

**GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER, KARARLILIK
EŞİTSİZLİKLERİ VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

ECE EROĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN

Prof. Dr. İLHAME AMİRALİ

DÜZCE, 2023

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER, KARARLILIK
EŞİTSİZLİKLERİ VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Ece EROĞLU tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. İlhami AMİRALİ

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. İlhami AMİRALİ

Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Musa ÇAKIR

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi

Doç. Dr. Nejla ÖZMEN

Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 06/07/2023

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

06/07/2023

Ece EROĞLU

TEŞEKKÜRLER

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. İlhami AMİRALİ'ye en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Ayrıca öneri ve tavsiyelerini esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Gabil AMİRALİYEV'e şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

06/07/2023

Ece EROĞLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ	vii
TABLO LİSTESİ	viii
SİMGELER	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	3
2.2. BAŞLANGIÇ PROBLEMİNİN OLUŞTURULMASI.....	4
2.3. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI.....	6
3. ADIM YÖNTEMİ.....	7
3.1. BİR SABİT GECİKMESİ OLAN GECİKEN ARGÜMANLI DENKLEMLER.....	7
3.2. BİR DEĞİŞKEN GECİKMESİ OLAN GECİKEN ARGÜMANLI DENKLEMLER.....	20
3.3. NÖTR TİP DENKLEMLER.....	23
3.4. ADVANCED ARGÜMANLI DENKLEMLER	25
3.5. LİNEER DENKLEMLER.....	31
3.5.1. Geciken Argümanlı Denklemler	31
3.5.2. Pertürbe Olmuş Geciken Argümanlı Denklemler	36
3.5.3. Nötr Tip Denklemler	38
4. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ UYGULAMALARI.....	44

4.1. SABİT KATSAYILI GECİKEN ARGÜMANLI DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	44
5. GECİKMELİ SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ SINIR-DEĞER PROBLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ	47
5.1. SÜREKLİ PROBLEM.....	48
5.2. AYRIK PROBLEM	53
5.3. HATA DEĞERLENDİRMESİ	59
5.4. NÜMERİK SONUÇLAR.....	63
6. VOLTERRA GECİKMELİ İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMİ İÇİN KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ	67
6.1. GİRİŞ	67
7. SONUÇ.....	74
KAYNAKLAR.....	75
ÖZGEÇMİŞ.....	93

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1: Örnek 3.2.'nin grafiği	18
Şekil 2: Örnek 3.3.'ün grafiği	20
Şekil 3: Örnek 6.1.'in grafiği	72
Şekil 4: Örnek 6.2.'nin grafiği	73
Şekil 5: Örnek 6.2.'nin grafiği	73

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1: e_ε^N kesin hataları, hesaplanan ε hataları ve ω_N üzerinde p^N yakınsama hataları	65
---	----



SİMGELER

C	ε ve N 'den bağımsız değişken
$\bar{D}$	D kapalı bölgesi
ε	Singüler Pertürbasyon Parametresi
e^N	Şebekede Maksimum Hata
e_ε^N	Şebekede Kesin Hata
h	Şebekede Adım Uzunluğu
L	Diferansiyel Operatör
r	Gecikme Parametresi
u	İntegro-Diferansiyel Denklemin Kesin Çözümü
$\ \cdot\ $	Norm
y	Sonlu Fark Probleminin Çözümü
ω_N	Şebeke

ÖZET

GEÇİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER, KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Ece EROĞLU

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. İlhami AMİRALİ

Temmuz 2023, 81 sayfa

Bu çalışmada gecikmeli diferansiyel denklemlerin bir sınıflandırılması yapılarak, bir sabit gecikmesi olan geciken argümanlı denklemler, bir değişken gecikmesi olan geciken argümanlı denklemler, nötr denklemler, advanced argümanlı denklemler, pertürbe olmuş geciken argümanlı denklemler ve singüler pertürbe özellikli gecikmeli sınır-değer problemi incelenecektir. Daha sonra sabit katsayılı geciken argümanlı diferansiyel denklemlerin çözümü için Laplace dönüşümü uygulamaları yapılacaktır. Singüler pertürbe özellikli lineer sınır-değer probleminin nümerik çözümleri ele alınacaktır. Son olarak da gecikmeli integro-diferansiyel denklem için kararlılık eşitsizlikleri sunulacaktır. Verilen örneklerle teorik sonuçların nümerik sonuçlarla uyumlu olduğu gösterilecektir.

Anahtar sözcükler: Gecikmeli diferansiyel denklem, İntegro-diferansiyel denklem, Singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklem, Kararlılık eşitsizlikleri, Hata değerlendirmesi.

ABSTRACT

DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS, STABILITY INEQUALITIES AND NUMERIC SOLUTIONS

Ece EROGLU

Duzce University

Graduate School, Department of Mathematics

Master Thesis

Supervisor: Prof. Dr. İlhami AMIRALI

June 2023, 81 pages

In this study, giving the classification of differential equations with delayed argument, will be analyzed delay differential equations with constant delay, delay differential equations with variable delay, neutral equations, equations with advanced argument and singularly perturbed delay boundary-value problem. Then Laplace transformations will be applied to solve differential equations with constant coefficients and delay arguments. Numerical solutions of a singularly perturbed linear boundary-value problem are discussed. Finally, stability inequalities for an integro-differential equation with delay will be presented. Further numerical results will be provided to assist the theoretical estimates.

Keywords: Delay differential equation, Differential equation with singular perturbation, Error evaluation, Integral-differential equation, Stability inequalities

1. GİRİŞ

Çalışmanın

1. bölümünde konuya giriş yapılacaktır.
2. bölümünde tezde kullanılacak genel bilgilerden bahsedilecektir.
3. bölümünde türevi ve farkı birinci mertebeden sabit katsayılı lineer

$$a_0 u'(t) + a_1 u'(t)(t - \tau) + b_0 u(t) + b_1 u(t - \tau) = f(t)$$

gecikmeli diferansiyel denklem ele alınacaktır. Eğer $a_0 \neq 0$ ve $a_1 = 0$ ise bu denkleme *gecikmeli diferansiyel denklem*, $a_0 \neq 0$ ve $a_1 \neq 0$ ise *nötr diferansiyel denklem*, $a_0 = 0$ ve $a_1 \neq 0$ ise, *advanced diferansiyel denklem* denir. $a_0 = a_1 = 0$ ise denklem *fark denklemi* olur. $b_0 = b_1 = 0$ ise fark denklemine indirgenir. $a_0 = b_0 = 0$ ya da $a_1 = b_1 = 0$ ise bu denkleme *adi diferansiyel denklem* denir.

Uygulamalarda t genellikle zamanı simgeler. Gecikmeli diferansiyel denklem, geçmiş ve şimdiki nicelik değerlerine bağlı sistemin değişim oranının davranışını, nötr denklem sistemin geçmiş değerlerine bağlı olan niceliğin şimdikilere göre değişimini, advanced denklem ise sistemin niceliğinin şimdiki ve gelecek değerlerine bağlı değişimini ifade etmektedir.

Bu bölümde gecikmeli diferansiyel denklemlerin bir sınıflandırılması yapılarak, bir sabit gecikmesi olan geciken argümanlı denklemler, bir değişken gecikmesi olan geciken argümanlı denklemler, nötr denklemler, advanced argümanlı denklemler ve pertürbe olmuş geciken argümanlı denklemler incelenecektir.

4. bölümünde sabit katsayılı geciken argümanlı diferansiyel denklemlerin çözümü için Laplace dönüşümü uygulamaları verilecektir.
5. bölümünde singüler pertürbe özellikli lineer sınır-değer problemi ele alınacaktır.

Diferansiyel denklemler için singüler pertürbe özellikli problemler uygulamalı bilim dallarının birçok değişik alanlarında kullanılmaktadır. Örneğin, akışkanlar mekaniği, akışkanlar dinamiği, elastik kuantum mekaniği, plastik, kimyasal-reaktör teori, aerodinamik, plazma dinamik, manyetik dinamik, arıtılmış-gaz dinamik, oşinografi, meteoroloji, yayılma teori ve reaksiyon-difüzyon süreçleri vb. Bu tür problemler

matematiksel olarak, en yüksek merteben türevlerinin katsayılarının pozitif küçük bir parametre olduğu problemler olarak bilinmektedir. Böyle problemlerin çözümü, tanım bölgesinin bazı kısımlarında çok hızlı değişime sahiptir. Yani çözüm sınır katları denilen ince geçiş katlarında hızlı, diğer yerlerde ise düzenli ve yavaş değişir.

Bu bölümde singüler pertürbe özellikli gecikmeli sınır-değer problemi sonlu farklar metoduyla çözülecektir. Hata değerlendirmesi yapılarak nümerik sonuçlar verilecektir. Nümerik sonuçların teorik sonuçlarla uyumlu olduğu gösterilecektir.



2. GENEL BİLGİLER

2.1. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Aranan fonksiyon ve türevlerinin argümanının farklı değerleri ile verilen

$$F(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m_0)}(t), u(h_1(t)), u'(h_1(t)), \dots,$$

$$u^{(m_1)}(h_1(t)), \dots, u(h_n(t)), u'(h_n(t)), \dots, u^{(m_n)}(h_n(t))) = 0 \quad (2.1)$$

şeklindeki denkleme *gecikmeli diferansiyel denklem* denir. Burada t – bağımsız değişken, $u(t)$ aranan fonksiyon, $h_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ verilen fonksiyon, $u^{(j)}(h_i(t))$ ise $u(t)$ fonksiyonunun j . türevinin $z = h_i(t)$ noktasındaki değeridir. Çoğu zaman $h_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ fonksiyonları $h_i(t) = t - \tau_i(t)$ şeklinde yazılır. Bu durumda (2.1) denklemi

$$F(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m_0)}(t), u(t - \tau_1(t)), u'(t - \tau_1(t)), \dots,$$

$$u^{(m_1)}(t - \tau_1(t)), \dots, u(t - \tau_n(t)), u'(t - \tau_n(t)), \dots, u^{(m_n)}(t - \tau_n(t))) = 0 \quad (2.2)$$

şeklini alır. Burada $\tau_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ fonksiyonlarına *argümanın meyli* denir,

$\tau_i(t) \geq 0$ olduğunda ise *argümanın gecikmesi* denir. Özel olarak bazı durumlarda $\tau_i(t)$ sabit olduğunda (2.2) denklemine *diferansiyel – fark denklemi* denir.

Bu çalışmada

$$u^{(m_0)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m_0)}(t), u(t - \tau_1(t)), u'(t - \tau_1(t)), \dots,$$

$$u^{(m_1)}(t - \tau_1(t)), \dots, u(t - \tau_n(t)), u'(t - \tau_n(t)), \dots, u^{(m_n)}(t - \tau_n(t))) \quad (2.3)$$

$$\tau_i(t) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

şeklindeki denklemleri ele alacağız.

2.2. BAŞLANGIÇ PROBLEMİNİN OLUŞTURULMASI

Bir sabit gecikmesi olan

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau)), \quad \tau > 0 \quad (2.4)$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Burada $f(t, u_1, u_2)$ fonksiyonu t, u_1, u_2 değişkenleri uzayın bir G bölgesinde tanımlı bir fonksiyondur. Belli bir (t_0, T) aralığında diferansiyellenebilen $\varphi(t)$ fonksiyonu için

$$(t, \varphi(t), \varphi(t - \tau)) \in G, \quad t \in (t_0, T)$$

ve

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t), \varphi(t - \tau)), \quad t \in (t_0, T)$$

şartları sağlanıyorsa $u = \varphi(t)$ fonksiyonuna (2.4) denkleminin *bu aralıktaki çözümü* denir.

t argümanı (t_0, T) $(t_0 + \tau < T)$ aralığında değiştikçe $t - \tau$ argümanının da

$(t_0 - \tau, T - \tau)$ aralığında değişeceği açıktır. Bu sebepten (2.4) denkleminin

(t_0, T) 'de çözümü olan $u = \varphi(t)$ fonksiyonu $(t_0 - \tau, t_0]$ 'da tanımlanmalıdır. Bu durumda (2.4) denkleminin (t_0, T) aralığında belli bir çözümünü bulmak için

$(t_0 - \tau, t_0]$ aralığında ek şart vermelidir.

Tanım 2.1. $(t_0 - \tau, t_0]$ aralığında verilmiş $\varphi_0(t)$ fonksiyonuna eşit olan ve (t_0, T) aralığında (2.4) denklemini sağlayan fonksiyonun bulunması problemine *başlangıç problemi*, t_0 noktasına *başlangıç nokta*, $(t_0 - \tau, t_0]$ aralığına *başlangıç küme*, $\varphi_0(t)$ fonksiyonuna ise *başlangıç fonksiyonu* denir.

Çoğu zaman (2.4) probleminin çözümünün $[t_0, T)$ aralığında bulunması gerekebilir. Bu durumda t argümanı $[t_0, t_0 + T]$ $(t_0 + \tau < T)$ aralığında değiştiğinde, $t - \tau$

argümanı $[t_0 - T, t_0]$ aralığında değişecektir. Bu sebepten (2.4) denkleminin $[t_0, T)$ aralığında çözümünü bulmak için başlangıç küme olarak $E_{t_0} = [t_0 - \tau, t_0]$ aralığı, başlangıç fonksiyon olarak da bu aralıkta tanımlı belli bir $\varphi_0(t)$ fonksiyonu ele alınır.

Şimdi de (2.3) problemi için başlangıç problemi oluşturalım. $t_0 \in (t_0, T)$ için $t - \tau_i(t)$ fonksiyonunun t_0' dan küçük değerler kümesini E_i ile gösterelim yani

$$E_i = \{z: z = t - \tau_i(t) < t_0, \quad t_0 < t < T\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Bu kümelerden oluşan $\{E_i\}$ kümesine *başlangıç küme*, başlangıç kümede tanımlı ve p . ($p = \max_{1 \leq i \leq n} \{m_i\}$) mertebeden türevi olan $\varphi_0(t)$ fonksiyonuna *başlangıç fonksiyon* denir.

t_0 noktasında

$$u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_1, \dots, \quad u^{(m_0-1)}(t_0) = u_{m_0-1} \quad (2.5)$$

başlangıç koşulları verildiğini varsayalım. Özel olarak, $\{E_i\}$ kümesi boş olduğunda (2.3) denklemi için başlangıç problemi bu denklemin (2.5) şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemidir.

Not 2.1. (2.3) denkleminin $[t_0, T)$ aralığında çözümünü bulmak için genellikle başlangıç küme olarak t_0 ile $\{E_i\}$ kümesinin birleşiminden oluşan E_{t_0} kümesi, başlangıç fonksiyon olarak da E_{t_0} kümesinde p . mertebeden türevi olan $\varphi_0(t)$ fonksiyonu ve

$$u_0 = \varphi_0(t), \quad u_1 = \varphi_0'(t_0), \dots, \quad u_p = \varphi_0^{(p)}(t_0)$$

ele alınır.

Bazı durumlarda gecikme aranan fonksiyon ve onun türevlerine bağlı olmaktadır. Bu tür denklemler için başlangıç küme tanımlamak daha zordur. Bu sebepten böyle denklemleri araştırırken çoğu zaman başlangıç küme olarak $(-\infty, t_0]$ aralığı alınır ve başlangıç problem ise yukarıdaki gibi oluşturulur.

2.3. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

(2.3) denklemi için ele alınan başlangıç problemin çözümünün varlığı ve özellikleri m_0 ve $p = \max_{1 \leq i \leq n} \{m_i\}$ sayıları arasında mümkün olan $m_0 > p$, $m_0 = p$, $m_0 < p$ durumlarından hangisinin sağlanacağına bağlıdır. Bu sebepten (2.3) denklemi üç sınıfa ayrılır:

$m_0 > p$ olduğunda (2.3) denklemi *geciken argümanlı*,

$m_0 = p$ olduğunda *nötr tip*,

$m_0 < p$ olduğunda ise *advanced tip*

diferansiyel denklem olarak adlandırılmaktadır. Örnek olarak;

$u'(t) = u(t - 1)$ denklemi *geciken argümanlı*,

$u'(t) = u(t) - u'(t - 1)$ denklemi *nötr tip*,

$u'(t) = u''(t - 1) + u(t)$ denklemi ise *advanced tip* diferansiyel denklemlerdir.

Uygulamalı problemlerde en çok geciken argümanlı diferansiyel denklemler ile karşılaşmaktadır ve bu tip problemler daha çok araştırılmıştır.

3. ADIM YÖNTEMİ

3.1. BİR SABİT GECİKMESİ OLAN GECİKEN ARGÜMANLI DENKLEMLER

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau)), \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0} \quad (3.2)$$

problemini ele alalım. Burada $\tau > 0$ sabit gecikme, $\varphi_0(t)$ fonksiyonu E_{t_0} ' da, $f(t, u_1, u_2)$ fonksiyonu ise $G = \{t \geq t_0, -\infty < u_i < \infty, i = 1, 2\}$ kümesinde süreklidir.

Öncelikle bu bölümde kullanacağımız, çözümün varlığı hakkındaki Peano Teremi'ni verelim:

Çözümün Varlığı Hakkında Peano Teoremi

$$y' = f(x, y) \quad (3.3)$$

denkleminin

$$y(x_0) = y_0 \quad (3.4)$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünün bulunması gerektiğini varsayalım. $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesinde sürekli ve $(x_0, y_0) \in D$. Diferansiyel denklemin belli koşulları sağlayan çözümünün varlık ve tekliğini araştırmak için en yaygın metotlardan biri uygun integral denklemi kullanmaktır. (3.3) denkleminin (3.4) koşulunu sağlayan çözümünün varlık probleminin

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad (3.5)$$

integral denkleminin sürekli çözümünün varlık problemine denk olduğu gösterelim.

$y = \varphi(x)$ fonksiyonunun (3.3) denkleminin (3.4) başlangıç koşulunu sağlayan ve (α, β) ($\alpha < x_0 < \beta$) aralığında tanımlı çözümü olduğunu varsayalım. Yani (α, β) aralığında

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

özdeşliği sağlanır. $\varphi(x_0) = y_0$ olduğu dikkate alınarak özdeşlik x_0 'dan x 'e kadar integrallenirse,

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds \quad x \in (\alpha, \beta)$$

denklemini elde edilir.

Buradan (3.3) denkleminin (3.4) başlangıç koşulunu sağlayan her bir çözümünün aynı zamanda (3.5) integral denkleminin çözümü olduğu görülür. Tersini varsayalım.

