x) |f(x)| \in \mathbb{R} \right\}.$$

Burada

$$\rho_m(x) = \left(x - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^\varepsilon \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - x\right)^\eta \quad \varepsilon, \eta \geq 0 \quad , m \geq 1 \quad \text{ve} \quad x \in I_n$$

ağırlık fonksiyonudur.

Bu ağırlıklı alanın norm uzayı ile donatıldığı açıktır.

$$\|f\|_{\varepsilon, \eta} = \sup_{x \in I_n} \rho_m(x) |f(x)| \quad , \quad \text{ve} \quad f \in \mathcal{F}_m$$

$$\mathcal{F}_m^* = \left\{ f \in \mathcal{F}_m : \exists \lim_{x \rightarrow \frac{\alpha}{n+\beta}} \rho_m(x)f(x) \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \frac{n+\alpha}{n+\beta}} \rho_m(x)f(x) \in \mathbb{R} \right\} \quad (4.1)$$

ve

$$\mathcal{F}_m^0 = \left\{ f \in \mathcal{F}_m : \exists \lim_{x \rightarrow \frac{\alpha}{n+\beta}} \rho_m(x)f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \frac{n+\alpha}{n+\beta}} \rho_m(x)f(x) = 0 \right\}$$

Weiersrass teoremi gereğince  $C_0(I_n)$ 'nin  $\mathcal{F}_m^0$ 'in içinde var olduğu açıktır. Buna ek olarak bu ve sonraki bölümlerde, sabit bir gerçekteğerli parametre olan  $\mu > 0$  için  $f_\mu$  üstel fonksiyonunu alıyoruz.

$$f_\mu(x) = e^{-\mu x}, \quad x \in [0, 1] \quad (4.2)$$

Ayrıca her zamanki gibi,  $e_j$  ile tanımlanan fonksiyonları  $e_j(t) = t^j$ , ( $j \in \mathbb{N}$ ) polinomları ile belirtiyoruz.

Her  $n \geq 1$  için;

$$1) \mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(e_0) = e_0$$

$$2) \mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(e_1) = \frac{ne_1 + \alpha}{n + \beta}$$

$$3) \mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(e_2) = \frac{(n^2 - n)e_2 + (2\alpha n + n)e_1 + \alpha^2}{(n + \beta)^2}$$

Özellikle,  $\forall x \geq 0$  için tanımlanan fonksiyon alınırsa

$$\phi_t^m = (e_1 - te_0)^m$$

Her  $x \in [0, 1]$  aralığı için,

$$1) \mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\phi_t^0) = 1$$

$$2) \mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\phi_t^1) = \frac{ne_1 + \alpha}{n + \beta} - e_1$$

$$3) \mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\phi_t^2) = \frac{(n^2 - n)e_2 + (2\alpha n + n)e_1 + \alpha^2}{(n + \beta)^2} - \frac{2(ne_2 + \alpha e_1)}{n + \beta} + e_2$$

Sonuç olarak (4.2) denkleminde verilen eşitlik üstel fonksiyon için kolayca gösterilebilir.

$$\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(f_\mu)(x) = e^{\frac{-\mu\alpha}{n+\beta}} \left( 1 - x \left( 1 - e^{\frac{-\mu}{n+\beta}} \right) \right)^n \quad (4.3)$$

Sonuç olarak  $(\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta})_{n \geq 1}$ ,  $C[0, 1]$  aralığında bir yaklaşım yöntemidir. Her  $f \in [0, 1]$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(f) = f$$

eşitliği sağlanır. Daha önce tanımladığımız ifadeleri dikkate alarak,  $f_2$ 'yi sabitleyen Bernstein-Stancu operatörlerinin genel bir versiyonunu sunabiliriz. Bu amaçla her şeyden önce ;

$$\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta} := B_n^{\alpha, \beta} \circ S_n, \quad n \geq 1 \quad \text{için} \quad (S_n)_{n \geq 1} \quad (4.4)$$

dizisini tanımlamamız gerekir.

Bunu tanımlayabilmek için (4.3) denklem yardımıyla ;

$$\begin{aligned} & e^{\frac{-2\alpha}{n+\beta}} \left[ 1 - \frac{\frac{2\alpha}{1 - e^{\frac{-2}{n(n+\beta)}}} - \frac{2x}{n}}{-2} (1 - e^{\frac{-2}{n+\beta}}) \right]^n \\ &= e^{\frac{-2\alpha}{n+\beta}} \left[ 1 - S_n(x) (1 - e^{\frac{-2}{n+\beta}}) \right]^n \\ &= e^{-2x} \end{aligned}$$

eşitliğinin var olduğunu söyleyebiliriz.

$$S_n(x) = \frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}}}{1 - e^{\frac{-2}{n+\beta}}}$$

$\alpha, \beta \in R$  ve  $0 \leq \alpha \leq \beta$  Ayrıca

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}}}{1 - e^{\frac{-2}{n+\beta}}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \\ &= x \end{aligned}$$