$y = \psi(x)$ fonksiyonu (α, β) aralığında (3.5) integral denkleminin sürekli çözümü olsun. Bu durumda (α, β) aralığında

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \psi(s)) ds \quad (3.6)$$

eşitliği sağlansın. $\psi(x)$ ve $f(x, y)$ fonksiyonları sürekli olduğundan $f(x, \psi(x))$ fonksiyonu (α, β) aralığında süreklidir.

$$\left(\int_{x_0}^x f(s, \psi(s)) ds \right)' = f(x, \psi(x))$$

olduğu için (3.6) denkleminde $\psi(x)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğu ve $\psi'(x) \equiv f(x, \psi(x))$ özdeşliği elde edilir. Diğer taraftan (3.6) eşitliğinde $x = x_0$ yazılırsa $\psi(x_0) = y_0$ olur. Yani (3.5) integral denkleminin her bir sürekli çözümü (3.3) diferansiyel denkleminin (3.4) başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olacaktır. Dolayısıyla (3.3) denkleminin (3.4) başlangıç şartını sağlayan çözümünün varlık ve teklik problemleri yerine (3.6) integral denkleminin sürekli çözümünün varlığı ve tekliğini araştırmak yeterlidir.

Teorem 3.1. Peano Teoremi $f(x, y)$ fonksiyonunun

$R = \{x_0 \leq x \leq x_0 + a; y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ bölgesinde sürekli olduğu varsayalım. Bu durumda (3.3) denkleminin (3.4) koşulunu sağlayan ve $[x_0, x_0 + a]$ aralığında tanımlı en az bir çözümü vardır; burada

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max |f(x, y)|.$$

İspat

Genelliği bozmaksızın $x_0 = 0$ kabul edilsin ve $h_m = \frac{\alpha}{2^m}$ alınarak, $[0, \alpha]$ aralığında tanımlı

$$\varphi_m(0) = y_0$$

$$\varphi_m(x) = \varphi_m(rh_m) + f(rh_m, \varphi_m(rh_m))(x - rh_m), \quad (3.7)$$

$$x \in [rh_m, (r+1)h_m], \quad m = 1, 2, \dots, \quad r = 0, 1, 2, \dots, (2^m - 1)$$

fonksiyonlar dizisi oluşturulsun.

Her bir m ($m = 1, 2, \dots$) sayısı ve $x \in [0, \alpha]$ için öyle n ($0 \leq n \leq 2^m - 1$) vardır ki, $x \in [nh_m, (n+1)h_m]$ olur. Öte yandan $(n+1)h_m \leq \alpha$ olduğu dikkate alınırsa

$$|\varphi_m(x) - y_0| \leq \sum_{r=0}^n |f(rh_m, \varphi_m(rh_m))| h_m \leq M(n+1)h_m \leq M\alpha \leq b$$

yazılabilir. Böylece $\{\varphi_m(x)\}$ dizisinin $[0, \alpha]$ aralığında düzgün sınırlı olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi de $[0, \alpha]$ aralığından alınan keyfi x' ve x'' için

$$|\varphi_m(x^n) - \varphi_m(x')| \leq M|x^n - x'|, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki durumları ele alalım:

- 1) x' ve x'' değerlerinin ikisi de $[rh_m, (r+1)h_m]$ aralığından alınsın. Bu durumda (3.7)'den

$$|\varphi_m(x^n) - \varphi_m(x')| = |f(rh_m, \varphi_m(rh_m))| |x^n - x'| \leq M|x^n - x'|.$$

- 2) x' ve x'' komşu aralıklardan olsun:

$$(r-1)h_m \leq x' \leq rh_m \leq (r+1)h_m.$$

Bu durumda

$$\varphi_m(x^n) - \varphi_m(x') = [\varphi_m(x^n) - \varphi_m(rh_m)] + [\varphi_m(rh_m) - \varphi_m(x')]$$

ifadesi yazılarak her bir toplanan yukarıdaki şekilde değerlendirilir:

$$\begin{aligned} |\varphi_m(x^n) - \varphi_m(x')| &= |\varphi_m(x^n) - \varphi_m(rh_m)| + |\varphi_m(rh_m) - \varphi_m(x')| \\ &\leq M(x^n - rh_m) + M(rh_m - x') \\ &= M(x^n - x') \end{aligned}$$

- 3) x' ve x'' için öyle r ve n tamsayıları vardır ki,

$$x' \leq nh_m \leq \dots \leq (n+r)h_m \leq x^n.$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} \varphi_m(x^n) - \varphi_m(x') &= [\varphi_m(x^n) - \varphi_m((n+r)h_m)] \\ &\quad + [\varphi_m((n+r)h_m) - \varphi_m((n+r-1)h_m)] \end{aligned}$$

$$+ \dots + [\varphi_m(nh_m) - \varphi_m(x')]$$

ifadesi yazılarak

$$|\varphi_m(x^n) - \varphi_m(x')| \leq M(x^n - x')$$

elde edilir.

Böylece $\{\varphi_m(x)\}$ dizisi için (3.8) eşitsizliğinin sağlandığı söylenebilir. Buradan $\{\varphi_m(x)\}$ dizisinin aynı dereceden sürekli olduğu görülür. Arzela Teoremi'ne göre $\{\varphi_m(x)\}$ dizisinden $[0, \alpha]$ aralığında düzgün yakınsak

$\varphi_k(x) = \varphi_{m_k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) alt dizisi seçilebilir. Dizinin her bir terimi sürekli olduğundan $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = \psi(x)$ limit fonksiyonu $[0, \alpha]$ aralığında sürekli olur.

Şimdi de $y = \psi(x)$ fonksiyonunun $[0, \alpha]$ aralığında (3.3) denkleminin $\psi(0) = y_0$ koşulunu sağlayan çözümü olduğu gösterelim. Bunun için $[0, \alpha]$ aralığında $\psi(x)$ fonksiyonunun

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(s, y(s)) ds \quad (3.9)$$

integral denklemini sağladığı göstereceğiz.

Herhangi bir $x \in (0, \alpha]$ noktası alınsın ve $l_k = \left\| \frac{x}{\delta_k} \right\|$ ($\delta_k = h_{m_k}$) olsun.

$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k l_k = x$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(\delta_k l_k) = \psi(x)$ olacağı açıktır. (3.7)'den

$$\psi_k(0) = y_0$$

$$\psi_k(x) = \psi_k(r\delta_k) + f(r\delta_k, \psi_k(r\delta_k))(x - r\delta_k), \quad x \in [r\delta_k, (r+1)\delta_k],$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad r = 0, 1, 2, \dots, (2^{m_k} - 1)$$

yazılabilir.

Özel olarak $x = (r + 1)\delta_k$ alınırsa

$$\psi_k((r+1)\delta_k) = \psi_k(r\delta_k) + f(r\delta_k, \psi_k(r\delta_k))\delta_k$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte r 'ye $0, 1, \dots, l_k - 1$ değerleri verilip elde edilen eşitlikler toplanırsa

$$\psi_k(l_k, \delta_k) = y_0 + \sum_{r=0}^{l_k-1} f(r\delta_k, \psi_k(r\delta_k)) \delta_k \quad (3.10)$$

olur.

İkinci toplam da

$$\psi_k(l_k, \delta_k) = y_0 + \sum_{r=0}^{l_k-1} f(r\delta_k, \psi_k(r\delta_k)) \delta_k =]_k^1 +]_k^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$]_k^1 = \sum_{r=0}^{l_k-1} f(r\delta_k, \psi(r\delta_k)) \delta_k + f(l_k\delta_k, \psi(l_k\delta_k))(x - l_k\delta_k),$$

$$]_k^2 = \sum_{r=0}^{l_k-1} f(r\delta_k, \psi(r\delta_k)) - f(r\delta_k, \psi(r\delta_k))\delta_k - f(l_k\delta_k, \psi(r\delta_k))(x - l_k\delta_k).$$

$]_k^1$ değeri $f(s, \psi(s))$ $[0, x]$ aralığındaki integral toplamıdır. Bu sebeple

$$\lim_{x \rightarrow \infty}]_k^1 = \int_0^x f(s, \psi(s)) ds$$

olur.

$\{\varphi_m(x)\}$ dizisi $[0, \alpha]$ aralığında $\psi(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğundan keyfi $\delta > 0$ sayısı için öyle K_δ sayısı vardır ki, $k > K_\delta$ olduğunda

$$|\psi_k(x) - \psi(x)| < \delta, \quad x \in [0, \alpha]$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca, $f(x, y)$ fonksiyonu kapalı R bölgesinde sürekli olduğundan keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için δ sayısı yeterince küçük alınarak $k > K_\delta$ ve $r = 0, 1, 2, \dots, (2^{m_k} - 1)$ için

$$|f(r\delta_k, \psi(r\delta_k)) - f(r\delta_k, \psi(r\delta_k))| < \varepsilon$$

yazılabilir. Bunlar $]_k^2$ 'nin ifadesinde dikkate alınır

$$|]_k^2| \leq \varepsilon l_k \delta_k + M|x - l_k \delta_k|$$

olur. $\lim_{k \rightarrow \infty} |x - l_k \delta_k| = 0$ olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ||_k^2| \leq \varepsilon(x + 1)$$

elde edilir. Burada ε yeterince küçük seçilebileceği için $\lim_{k \rightarrow \infty} ||_k^2| = 0$ olur. Böylece

$k \rightarrow \infty$ için (3.10) eşitliğinin limiti alınır

$$\psi(x) = y_0 + \int_0^x f(s, \psi(s)) ds$$

integral denklemi elde edilir. $x, (0, \alpha]$ aralığından alınan keyfi bir değer olduğundan $y = \psi(x)$ fonksiyonu $[0, \alpha]$ aralığında (3.9) integral denkleminin sürekli çözümü olur.

$\{\varphi_m(x)\}$ dizisinin $\psi(x)$ 'ten farklı bir fonksiyona yakınsayan alt dizisi seçilirse bu fonksiyon da (3.3) denkleminin $y(0) = y_0$ koşulunu sağlayan çözümü olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç: Teoremin koşulları dahilinde (3.3) denkleminin $y(0) = y_0$ koşulunu sağlayan çözümü $[0, \alpha]$ aralığında tek ise (3.7) formülleri ile tanımlanan $\{\varphi_m(x)\}$ dizisi $[0, \alpha]$ aralığında çözüme düzgün yakınsar.

İspat

$y = \psi(x)$ fonksiyonunun $[0, \alpha]$ aralığında (3.3) denkleminin $y(0) = y_0$ koşulunu sağlayan tek çözümü olduğu varsayalım. Keyfi $\varepsilon > 0$ için öyle N sayısı vardır ki, $m > N$ olduğunda

$$|\varphi_m(x) - \psi(x)| < \varepsilon, \quad x \in [0, \alpha]$$

eşitsizliği sağlanır. Bunu göstermek için tersi düşünülürse, öyle $\varepsilon_0 > 0$ sayısı $\{\varphi_m(x)\}$ dizisi ve $x_0 \in (0, \alpha]$ noktası bulunabilir ki, her bir $k = 1, 2, \dots$ için

$$|\varphi_{m_k}(x_0) - \psi(x_0)| \geq \varepsilon_0 \quad (3.11)$$

olur.

$\{\varphi_{m_k}(x)\}$ dizisi düzgün sınırlı ve aynı dereceden sürekli olduğundan Arzela Teoremi'ne göre bu diziden $[0, \alpha]$ aralığında (3.3) denkleminin $y(0) = y_0$ koşulunu sağlayan çözümüne yakınsayan alt dizisi seçilebilir. Genelliği bozmamak için böyle bir

dizi olarak $\{\varphi_{m_k}(x)\}$ dizisi seçilebilir. Bu yolla oluşturulan çözüm $y = \varphi(x)$ ile gösterilsin. (3.11) eşitsizliğinde limite geçilirse

$$|\varphi(x_0) - \psi(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

elde edilir. Bu da çözümün tekliği ile çelişir. $\square$

Not 3.1 Denklemin bir noktadan geçen integral eğrilerinin tümü her zaman Euler kırık eğrileri yardımıyla oluşturulamaz.

Örnek 3.1 $y' = y^{\frac{1}{3}}$ denkleminin $[0, 1]$ aralığında $y(0) = 0$ koşulunu sağlayan tanımlı sonsuz çözümü vardır.

Çözüm: Gerçekten de $0 \leq \alpha \leq 1$ koşulunu sağlayan keyfi α için

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \alpha \\ \left[\frac{2(x - \alpha)}{3} \right]^{\frac{3}{2}}, & \alpha < x \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu denklemin $y(0) = 0$ şartını sağlayan çözümüdür. Özel olarak $\alpha = 1$

alınır, $\varphi_1(x) = 0$ çözümü elde edilir. $y' = y^{\frac{1}{3}}$ denklemi için $(0, 0)$ noktasından geçen Euler kırık eğrisi oluşturulursa bu kırık eğrilerin hepsi $\varphi_1(x) = 0$ doğrusu ile çakışır yani integral eğrisi olur.

İlk olarak (3.1)-(3.2) probleminin $I_1 = [t_0, t_0 + \tau]$ aralığındaki çözümüne bakalım.

$t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ olduğunda $t_0 - \tau \leq t - \tau \leq t_0$ olacağı açıktır. Bu sebepten $t \in I_1$ için $u(t - \tau) = \varphi_0(t - \tau)$ olur ve ele alınan problem

$$u'(t) = f(t, u(t), \varphi_0(t - \tau)) \quad (3.12)$$

adi diferansiyel denkleminin

$$u(t_0) = \varphi_0(t_0) \quad (3.13)$$

koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine dönüşür.

Burada $g_0(t, u) = f(t, u, \varphi_0(t - \tau))$ fonksiyonu $G_0 = \{t_0 \leq t \leq t_0 + \tau, -\infty < u < \infty\}$ kümesinde sürekli olduğundan çözümün varlığı hakkındaki Peano Teoremi'ne göre, (3.12)-(3.13) probleminin belli bir $[t_0, t_0 + a]$ ($0 < a \leq \tau$) aralığında tanımlı en az bir çözümü vardır. $a < \tau$ olduğunda çözümün I_1 aralığında devam ettirilebilen olduğunu varsayalım. Bu çözümü $\varphi_1(t)$ ile gösterelim ve (3.1)-(3.2) probleminin

$I_2 = [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ aralığındaki çözümünü bulalım. Bu aralıkta

$u(t - \tau) = \varphi_1(t - \tau)$ olduğundan ele alınan problem

$$u'(t) = f(t, u, \varphi_1(t - \tau)) \quad (3.14)$$

adi diferansiyel denkleminin

$$u(t_0 + \tau) = \varphi_1(t_0 + \tau) \quad (3.15)$$

koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine dönüşür.

$g_1(t, u) = f(t, u, \varphi_1(t - \tau))$ fonksiyonu $G_1 = \{t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau, -\infty < u < \infty\}$ kümesinde sürekli olduğundan (3.14)-(3.15) probleminin çözümü vardır. (3.14)-(3.15) probleminin $\varphi_2(t)$ çözümünün I_2 'de tanımlı olduğunu varsayalım. Bu durumda

$I_3 = [t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau]$ aralığında $u(t - \tau) = \varphi_2(t - \tau)$ olur ve bu aralıkta ele alınan problemin çözümü

$$u'(t) = f(t, u, \varphi_2(t - \tau)) \quad (3.16)$$

adi diferansiyel denklemin

$$u(t_0 + 2\tau) = \varphi_2(t_0 + 2\tau) \quad (3.17)$$

koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine dönüşür. Süreç bu şekilde devam ettirilirse (3.1)-(3.2) probleminin çözümü olan

$$u = \begin{cases} \varphi_0(t), & t \in E_{t_0} \\ \varphi_1(t), & t \in I_1 \\ \varphi_2(t), & t \in I_2 \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (3.18)$$

fonksiyonu elde edilir.

Başlangıç probleminin çözümünün yukarıdaki metotla bulunması yöntemine *adım yöntemi* veya *ardışık integralleme metodu* denir.

Adım yönteminin özelliği her bir sonlu aralıkta meydana gelen argümanlı diferansiyel denklemden adi diferansiyel denkleme geçilmesidir. Bu yöntemle elde edilen çözümün düzgünlüğünü incelemek için $f(t, u_1, u_2)$ fonksiyonunun G kümesinde her mertebeden sürekli türevlerinin sahip olduğunu varsayalım. Verilen koşullar dahilinde (3.1)-(3.2) probleminin tek bir çözümü vardır.

Teorem 3.2. Çözümün Düzgünlüğü Hakkında. D bölgesinde $f(u, v)$ fonksiyonunun u, v değişkenlerine göre p . ($p \geq 0$) mertebeye kadar sürekli özel türevlerinin olduğunu varsayalım (p . türevi de dahil olmak üzere). Bu D bölgesinde verilmiş $v' = f(u, v)$ denkleminin istenilen çözümünün tanımlı olduğu aralıkta $(p + 1)$. mertebeden sürekli türevi vardır ($p = 0$. türev denildiğinde fonksiyonun kendisi anlaşılmaktadır).

Teorem 3.2'ye göre (3.12)-(3.13) probleminin $\varphi_1(t)$ çözümünün I_1 aralığında sürekli türevi vardır. Fakat (3.18) formülü ile tanımlı t_0 noktasında türevli olmayabilir. $\varphi_0(t)$ fonksiyonunun E_{t_0} 'da sürekli türevi varsa çözümün t_0 noktasında sürekli türevinin varlığı için

$$\varphi'(t_0 - 0) = f(t_0, \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0 - \tau)) \quad (3.19)$$

koşulunu sağlaması gerektiğini gösterelim. Gerçekten de (3.18) fonksiyonunun t_0 noktasındaki sol türevi $\varphi'_0(t_0 - 0)$, sağ türevi ise

$\varphi'_1(t_0 + 0) = f(t_0, \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0 - \tau))$ olacaktır. Bu türevlerin eşitliğinden (3.19) koşulu çıkar.

Şimdi de Teorem 3.2'yi (3.14)-(3.15) problemin çözümüne uygulayalım.

$g_1(t, u) = f(t, u, \varphi_1(t - \tau))$ fonksiyonunun G'_1 'de sürekli ve birinci mertebeden sürekli türeve sahip olduğu görülmektedir. Bu sebepten de (3.14)-(3.15) probleminin $\varphi_2(t)$ çözümünün I_2 aralığında ikinci mertebeden türevi yoktur. Fakat $\varphi_0(t)$ fonksiyonunun sürekli türevi varsa ve (3.19) koşulu sağlamıyorsa çözümün $t_0 + \tau$ noktasında ikinci mertebeden sürekli türevi vardır.

Bu muhakemeleri (3.16)-(3.17) problemi için de yürütürsek (3.18) fonksiyonunun $(t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau)$ aralığında üçüncü mertebeden sürekli türeve sahip olduğunu görürüz. Bunun dışında, $t_0 + 2\tau$ noktasındaki ikinci mertebeden türev süreklidir. Genel olarak (3.18) fonksiyonunun $t_0 + 2\tau$ noktasında üçüncü türevi yoktur. Aynı muhakemeleri sonraki aralıklar için de yürütürsek (3.1)-(3.2) probleminin çözümünün integralden integrale geçtikçe bir birim düzgünleştğini görürüz.

Örnek 3.2.

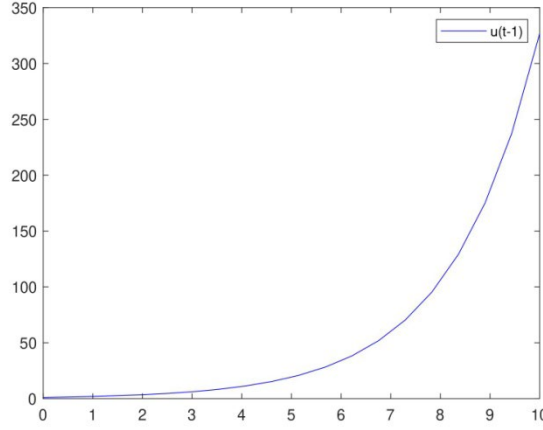
$$u'(t) = u(t - 1), u(t) = 1, \quad t \in [0, 1]$$

probleminin adım yöntemi ile çözümü

$$u = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 + (t - 1), & 1 < t \leq 2 \\ 1 + (t - 1) + \frac{(t - 2)!}{2!}, & 2 < t \leq 3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

şeklinde olacaktır. Bu çözüm $u = \sum_{k=0}^n \frac{(t-k)^k}{k!}$, $n < t \leq n + 1$ formülü ile ifade edilebilir. Denklemin sağ tarafının ve başlangıç fonksiyonunun istenilen her mertebeden türevi olmasına rağmen çözümün $t = 1$ noktasında birinci, $t = 2$ noktasında ikinci vs., $t = n$ noktasında da n . mertebeden türevi yoktur.

Örnek 3.2.'nin grafiği aşağıda Şekil 1'de gösterilmiştir.



Şekil 1: Örnek 3.2.'nin grafiği

Not 3.2. m sayıda sabit $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_m$ gecikmesi olan

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau_1), \dots, u(t - \tau_m)) \quad (3.20)$$

denkleminin

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0} = [t_0 - \tau_m, t_0] \quad (3.21)$$

şartını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım. Burada

$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$. İlk olarak problemin $[t_0, t_0 + \tau_1]$ aralığındaki çözümünü oluşturalım. Açık ki, $t \in [t_0, t_0 + \tau_1]$ olduğunda $t - \tau_1 \in E_{t_0}, \dots, t - \tau_m \in E_{t_0}$. Bu yüzden $[t_0, t_0 + \tau_1]$ aralığında $u(t - \tau_1) = \varphi_0(t - \tau_1), \dots, u(t - \tau_m) = \varphi_0(t - \tau_m)$ olur ve ele alınan problem

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau_1), \dots, u(t - \tau_m))$$

adi diferansiyel denkleminin $u(t_0) = \varphi_0(t_0)$ koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine dönüşür. Problemin $[t_0, t_0 + \tau_1]$ aralığında çözümünü $\varphi_1(t)$ ile gösterelim ve ikinci adım olarak da $[t_0 + \tau_1, t_0 + 2\tau_1]$ aralığını ele alalım. Bu aralıktaki t 'ler için $t - \tau_i \in [t_0 + \tau_1 - \tau_i, t_0 + 2\tau_1 - \tau_i], i = 1, 2, \dots, m$ olduğundan $u(t - \tau_i)$ değerleri $\varphi_0(t)$ ve $\varphi_1(t)$ ile ifade edilir. Bu sebepten

$$\psi_1(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t_0 - \tau_m \leq t \leq t_0 \\ \varphi_1(t), & t_0 < t \leq t_0 + \tau_1 \end{cases}$$

olarak gösterirsek ikinci adımda (3.20)-(3.21) probleminin çözümü

$u'(t) = f(t, u, \psi_1(t - \tau_1), \dots, \psi_1(t - \tau_m))$ adi diferansiyel denkleminin

$u(t_0 + \tau_1) = \psi_1(t_0 + \tau_1)$ koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine dönüşür.

Örnek 3.3. $u'(t) = 2u(t - 0.6) - u(t - 1)$ probleminin $u(t) = 1, -1 \leq t \leq 0$ koşulunu sağlayan çözümünü adım metodu ile bulunuz.

Birinci adım olarak $[0, 0.6]$ aralığını almamız gerek. Bu aralıkta incelenen problem $u' = 1, u(0) = 1$ probleminin çözümünün bulunmasına dönüşür. $u = 1 + t$ fonksiyonunun son problemin çözümü olduğu açıktır. Bu sebepten

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t < 0 \\ 1 + t, & 0 < t \leq 0.6 \end{cases}$$

ise $[0.6, 1.2]$ aralığında ele alınan problem

$$u' = 2\varphi(t - 0.6) - \varphi(t - 1)$$

$$u(0.6) = 1.6$$

problemine dönüşür. Buradan

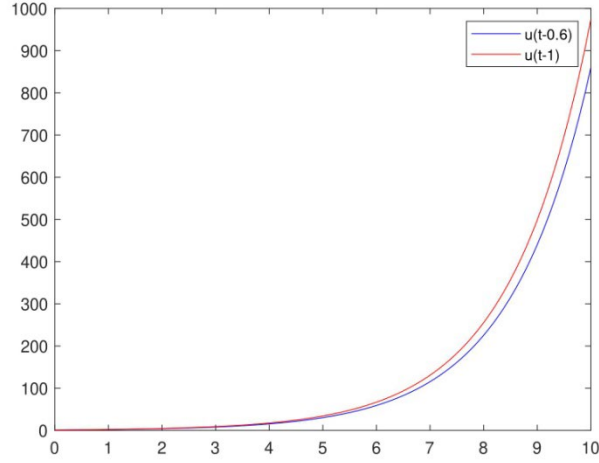
$$u' = \begin{cases} 2t - 0.2, & 0.6 < t \leq 1 \\ t + 0.8, & 1 < t \leq 1.2 \end{cases}$$

ve böylece

$$u = \begin{cases} t^2 - 0.2t + 1.36, & 0.6 < t \leq 1 \\ 0.5t^2 + 0.8t + 0.86, & 1 < t \leq 1.2 \end{cases}$$

olur. Bu şekilde çözümü istenilen sonlu aralığa kadar devam ettirebiliriz.

Örnek 3.3.'ün grafiği aşağıda Şekil 2'de gösterilmiştir.



Şekil 2: Örnek 3.3.'ün grafiği

3.2. BİR DEĞİŞKEN GECİKMESİ OLAN GECİKEN ARGÜMANLI DENKLEMLER

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau(t))), \quad (3.22)$$

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0} \quad (3.23)$$

problemini ele alalım. Burada $\tau(t) \geq 0$, $\varphi_0(t)$ ve $f(t, u_1, u_2)$ fonksiyonları sırasıyla $[t_0, T]$, E_{t_0} ve $G = \{t_0 \leq t \leq T, -\infty < u_i < \infty, i = 1, 2\}$ aralıklarında sürekli.

Aşağıdaki durumları inceleyelim:

- $\inf_{t_0 \leq t \leq T} \tau(t) = \Delta > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda t argümanı $I_1 = [t_0, t_0 + \Delta]$ ($t_0 + \Delta < T$) aralığında değişirse $h(t) = t - \tau(t) \leq t_0$ olur. Bu sebepten I_1 aralığında (3.13)-(3.14) probleminin çözümü

$$u' = f(t, u, \varphi_0(t - \tau(t))) \quad (3.24)$$

adi diferansiyel denkleminin

$$u(t_0) = \varphi_0(t_0) \quad (3.25)$$

koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine dönüşür.

Problemin şartları dahilinde $g_0(t, u) = f(t, u, \varphi_0(t - \tau(t)))$ fonksiyonu

$G_1 = \{t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta, -\infty < u < \infty\}$ kümesinde sürekli olduğundan Peano

Teoremi'ne göre (3.24)-(3.25) probleminin belli bir $[t_0, t_0 + \alpha]$ ($0 < \alpha \leq \Delta$)

aralığında en az bir $\varphi_1(t)$ çözümü vardır. O halde

$$\psi_1(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t \in E_{t_0} \\ \varphi_1(t), & t \in (t_0, t_0 + \alpha] \end{cases}$$

fonksiyonu $[t_0, t_0 + \alpha]$ aralığında (3.22)-(3.23) probleminin çözümü olur. Bu çözümün

I_1 aralığında devam ettirildiğini varsayalım ve (3.22)-(3.23) problemini

$I_2 = [t_0 + \Delta, t_0 + 2\Delta]$ ($t_0 + 2\Delta < T$) aralığında ele alalım. Verilen problem

$$u' = f(t, u, \psi_1(t - \tau(t)))$$

diferansiyel denklemin

$$u(t_0 + \Delta) = \varphi_0(t_0 + \Delta)$$

koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine dönüşür. Böylece

$\inf_{t_0 \leq t \leq T} \tau(t) = \Delta > 0$ olduğunda (3.22)-(3.23) probleminin çözümüne adım metodu

uygulamak ve her adımda çözüm bulmak mümkündür.

- $\tau(t)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\tau(t) < 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $h(t) = t - \tau(t)$ fonksiyonu kesin olarak monoton artan olur. Bu yüzden $E_{t_0} = [t_0 - \tau(t_0), t_0]$ ve $h(t)$ fonksiyonunun tersi vardır. $h(t)$ fonksiyonunun tersini $\gamma(t)$ ile gösterelim. Önce $\gamma(t_0) > t_0$ durumunu inceleyelim. Bu durumda $t \in \varepsilon_{t_0} = [t_0, \gamma(t_0)]$ için $h(t) \leq t_0$ olur ve ε_{t_0} içerisinde t bulunduran en büyük aralıktır. Birinci adımda (3.22)-(3.23) problemine ε_{t_0} aralığında bakalım. Bu durumda problem ε_{t_0} aralığında (3.24)-(3.25)'in çözümünün bulunması problemine dönüşür.

Aşıkardır ki, $\gamma(t_0) = t_0$ olduğunda ε_{t_0} sadece t_0 noktasında oluşur. Öte yandan $\gamma(h(t_0)) = t_0$ ve $\gamma(t)$ monoton artan fonksiyon olduğundan, $E_{t_0} = \{t_0\}$ olur. Bu ise ancak $\tau(t_0) = 0$ olduğunda mümkündür. Bu sebepten $\gamma(t_0) = t_0$ olduğunda adım metodu uygulanamaz ve bu duruma *özel durum* denir. Özel durum olmadığı ve (3.24)-(3.25) probleminin çözümü olan $u = \varphi_1(t)$ fonksiyonu ε_{t_0} aralığında tanımlı olduğunda ikinci adımda (3.22)-(3.23) probleminin çözümüne $\varepsilon_{\gamma(t_0)} = [\gamma(t_0), \gamma(\gamma(t_0))]$ aralığında bakılır. Bu aralıkta ele alınan problemin çözümü

$$\begin{aligned} u' &= f(t, u, \varphi_1(t - \tau(t))), \\ u(\gamma(t_0)) &= \varphi_1(\gamma(t_0)) \end{aligned}$$

probleminin çözümüne dönüşür.

Not 3.3. Bazı durumlarda $\tau(t_0) = 0$ olduğunda da adım metodu uygulanır.

Örnek 3.4. $t \geq 0$ da $u'(t) = u(t - \sqrt{t})$ denklemini ele alalım. Burada $\tau(t) = \sqrt{t}$ olduğundan, $t_0 = 0$ noktası için $\tau(0) = 0$, $t \geq 0$ için $h(t) = t - \sqrt{t}$ fonksiyonunun $t - \sqrt{t} \leq 0$ koşulunu sağlayan değer kümesi $E_{t_0} = [-\frac{1}{4}, 0]$ olduğundan bu denkleme adım metodu uygulanır.

Denklemin $u(t) = 1$, $t \in E_{t_0}$ şartını sağlayan çözümünü iki adım için bulalım.

Birinci adımda problem $\varepsilon_0 = [0, 1]$ aralığında incelenir ve bu aralıkta $u(t) = 1 + t$, $t \in \varepsilon_0$, $u' = 1$, $u(0) = 1$ problemi elde edilir. İkinci adımda $t_0 = 1$ ve $t \geq 1$ için $h'(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{t}} < 1$ olduğundan buraya ikinci durum uyar. O halde

$$\gamma(t) = \frac{2t + 1 + \sqrt{1 + 4t}}{2}, \quad \varepsilon_1 = [1, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}]$$

olur. Bu yüzden ikinci adımdaki problem ε_1 aralığında

$$u' = t - \sqrt{t} + 1, \quad u(1) = 2$$

problemine dönüşür. Buradan

$$u(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + t + \frac{7}{6}, \quad t \in \varepsilon_1$$

olur.

3.3. NÖTR TİP DENKLEMLER

Bir sabit gecikmesi olan nötr tip

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau), u'(t - \tau)) \quad (3.26)$$

denkleminin

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0} \quad (3.27)$$

koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine adım metodu uygulayalım. Burada $f(t, u_1, u_2, u_3)$ fonksiyonu $G = \{t_0 \leq t \leq T, -\infty < u_i < \infty, i = 1, 2, 3\}$ kümesinde sürekli. $\varphi_0(t)$ fonksiyonu da E_{t_0} kümesinde sürekli türeve sahiptir. Ele alınan problem $I_1 = [t_0, t_0 + \tau]$ aralığında $u'(t) = f(t, u, \varphi_0(t - \tau), \varphi'_0(t - \tau))$ adi diferansiyel denkleminin $u(t_0) = \varphi_0(t_0)$ koşulunu sağlayan çözümünün bulunmasına getirilir. Verilen koşullar dahilinde bu problemin çözümü olduğu açıktır. $u = \varphi_1(t)$ fonksiyonunun bu problemin I_1 aralığında tanımlanmış çözümü olduğunu kabul edelim. O halde $I_2 = [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ aralığında (3.26)-(3.27) probleminin çözümünü bulmak için

$$u' = f(t, u, \varphi_1(t - \tau), \varphi'_1(t - \tau))$$

denkleminin $u(t_0 + \tau) = \varphi_0(t_0 + \tau)$ koşulunu sağlayan çözümünü bulmak gerekmektedir. Verilen koşullardan çözümün $(t_0 - \tau, t_0)$, $(t_0, t_0 + \tau)$, $(t_0 + \tau, t_0 + 2\tau)$, ... aralıklarında sürekli türevleri, $t_0, t_0 + \tau, t_0 + 2\tau, \dots$ noktalarında ise sol ve sağ türevlerinin olduğu görülmektedir. Fakat çözümün $t_0, t_0 + \tau, t_0 + 2\tau, \dots$ noktalarında türevi olmayabilir.

Gerçekten de t_0 noktasında çözümün sol türevi $\varphi'_0(t_0 - \tau)$, sağ türevi ise

$$\varphi_1(t_0 + 0) = f(t_0, \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0 - \tau), \varphi'_0(t_0 - \tau))$$

şeklindedir. Bu sebepten de ancak

$$\varphi'_0(t_0 - 0) = f(t_0, \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0 - \tau), \varphi'_0(t_0 - \tau)) \quad (3.28)$$

koşulu önerildiğinde t_0 noktasında çözümün türevi vardır. Açıktır ki, $t_0 + \tau$ noktasında çözümün sol türevi $f(t_0 + \tau, \varphi_1(t_0 + \tau), \varphi_0(t_0), \varphi'_0(t_0 - 0))$ 'a, sağ türevi ise $f(t_0 + \tau, \varphi_1(t_0 + \tau), \varphi_0(t_0), \varphi'_1(t_0 + 0))$ 'a eşittir. Buradan (3.28) koşulu sağlandığında

$$\begin{aligned} & f(t_0 + \tau, \varphi_1(t_0 + \tau), \varphi_0(t_0), \varphi'_0(t_0 - 0)) \\ &= f(t_0 + \tau, \varphi_1(t_0 + \tau), \varphi_0(t_0), \varphi'_1(t_0 + 0)) \end{aligned}$$

olur ve bu da $t_0 + \tau$ noktasında çözümün sürekli türeve sahip olması demektir. Bu yolla (3.28) koşulu sağlandığında çözümün, $t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau, \dots$ noktalarında sürekli türeve sahip olduğu gösterilebilir. Fakat genel olarak (3.27)-(3.28) probleminin çözümü aralıktan aralığa geçtikçe düzgünleşir. Bu özelliği ile nötr tip denklemler geciken argümanlı denklemlerden farklıdır.

Bunlar değişken gecikmeli nötr tip denklemler için de yürütülebilir.

Örnek 3.5.

$$\begin{aligned} u'(t) &= u\left(\frac{t}{3}\right) + t, \\ u(t) &= 1, \quad \frac{1}{3} \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

probleminin çözümünü bulalım.

Bu denklem için $h(t) = \frac{t}{3}$ olduğundan, $\gamma(t) = 3t$. Bu sebepten $[1, 3]$ aralığında incelenen problem $u'(t) = t + 1$ denkleminin $u(1) = 1$ koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine dönüşür. Buradan $u = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}$ olur. O halde $[3, 9]$ aralığında incelenen problem $u' = \frac{4t}{3}$ denkleminin $u(3) = 7$ koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine dönüşür. Böylece $[3, 9]$ aralığında $u = \frac{2t^2}{3} - 1$ olur.

3.4. ADVANCED ARGÜMANLI DENKLEMLER

$$u(t) = f(t, u)(t - \tau), \quad u'(t - \tau)$$

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0}$$

problemini adım metodu ile çözelim. $\varphi_0(t)$ fonksiyonunun E_{t_0} aralığında k . mertebeye, $f(t, u_1, u_2)$ fonksiyonunun ise

$G = \{t_0 \leq t < \infty, -\infty < u_i < \infty, i = 1, 2\}$ kümesinde $(k - 1)$. mertebeye kadar sürekli türevinin olduğunu varsayalım. Birinci adımda yani $(t_0, t_0 + \tau]$ aralığında problemin çözümü $\varphi_1(t) = f(t, \varphi_0(t - \tau), \varphi_0'(t - \tau))$ olur ve $u = \varphi_1(t)$ fonksiyonunun $(t_0, t_0 + \tau]$ aralığında genel olarak $(k - 1)$. mertebeye kadar sürekli türevi olduğu görülür. İkinci adımda yani $(t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ aralığında ele alınan problemin çözümü $\varphi_2(t) = f(t, \varphi_1(t - \tau), \varphi_1'(t - \tau))$ olur.