Buna ek olarak  $1 - e^{-x} \leq x$  için  $x \geq \frac{\alpha}{n+\beta}$  denkleminden aşağıdaki eşitsizliğe ulaşabiliriz:

$$\begin{aligned} 1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}} &\leq \frac{2x}{n} e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}} + 1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}} \\ -e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}} &\leq \frac{2x}{n} e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}} - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}} \\ e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}} &\leq \frac{2x}{n} e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}} + e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}} \\ e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}} &\leq \frac{2x}{n} e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}} \left( \frac{2x}{n} + e^{-\frac{2x}{n}} \right) \\ 1 - e^{-\frac{2x}{n}} &\leq \frac{2x}{n} \\ 1 - e^{-x} &\leq x \end{aligned}$$

Buradan  $1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}} < 0$  eşitsizliği elde edilmiş olur. Yani;

$$0 < S_n(x) \leq K_n(x) \quad (4.5)$$

$$S_n\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right) = 0,$$

burada  $K_n$  dizisi aşağıdaki gibidir:

$$K_n := \frac{\frac{2\alpha}{2e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}}}}{\frac{-2}{n(1 - e^{\frac{2\alpha}{n+\beta}})}}$$

Burada her  $n \geq 1$  ve  $x > \left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{2\alpha}{2e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}}}}{\frac{-2}{n(1 - e^{\frac{2\alpha}{n+\beta}})}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = 1$$

'dir. Buna ek olarak  $K_n \geq 1$  ve  $n \geq 1$ 'dir.

Tüm bunlar dikkate alındığında yeni  $(\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta})_{n>1}$  dizisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$$\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f;x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) \binom{n}{k} \left(\frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}} - \frac{2x}{n}}{\frac{-2\alpha}{1 - e^{\frac{2\alpha}{n+\beta}}}}\right)^k \left(1 - \frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}} - \frac{2x}{n}}{\frac{-2\alpha}{1 - e^{\frac{2\alpha}{n+\beta}}}}\right)^{n-k} \quad (4.6)$$

Burada;

$$\phi_{n,k}^{\alpha,\beta}(x) = \binom{n}{k} \left(\frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}} - \frac{2x}{n}}{\frac{-2\alpha}{1 - e^{\frac{2\alpha}{n+\beta}}}}\right)^k \left(1 - \frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)}} - \frac{2x}{n}}{\frac{-2\alpha}{1 - e^{\frac{2\alpha}{n+\beta}}}}\right)^{n-k}$$

olarak alınırsa yeni operatörü aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f;x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) \phi_{n,k}^{\alpha,\beta}(x)$$

$f \in C_b(I_n)$ ,  $n \geq 1$  ve  $x \in I_n$ ,  $\alpha, \beta \in R$  ve  $0 \leq \alpha \leq \beta$ ' dir.

**Yardımcı Teorem 4.1.** Her  $x \in I_n$  ve  $n \in N$  için aşağıdaki şartlar sağlanır.

1)  $\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(e_0;x) = 1$

$$2) \mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(e_1;x) = \frac{n}{n+\beta} \left( \frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}}}{1 - e^{\frac{-2}{n+\beta}}} \right) + \frac{\alpha}{n+\beta}$$

$$= \frac{n}{n+\beta} S_n(x) + \frac{\alpha}{n+\beta}$$

$$3) \mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(e_2;x) = \frac{(n^2-n)}{(n+\beta)^2} \left( \frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}}}{1 - e^{\frac{-2}{n+\beta}}} \right)^2 + \frac{n^2+n\beta+2n\alpha}{(n+\beta)^3} \left( \frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}}}{1 - e^{\frac{-2}{n+\beta}}} \right) +$$

$$\frac{\alpha^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha^2}{(n+\beta)^3}$$

$$= \frac{(n^2-n)}{(n+\beta)^2} S_n(x)^2 + \frac{n^2+n\beta+2n\alpha}{(n+\beta)^3} S_n(x) + \frac{\alpha^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha^2}{(n+\beta)^3}$$

Burada  $\alpha, \beta \in R$  ve  $0 \leq \alpha \leq \beta$  'dir.

**Yardımcı Teorem 4.2.** Her  $x \in I_n$  ve  $n \in N$  için aşağıdaki şartlar sağlanır.

1)  $\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\phi_t^0;x) = 1$

$$2) \mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\phi_t^1;x) = \frac{n}{n+\beta} \left( \frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}}}{1 - e^{\frac{-2}{n+\beta}}} \right) + \frac{\alpha}{n+\beta} - x$$

$$= \frac{n}{n+\beta} S_n(x) + \frac{\alpha}{n+\beta} - x$$

$$\begin{aligned}
3) \mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\phi_t^2; x) &= \frac{(n^2 - n)}{(n + \beta)^2} \left( \frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}}}{-2} \right)^2 + \frac{(n^2 + n\beta + 2n\alpha)}{(n + \beta)^3} S_n(x) + \\
&\frac{\alpha^2 n + \alpha^2 \beta + 2\alpha^2}{(n + \beta)^3} - \frac{2nx}{n + \beta} \left( \frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}}}{1 - e^{\frac{-2}{n+\beta}}} \right) - \frac{2\alpha x}{n + \beta} + x^2 \\
&= \frac{(n^2 - n)}{(n + \beta)^2} S_n^2(x) + \frac{(n^2 + n\beta + 2n\alpha)}{(n + \beta)^3} S_n(x) + \frac{\alpha^2 n + \alpha^2 \beta + 2\alpha^2}{(n + \beta)^3} - \frac{2nx}{n + \beta} S_n(x) - \frac{2\alpha x}{n + \beta} + x^2
\end{aligned}$$

Burada  $\alpha, \beta \in R$  ve  $0 \leq \alpha \leq \beta$  'dir.