Açıktır ki, $u = \varphi_2(t)$ fonksiyonunun $(t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ aralığında genel olarak $(k - 2)$. mertebeye kadar sürekli türevi vardır. $\varphi_k(t) = f(t, \varphi_{k-1}(t - \tau), \varphi_{k-1}'(t - \tau))$ fonksiyonu $(t_0 + (k - 1)\tau, t_0 + k\tau]$ aralığında ele alınan problemin çözümüdür ve problemin $(t_0 + (k - 1)\tau, t_0 + k\tau]$ aralığında türevi yoktur. Böylece $(t_0, t_0 + k\tau]$ aralığında ele alınan problemin çözümü

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \\ \varphi_1(t), & t_0 \leq t \leq t_0 + \tau \\ \varphi_2(t), & t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau \\ \dots & \dots \\ \varphi_k(t), & t_0 + (k - 1)\tau \leq t \leq t_0 + k\tau \end{cases}$$

şeklinde dir. Çözüm, $\varphi_1(t_0 + 0) \neq f(t_0, \varphi_0(t_0 - \tau), \varphi_0'(t_0 - \tau))$ olduğunda $t = t_0$ noktasında, $\varphi_2(t_0 + \tau + 0) \neq f(t_0 + \tau, \varphi_1(t_0 + 0), \varphi_1'(t_0 + 0))$ olduğunda ise

$t = t_0 + \tau$ noktasında süreklidir. Buradan t arttıkça bir aralıktan komşu aralığa geçildiğinde ele alınan problemin çözümünün düzgünlüğünün bir birim arttığı görülmektedir.

Çözümün Varlığı ve Devamı

Bu kısımda

$$u(t) = f\left(t, u(t), u'(t - \tau(t))\right), \quad t > t_0$$

denkleminin

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0}$$

şartını sağlayan çözümünün varlığı ve tekliği hakkındaki problem ispatlanarak çözümün devamı problemi araştırılacaktır.

Teorem 3.3. Varsayalım ki;

- 1) $\varphi_0(t)$ başlangıç fonksiyonu E_{t_0} kümesinde süreklidir.
- 2) Belli bir $h > 0$ sayısı için $\tau(t)$ fonksiyonu $[t_0, t_0 + h]$ aralığında süreklidir ve $\tau(t) \geq 0$.
- 3) $f(t, u_1, u_2)$ fonksiyonu $\bar{D} = \{t_0 \leq t \leq t_0 + h, \varphi_0(t_0) - b \leq u_i \leq \varphi_0(t_0) + b, i = 1, 2\}$ bölgesinde süreklidir ve u_1, u_2 'ye göre

$$|f(t, u_1, u_2) - f(t, v_1, v_2)| \leq N[|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|]$$

Lipshitz şartını sağlıyor. Bu durumda (3.13)-(3.14) probleminin $[t_0, t_0 + \alpha]$ aralığında tanımlı bir tek çözümü vardır, burada

$$\alpha = \min\left\{h, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \sup_{\bar{D}} |f(t, u_1, u_2)|.$$

İspat.

Teoremi sıkan dönüşüm prensibi yardımı ile ispatlayacağız. Bunun için Φ ile

$U = E_{t_0} \cup [t_0, t_0 + \alpha]$ kümesinde sürekli, E_{t_0} 'da $\varphi_0(t)$ fonksiyonuna eşit olan ve

$t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ olduğunda $|\varphi(t) - \varphi_0(t_0)| \leq b$ koşulunu sağlayan $\{\varphi(t)\}$ fonksiyonlar ailesini gösterelim.

Her bir $\varphi(t) \in \Phi$ için $A(\varphi(t))$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} A(\varphi(t)) &= \varphi_0(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s), \varphi(s - \tau(s))) ds, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha \\ A(\varphi(t)) &= \varphi_0(t_0), \quad t \in E_{t_0} \end{aligned} \quad (3.29)$$

olsun. Bu yolla Φ kümesinde bir A operatörü tanımlamış oluruz. (3.29) formülü ile tanımlanmış $A(\varphi(t))$ fonksiyonunun U kümesinde sürekli olduğu açıktır. Koşula göre $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için $(t, \varphi(t), \varphi(t - \tau(t))) \in \overline{D}$ ve $|f(t, \varphi(t), \varphi(t - \tau(t)))| \leq M$ olduğundan, $|A(\varphi(t)) - A(\psi(t))| \leq M\alpha \leq b$ elde edilir. Buradan A operatörünün Φ kümesinde sürekli olduğu görülmektedir. Öte yandan $f(t, u_1, u_2)$ fonksiyonu Lipshitz şartını sağladığından keyfi $\varphi(t), \psi(t) \in \Phi$ için

$$\begin{aligned} &|A(\varphi(t)) - A(\psi(t))| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s), \varphi(s - \tau(s))) - f(s, \psi(s), \psi(s - \tau(s)))| ds \\ &\leq N \int_{t_0}^t [|\varphi(s) - \psi(s)| + |\varphi(s - \tau(s)) - \psi(s - \tau(s))|] ds \\ &\leq 2N \int_{t_0}^t |\varphi(s) - \psi(s)| ds \\ &\leq 2N(t - t_0) \sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha} |\varphi(t) - \psi(t)|. \end{aligned}$$

Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}
& |A^2(\varphi(t)) - A^2(\psi(t))| \\
&= \left| \int_{t_0}^t [f(s, A(\varphi(s)), A(\varphi(s - \tau(s)))) - f(s, A(\psi(s)), A(\psi(s - \tau(s))))] ds \right| \\
&\leq 2N \int_{t_0}^t |A(\varphi(s)) - A(\psi(s))| ds \\
&\leq (2N)^2 \sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha} |\varphi(t) - \psi(t)| \int_{t_0}^t (s - t_0) ds \\
&= \frac{[2N(t - t_0)]^2}{2!} \sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha} |\varphi(t) - \psi(t)|
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan da tümevarım metodu ile keyfi k doğal sayısı için

$$|A^k(\varphi(t)) - A^k(\psi(t))| \leq \frac{[2N(t - t_0)]^k}{k!} \sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha} |\varphi(t) - \psi(t)|$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir. Yeterince büyük k 'lar için

$$\frac{[2N(t - t_0)]^k}{k!} \leq \frac{(2N\alpha)^k}{k!} = q < 1$$

olduğu açıktır. Yani bu k 'lar için A operatörünün k . iterasyonu

$$|A^k(\varphi(t)) - A^k(\psi(t))| \leq q \sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha} |\varphi(t) - \psi(t)|$$

koşulunu sağlıyor. Öyle bir k_0 sayısı vardır ki, A^{k_0} operatörünün sıkkan dönüşüm prensibinin şartlarını sağlar. Bu sebepten de sıkkan dönüşüm prensibine göre

$$\varphi(t) = \varphi_0(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s), \varphi(s - \tau(s))) ds, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$$

$$\varphi(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0}$$

integral denkleminin Φ kümesinde bir tek sürekli çözümü vardır. Öte yandan (3.22)-(3.23) probleminin çözümünün bulunması bu integral denklemin sürekli çözümünün bulunmasına denk olduğundan teorem ispatlanmıştır.

Not 3.4. Peano teoreminin ispatında olduğu gibi, I ve II koşulları sağlandığında $f(t, u_1, u_2)$ fonksiyonu $\overline{D}$ bölgesinde sadece sürekli ise (3.22)-(3.23) probleminin en az bir çözümünün olduğu gösterilebilir.

Şimdi de çözümün devamı konusunu inceleyelim. Varsayalım ki, $f(t, u_1, u_2)$ fonksiyonu t değişkenine göre $[t_0, t_1]$ aralığında; u_1, u_2 değişkenlerine göre ise $(\varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0 - \tau(t_0)))$ noktasını içerisinde bulunduran bölgede tanımlıdır ve tüm argümanlara göre süreklidir. $\varphi_0(t)$ fonksiyonu E_{t_0} 'da, $\tau(t) \geq 0$ fonksiyonu ise $[t_0, t_1]$ aralığında süreklidir. Bu durumda (3.22)-(3.23) probleminin belli bir $\alpha (\alpha \leq t_1 - t_0)$ için $[t_0, t_0 + \alpha]$ aralığında tanımlı en az bir $u = \varphi(t)$ çözümünü $t_0 + \alpha$ 'dan sağa devam ettirebiliriz.

$f(t, u_1, u_2)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu kümeyi G ile gösterelim ve aşağıdaki durumları inceleyelim:

- Çözüm tüm $[t_0, t_1]$ aralığında devam ettirilir.
- Öyle bir $t' \in (t_0 + \alpha, t_1)$ noktası vardır ki, çözüm $[t_0, t')$ aralığında devam ettirilendir ve t değişkeni soldan t' noktasına yaklaştığında

$T(t) = (t, \varphi(t), \varphi(t - \tau(t)))$ noktası G kümesinin sınırına yaklaşır. Yani G kümesinin keyfi F kompakt alt kümesi için öyle bir $s \in (t_0, t')$ noktası vardır

ki, $t \in (s, t')$ olduğunda $T(t) \in G \setminus T$ olur (istenilen sonsuz alt kümesinden yakınsak dizi seçmek mümkün olan kümeye *kompakt küme* denir).

- Çözüm $[t_0, t')$ ($t_0 < t' < t_1$) aralığında devam ettirilendir ve t değişkeni t' noktasına soldan yaklaştığında $T(t)$ noktası G kümesinin sınırına sonsuz defa yaklaşıp uzaklaşır. Diğer bir deyişle G kümesinin öyle bir kompakt alt kümesi ve t' noktasına yakınsak monoton artan ζ_k^0 dizisi bulunabilir ki, $T(\zeta_k^0) \in F_0$, $k = 1, 2, \dots$ olur; fakat G kümesinin keyfi F kompakt alt kümesi ve t' noktasına yakınsak öyle bir monoton artan (ζ_k^F) dizisi bulmak mümkündür ki, $T(\zeta_k^F) \in G \setminus F$, $k = 1, 2, \dots$ olur.

Onu da belirtelim ki, $\tau(t) = 0$ veya $\tau(t) > 0$, $t_0 < t' < t_1$ olduğunda üçüncü durum ortaya çıkmaz. Yani adi diferansiyel denklemler için sadece birinci ve ikinci durumlar mümkündür.

Not 3.5. Adi diferansiyel denklemlerden farklı olarak meyleden argümanlı denklemin varlığı ve tekliğinin verilmiş koşullar dahilinde sağlanması durumunu da iki farklı çözüm bir noktada, hatta belli bir aralıkta çakışabilir. Bunu göstermek için

$$u'(t) = \cos t + (\sin t - u(t))f(u(t-1)), \quad t > 0$$

denkleminin

$$u(t) = \varphi_1(t), \quad u(t) = \varphi_2(t), \quad t \in E_0 = [-1, 0]$$

koşullarını sağlayan çözümlerini inceleyelim. Burada $f(t)$ fonksiyonu gerçekte ekseninde sürekli. $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ fonksiyonları ise E_0 parçasında sürekli ve $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ koşullarını sağlayan keyfi fonksiyonlardır.

Ele alınan problemlere adım metodu uygularsak birinci adımda yani $[0, 1]$ aralığında

$$u'(t) = \cos t + (\sin t - u)f(\varphi_1(t-1)), \quad u(0) = \varphi_1(0) = 0$$

$$v'(t) = \cos t + (\sin t - v)f(\varphi_2(t-1)), \quad v(0) = \varphi_2(0) = 0$$

problemini elde ederiz ve bunların bir tek $u = v = \sin t$ çözümü vardır. Sonraki adımlarda ele alınan lineer denklemlerin sağ tarafları aynı olduğundan çözümler çakışacaktır. Demek ki, ele alınan denklemlerin iki farklı başlangıç fonksiyonuna göre bir çözümü vardır.

3.5. LİNEER DENKLEMLER

3.5.1. Geciken Argümanlı Denklemler

Bir sabit gecikmesi olan

$$u'(t) + a(t)u(t) + b(t)u(t - \tau) = f(t), \quad t > t_0 \quad (3.30)$$

denkleminin

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_0 = [t_0 - \tau, t_0] \quad (3.31)$$

koşulunu sağlayan çözümünün bulunmasının istendiğini varsayalım. Burada $\tau > 0$ sabit gecikmedir. $\varphi_0(t)$ başlangıç fonksiyonu $[t_0 - \tau, t_0]$ aralığında sürekli, $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ fonksiyonları ise $[t_0, +\infty)$ aralığında sürekli. Bu problemin çözümünün adım metodu ile bulunmasının mümkün olduğunu belirtelim. Gerçekten de (3.30)-(3.31) problemi $[t_0, t_0 + \tau]$ aralığında

$$u'(t) + a(t)u + b(t)\varphi_0(t - \tau) = f(t)$$

lineer denkleminin

$$u(t_0) = \varphi_0(t_0)$$

koşulunu sağlayan çözümünün bulunmasına getirilir. Açıktır ki, ele alınan problemin $[t_0, t_0 + \tau]$ aralığında tanımlı bir tek $u = \varphi_1(t)$ çözümü vardır. Bu sebepten (3.30)-(3.31) problemi $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ aralığında

$$u'(t) + a(t)u + b(t)\varphi_1(t - \tau) = f(t)$$

lineer denkleminin

$$u(t_0 + \tau) = \varphi_1(t_0 + \tau)$$

Koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine getirilir. $u_1(t)$, $u_2(t)$ fonksiyonları lineer homojen

$$u'(t) + a(t)u(t) + b(t)u(t - \tau) = 0 \quad (3.32)$$

denkleminin $\varphi_1(t)$ ve $\varphi_2(t)$ başlangıç fonksiyonlarına uygun çözümleri ise keyfi c_1, c_2 sayıları için $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$ fonksiyonu da onun $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$ başlangıç fonksiyonuna uygun çözümdür. Bunun dışında $u(t)$ fonksiyonu (3.32) denkleminin $\varphi_0(t)$ başlangıç fonksiyonuna, $\tilde{u}(t)$ fonksiyonu ise (3.30) denkleminin sıfır başlangıç fonksiyonuna uygun olan çözümü ise $u(t) + \tilde{u}(t)$ fonksiyonu (3.30) denkleminin $\varphi_0(t)$ başlangıç fonksiyonuna uygun çözümdür.

Böylece (3.30) denkleminin $\varphi_0(t)$ başlangıç fonksiyonuna uygun çözümünün bulunması daha basit olan iki problemin çözümünün bulunmasına getirilir.

Bu bölümde esas amaç self-adjoint denklemi kavramını kullanarak (3.30)-(3.31) problemin çözümünü integral şeklinde göstermektedir. Bu kavram yardımı ile denkleminin çözümünün özelliklerini öğrenebilir ve birçok teorik problemleri araştırabiliriz. Bu gösterim daha genel denklemler ve sistemler için de geçerlidir.

Varsayalım ki, $f(t, s)$ fonksiyonu $G = \{t > t_0, t_0 \leq s \leq t + \tau\}$ kümesinde tanımlı, her bir $t > t_0$ için s değişkenine göre $[t_0, t]$ aralığında süreklidir ve (t_0, t) aralığında

$$-\frac{\partial f(t, s)}{\partial s} + f(t, s)a(s) + f(t, s + \tau)b(s + \tau) = 0 \quad (3.33)$$

denkleminin

$$f(t, s) = \begin{cases} 0, & t < s \leq t + \tau \\ 1, & s = t \end{cases} \quad (3.34)$$

koşulunu sağlayan çözümdür. (3.33) denkleminin (3.30) denkleminin *self-adjoint denklemi* denir.

İlk olarak adım metodu yardımı ile (3.33)-(3.34) probleminin çözümünün varlığını göstereyim. Birinci adımda bu probleme $(t - \tau, t]$ aralığında bakalım. (3.34) koşulundan $s \in (t - \tau, t]$ için $f(t, s + \tau) = 0$, $f(t, t) = 1$ olduğundan $(t - \tau, t]$ aralığında $f(t, s)$ fonksiyonu

$$-\frac{\partial f(t, s)}{\partial s} + f(t, s)a(s) = 0, \quad f(t, t) = 1$$

Cauchy (başlangıç-değer) Problemi'nin çözümü olarak kabul edilir. Buradan

$$f(t, s) = \exp\left(-\int_s^t a(\zeta) d\zeta\right), \quad t - \tau < s \leq t$$

elde edilir.

İkinci adımda (3.33) – (3.34) problemine $(t - 2\tau, t - \tau]$ aralığında bakılır. Bu durumda

$(t - 2\tau, t - \tau]$ aralığında

$$-\frac{\partial f(t, s)}{\partial s} + f(t, s)a(s) + b(s + \tau) \exp\left(-\int_{s+\tau}^t a(\zeta) d\zeta\right) = 0$$

$$f(t, t - \tau) = \exp\left(-\int_{t-\tau}^t a(\zeta) d\zeta\right)$$

problemi elde edilir ve çözümü

$$f(t, s) = \exp\left(-\int_s^t a(\zeta) d\zeta\right) \left[1 - \int_s^{t-\tau} b(\rho + \tau) \exp\left(\int_\rho^{t-\tau} a(\zeta) d\zeta\right) d\rho\right]$$

olur. Bu metotla her bir $t > t_0$ için sonlu adımdan sonra $f(t, s)$ fonksiyonunu $[t_0, t]$ aralığında oluşturulabilir.

Teorem 3.4. Varsayalım ki, $\varphi_0(t)$ fonksiyonu E_{t_0} aralığında $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ fonksiyonları ise $[t_0, +\infty)$ aralığında sürekli ve $f(t, s)$ fonksiyonu (3.24)-(3.25) probleminin çözümüdür. O halde

$$u(t) = f(t, t_0)\varphi_0(t_0) - \int_{t_0-\tau}^{t_0} f(t, s + \tau) \varphi_0(s) ds + \int_{t_0}^t f(t, s)f(s)ds, \quad t > t_0 \quad (3.35)$$

eşitliği ile ifade edilen $u(t)$ fonksiyonu (3.30)-(3.31) probleminin çözümüdür. (3.35) formülüne geciken argümanlı diferansiyel denklem için *Cauchy formülü* denir.

İspat.

Teoremin koşulları dahilinde (3.30)-(3.31) probleminin $[t_0, +\infty)$ aralığında tanımlı bir tek $u(t)$ çözümü vardır. Bu çözümü (3.21) denkleminde t değişkeni yerine s değişkenini yazalım ve her iki tarafı $f(t, s)$ fonksiyonu ile çarpıp t_0 'dan t 'ye integralleyelim:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t f(t, s)u'(s)ds + \int_{t_0}^t f(t, s)a(s)u(s)ds + \int_{t_0}^t f(t, s)b(s)u(s - \tau)ds \\ = \int_{t_0}^t f(t, s)f(s)ds \end{aligned} \quad (3.36)$$

kısmi integrasyon ile

$$\int_{t_0}^t f(t, s)u(s)ds = f(t, t)u(t) - f(t, t_0)u(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{\partial f(t, s)}{\partial s} u(s)ds$$

elde ederiz. Değişken dönüşümü yaparsak

$$\int_{t_0}^t f(t, s)b(s)u(s - \tau)ds = \int_{t_0 - \tau}^{t - \tau} f(t, s + \tau)b(s + \tau)u(s)ds$$

buluruz. Fakat koşula göre $s \in (t - \tau, t)$ için $f(t, s + \tau) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t f(t, s)b(s)u(s - \tau)ds &= \int_{t_0 - \tau}^{t_0} f(t, s + \tau)b(s + \tau)u(s)ds \\ &+ \int_{t_0}^t f(t, s + \tau)b(s + \tau)u(s)ds \end{aligned}$$

olur. Böylece (3.36) eşitliği

$$\begin{aligned} &f(t, t)u(t) - f(t, t_0)u(t_0) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} f(t, s + \tau)b(s + \tau)u(s)ds \\ &+ \int_{t_0}^t \left(-\frac{\partial f(t, s)}{\partial s} + f(t, s)a(s) + f(t, s + \tau)b(s + \tau) \right) u(s)ds \\ &= \int_{t_0}^t f(t, s)f(s)ds \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da (3.31) koşulu ve $f(t, s)$ fonksiyonun tanımından (3.35) elde edilir. Teorem ispatlandı. $\square$

Not 3.6. Teoremin ispat yöntemi kullanılarak

$$u'(t) + A(t)u(t) + B(t)u(t - \tau(t)) = F(t)$$

sisteminin

$$u(t) = 0, \quad t \in E_{t_0}$$

koşulunu sağlayan çözümü

$$u(t) = \int_{t_0}^t f(t, s)F(s)ds$$

formülü ile verilir. Burada $A(t)$ ve $B(t)$ verilmiş matris fonksiyonlar, $F(t)$ verilmiş vektör fonksiyon, $u(t)$ aranan vektör fonksiyondur. $\phi(t, s)$ matris fonksiyonu

$$-\frac{\partial f(t, s)}{\partial s} + f(t, s)A(s) + f(t, \gamma(s))B(\gamma'(s)) = 0$$

matris sisteminin

$$f(t, s) = \begin{cases} 0, & t < s \leq \gamma(t) \\ E, & s = t \end{cases}$$

koşulunu sağlayan çözümdür. $\gamma(t)$ ise $h(t) = t - \tau(t)$ fonksiyonunun tersidir (E birim matristir).

3.5.2. Pertürbe Olmuş Geciken Argümanlı Denklemler

$$v'(t) + [a(t) + a_1(t)]v(t) + [b(t) + b_1(t)]v(t - \tau) = 0, \quad t > t_0 \quad (3.28)$$

lineer homojen denklemini ele alalım.

Teorem 3.5. Varsayalım ki;

- 1) (3.32) denkleminin (3.31) koşulunu sağlayan çözümü $I = [t_0, +\infty)$ aralığında sınırlıdır.
- 2) $a_1(t)$, $b_1(t)$ fonksiyonları I aralığında süreklidir ve
$$\int_{t_0}^t |a_1(t)| dt < +\infty, \quad \int_{t_0}^t |b_1(t)| dt < +\infty.$$
- 3) (3.33)-(3.34) probleminin çözümü $G = \{t \geq t_0, t_0 \leq s \leq t + \tau\}$

kümesinde sınırlıdır: $|f(t, s)| \leq c$ (c bir sabittir).

Bu durumda (3.37) denkleminin (3.31) koşulunu sağlayan çözümü I aralığında sınırlıdır.

İspat.

$u(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonlarının (3.32) ve (3.37) denklemlerinin (3.31) koşulunu sağlayan çözümleri olduğunu varsayalım. O halde $z(t) = v(t) - u(t)$ fonksiyonu

$$z'(t) + a(t)z(t) + b(t)z(t - \tau) = -[a_1(t)v(t) + b_1(t)v(t - \tau)], \quad t > t_0$$

denkleminin

$$z(t) = 0, \quad t \in E_{t_0}$$

koşulunu sağlayan çözümü olacaktır. Bu problemin çözümünü (3.35) formülüne göre

$$z(t) = - \int_{t_0}^t f(t, s)[a_1(s)v(s) + b_1(s)v(s - \tau)]ds$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$v(t) = u(t) - \int_{t_0}^t f(t, s)[a_1(s)v(s) + b_1(s)v(s - \tau)]ds$$

ve değişken dönüşümü yaparak

$$\begin{aligned} v(t) &= u(t) - \int_{t_0 - \tau}^t f(t, s - \tau)b_1(s + \tau)\varphi_0(s)ds \\ &\quad - \int_{t_0}^t [f(t, s)a_1(s) + f(t, s + \tau)b_1(s + \tau)]v(s)ds \end{aligned}$$

elde ederiz. Teoremin 1. ve 3. koşullarından

$$|v(t)| \leq c_1 + c \left(\int_{t_0}^t [|a_1(s)| + |b_1(s + \tau)|]|v(s)|ds \right), \quad c_1 = \text{sabit} > 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğe Gronwall Eşitsizliği uygulanırsa

$$|v(t)| \leq c_1 \exp \left(c \int_{t_0}^t [|a_1(s)| + |b_1(s + \tau)|]ds \right)$$

bulunur. Buradan da teoremin 2. koşulundan $v(t)$ fonksiyonunun I aralığında sınırlılığı görülmektedir. Teorem ispatlandı. $\square$

3.5.3. Nötr Tip Denklemler

$$u'(t) + a(t)u'(t - \tau) + b(t)u(t) + c(t)u(t - \tau) = f(t), \quad t > t_0 \quad (3.38)$$

denkleminin

$$u(t) = 0, \quad t \in E_{t_0} \quad (3.39)$$

koşulunu sağlayan çözümünün integral ifadesini bulalım. Burada $\tau > 0$ sabit gecikme, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları da I yarım ekseninde sürekli. Varsayalım ki, $a(t)$ fonksiyonunun sürekli türevi vardır ve $f(t, s)$ fonksiyonu

$(s \in (t_0, t), k = 1, 2, \dots \text{ için } s \neq t - k\tau)$

$$-\frac{\partial f(t, s)}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} [f(t, s + \tau)a(s + \tau)] + f(t, s)b(s) + f(t, s + \tau)c(s + \tau) = 0 \quad (3.40)$$

denkleminin

$$f(t, s) = \begin{cases} 0, & t < s \leq t + \tau \\ 1, & s = t \end{cases} \quad (3.41)$$

koşulunu sağlayan ve

$$f(t, s) + f(t, s + \tau)a(s + \tau) \quad (3.42)$$

ifadesinin s 'ye göre $[t_0, t]$ aralığında sürekli olduğunu gösteren çözümdür. İlk olarak adım metodu ile (3.40)-(3.41) probleminin (3.42) ifadesinin sürekliliğini temin eden çözücünün olduğunu gösterelim. Birinci adımda (3.40)-(3.41) problemine $(t - \tau, t)$ aralığında bakalım. Bu aralıkta $f(t, s + \tau) = 0$ olduğundan

$$-\frac{\partial f(t, s)}{\partial s} + f(t, s)b(s) = 0, \quad f(t, t) = 1$$

problemi elde edilir.

Buradan

$$f(t, s) = \exp\left(-\int_s^t b(\zeta)d\zeta\right)$$

olur. O halde $s \in (t - 2\tau, t - \tau)$ için $f(t, s + \tau) = \exp\left(-\int_{s+\tau}^t b(\zeta)d\zeta\right)$ olduğundan $(t - 2\tau, t - \tau)$ aralığında (3.40) denklemi

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f(t, s)}{\partial s} + f(t, s)b(s) &= \frac{\partial}{\partial s} \left[a(s + \tau) \exp\left(-\int_{s+\tau}^t b(\zeta)d\zeta\right) \right] \\ &\quad - c(s + \tau) \exp\left(-\int_{s+\tau}^t b(\zeta)d\zeta\right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

şeklini alır. Bu denklemin öyle bir çözümünü bulmamız gerekiyor ki, bu çözüm için (3.42) ifadesi $s = t - \tau$ noktasında sürekli olsun. Yani

$$\lim_{s \rightarrow t-\tau+0} [f(t, s) + f(t, s + \tau)a(s + \tau)] = \lim_{s \rightarrow t-\tau-0} [f(t, s) + f(t, s + \tau)a(s + \tau)]$$

eşitliği sağlansın. Buradan $\phi(t, s)$ fonksiyonunun $s \in (t - \tau, t)$ için olan ifadesine ve (3.41)'e göre

$$f(t, t - \tau - 0) = \exp\left(-\int_{t-\tau}^t b(\zeta)d\zeta\right) - a(t) \quad (3.44)$$

elde edilir. Demek ki, (3.43) denkleminin (3.44) başlangıç koşulunu sağlayan çözümünün bulunması gerekiyor ve açıktır ki, bu problemin $(t - 2\tau, t - \tau)$ aralığında tanımlı bir tek çözümü vardır.

Bu yolla belirlenen $t (t > t_0)$ için $[t_0, t]$ aralığında bir tek $f(t, s)$ fonksiyonu oluşturulur. Oluşturulan bu metottan $s = t, t - \tau, t - 2\tau, \dots$ noktasının $f(t, s)$ fonksiyonunun 1.tip süreksiz noktaları olabileceği görülmektedir.

Teorem 3.6. $a(t), a'(t), b(t), c(t), f(t)$ fonksiyonları $I = [t_0, +\infty)$ aralığında sürekli olsun. $f(t, s)$ fonksiyonu ise (3.40)-(3.41) probleminin (3.42) ifadesinin

$[t_0, t]$ aralığında s 'ye göre sürekliliğini temin eden çözümü olsun. O halde (3.38)-(3.39) probleminin çözümü

$$u(t) = \int_{t_0}^t f(t, s)f(s)ds \quad (3.45)$$

formülü ile verilir.

İspat.

(3.38)'den

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t f(t, s) [u'(s) + a(s)u'(s - \tau) + b(s)u(s) + c(s)u(s - \tau)] ds \\ &= \int_{t_0}^t f(t, s) f(s) ds, \quad t > t_0 \end{aligned} \tag{3.46}$$

elde edilir. Değişken dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t f(t, s) a(s) u'(s - \tau) ds &= \int_{t_0 - \tau}^{t - \tau} f(t, s + \tau) a(s + \tau) u'(s) ds, \\ \int_{t_0}^t f(t, s) c(s) u(s - \tau) ds &= \int_{t_0 - \tau}^{t - \tau} f(t, s + \tau) c(s + \tau) u(s) ds \end{aligned}$$

bulunur. Burada da (3.39) ve (3.41) koşulları dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t f(t, s) a(s) u'(s - \tau) ds &= \int_{t_0}^t f(t, s + \tau) a(s + \tau) u(s) ds, \\ \int_{t_0}^t f(t, s) c(s) u(s - \tau) ds &= \int_{t_0}^t f(t, s + \tau) c(s + \tau) u(s) ds \end{aligned}$$

olur. O halde (3.46)'yı

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t [f(t, s) + f(t, s + \tau)a(s + \tau)]u'(s)ds \\
& + \int_{t_0}^t [f(t, s)b(s) + f(t, s + \tau)c(s + \tau)]u(s)ds = \int_{t_0}^t f(t, s)f(s)ds
\end{aligned} \tag{3.47}$$

şeklinde yazabiliriz. Açıktır ki, $u(s)$ ve $f(t, s) + f(t, s + \tau)a(s + \tau)$ fonksiyonları $[t_0, t]$ aralığında s 'ye göre sürekli ve kısmi sürekli türevlere sahiptir. Bu sebepten (3.47)'nin sol tarafındaki birinci toplama kısmi integrasyon uygulayabiliriz. Bu durumda (3.39) ve (3.41) koşullarından

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t [f(t, s) + f(t, s + \tau)a(s + \tau)]u(s)ds \\
& = [f(t, t) + f(t, t + \tau)a(t + \tau)]u(t) - [f(t, t_0) + f(t, t_0 + \tau)a(t_0 + \tau)]u(t_0) \\
& \quad - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial s} [f(t, s) + f(t, s + \tau)a(s + \tau)]u(s)ds \\
& = u(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial s} [f(t, s) + f(t, s + \tau)a(s + \tau)]u(s)ds
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece (3.47) eşitliği

$$\begin{aligned}
& u(t) + \int_{t_0}^t \left(-\frac{\partial}{\partial s} [f(t, s) + f(t, s + \tau)a(s + \tau)] + f(t, s)b(s) \right. \\
& \quad \left. + f(t, s + \tau)c(s + \tau) \right) u(s)ds
\end{aligned}$$

$$= \int_{t_0}^t f(t,s)f(s)ds$$

şeklini alır. Buradan da $f(t,s)$ fonksiyonu (3.31) denkleminin çözümü olduğundan (3.36) denklemi elde edilir. Teorem ispatlandı. $\square$



4. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ UYGULAMALARI

4.1. SABİT KATSAYILI GECİKEN ARGÜMANLI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde

$$L(u) \equiv u'(t) + au(t) + bu(t - \tau) = 0 \quad (4.1)$$

denkleminin $e^{\lambda t}$ şeklinde çözümlerinin bulunmasını inceleyeceğiz. Burada $\tau > 0$, a , $b \neq 0$ gerçekte sayılardır. Açık ki, $h(\lambda) = \lambda + a + be^{-\lambda\tau}$ ile gösterirsek $L(e^{\lambda t}) = h(\lambda)e^{\lambda t}$ olacaktır. Buradan $e^{\lambda t}$ fonksiyonunun (4.1) denkleminin çözümü olabilmesi için λ 'nın

$$\lambda + a + be^{-\lambda\tau} = 0 \quad (4.2)$$

denkleminin kökü olması gerek ve yeter şart olarak görülmektedir. (4.2) denkleminin (4.1) denkleminin *karakteristik denklemi*, $h(\lambda)$ fonksiyonuna ise *karakteristik quazi-polinomu* denir. Karakteristik denkleminin her bir λ asal köküne (4.1) denkleminin $e^{\lambda t}$ çözümü karşılık gelir ve farklı köklere karşılık gelen kökler lineer bağımlı değildir. Bunun dışında karakteristik denklemin $\lambda = a + i\beta$ ($\beta \neq 0$) kompleks köküne (4.1) denkleminin lineer bağımlı olmayan $e^{at} \cos \beta t$, $e^{at} \sin \beta t$ çözümleri karşılık gelir. Ayrıca

$$h'(\lambda) = 1 - b\tau e^{-\lambda\tau}, \quad h^{(k)}(\lambda) = (-1)^k b\tau^k e^{-\lambda\tau}, \quad k = 2, 3, \dots$$

olduğundan (4.2) karakteristik denkleminin her bir kökü en çok iki defa tekrarlanabilir. Varsayalım ki, λ_0 sayısı karakteristik denkleminin iki defa tekrarlanan köküdür yani

$h(\lambda_0) = 0$, $h'(\lambda_0) = 0$. Bu durumda

$$L(e^{\lambda_0 t}) = h(\lambda_0)e^{\lambda_0 t} = 0, \quad L(te^{\lambda_0 t}) = [th(\lambda_0) + h'(\lambda_0)]e^{\lambda_0 t} = 0$$

eşitliklerinden $e^{\lambda_0 t}$, $te^{\lambda_0 t}$ fonksiyonlarının (4.1) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olduğu görülmektedir.

Eğer $h(\lambda_0) = 0$, $h'(\lambda_0) = 0$ eşitliklerinden λ_0 'ı yok edersek $b\tau e^{a\tau+1} = 1$ elde ederiz. Bu da $b\tau e^{a\tau+1} \neq 1$ olduğunda (4.2) denkleminin köklerinin asal olacağını göstermektedir.

Karakteristik denklem transendent denklem olduğundan kompleks sayılar kümesinde sonsuz sayıda kökü vardır. Bu sebepten (4.1) denkleminin sonsuz sayıda lineer bağımsız çözümleri vardır. Bu çözümleri incelerken karakteristik denklemin köklerinin kompleks düzlemde nasıl yerleştiğini bilmek gerekiyor.

$\lambda = \alpha + i\beta$, ($\beta \neq 0$) sayısı karakteristik denklemin kökü ise $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ sayısı da denklemin kökü olacaktır. Demek ki, karakteristik denklemin kökleri reel eksene göre simetriklerdir. Öte yandan yeterince büyük $|\lambda|$ 'lar için

$$h(\lambda) = \lambda \left(1 + \frac{a}{\lambda}\right) + be^{-\lambda t}$$

ve

$$h_1(\lambda) = \lambda + be^{-\lambda t}$$

fonksiyonlarının kökleri birbirine yakındır. Fakat $h_1(\lambda)$ fonksiyonlarının kökleri için

$$|\lambda e^{\lambda t}| = |b|$$

eşitliği sağlandığından buradan elde edilen

$$\ln|b| = \ln|\lambda| + \tau Re(\lambda)$$

eşitliği $|\lambda|$ sonsuza yaklaştığında $Re(\lambda)$ 'nın $-\infty$ 'a yaklaştığını göstermektedir. Demek ki, $|\lambda|$ sonsuz büyüdükçe (4.2) denkleminin köklerinin reel kısmı reel eksenin negatif bölgesine yaklaşır. Buradan sadece sonlu sayıdaki kökünün reel kısmının pozitif olabileceği söylenebilir.

$\lambda a_k + i\beta_k$, $k = 1, 2, \dots$ sayılarının karakteristik denklemin m_k ($m_2 \leq 2$) defa tekrarlanan kökleri, $p_k(t)$ ve $q_k(t)$ 'nin ise dereceleri $(m_k - 1)$ 'den büyük olmayan keyfi katsayılı polinomlar olduğunu varsayalım. O halde

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{a_k t} [p_k(t) \cos \beta_k t + q_k(t) \sin \beta_k t] \quad (4.3)$$

serisi yakınsak olduğu ve diferansiyellendiği aralıklarda (4.1) denkleminin çözümü olacaktır. Özel olarak $a_k < 0$, $k = 1, 2, \dots$ olduğunda bu seri $(0, \infty)$ aralığında yakınsaktır ve terim terim diferansiyellenebilir. $p_k(t)$, $q_k(t)$ polinomları

$$\varphi_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{a_k t} [p_k(t) \cos \beta_k t + q_k(t) \sin \beta_k t], \quad t \in [t_0 - \tau, t_0] \text{ koşulunun}$$

sağlanabileceği şekilde seçilsin. Bu durumda (5.1) (bkz. 5. bölüm) serisi (4.1) denkleminin $u(t) = \varphi_0(t)$, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ koşulunu sağlayan çözümü olacaktır.