Buradan (4.3) denlemi yardımıyla her  $\mu > 0$  için

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(f_\mu; x) &= e^{\frac{-\mu\alpha}{n+\beta}} \left( 1 - S_n(x) \left( 1 - e^{\frac{-\mu}{n+\beta}} \right) \right)^n \\
&= e^{\frac{-\mu\alpha}{n+\beta}} \left( 1 - \frac{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}}{1 - e^{\frac{-2}{n+\beta}}} \left( 1 - e^{\frac{-\mu}{n+\beta}} \right) \right)^n
\end{aligned}$$

Her  $x \geq 0$  için  $\psi_t^m = (e^{-t} - e^{-x})^m$  alınırsa aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir.

**Yardımcı Teorem 4.3.** Her  $x \in I_n$  ve  $n \in N$  için aşağıdaki şartlar sağlanır.

$$1) \mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\psi_t^0; x) = 1$$

$$2) \mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\psi_t^1; x) = e^{\frac{-\alpha}{n+\beta}} \left( 1 - \left( \frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}}}{1 - e^{\frac{-2}{n+\beta}}} \right) \left( 1 - e^{\frac{-1}{n+\beta}} \right) \right)^n - e^{-x}$$

$$= e^{\frac{-\alpha}{n+\beta}} \left( 1 - S_n(x) \left( 1 - e^{\frac{-1}{n+\beta}} \right) \right)^n - e^{-x}$$

$$3) \mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\psi_t^2; x) = 2e^{-2x} - 2e^{-x} e^{\frac{-\alpha}{n+\beta}} \left( 1 - \left( 1 - \left( \frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}}}{1 - e^{\frac{-2}{n+\beta}}} \right) e^{\frac{-1}{n+\beta}} \right) \right)^n$$

$$= 2e^{-2x} - 2e^{-x} e^{\frac{-\alpha}{n+\beta}} \left( 1 - S_n(x) (1 - e^{\frac{-1}{n+\beta}}) \right)^n$$

Burada  $\alpha, \beta \in R$  ve  $0 \leq \alpha \leq \beta$  'dır.

**Yardımcı Teorem 4.4.** Her  $n \geq 1$  ve  $x \in I_n$  için

$$S_n(x) \geq \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)x - \frac{\alpha}{n} \quad (4.7)$$

$\alpha, \beta \in R$  ve  $0 \leq \alpha \leq \beta$  'dır.

*İspat.* Öncelikle  $n \geq 1$  için  $S_n$ 'nin  $I_n$  'de artan dışbükey bir fonksiyon olduğunu biliyoruz.

Buna ek olarak  $S_n\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right) = 0$  ve  $S_n\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right) = 1$  olduğundan  $x \in I_n$  için

$$S_n(x) \geq \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)x - \frac{\alpha}{n}$$

elde edilebilir, böylece ispat tamamlanmış olur.  $\square$

**Yardımcı Teorem 4.5.**  $I_n$ 'nin kompakt alt aralıklarında  $\alpha, \beta \in R$  ve  $0 \leq \alpha \leq \beta$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e_1$$

eşitliği sağlanır.

*İspat.* Açıkça görülüyor ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e_1$$

$I_n$  üzerinde bir noktadır. Buna ek olarak her  $S_n(x)$  içbükeydir. Yakınsama gerçektende  $I_n$ 'nin her kompakt aralığında tekdüzedir.  $\square$

## 5. $(B_n^{\alpha,\beta})_{n \geq 1}$ DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde üstel fonksiyonu koruyan bir kaç operatörün yaklaşım özelliklerini vereceğiz [24].

**Teorem 5.1.**  $x > 0$  ve  $\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}$  (4.6) 'te tanımlanan operatör olsun.  $n \geq 1$  için

1)  $\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}$  pozitif lineer operatör olsun.  $C_*(I_n)$  üzerinde  $\|\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}\|_{C_*(I_n)} = 1$ ,

2)  $\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(C_0(I_n)) \subset C_0(I_n)$ .  $\alpha, \beta \in R$  ve  $0 \leq \alpha \leq \beta$ 'dir.

*İspat.* 1) Her  $n \in N$  için  $S_n(x)$  pozitif fonksiyondur(4.5). Bunun açık bir sonucu olarak  $\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}$ 'nin pozitif bir operatör olduğu çıkarımı yapılabilir. Eğer  $f \in C_*(I_n)$  ise  $\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f) \in C_*(I_n)$ 'den (2) yardımıyla  $\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f) \in C(I_n)$  olduğunu söyleyebiliriz. O halde  $\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f) \in C(I_n, S_n(x))$  için (4.4) denklemini verdiği açıktır. Ayrıca;

$$\lim_{x \rightarrow \left\{ \frac{\alpha}{n+\beta}, \frac{n+\alpha}{n+\beta} \right\}} \mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f)(x) = \lim_{x \rightarrow \left\{ \frac{n+\alpha}{n+\beta}, \frac{n+\alpha}{n+\beta} \right\}} (f)(x) \in R$$

'dir.

Her pozitif  $\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}$  için

$$\|\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}\|_{C_*(I_n)} = \|\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(e_0)\|_\infty = 1$$

'dir.