5. GECİKMELİ SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ SINIR-DEĞER PROBLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde gecikmeli diferansiyel denklemler için sınır-değer problemini ele alacağız:

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x-r) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (5.1)$$

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega_0, \quad u(l) = B \quad (5.2)$$

burada $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 = (0, r]$, $\Omega_2 = (r, l) \rightarrow \bar{\Omega} = [-r, 0]$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ pertürbasyon parametresi, $a(x) \geq \alpha > 0$, $b(x)$, $f(x)$ ve $\varphi(x)$ verilmiş belirli regülerlik koşullarını sağlayan yeterince düzgün fonksiyonlar ve r ($l < 2r$), ε ve B 'den bağımsız *sabit gecikme*dir. ε 'nin küçük değerleri için $u(x)$ fonksiyonu $x = 0$ civarında sınır katına sahiptir.

Genel olarak bu alanda iki tip yaklaşım kullanılmaktadır:

- 1) Düzgün veya eşit aralıklı düğümlerden oluşan şebekede üstel katsayılı fark şemalarının (uyarlanmış şema) uygulanması.
- 2) Sınır katları dahilinde özel kuralla belirlenen düzgün olmayan şebekelerin (uyarlanmış şebeke) seçimine dayalı fark metotları.

Bunların her ikisinde de amaç diferansiyel problemin özelliklerini daha iyi ifade edebilecek nümerik metodun oluşturulmasıdır. Singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklemler için uygun nümerik metotların oluşturulması ve analizi ile ilgili çeşitli yaklaşımlar [12], [26], [37], [53]'te bulunabilir.

(5.1)-(5.2) probleminin çözümü için düzgün şebekede sonlu fark şeması kurularak uygun nümerik metot ele alınacaktır. Kesin çözümün önemli özellikleri verilecektir. Sonlu fark diskritizasyonu yapılarak yaklaşık çözüm için hata analizi verilecektir. Düzgün yakınsaklık ayırık maksimum normda incelenecektir. Ayırık problemin çözümü için iteratif algoritma oluşturularak teorik analizleri destekleyen nümerik sonuçlar

verilecektir. Tüm bölümde C , ε ve şebeke parametresinden bağımsız genel pozitif sabiti göstermektedir.

5.1. SÜREKLİ PROBLEM

Burada (5.1)-(5.2) probleminin çözümünün bazı özelliklerinden bahsedeceğiz. Bu özelliklere uygun nümerik çözümün analizini yaptığımız zaman ihtiyacımız olacaktır. Öncelikle aşağıdakileri hatırlayalım:

$$\|g\|_{\infty} \equiv \|g\|_{\infty, \bar{\Omega}} = \max_{0 \leq x \leq l} |g(x)|, \quad \|g\|_1 \equiv \|g\|_{1, \Omega} = \int_0^1 |g(x)| dx,$$

$$\|g\|_{\infty, k} \equiv \|g\|_{\infty, \bar{\Omega}_k}, \quad \|g\|_{1, k} \equiv \|g\|_{1, \Omega_k} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Lemma 5.1. $a(x), b(x), f(x) \in C(\bar{\Omega})$. $\varphi(x) \in C(\Omega_0)$ olsun ve

$$\rho := \alpha^{-1} \|b\|_{\infty, 2} (l - r) < 1. \quad (5.3)$$

O halde (5.1)-(5.2) probleminin çözümü için

$$\|u\|_{\infty} \leq C_0, \quad (5.4)$$

$$|u'(x)| \leq C \left(1 + \frac{1}{3} e^{\frac{-\alpha x}{\varepsilon}} \right), \quad 0 \leq x \leq l \quad (5.5)$$

yazabiliriz, burada

$$C_0 = (|\varphi_0| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_1 + \alpha^{-1} \|b\|_{\infty, 2} \|\varphi\|_{1, 0}) (1 - \rho)^{-1}.$$

İspat.

Öncelikle (5.4) denklemini ispatlayalım:

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x - r) = f(x),$$

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) = f(x) - b(x)u(x-r),$$

burada

$$b(x)u(x-r) - f(x) = F(x).$$

O halde

$$u''(x) = -\frac{1}{\varepsilon}a(x)u'(x) - \frac{1}{\varepsilon}F(x)$$

olur ve Green fonksiyonunu kullanırsak

$$u'(x) = u'(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\mu)d\mu} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x F(\zeta)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\zeta^x a(\mu)d\mu}d\zeta \quad (5.6)$$

elde ederiz. Bu denklemin $(0, x)$ aralığında integralini alalım:

$$u(x) - u(0) = u'(0)\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau a(\mu)d\mu}d\tau - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x d\tau \int_0^\tau F(\zeta)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\zeta^\tau a(\mu)d\mu}d\zeta.$$

$u(0) = \varphi(0)$ olduğundan

$$u(x) = \varphi(0) + u'(0)\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau a(\mu)d\mu}d\tau - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x d\tau \int_0^\tau F(\zeta)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\zeta^\tau a(\mu)d\mu}d\zeta \quad (5.7)$$

ve $u(l) = B$ olduğundan

$$u'(0) = \frac{B - \varphi(0) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^l d\zeta F(\zeta) \int_\zeta^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\zeta^\tau a(\mu)d\mu}d\tau}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau a(\mu)d\mu}d\tau}. \quad (5.8)$$

(5.7) ve (5.8)'den

$$\begin{aligned}
u(x) = & \varphi(0) + [B - \varphi(0) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l d\zeta F(\zeta) \int_{\zeta}^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\zeta}^{\tau} a(\mu) d\mu} d\tau] \\
& \times \frac{\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} a(\mu) d\mu} d\tau}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} a(\mu) d\mu} d\tau} - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x d\zeta F(\zeta) \int_{\zeta}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\zeta}^{\tau} a(\mu) d\mu} d\tau.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Green fonksiyonunu kullanırsak

$$\begin{aligned}
G(x, \zeta) = & \frac{1}{\varepsilon} \int_{\zeta}^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\zeta}^{\tau} a(\mu) d\mu} d\tau \frac{\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s a(\mu) d\mu} ds}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} a(\mu) d\mu} d\tau} \\
& - \frac{1}{\varepsilon} T_0(x - \zeta) \int_{\zeta}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\zeta}^{\tau} a(\mu) d\mu} d\tau
\end{aligned} \tag{5.10}$$

elde ederiz. (5.9) eşitliği yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned}
u(x) = & \left(1 - \frac{\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s a(\mu) d\mu} ds}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} a(\mu) d\mu} d\tau} \right) \varphi(0) + \frac{\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s a(\mu) d\mu} ds}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} a(\mu) d\mu} d\tau} B \\
& + \int_0^l G(x, \zeta) F(\zeta) d\zeta
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$(T_0(\lambda) = 1, \lambda \geq 0; T_0(\lambda) = 0, \lambda < 0)$$

elde edilir.

Alternatif olarak

$$Lu := -\varepsilon u''(x) - a(x)u'(x), \quad 0 < x < l;$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0$$

operatörünün Green fonksiyonu [27]'deki gibi

$$G(x, \zeta) = \frac{1}{\varepsilon \omega(\zeta)} \begin{cases} \varphi_1(\zeta) \varphi_2(x), & 0 \leq \zeta \leq x \leq l \\ \varphi_1(x) \varphi_2(\zeta), & 0 \leq x \leq \zeta \leq l \end{cases} \quad (5.12)$$

şeklinde de ifade edilebilir, burada $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleridir:

$$L\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_1(l) = 1,$$

$$L\varphi_2 = 0, \quad \varphi_2(0) = 1, \quad \varphi_2(l) = 0$$

ve

$$\omega(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{Q(l)},$$

$$Q(x) = \int_0^x f(s) ds, \quad f(\zeta) = e^{-\frac{1}{\varepsilon} a(\tau) d\tau}.$$

(5.12) formülünde anlatılan $G(x, \zeta) \leq 0$ anlamına gelir ve (5.10)'dan

$$\begin{aligned} \max_{x, \zeta \in \bar{\Omega}} G(x, \zeta) &= \max_{x, \zeta \in \bar{\Omega}} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\zeta}^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\zeta}^{\tau} a(\mu) d\mu} d\tau \frac{\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s a(\mu) d\mu} ds}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} a(\mu) d\mu} d\tau} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\varepsilon} T_0(x - \zeta) \int_{\zeta}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\zeta}^{\tau} a(\mu) d\mu} d\tau \right) \\ &\leq \max_{x, \zeta \in \bar{\Omega}} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\zeta}^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\zeta}^{\tau} a(\mu) d\mu} d\tau \frac{\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s a(\mu) d\mu} ds}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} a(\mu) d\mu} d\tau} \right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \varepsilon \alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} (1-\zeta)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Buradan $G(x, \zeta) \leq \alpha^{-1}$. Bu eşitsizliği kullanırsak (5.11)'den

$$|u(x)| \leq |\varphi(0)| + |B| + \int_0^l |G(x, \zeta)| |F(\zeta)| d\zeta$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\varphi(0)| + |B| + \max_{x, \zeta \in \bar{\Omega}} |G(x, \zeta)| \int_0^l |F(\zeta)| d\zeta \leq |\varphi(0)| + |B| + \alpha^{-1} \int_0^l |F(\zeta)| d\zeta \\
&\leq |\varphi(0)| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_1 + \alpha^{-1} \int_0^l |b(\zeta)u(\zeta - r)| d\zeta
\end{aligned}$$

elde ederiz. İntegral değişkenini $\zeta = r + s$ olarak değiştirirsek

$$\begin{aligned}
&\leq |\varphi(0)| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_1 + \alpha^{-1} \int_{-r}^{l-r} |b(r+s)u(s)| ds \\
&\leq |\varphi(0)| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_1 + \alpha^{-1} \int_{-r}^0 |b(r+s)\varphi(s)| ds + \alpha^{-1} \int_0^{l-r} |b(r+s)u(s)| ds \\
&\leq |\varphi(0)| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_1 + \alpha^{-1} \int_{-r}^0 |b(r+s)\varphi(s)| ds + \alpha^{-1} \|u\|_\infty \int_r^l |b(s)| ds \\
&\leq |\varphi(0)| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_1 + \alpha^{-1} \|b\|_{\infty,1} \|\varphi\|_{1,0} + \alpha^{-1} \|u\|_\infty \|b\|_{\infty,2} (l-r)
\end{aligned}$$

olur. Buradan da (5.4) elde edilir.

Şimdi (5.5)'i ispatlayalım:

$$\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau a(\mu) d\mu} d\tau \leq \int_0^l e^{-\frac{a^* \tau}{\varepsilon}} d\tau = \frac{\varepsilon}{a^*} \left(1 - e^{-\frac{a^* l}{\varepsilon}}\right) \leq \frac{\varepsilon}{a^*} (1 - e^{-a^* l}) \equiv C_0 \varepsilon,$$

burada $a^* = \|a\|_\infty$ ve

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^l d\zeta |F(\zeta)| \int_\zeta^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\zeta^\tau a(\mu) d\mu} d\tau \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l d\zeta |F(\zeta)| \int_\zeta^l e^{-\frac{a(\tau-\zeta)}{\varepsilon}} d\tau$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l d\zeta |F(\zeta)| \left[\alpha^{-1} \varepsilon (1 - e^{-\frac{\alpha(l-\zeta)}{\varepsilon}}) \right] \leq \alpha^{-1} \int_0^l |F(\zeta)| d\zeta \\
&\leq \alpha^{-1} \|f\|_1 + \alpha^{-1} \|b\|_\infty \int_{-r}^0 |\varphi(s)| ds + \alpha^{-1} \|b\|_\infty \int_0^{l-r} |u(s)| ds \\
&\leq \alpha^{-1} \|f\|_1 + \alpha^{-1} \|b\|_\infty \|\varphi\|_{1,0} + \alpha^{-1} \|b\|_\infty C_0(l-r) \equiv C_1.
\end{aligned}$$

(5.8)'den

$$\begin{aligned}
|u'(0)| &\leq \frac{|B| + |\varphi(0)| + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l d\zeta |F(\zeta)| \int_\zeta^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\zeta^\tau a(\mu) d\mu} d\tau}{\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau a(\mu) d\mu} d\tau} \\
&\leq \frac{C_0^{-1}(|B| + \varphi(0) + C_1)}{\varepsilon} \equiv \frac{C_2}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Önceki eşitsizliği (5.6)'da kullanarak ve benzer işlemleri yaparak (5.5)'i elde ederiz. $\square$

5.2. AYRIK PROBLEM

Burada, ω ile Ω' da tanımlı düzgün şebekeyi göstereceğiz:

$$\omega = \{x_i = ih, \ i = 1, 2, \dots, N-1; \ h = l/N\}$$

ve $\overline{\omega} = \omega \cup \{x = 0, l\}$. Kolaylık için $\frac{r}{l}N = N_0$ 'ın tamsayı olduğu yani $\chi_{N_0} = r$ olduğunu varsayacağız. Nümerik metodumuzu belirlemeden önce şebeke fonksiyonları için bazı notasyonları verelim.

Herhangi bir $g(x)$ şebeke fonksiyonu için

$$g_i = g(x_i),$$

$$g_{\bar{x},i} = (g_i - g_{i-1})/h, \quad g_{x,i} = (g_{i+1} - g_i)/h,$$

$$g_{x,i}^0 = (g_{i+1} - g_i)/2h, \quad g_{\bar{x},i} = (g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1})/h^2,$$

$$\|g\|_\infty \equiv \|g\|_{\infty, \bar{\omega}} = \max_{0 \leq i \leq N} |g(x_i)|,$$

$$\|g\|_1 = \|g\|_{1, \omega} = \sum_{i=1}^{N-1} h |g_i|.$$

$$h^{-1} \int_0^l Lu(x) \psi_i(x) dx = h^{-1} \int_0^l f(x) \psi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.13)$$

integral özdeşliğini kullanarak ve

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \psi_i^{(1)}(x), & x_{i-1} < x < x_i, \\ \psi_i^{(2)}(x), & x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

baz fonksiyonlarını dikkate alarak fark metodu yaklaşımını oluşturabiliriz. Burada $\psi_i^{(1)}(x)$ ve $\psi_i^{(2)}(x)$ sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümüdür:

$$\varepsilon \psi''(x) - a_i \psi'(x) = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i,$$

$$\psi(x_{i-1}) = 0, \quad \psi(x_i) = 1,$$

$$\varepsilon \psi''(x) - a_i \psi'(x) = 0, \quad x_i < x < x_{i+1},$$

$$\psi(x_i) = 1, \quad \psi(x_{i+1}) = 0.$$

$\psi_i^{(1)}(x)$ ve $\psi_i^{(2)}(x)$ fonksiyonları açık olarak

$$\psi_i^{(1)}(x) = \frac{e^{a_i(x-x_{i-1})/\varepsilon} - 1}{e^{a_i h/\varepsilon} - 1}, \quad \psi_i^{(2)}(x) = \frac{1 - e^{-a_i(x_{i+1}-x)/\varepsilon}}{1 - e^{-a_i h/\varepsilon}},$$

şeklinde ifade edilebilir. Bunlar da

$$h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \psi_i(x) dx = 1$$

ifadesini sağlamaktadır. (5.13)'ten

$$h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu\psi_i(x)dx = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\psi_i(x)dx,$$

$$h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [\varepsilon u''(x) + a(x)u' + b(x)u(x-r)]\psi_i(x)dx = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\psi_i(x)dx,$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u''(x)\psi_i(x)dx + h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x)u'(x)\psi_i(x)dx \\ & + h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} b(x)u(x-r)\psi_i(x)dx \\ & = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\psi_i(x)dx. \end{aligned}$$

Yukarıdaki birinci ifadeye kısmi integrasyon uygulayalım:

$$\begin{aligned} & \varepsilon h^{-1} \left[u'(x)\psi_i(x) - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x)\psi'_i(x)dx \right] \\ & = \varepsilon h^{-1} u'(x)\psi_i(x) - \varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x)\psi'_i(x)dx. \end{aligned}$$

İkinci ifadeyi düzenleyelim:

$$h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x)u'(x)\psi_i(x)dx = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)u'(x)\psi_i(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x)u'(x)\psi_i(x)dx$$

$$\begin{aligned}
& h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)u'(x)\psi_i(x)dx \\
&= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)u'(x)\psi_i(x)dx + h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)]u'(x)\psi_i(x)dx \\
&= a_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x)\psi_i(x)dx + h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)]u'(x)\psi_i(x)dx.
\end{aligned}$$

Üçüncü ifadeyi düzenleyelim:

$$\begin{aligned}
& h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} b(x)u(x-r)\psi_i(x)dx \\
&= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x)u(x-r)\psi_i(x)dx + h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x)u(x-r)\psi_i(x)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x)u(x-r)\psi_i(x)dx \\
&= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x)u(x-r)\psi_i(x)dx \\
&+ h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [b(x)u(x-r) - b(x_i)u(x_i-r)]\psi_i(x)dx \\
&= b_i u_{i-N_0} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [b(x)u(x-r) - b(x_i)u(x_i-r)]\psi_i(x)dx.
\end{aligned}$$

Eşitliğin sağ tarafını düzenlersek

$$\begin{aligned}
h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\psi_i(x)dx &= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\psi_i(x)dx + h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\psi_i(x)dx \\
h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\psi_i(x)dx &= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\psi_i(x)dx + h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)]\psi_i(x)dx \\
&= f_i + h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)]\psi_i(x)dx
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}
-\varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \psi'_i(x)u'(x)dx + a_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x)\psi_i(x)dx + b_i u_{i-N_0} &= f_i - R_i, \\
i = 1, 2, \dots, N-1
\end{aligned} \tag{5.14}$$

burada

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)}, \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
R_i^{(1)} &= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)]u'(x)\psi_i(x)dx, \\
R_i^{(2)} &= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [b(x)u(x-r) - b(x_i)u(x_i-r)]\psi_i(x)dx, \\
&= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \psi_i(x)dx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} (b(x)u(x-r))K_{0,i}^*(x, \zeta)d\zeta,
\end{aligned}$$

$$K_{0,i}^*(x, \zeta) = T_0(x - \zeta) - T_0(x_i - \zeta), \quad 1 \leq i \leq N - 1,$$

$$R_i^{(3)} = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i) - f(x)] \psi_i(x) dx.$$

[44]'e göre

$$\begin{aligned} & -\varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \psi_i'(x) dx + a_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x) \psi_i(x) dx \\ &= -\varepsilon h^{-1} u_{\bar{x},i} + \varepsilon h^{-1} u_{x,i} + a_i u_{\bar{x},i} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi_i^{(1)}(x) dx \\ & \quad + a_i u_{x,i} h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi_i^{(2)}(x) dx \\ &= \varepsilon u_{\bar{x}x,i} + a_i \left(u_{\bar{x},i} \chi_i^{(1)} + u_{x,i} \chi_i^{(2)} \right) \end{aligned} \tag{5.16}$$

elde ederiz, burada

$$\begin{aligned} \chi_i^{(1)} &= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi_i^{(1)}(x) dx = \frac{\varepsilon}{a_i h} - \frac{1}{e^{a_i h/\varepsilon} - 1}, \\ \chi_i^{(2)} &= h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi_i^{(2)}(x) dx = \frac{1}{1 - e^{-a_i h/\varepsilon}} - \frac{\varepsilon}{a_i h}. \end{aligned}$$

$$u_{\bar{x}} = u_0 - \frac{h}{2} u_{\bar{x}x}, \quad u_x = u_0 + \frac{h}{2} u_{\bar{x}x} \tag{5.17}$$

ifadelerini dikkate alarak (5.16)'dan

$$\varepsilon u_{\bar{x}x} + a_i \left(u_{\bar{x},i} \chi_i^{(1)} + u_{x,i} \chi_i^{(2)} \right) = \varepsilon \theta_i u_{\bar{x}x,i} a_i u_{0_{x,i}} \quad (5.18)$$

elde ederiz, burada

$$\theta_i = \gamma_i \coth(\gamma_i), \quad \gamma_i = \frac{a_i h}{2\varepsilon}. \quad (5.19)$$

Sonuç olarak (5.14) ve (5.17)'den kesin çözümün ifadesi elde edilir:

$$lu_i \equiv \varepsilon \theta_i u_{\bar{x}x,i} + a_i u_{0_{x,i}} + b_i u_{i-N_0} = f_i - R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Yukarıdakilere göre (5.1)-(5.2) yaklaşımı için fark şeması aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$ly_i \equiv \varepsilon \theta_i y_{\bar{x}x,i} + a_i y_{0_{x,i}} + b_i y_{i-N_0} = f_i, \quad 0 < i < N, \quad (5.20)$$

$$y_i = \varphi_1, \quad -N_0 \leq i \leq 0, \quad y_N = B, \quad (5.21)$$

buradaki θ (5.18)'de verilmiştir.