2) İspatın ilk bölümünün sonucu olarak;

$$\lim_{x \rightarrow \left\{ \frac{\alpha}{n+\beta}, \frac{n+\alpha}{n+\beta} \right\}} \mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f)(x) = 0$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow \left\{ \frac{n+\alpha}{n+\beta}, \frac{n+\alpha}{n+\beta} \right\}} (f)(x) = 0.$$

$f \in C_0(I_n)$  için kolayca ispatlanabilir.

□

**Teorem 5.2.**  $\alpha, \beta \in R$  için  $0 \leq \alpha \leq \beta$  ve  $n \geq 1$  iken (4.1)'de tanımlanan  $\mathcal{F}_m^*$  operatörleri için:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(f) = f, \quad \text{Eğer } f \in C_*(I_n) \text{ ise } I_n \text{ üzerindedir.}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(f) = f, \quad \text{Eğer } f \in C_b(I_n) \text{ ise } I_n \text{ üzerindedir.}$$

*İspat.* Teoremin ilk kısmını ispatlamak için, öncelikle her  $\mu > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(f_\mu) = f_\mu, \quad (5.1)$$

$I_n$ 'nin üzerinde olduğunu göstermeliyiz. Bu doğrultuda her  $k > 0$  için (4.7)'de verilen eşitlikten aşağıdaki bilgileri kullanabiliriz.

$$e^{-k\sigma_n} - e^{-k} < \frac{kn}{2e}, \quad n \geq 1 \quad (5.2)$$

Burada  $\sigma_n = \frac{1 - e^{-k_n}}{k_n}$  ve  $(k_n)_{n \geq 1}$  için pozitif gerçel sayı dizisidir [25].

(4.7)'nin ispatının benzer yöntemini takip ederek, şunu çıkarabiliriz:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(f_\mu)(x) - (f_\mu)(x)| &\leq e^{\frac{-\mu\alpha}{n+\beta}} \left(1 - S_n(x)(1 - e^{-\mu/n+\beta})\right)^n - e^{-\mu x} \\ &= e^{\frac{-\mu\alpha}{n+\beta}} e^{n \log \left(1 - S_n(x)(1 - e^{-\mu/n+\beta})\right)} - e^{-\mu x} \\ &\leq e^{\frac{-\mu\alpha}{n+\beta}} e^{\frac{-n}{e^{n+\beta}} \mu S_n(x) \frac{(1 - e^{-\mu/n+\beta})}{\mu/n+\beta}} - e^{-\mu x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq e^{\frac{-\mu\alpha}{n+\beta}} e^{\frac{-n}{n+\beta}\mu S_n(x)} \frac{(1-e^{-\mu/n+\beta})}{\mu/n+\beta} - e^{-\mu S_n(x)} \frac{n}{n+\beta} - \mu \frac{\alpha}{n+\beta} \\ &= e^{\frac{-\mu\alpha}{n+\beta}} \left[ e^{\frac{-n}{n+\beta}\mu S_n(x)} \frac{(1-e^{-\mu/n+\beta})}{\mu/n+\beta} - e^{-\mu S_n(x)} \frac{n}{n+\beta} \right], \end{aligned}$$

Çünkü  $\ln x \leq x - 1$  'dir ve (4.7) eşitsizliği gösterilmiş olur. Sonra  $k = \alpha S_n(x) \frac{\mu}{n+\beta}$  ve  $k_n = \frac{\mu}{n+\mu}$  için (5.2) denkleminde aşağıdaki ifadeleri elde edebiliriz:

$$|\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f_\mu)(x) - (f_\mu)(x)| \leq e^{\frac{\mu}{n+\beta}} \frac{\alpha}{2e(n+\beta)},$$

ve

$$\|\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f_\mu)(x) - (f_\mu)(x)\|_\infty \leq e^{-\mu \frac{\alpha}{n+\beta}} \frac{\mu}{2e(n+\beta)} \quad (5.3)$$

$x \in I_n$  için (5.1) ve (4.7)'den dolayı ispatın birinci bölümü tamamlanmış olur.

2)Teoremin ikinci bölümü için;

$$|\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(e_1)(x) - (e_1)(x)| \leq x \left( K_n \frac{n}{n+\beta} \right) + \frac{\alpha}{n+\beta},$$

ve

$$|\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(e_2)(x) - (e_2)(x)| \leq \left( \frac{n^2-n}{(n+\beta)^2} K_n^2 - 1 \right) x^2 + \frac{n^2+n\beta+2\alpha n}{(n+\beta)^3} K_n + \frac{\alpha^2 n + \alpha^2 \beta + 2\alpha^2}{(n+\beta)^3}$$

Böylece;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\{e_0, e_1, e_2\}) = \{e_0, e_1, e_2\}$$

eşitliği  $I_n$  'nin kompakt alt kümeleri üzerinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = 1$$

'dir. Sonuç olarak  $\{e_0, e_1, e_2\} \subset \mathcal{F}_2^*$ 'a (Teorem 4.5)'ten ulaşılmış olur. (Teorem 5.2)'den  $n \geq 1$  için  $f$ 'e kadar  $(\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(f))$ 'in yakınsama oranını tahmin etmek için, süreklilik hakkındaki bilgilerimizi tazelemek gerekir. Bu tahminde [25]'te tanıtılan aşağıdaki süreklilik modülü tanımından yararlanacağız.