5.3. HATA DEĞERLENDİRMESİ

$z_i = y_i - u_i$ olsun. Bu durumda nümerik çözümün hatası aşağıdakini sağlar:

$$lz_i = R_i, \quad 0 < i < N, \quad (5.22)$$

$$z_i = 0, \quad -N_0 \leq i \leq 0; \quad z_N = 0, \quad (5.23)$$

burada R_i (5.15) şeklindedir.

Lemma 5.2. Eğer $a(x)$, $b(x)$, $f(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ ve $\varphi(x) \in C^1(\Omega_0)$ ise R_i için

$$\|R\|_1 \leq Ch \quad (5.24)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat.

R_i ifadesindeki $R_i^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) fonksiyonlarını belirlemek için

$$\|R^{(k)}\|_1 \in Ch, \quad k = 1, 2, 3$$

yaklaşımını kabul etmek yeterlidir. Ara Değer Teoremi kullanılarak

$$|a(x) - a(x_i)| = |a'(\zeta)||x - x_i| \in Ch, \quad x, \zeta \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

elde edilir. Buradan

$$|R_i^{(1)}| \leq Ch \left(h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u'(x)| \psi_i(x) dx \right)$$

ve $0 \leq \psi_i(x) \leq 1$ olduğunu dikkate alırsak

$$\|R_i^{(1)}\| \leq Ch \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u'(x)| dx \leq 2Ch \int_0^l |u'(x)| dx.$$

(5.4) yaklaşımını kullanarak

$$\|R^{(1)}\|_1 \leq Ch \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx \right) = Ch \left(1 + \alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{\varepsilon}} \right) \right) = O(h)$$

yazabiliriz.

$R_i^{(2)}$ için $b \in C^1(\bar{\Omega})$ olduğunu göz önünde bulundurarak ve Lemma 5.1.'i kullanarak

$$|R_i^{(2)}| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left| \frac{d}{dx} [b(\zeta)u(\zeta - r)] \right|(\zeta) d\zeta \leq Ch \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u'(\zeta - r)| d\zeta \right)$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$\|R^{(2)}\|_1 \leq Ch \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u'(\zeta - r)| d\zeta \right) \leq Ch \left(1 + \int_0^l |u'(\zeta - r)| d\zeta \right)$$

ve $s = \zeta - r$ yazarsak

$$\|R^{(2)}\|_1 \leq Ch \left(1 + \int_{-r}^{l-r} |u'(s)| ds \right) = Ch \left(1 + \int_{-r}^0 |\varphi'(s)| ds + \int_0^{l-r} |u'(s)| ds \right),$$

elde ederiz. Bu da bize

$$\|R^{(2)}\|_1 \leq Ch \left(1 + \|\varphi'\|_{1,0} + \alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha(l-r)}{\varepsilon}} \right) \right) = O(h)$$

verir. Aynı yaklaşım yukarıdakine benzer yöntemle $R_i^{(3)}$ için de elde edilebilir. $\square$

Lemma 5.3. z_i , (5.22)- (5.23)'ün çözümü olsun ve (5.3) doğru olsun. O halde

$$\|z\|_{\infty,\omega} \leq \|R\|_{1,\omega}. \quad (5.25)$$

İspat.

Burada

$$L^h z_i := -\varepsilon \theta_i z_{\bar{x}x,i} + a_i z_{0,i}, \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

$$z_0 = z_N = 0$$

operatörü için $G^h(x_i, \zeta_j)$ ayrık Green fonksiyonunu kullanacağız. Bu fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$L^h G^h(x_i, \zeta_j) = \delta^h(x_i, \zeta_j), \quad x_i \in \omega, \quad \zeta_j \in \omega,$$

$$G^h(0, \zeta_j) = G^h(l, \zeta_j), \quad \zeta_j \in \omega,$$

burada $\delta^h(x_i, \zeta_j) = h^{-1} \delta_{ij}$ ve δ_{ij} Kronecker deltadır. Green fonksiyonunu kullanarak (5.22)-(5.23) probleminin çözümü için

$$z_i = \sum_{j=1}^{N-1} h G^h(x_i, \zeta_j) (b_j z_{j-N_0} - R_j), \quad x_i \in \omega \quad (5.26)$$

eşitliğini yazabiliriz. [63], [64]'teki gibi yaklaşımla $0 \leq G^h(x_i, \zeta_j) \leq \alpha^{-1}$ olduğunu gösterebiliriz. Bu durumda (5.26)'dan

$$\|z\|_{\infty,\omega} \leq \alpha^{-1} \left\{ \|b\|_{\infty} \sum_{j=1}^{N-1} h |z_{j-N_0}| + \|R\|_{1,\omega} \right\}$$

ve $j - N_0 = k$ yazarak

$$\begin{aligned}
\|z\|_{\infty,\omega} &\leq \alpha^{-1}\|b\|_{\infty} \sum_{k=1-N_0}^{N-N_0-1} h|z_k| + \alpha^{-1}\|R\|_{1,\omega} = \alpha^{-1}\|b\|_{\infty} \sum_{k=1}^{N-N_0-1} h|z_k| \\
&+ \alpha^{-1}\|R\|_{1,\omega} \leq \alpha^{-1}\|b\|_{\infty}(N - N_0 - 1)h\|z\|_{\infty,\omega} + \alpha^{-1}\|R\|_{1,\omega} \\
&\leq \rho\|z\|_{\infty,\omega} + \alpha^{-1}\|R\|_{1,\omega}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da (5.25)'in doğruluğu çıkar. Bu iki lemmadan aşağıdaki yakınsaklık sonucu çıkar. $\square$

Teorem 5.1. $u(x)$ (5.1)-(5.2) probleminin, y de (5.19)-(5.20) probleminin çözümü olsun. Bu durumda

$$\|y - u\|_{\infty,\bar{\omega}} \leq Ch.$$

5.4. NÜMERİK SONUÇLAR

a) (5.20)-(5.21) problemleri için aşağıdaki iterasyon tekniğini kullanacağız:

$$\varepsilon\theta_i y_{\bar{x}x,i}^{(n)} + a_i y_{x,i}^{(n)} = f_i^{(1)}, \quad f_i^{(1)} = f_i - b_i y_{i-N_0}, \quad 1 \leq i \leq N_0 - 1, \quad (5.27)$$

$$y_i^{(n)} = \varphi_i, \quad -N_0 \leq i \leq 0, \quad y_{N_0}^{(n)} = \mu_{n-1}, \quad (5.28)$$

$$\varepsilon\theta_i y_{\bar{x}x,i}^{(n)} + a_i y_{x,i}^{(n)} = f_i^{(2)}, \quad f_i^{(2)} = f_i - b_i y_{i-N_0}, \quad N_0 + 1 \leq i \leq N - 1, \quad (5.29)$$

$$y_{N_0}^{(n)} = \mu_{n-1}, \quad y_N^{(n)} = B, \quad (5.30)$$

burada μ_n y_{N_0} için (5.20)'nin değeridir. Böylece

$$\mu_n = \frac{1}{2} \left[y_{N_0+1}^{(n)} + y_{N_0-1}^{(n)} + h^2 (\varepsilon \theta_{N_0})^{-1} \left(a_{N_0} y_{0,x,N_0}^{(n)} + b_{N_0} f_0 - f_{N_0} \right) \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$\mu_0 = C_0$ ve C_0 (5.4)'te verilmişti.

b) Aşağıdaki örneği ele alalım:

$$\varepsilon u''(x) + 128u'(x) + 0,25u(x-1) = 0,25(x-1), \quad 0 < x < \frac{3}{2} \quad (5.31)$$

$$u(x) = \chi, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad u\left(\frac{3}{2}\right) = 2. \quad (5.32)$$

Kesin çözüm

$$u(x) = \begin{cases} d_1 \left(-1 + e^{-\frac{128x}{\varepsilon}} \right), & x \in [0, 1] \\ d_2 + d_3 e^{-\frac{128x}{\varepsilon}} + \frac{(x-1)^2}{2^{10}} - \frac{\varepsilon(x-1)^{16}}{2} + d_1 \frac{(x-1)}{2^9} \left(1 + e^{-\frac{128(x-1)}{\varepsilon}} \right), & x \in [1, \frac{3}{2}] \end{cases}$$

şeklindedir, burada

$$d_1 = \frac{((\varepsilon^2 - 64\varepsilon - 2^{24} + 2^{11})e^{\frac{64}{\varepsilon}} - \varepsilon^2)e^{\frac{128}{\varepsilon}}}{256((2^{15} - 32 + \varepsilon)e^{\frac{192}{\varepsilon}} - (32 + \varepsilon)e^{\frac{128}{\varepsilon}} - 2^{15})},$$

$$d_2 = \frac{\varepsilon^2}{2^{23}} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{15}} \right) d_1,$$

$$d_3 = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{15}}\right) d_1 - \frac{\varepsilon^2}{2^{23}} e^{\frac{128}{\varepsilon}}.$$

e_ε^N kesin hatası ve hesaplanan parametreye göre düzgün maksimum noktasal hata e^N aşağıdaki gibidir:

$$e_\varepsilon^N = \|y - u\|_{\infty, \overline{\omega}},$$

$$e^N = \max_{\varepsilon} e_\varepsilon^N.$$

Tablo 1: e_ε^N kesin hataları, hesaplanan ε hataları ve ω_N üzerinde p^N yakınsama hataları

ε	$N_0=64$	$N_0=128$	$N_0=256$	$N_0=512$	$N_0=1024$
2^{-2}	4.01597E-5 1.48	1.43704E-5 1.78	0.41855E-5 1.93	1.09607E-6 1.99	0.27592E-6
2^{-4}	5.01637E-5 1.10	2.34099E-5 1.22	1.00416E-5 1.48	3.59363E-6 1.78	1.04678E-6
2^{-6}	5.26725E-5 1.02	2.59186E-5 1.05	1.25413E-5 1.10	5.85263E-6 1.22	2.51050E-6
2^{-8}	5.32996E-5 1.01	2.54457E-5 1.01	1.31684E-5 1.02	6.47973E-6 1.05	3.13536E-6
2^{-10}	5.34955E-5 1.00	2.67024E-5 1.00	1.33252E-5 1.01	6.63650E-6 1.01	3.29213E-6
2^{-12}	5.34955E-5 1.00	2.67416E-5 1.00	1.33644E-5 1.00	6.67569E-6 1.00	3.33132E-6
2^{-14}	5.35053E-5 1.00	2.67514E-5 1.00	1.33742E-5 1.00	6.68549E-6 1.00	3.34112E-6
2^{-16}	5.35078E-5 1.00	2.67539E-5 1.00	1.33766E-5 1.00	6.68794E-6 1.00	3.34357E-6
e^N	5.35078E-5	2.67539E-5	1.33766E-5	6.68794E-6	3.34357E-6
p^N	1.00	1.00	1.00	1.00	

Burada y , u 'nun, N ve ε 'nin farklı değerlerine göre nümerik yaklaşımıdır. Ayrıca

$$p^N = \frac{\ln(e^N/e^{2N})}{\ln 2}.$$

Çözdüğümüz bu örnekteki ε değerleri $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 2, 4, \dots, 16$ şeklindedir. 30 iterasyon sonucu elde edilen e^N ve p^N 'ler Tablo 1'de listelenmiştir.



6. VOLTERRA GECİKMELİ İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMİ İÇİN KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ

6.1. GİRİŞ

Volterra gecikmeli integro-diferansiyel denklemlerinin biyoloji, tıp, fizik ve ekoloji gibi bilim alanları üzerinde büyük etkisi vardır. Bu denklemler mühendislik uygulamalarında da yaygın olarak kullanılmaktadır (bkz., [3], [12], [59]).

Diferansiyel denklemlerin kararlılık eşitsizlikleri ile ilgili birçok çalışma vardır. [37]'de yazarlar adi diferansiyel denklemler ve gecikmeli integro-diferansiyel denklemler arasındaki kararlılık ilişkisini ele almışlardır. [26]'da birinci mertebeden diferansiyel denklemler için çözüm koşulları sunularak elde edilen sonuçlar nonlineer denklemlere ve denklem sistemlerine uygulanmıştır. [53]'te enerji tahmini metodu yöntemi ile lineer pseudo-parabolik başlangıç değer problemi için yüksek kararlılıklı metot oluşturulmuştur.

Bu bölümde (6.1)-(6.2) problemi için kararlılık eşitsizliklerini elde edeceğiz. Aşağıdaki sabit gecikmesi olan lineer integro-diferansiyel denklemi ele alalım:

$$u'(x) + a(t)u(t) + b(t)u(t-r) + \int_{t-\tau}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in I, \quad (6.1)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad -r \leq t \leq 0, \quad (6.2)$$

burada $I = (0, T] = \cup_{p=1}^m I_p$, $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ ve $r_s = sr$,

$0 \leq s \leq m$ için $\bar{I} = [0, T]$ ve $I_0 = [-r, 0]$. $a(t) \geq 0$, $f(t)$ ($t \in \bar{I}$), $b(t)$, ($t \in \bar{I}$),

$\varphi(t)$ ($t \in I_0$) ve $K(t, s)$ ($(t, s) \in \bar{I} \times \bar{I}$) fonksiyonlarının yeterince düzgün olduğu varsayılmaktadır, r sabit bir gecikmedir.

Lemma 6.1. $a(t) \geq 0$, $|F(t)| \leq \mathcal{F}(t)$ ve $\mathcal{F}(t)$ 'nin azalmayan fonksiyon olduğunu varsayalım. Bu durumda başlangıç değer probleminin çözümü

$$u' + a(t)u = F(t), \quad x_0 < t < \chi, \quad (6.3)$$

$$u(x_0) = \mu \quad (6.4)$$

$$|u(t)| \leq |\mu| + (\chi - x_0) \mathcal{F}(t), \quad x_0 < t < \chi \quad (6.5)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat.

(6.3)-(6.4) probleminden

$$u(t) = \mu e^{-\int_{x_0}^t a(\tau) d\tau} + \int_{x_0}^t F(\tau) e^{-\int_{\tau}^t a(\zeta) d\zeta} d\tau$$

ifadesini elde ederiz. Buradan kolaylıkla

$$|u(t)| \leq |\mu| + \int_{x_0}^t |F(\tau)| d\tau \leq \int_{x_0}^t \mathcal{F}(\tau) d\tau$$

eşitsizliğine ulaşırız ve bu da bize (6.5)'i verir. $\square$

Not 6.1. $\|g\|$ kapalı aralıkta herhangi bir sürekli g fonksiyonu için maksimum normdur.