□

**Tanım 5.3.**  $f \in C_*(I_n)$  olsun. Bir fonksiyonun süreklilik modülü,  $\omega^*(f, \delta)$ ,  $\delta \geq 0$  olsun.

$$\omega^*(f, \delta) = \sup_{\substack{x, t \in I_n \\ |e^{-x} - e^{-t}| \leq \delta}} |f(x) - f(t)| \quad (5.4)$$

Bir başka deyişle; bu süreklilik modülü standart gösterimle gösterilebilir.

$\omega^*(f, \delta) = \omega(f, \delta)$ , burada  $f : C_*(I_n) \rightarrow C(I_n)$  tanımlanan sürekli fonksiyondur.

$$f(\theta) = \begin{cases} f(-\ln \theta) & , \text{eğer } \theta \in (0, 1] \text{ ise} \\ 1 & , \text{eğer } \theta = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

O halde sonraki teoremleri ifade etmek için aşağıdaki teoremden faydalanabiliriz.

**Teorem 5.4.** Eğer  $P_n : C_*(I_n) \rightarrow C_*(I_n)$ ,  $n \geq 1$  için pozitif ve lineer operatörlerin bir dizisi olsun.

$$A_n = \|P_n(e_0) - e_0\|_\infty,$$

$$B_n = \|P_n(f_1) - f_1\|_\infty,$$

$$C_n = \|P_n(f_2) - f_2\|_\infty,$$

Burada  $n \rightarrow \infty$  giderken  $A_n, B_n, C_n \rightarrow 0$ 'a gider.

$\|P_n(f) - f\|_\infty \leq \|f\|_\infty A_n + (2 + A_n)W^*(f, \sqrt{A_n + 2B_n + C_n})$ ,  $f \in C_*(I_n)$  için eşitsizliği sağlanır.

Bu bağlamda,  $W^*(f, \delta)$  ile  $C_*(I_n)$  için seçilen belirli Korovkin arasında yakın bir ilişki olduğu açıktır [25]. Bu noktada yukarıdakilerin yardımıyla aşağıdaki teoremi açıklayabiliriz.

**Teorem 5.5.** Her  $f \in C_*(I_n)$  ve  $n \geq 1$  için,

$$\|\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f_\mu)(x) - (f_\mu)(x)\|_\infty \leq 2W^* \left( f, \sqrt{\frac{\alpha}{e^{n+\beta}} \frac{1}{e(n+\beta)}} \right),$$

eşitsizliği (Teorem 5.2) 'nin varsayımları altında sağlanır.

*İspat.* Tanımlarından dolayı  $A_n$  ve  $C_n$ 'nin sıfıra eşit olduğu açıktır. Her  $n \geq 1$  ve  $\mu = 1$  için

$$B_n = e^{\frac{\alpha}{n+\beta}} \frac{1}{2e(n+\beta)}$$

olduğu açıktır (5.3). Böylece ispat tamamlanmış olur. □

## 6. $(B_n^{\alpha,\beta})_{n \geq 1}$ 'NİN NOKTASAL YAKINSAKLIĞI

Tezimizin bu bölümü,  $\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}$  dizisinin noktasal yakınsamasına ayrılmıştır. Yakınsamayı sunmak için Voronokaya tipi teoremi hem hedeflenen yakınsama derecesi hem de yaklaşım hatası için üst sınırına izin verecek nicel ortalamada sunuyoruz. Sınırlı aralıkları ve sınırsız aralıkları hareket ettiren Voronokaya tipi teoremi sırasıyla [26], [27] makalelerde bulunabilir. Burada (5.3)'de verilen süreklilik modülünü alıyoruz. Bu bölümün ana teoremi:

**Teorem 6.1.**  $f, f'' \in C_*(I_n)$  için eşitsizlik;

$$|n[\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f, x) - f(x)] - x(1-x)f'(x) - \frac{1}{2}x(1-2\alpha-x)f''(x)|$$

$$\leq |f'(x)||a_n(x)| + |f''(x)||b_n(x)| + 2|2b_n(x) + x(1-2\alpha-x)| + 2c_n(x)W^*(f''; \sqrt{1/n}),$$

herhangi bir  $x \in I_n$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \alpha \leq \beta$  için sağlanır.

$$a_n(x) = n\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\phi_t^1; x) - x(1-x),$$

$$b_n(x) = \frac{1}{2}n\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\phi_t^2; x) - x(1-2\alpha-x),$$

$$c_n(x) = n^2 \sqrt{\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\phi_t^4; x)} \sqrt{\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\psi_t^4; x)},$$

$\phi_t^m$  ve  $\psi_t^m$  Bölüm (4)'te tanımlandı.

*İspat.* Taylor açılımı yardımıyla  $x \in I_n$  'i  $f$ 'in yerine yazılabiliriz.

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2 + \rightarrow (t,x)(t-x)^2, \quad (6.1)$$

Burada ;

$$\rightarrow (t, x) = \frac{f''(v) - f''(x)}{2},$$

ve  $v, x$  ile  $t$  arasında bir sayıdır. Girilen  $\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}$  operatörlerini eşitliğin (6.1) her iki tarafına uygularsak  $\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(e_0) = e_0$  gerçeğini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(f, x) - f(x) - f'(x)\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\phi_t^1; x) - \frac{1}{2}f''(x)\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\phi_t^2; x)| \leq |\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\tau\phi_t^2; x)|.$$

Sonra yukarıdaki eşitsizliği düzenlersek aşağıda verilen eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} & |n[\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(f, x) - f(x)] - x(1-x)f'(x) - \frac{1}{2}x(1-2\alpha-x)f''(x)| \\ & \leq |f'(x)||n\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\phi_t^1; x) - x(1-x)| + \frac{1}{2}|f''(x)||n\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\phi_t^2; x) - x(1-2\alpha-x)| + |n\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\tau\phi_t^2; x)| \end{aligned}$$

Daha basit halde yazmak için ;

$$a_n(x) = n\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\phi_t^1; x) - x(1-x)$$

$$b_n(x) = \frac{1}{2}n\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\phi_t^2; x) - x(1-2\alpha-x).$$

Yardımcı Teorem (4.2)'nin bir sonucu olarak herhangi bir  $x \in I_n$  ve  $n \rightarrow \infty$  için  $a_n \rightarrow 0$  ve  $b_n(x) \rightarrow 0$  yakınsar. Buradan;

$$|n[\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(f, x) - f(x)] - x(1-x)f'(x) - \frac{1}{2}x(1-2\alpha-x)f''(x)|$$

$$\leq |f'(x)||a_n(x)| + |f''(x)||b_n(x)| + |n\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(\tau\phi_t^2; x)|.$$

İspatı başarıyla tamamlamak için en son  $|n\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\tau\phi_t^2;x)|$  terimini tahmin etmeliyiz. Holhoş'un makalesindeki [25] bir eşitliği göz önünde bulundurarak şu sonucu çıkarıyoruz:

$$|h(t,x)| \leq \left(1 + \frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\delta^2}\right) W^*(f''; \delta),$$

ve

$$\begin{cases} |h(t,x)| \leq 2W^*(f''; \delta) & , \text{ eğer } |e^{-x} - e^{-t}| \leq \delta \text{ ise} \\ |h(t,x)| \leq 2\frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\delta^2} & , \text{ eğer } |e^{-x} - e^{-t}| > \delta \text{ ise} \end{cases}$$

Buna göre;

$$|h(t,x)| \leq \left(1 + \frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\delta^2}\right) W^*(f''; \delta).$$

eşitliği ile aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$|n\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\tau\phi_t^2;x)| \leq 2nW^*(f''; \delta)\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\phi_t^2;x) + \frac{2n}{\delta^2}W^*(f''; \delta)\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\phi_t^2\psi_t^2;x)$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayarak,

$$n\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(|\tau\phi_t^2|;x) \leq 2nW^*(f''; \delta)\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\phi_t^2;x) + \frac{2n}{\delta^2}W^*(f''; \delta)\sqrt{\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\phi_t^4;x)}\sqrt{\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\psi_t^4;x)}$$

$\delta = \sqrt{\frac{1}{n}}$  seçerek  $c_n(x) = n^2\sqrt{\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\phi_t^4;x)}\sqrt{\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(\psi_t^4;x)}$  gösterimini kullanarak şu nu elde edebiliriz.

$$|n[\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f;x) - f(x)] - x(1-x)f'(x) - \frac{1}{2}x(1-2\alpha-x)f''(x)|$$

$$\leq |f'(x)||a_n(x)| + |f''(x)||b_n(x)| + 2|2b_n(x) + x(1-2\alpha-x)| + 2c_n(x)W^*(f''; \sqrt{1/n}),$$

böylece ispat tamamlanmış olur. □

## 6.1. SONUÇ

$f, f'' \in C_*(I_n)$  için ve her  $x \in I_n$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(f; x) - f(x)] = x(1-x)f'(x) + \frac{1}{2}x(1-2\alpha-x)f''(x)$$

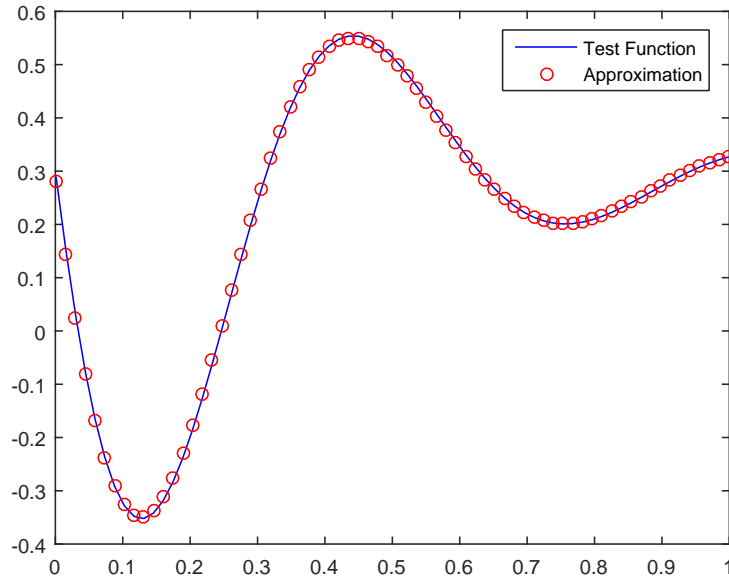
eşitliği sağlanmış olur.



## 7. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde bilgisayar ortamında hesaplaması yapılan iki sayısal örnek verilmiştir.

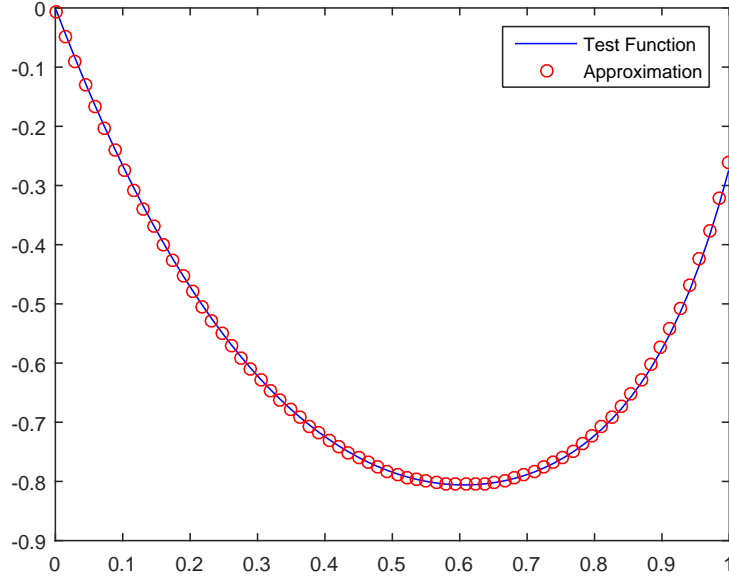
### 7.1. ÖRNEK 1:



Şekil 7.1.  $\mathfrak{B}_n^{\alpha, \beta}(f, x)$  yaklaşım operatörümüzü  $f(x) = -\sin(10x)e^{-3x} + 0.3$  fonksiyonu üzerinden  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  ve  $n = 1000$  için.

Şekilde görüldüğü gibi yeni tanımladığımız operatör üstel fonksiyonlara klasik Bernstein operatörüne göre çok daha yaklaşık sonuçlar verdiği bilgisayar ortamında yapılan hesaplamalar sonrasında görülmüştür. Dikkat edilecek olursa grafik üzerinde fonksiyonun ani değişimler gösterdiği yerlerde modifiye edilmiş Bernstein-Stancu operatörü klasik Bernstein operatörüne göre çok daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

## 7.2. ÖRNEK 2:



Şekil 7.2.  $\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f,x)$  yaklaşım operatörümüzü  $f(x) = \frac{x^{10}}{3} + \frac{x^2}{2} - 3xe^{-x}$  fonksiyonu üzerinden  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  ve  $n = 1000$  için.

Şekilde görüldüğü gibi yeni tanımladığımız operatör üstel fonksiyonlara klasik Bernstein operatörüne göre çok daha yaklaşık sonuçlar verdiği bilgisayar ortamında yapılan hesaplamalar sonrasında görülmüştür. Bu iki örnekten de anlaşılacağı üzere modifiye edilmiş operatörümüz klasik Bernstein operatörüne göre hem yakınsama hızı açısından hem de daha iyi sonuçlar vermesi açısından özellikle üstel fonksiyonlar için çok daha avantajlı bir operatördür.

## 8. SONUÇ

Bu bölümde çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlardan bahsedilecektir. Bu çalışmada lineer pozitif operatörler tanıtılıp Bernstein-Stancu operatörleri ve yaklaşım özellikleri incelendi. Süreklilik modülü ve Voronoskaya tipi teorem ispatı ile birlikte verildi. Klasik Bernstein-Stancu operatörünün modifiye edilmiş bir versiyonu tanımlandı ve yaklaşım özellikleri incelendi. Bu operatör:

$$\mathfrak{B}_n^{\alpha,\beta}(f;x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) \binom{n}{k} \left(\frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}}}{1 - e^{\frac{-2\alpha}{n+\beta}}}\right)^k \left(1 - \frac{1 - e^{\frac{2\alpha}{n(n+\beta)} - \frac{2x}{n}}}{1 - e^{\frac{-2\alpha}{n+\beta}}}\right)^{n-k}$$

şeklinde modifiye edilip üstel fonksiyonları klasik Bernstein operatörüne göre daha iyi yaklaşım sergilediğini göstermek için iki tane sayısal örnek tanımlanıp grafikler üzerinde modifiye edilmiş Bernstein-Stancu operatörünün klasik Bernstein operatörüne göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Sonuç olarak bu çalışma sayesinde literatürde var olan Bernstein-Stancu operatörlerinin daha iyi yaklaşım veren yeni bir modifikasyonundan bahsedilmiştir. Tanımlanan bu yeni operatör daha iyi yaklaşım sonuçları verdiği için uygulama alanlarına daha iyi katkı sağlayabileceği düşünülmektedir.

## 9. KAYNAKLAR

- [1] P. P. Korovkin, "On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions", *Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.)*, c. 90, ss. 961-964, 1953.
- [2] H. Bohman, "On approximation of continuous and of analytic functions." *Arkiv For Mathematic*, c. 2, ss. 43–56, 1952.
- [3] J. P. King, " Positive linear operators which preserve  $x^2$ ," *Acta Mathematica Hungarica* , c. 99, ss. 203-208,2003.
- [4] R. P. Agarwal ve V. Gupta, " On q-analogue of a complex summation-integral type operators in compact disks", *Journal of Inequalities and Applications*, ss. 111, 2012.
- [5] V. Gupta ve A. Aral," Bernstein Durrmeyer operators based on two parameters," *Facta Universitatis Series Mathematics and Informatics*, c. 31, sayı. 1, ss. 79-95, 2016.
- [6] V. Gupta ve G. C. Greubel," Moment estimations of a new Szász-Mirakyan-Durrmeyer operators," *Applied Mathematics and Computation*, c. 271, ss. 540-547, 2015.
- [7] E. Deniz, A. Aral ve V. Gupta," Note on Szász-Mirakyan-Durrmeyer operators preserving  $e^{2ax}$ ,  $a > 0$ ," *Numerical Functional Analysis and Optimization*, c. 39, sayı. 2, ss. 201-207, 2018.
- [8] M. Mursaleen, K. J. Ansari ve A. Khan, "Some approximation results by (p, q)-analogue of Bernstein-Stancu operators," *Applied Mathematics and Computation*, c. 264, ss. 392-402, 2015.
- [9] M. Mursaleen, K. J. Ansari ve A. Khan," On( p,q) analogue of Bernstein operators," *Applied Mathematics and Computation*, c. 266, ss. 874-882, 2015.
- [10] M. Mursaleen ve A. Khan," Statistical approximation properties of modified q-Stancu-Beta operators," *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, c. 36, sayı. 3, ss. 683-690, 2013.
- [11] F. Usta, "On new modification of Bernstein operators: Theory and applications," *Iranian Journal of Science Technology Transactions*, c. 44, ss. 1119-1124, 2020.
- [12] F. Usta, "Approximation of functions by a new construction of Bernstein-Chlodowsky operators: Theory and applications," *Numerical Methods Partial Differential Equations*, c. 37, sayı. 1, ss. 782-795, 2021.
- [13] T. Acar, A. Aral ve H. Gonska," On Szász-Mirakyan operators preserving  $e^{2ax}$ ,  $a > 0$ ," *Mediterranean Journal of Mathematics*, c. 14, sayı. 1, ss. 14, 2017.
- [14] O. G. Yılmaz, V. Gupta ve A. Aral, " On Baskakov operators preserving the exponential function," *Journal of Numerical Analysis Approximation Theory*, c. 46, sayı. 2, ss. 150-161, 2017.

- [15] A. Aral, D. Cardenas-Morales ve P. Garrancho, " Bernstein-type operators that reproduce exponential functions," *Journal of Mathematical Inequalities*, c. 12, sayı. 3, ss. 861-872, 2018.
- [16] A. Aral, M. L. Limmam ve F. Ozsarac, " Approximation properties of Sz'asz-Mirakyan-Kantorovich type operators," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, c. 42, ss. 5233-5240, 2019.
- [17] V. Gupta ve A. Aral, " A note on Sz'asz-Mirakyan-Kantorovich type operators preserving  $e^{-x}$ ," *Positivity*, c. 22, ss. 415-423, 2018.
- [18] T. Acar, M. C. Montano, P. Garrancho ve V. Leonessa, " On Bernstein-Chlodovsky operators preserving  $e^{-2x}$ ," *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, c. 26, sayı. 5, ss. 681–698, 2019.
- [19] F. Usta, "Approximation of functions with linear positive operators which fix 1,  $\phi$  and  $1, \phi^2$ ," *Analele Stiintifice Ale Universitatii Ovidius Constanta*, c. 28, sayı. 3, ss. 255-265, 2020.
- [20] D. D. Stancu, " On the monotonicity of the sequence formed by the first order derivatives of the Bernstein polynomials." *Mathematische Zeitschrift*, c. 98, ss. 46–51, 1967.
- [21] I. Chlodovsky, "Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynomes de M. S. Bernstein." *Compositio Mathematica* c. 4, ss. 380–393, 1937.
- [22] V. A. Baskakov, " An instance of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions." *Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.)* c. 113, ss. 249–251, 1957.
- [23] G. Bleimann, P. L. Butzer ve Hahn, " L. A Bernšte'in-type operator approximating continuous functions on the semi-axis." *Indagationes Mathematicae* c. 42, sayı. 3, ss. 255–262, 1980.
- [24] F. Usta ,M. Mursaleen ve I. Çakır, "Approximation Properties of Bernstein-Stancu Operators Preserving  $e^{-2x}$ ," *Filomat*, yayımlanmak üzere gönderildi, 2022.
- [25] A. Holhos, "The rate of approximation of functions in an infinite interval by positive linear operators," *Studia Univ. "Babes-Bolyai", Mathematica*, c. 24, sayı. 2, cc. 133-142, 2010.
- [26] T. Acar, A. Aral ve I. Raşa, " The new forms of Voronovskaya's theorem in weighted spaces," *Positivity*, c. 20, ss. 25-40, 2016.
- [27] H. Gonska, P. Pitul ve I. Raşa, " On Peano's form of the Taylor remainder, Voronovskaja's theorem and the commutator of positive linear operators.," *Cluj-Napoca, International Conference Numerical Analysis and Approximation Theory*, ss. 55-80, 2006.

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : İbrahim ÇAKIR

Yabancı Dili : İngilizce

## ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik.	DÜZCE Üniversitesi	Devam ediyor
Lisans	Matematik.	İNÖNÜ Üniversitesi	2017
Lise		KAHTA GAP ANADOLU Lisesi	2012