Teorem 6.1. $a(t), b(t), f(t) \in C(\bar{I})$, $K(t, s) \in C(\bar{I} \times \bar{I})$ ve $\varphi(t) \in C(I_0)$ olsun bu durumda (6.1)-(6.2) probleminin $u(t)$ çözümü için aşağıdaki kararlılık eşitsizliği elde edilir:

$$\|u\|_{\infty, p} \leq e^{\tau^2 p \bar{K}} (1 + \tau \|b\|_{\infty, \bar{I}} + \bar{K} \tau^2)^p \|\varphi\|_{\infty, 0} + \quad (6.6)$$

$$\tau e^{\tau^2 p \bar{K}} \frac{e^{\tau^2 p \bar{K}} (1 + \tau \|b\|_{\infty, \bar{I}} + \bar{K} \tau^2)^p - 1}{e^{\tau^2 p \bar{K}} (1 + \tau \|b\|_{\infty, \bar{I}} + \bar{K} \tau^2) - 1} \|f\|_{\infty, \bar{I}}, \quad 1 \leq p \leq m,$$

burada

$$\bar{K} = \max_{I \times I} |K(t, \zeta)|.$$

İspat.

$$F(t) = f(t) - b(t)u(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t K(t, \zeta)u(\zeta)d\zeta$$

için

$$|F(t)| \leq |f(t)| |b(t)| |u(t - \tau)| + \int_{t-\tau}^t |K(t, \zeta)| |u(\zeta)| d\zeta$$

yazabiliriz. Bunu I_p 'de dikkate alırsak

$$|F(t)| \leq \|f\|_{\infty, p} + \|b\|_{\infty, p} \|u\|_{\infty, p-1} + \bar{K} \int_{\tau_{p-1}}^t |u(\zeta)| d\zeta + \bar{K} \int_{t-\tau}^{\tau_{p-1}} |u(\zeta)| d\zeta$$

$$\leq \|f\|_{\infty,p} + (\|b\|_{\infty,p} + \tau\bar{K})\|u\|_{\infty,p-1} + \bar{K} \int_{\tau_{p-1}}^t |u(\zeta)| d\zeta$$

olur. Lemma 5.1. ve Gronwall eşitsizliğini kullanırsak

$$\|u\|_{\infty,p} \leq \beta\|u\|_{\infty,p-1} + \rho$$

elde ederiz, burada

$$\beta = e^{\tau^2\bar{K}}(1 + \tau\|b\|_{\infty,\bar{I}} + \tau^2\bar{K}), \quad \rho = \tau e^{\tau^2\bar{K}}\|f\|_{\infty,\bar{I}}.$$

Birinci mertebeden fark eşitsizliği kullanılırsa

$$\|u\|_{\infty,p} \leq \|\varphi\|_{\infty,0}\beta^p + \frac{\beta^p - 1}{\beta - 1}\rho$$

elde edilir. Bu da (6.6)'nın doğruluğunu göstermektedir. $\square$

Yukarıdaki metodu iki örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek 6.1.

Aşağıdaki problemi ele alalım:

$$u'(t) + t^2u(t) + (1 + e^{-t})u(t - 0,5) + \int_{t-0,5}^t \sqrt{t+s}u(s)ds = \sin \pi t, \quad 0 < t \leq 2$$

$$u(t) = 1 + t, \quad -0,5 \leq t \leq 0.$$

Burada

$$\tau = 0,5, \quad T = 2, \quad 1 \leq p \leq 4, \quad \|b\|_{\infty,\bar{I}} = \max_{[0,2]}(1 + e^{-t}) = 2,$$

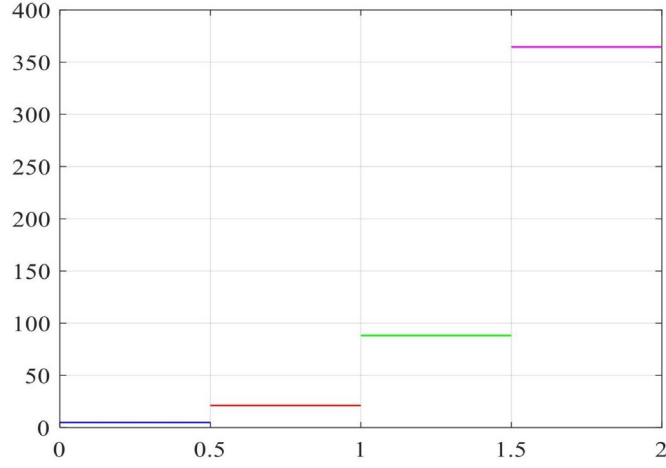
$$\|f\|_{\infty, \bar{I}} = 1, \quad \bar{K} = 2, \quad \|\varphi\|_{\infty, 0} = 1$$

olduğundan (6.6) eşitsizliğinden $u(t)$ çözümü için

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty, 1} &\leq e^{0,25 \times 1 \times 2} (1 + 0,5 \times 2 + 2 \times 0,25) \\ &+ 0,5 e^{0,25 \times 2} \frac{e^{0,25 \times 1 \times 2} (1 + 0,5 \times 2 + 2 \times 0,25) - 1}{e^{0,25 \times 2} (1 + 0,5 \times 2 + 2 \times 0,25) - 1} = 4,94, \\ \|u\|_{\infty, 2} &\leq e^{0,25 \times 2 \times 2} (1 + 0,5 \times 2 + 2 \times 0,25)^2 \\ &+ 0,5 e^{0,25 \times 2} \frac{e^{0,25 \times 2 \times 2} (1 + 0,5 \times 2 + 2 \times 0,25)^2 - 1}{e^{0,25 \times 2} (1 + 0,5 \times 2 + 2 \times 0,25) - 1} = 21,21, \\ \|u\|_{\infty, 3} &\leq e^{0,25 \times 3 \times 2} (1 + 0,5 \times 2 + 2 \times 0,25)^3 \\ &+ 0,5 e^{0,25 \times 2} \frac{e^{0,25 \times 3 \times 2} (1 + 0,5 \times 2 + 2 \times 0,25)^3 - 1}{e^{0,25 \times 2} (1 + 0,5 \times 2 + 2 \times 0,25) - 1} = 88,25, \\ \|u\|_{\infty, 4} &\leq e^{0,25 \times 4 \times 2} (1 + 0,5 \times 2 + 2 \times 0,25)^4 \\ &+ 0,5 e^{0,25 \times 2} \frac{e^{0,25 \times 3 \times 2} (1 + 0,5 \times 2 + 2 \times 0,25)^4 - 1}{e^{0,25 \times 2} (1 + 0,5 \times 2 + 2 \times 0,25) - 1} = 364,59, \end{aligned}$$

değerleri elde edilir.

Örnek 6.1.'in grafiği aşağıdaki Şekil 3'te gösterilmiştir.



Şekil 3: Örnek 6.1.'in grafiği

Örnek 6.2. İkinci örneğimiz

$$u'(t) + 4u(t-1) - \int_{t-1}^t u(t)dt = t, \quad 0 < t \leq 2$$

$$u(t) = 1, \quad -1 \leq t \leq 0$$

şeklindedir. Örneğin çözümü

$$u(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq 0 \\ -e^t + 2e^{-t}, & 0 < t \leq 1 \\ \left(\frac{5}{2}e^{-1}t - \frac{7}{4}e^{-t} - 1\right)e^t + \left(-3et + \frac{13}{4}e + 2\right)e^{-t} - 1, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

olarak bulunur.

$$r = 1, \quad T = 2, \quad 1 \leq p \leq 2, \quad \|b\|_{\infty, I} = 4,$$

$$\|f\|_{\infty, I} = 2, \quad \bar{K} = 1 \text{ ve } \|\varphi\|_{\infty, 0} = 1$$

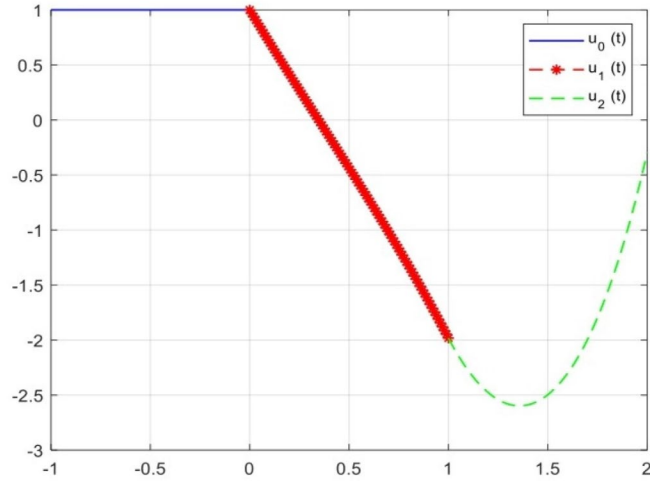
olduğundan Teorem 6.1.'e göre sınırlar

$$\|u\|_{\infty, 1} = 4,71,$$

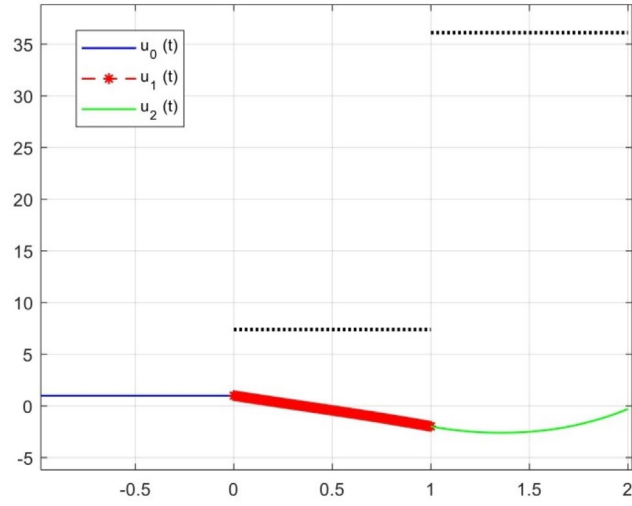
$$\|u\|_{\infty, 2} = 36,12$$

şeklinde olacaktır.

Örnek 6.2.'nin grafiği aşağıdaki Şekil 4 ve Şekil 5'te gösterilmiştir.



Şekil 4: Örnek 6.2.'nin grafiği



Şekil 5: Örnek 6.2.'nin grafiği

7. SONUÇ

Bu çalışmada gecikmeli diferansiyel denklemler ele alınarak onların bir sınıflandırılması yapıldı. Bir sabit gecikmesi olan geciken argümanlı denklemler için adım yöntemi incelendi. Bir değişken gecikmesi olan geciken argümanlı denklemler, nötr tip denklemler, advanced argümanlı denklemler, lineer denklemler, pertürbe olmuş geciken argümanlı denklemler ayrıntılı incelenerek örneklerle desteklendi. Gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümü için Laplace dönüşümü verilerek uygulamalar yapıldı. Singüler pertürbe özellikli gecikmeli sınır-değer probleminin nümerik çözümü elde edilerek teorik sonuçlarla nümerik sonuçların uyumlu olduğu örneklerle desteklendi. Daha sonra gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem için kararlılık eşitsizlikleri verildi. Verilen örnekler tablo ve şekillerle açıklamalı olarak sunuldu.

KAYNAKLAR

- [1] A. Bellen, & M. Zennaro, "Numerical methods for delay differential equations," *Oxford University Press*, Oxford, 2003.
- [2] A. Bellen, & N. Guglielmi, "Solving neutral delay differential equations with state-dependent delays," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 229, sayı 2, ss. 350-362 doi:10.1016/j.cam.2008.04.015, 2009.
- [3] A. H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*, Wiley, New York, 1993.
- [4] B. Balachandran, T. K. Nagy, & D. E. Gilsinn, "Delay differential equations," Springer, New York, 2009.
- [5] C. Bai & J. Ma, "Eigenvalue criteria for existence of multiple positive solutions to boundary value problems of second-order delay differential equations," *Journal of mathematical analysis and applications*, c. 301, sayı 2, ss. 457–476, 2005.
- [6] C. G. Lange and R. M. Miura, "Singular perturbation analysis of boundary value problems for differential-difference equations. v. small shifts with layer behavior," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, c. 54, sayı 1, ss. 249–272, 1994.
- [7] C. G. Lange, & R. M. Miura, "Singular perturbation analysis of boundary value problems for differential-difference equations," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, c. 42, sayı 3, ss. 502–531, 1982
- [8] C. G. Lange, & R. M. Miura, "Singular perturbation analysis of boundary value problems for differential-difference equations ii. rapid oscillations and resonances," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, c. 45, ss. 687–707, 1985.
- [9] C. W. Cryer, "Numerical methods for functional differential equations in delay and functional differential equations and their applications," *Elsevier*, ss. 17–101, 1972.
- [10] C. Zhang, & C. Tang, "One-parameter orthogonal spline collocation methods for nonlinear two-dimensional Sobolev equations with time-variable delay," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, c. 108, ss. 1-17, 2022.

- [11] D. Jiang, "Multiple positive solutions for boundary value problems of second order delay differential equations," *Applied Mathematics Letters*, c. 15, sayı 5, ss. 575–583, 2002.
- [12] E. P. Doolan, J. J. Miller, & W. H. Schilders, "Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers," *Boole Press*, 1980.
- [13] Erkan Çimen, & Gabil M. Amiraliyev, "Uniform convergence method for a delay differential problem with layer behaviour," *Mediterranean Journal of Mathematics*, c. 16, sayı 3, ss. 1-15, <https://doi.org/10.1007/s00009-019-1335-9>, 2019.
- [14] Fevzi Erdoğan, & Gabil M. Amiraliyev, "Fitted finite difference method for singularly perturbed delay differential equations," *Numerical Algorithms*, c. 59, sayı 1, ss. 131-145, <https://doi.org/10.1007/s11075-011-9480-7>, 2012.
- [15] G. A. Bocharov, & F. A. Rihan, "Numerical modelling in biosciences with delay differential equations," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 125, ss. 183-199, doi:[https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(00\)00468-4](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00468-4), 2000.
- [16] G. Gustafson, & K. Schmitt, "Nonzero solutions of boundary value problems for second order ordinary and delay-differential equations," *Journal of Differential Equations*, c. 12, sayı 1, ss. 129–147, 1972.
- [17] G. Ker, G. Gozalez-Parra, & M. Sherman, "A new method based on the Laplace transform and Fourier series for solving linear natural delay differential equations," *Applied Mathematics and Computation*, c. 420, doi:<https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126914>.
- [18] Gabil Amiraliyev, Erkan Çimen, İlham Amirali, & Musa Çakır, "High-order finite difference technique for delay pseudo-parabolic equations," *J. Comput. Appl. Math.*, doi: 10.1016/j.cam.2017.02.017, 2017.
- [19] Gabil Amirali, İlham Amirali, Nümerik Analiz Teori ve Uygulamalarla. Ankara: Seçkin Kitabevi, 2018.
- [20] Gabil M. Amiraliyev, & Fevzi Erdoğan, "A finite difference scheme for a class of singularly perturbed initial value problems for delay differential equations," *Numerical Algorithms*, c. 52, sayı 4, ss. 663-675, <https://doi.org/10.1007/s11075-009-9306-z>, 2009.

- [21] Gabil M. Amiraliyev, & Fevzi Erdoğan, “Uniform numerical method for singularly perturbed delay differential equations,” *Computers and Mathematics with Applications*, c. 53, sayı 8, ss. 1251-1259, <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2006.07.009>, 2007.
- [22] Gabil M. Amiraliyev, & Ömer Yapman, “On the Volterra delay-integro differential equation with layer behavior and its numerical solution,” *Miskolc Mathematical Notes*, c. 20 sayı 1, ss. 75-87, <https://10.18514/MMN.2019.2424>, 2019.
- [23] Gabil M. Amiraliyev, & Erkan Çimen, “Numerical method for a singularly perturbed convection–diffusion problem with delay,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 216, sayı 8, ss. 2351-2359, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.03.080>, 2010.
- [24] Gabil M. Amiraliyev, Ömer Yapman, & Mustafa Kudu, “A fitted approximate method for a Volterra delay-integro-differential equation with initial layer,” *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, c. 48, sayı 5, ss. 1417-1429, <https://10.15672/HJMS.2018.582>, 2019.
- [25] H. C. Tuckwell, “On the first-exit time problem for temporally homogeneous markov processes,” *Journal of Applied Probability*, c. 13, sayı 1, ss. 39–48, 1976.
- [26] H. Roos, M. Stynes, & L. Tobiska, “Numerical methods for singularly perturbed differential equations, volume 24 of springer series in computational mathematics,” New York, 1996.
- [27] I. Boglaev, “Uniform numerical methods on arbitrary meshes for singularly perturbed problems with discontinuous data,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 154, sayı 3, ss. 815–833, 2004.
- [28] I. G. Amiraliyeva, & G. M. Amiraliyev, “Uniform difference method for parameterized singularly perturbed delay differential equations,” *Numer. Algorithms* 52, sayı 4, ss. 509–521, 2009.
- [29] I. G. Amiraliyeva, F. Erdoğan, & G. M. Amiraliyev, “A uniform numerical method for dealing with a singularly perturbed delay initial-value problem,” *Appl. Math. Letters*, c. 23, ss. 1221–1225, 2010.
- [30] İ. Amirali, G. M. Amiraliyev, M. Çakır, & E. Çimen, “Explicit finite difference methods for the delay pseudo-parabolic equations,” *The Scientific World Journal*, ID 497393, doi: 10.1155/2014/497393, 2014.

- [31] İlham Amiralı, & Hülya Acar, "Stability inequalities and numerical solution of neutral Volterra delay integro-differential equation," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2023.
- [32] İlham Amiralı, & Hülya Acar, "A novel approach for the stability inequalities for high-order Volterra delay integro-differential equation," *JAMC*, <https://doi.org/10.1007/s12190-022-01761-8>, 2022.
- [33] İlham Amiralı, Seda Çatı, & Gabil M. Amiralıyev, "Stability inequalities for the delay pseudo-parabolic equations," *International Journal of Applied Mathematics*, c. 32, sayı 2, ss. 289-294, doi: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v32i2.10>, 2019.
- [34] İlham Amiralı, "Analysis of higher order difference method for a pseudoparabolic equation with delay," *Miskolc Mathematical Notes*, c. 20, sayı 2, ss. 755–766, doi: 10.18514/MMN.2019.2895, 2019.
- [35] İlham Amiralı, & Gabil M. Amiralıyev, "Three layer difference method for linear pseudo-parabolic equation with delay," *J. Comput. Appl. Math.*, S0377- 0427(21)00408-8 doi: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113786>, 2022.
- [36] İlham Amiralı, "Stability properties for the delay integro-differential equation," *Gazi University Journal of Science* , c.36, sayı 2, ss. 862-868, <https://doi.org/10.35378/gujs.988728>, 2023.
- [37] J. J. Miller, E. O’riordan, & G. I. Shishkin, "Fitted numerical methods for singular perturbation problems: error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions," *World Scientific* , 1996.
- [38] J. L. Henderson, "Boundary value problems for functional differential equations," *World Scientific*, 1995.
- [39] J. W. Lee and D. O’Regan, "Existence results for differential delay equations—ii," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, c. 17, sayı 7, ss. 683–702, 1991.
- [40] J. W. Lee, & D. Oregan, "Existence results for differential delay equations, i," *Journal of Differential Equations*, c. 102, sayı 2, ss. 342–359, 1993.
- [41] K. De Nevers & K. Schmitt, "An application of the shooting method to boundary value problems for second order delay equations," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 36, sayı 3, ss. 588–597, 1971.

- [42] L. E. El'sgolts, & S. B. Norkin, "Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments," *Academic Press*, New York, 1973.
- [43] L. E. El'sgolts, L. E. El'sgol'ts, & L. Ernestovich El'sgolts, "Qualitative methods in mathematical analysis," *American Mathematical Soc.*, c. 12, 1964.
- [44] M. Çakır, & G. Amiraliyev, "Numerical solution of a singularly perturbed three-point boundary value problem," *International Journal of Computer Mathematics*, c. 84, sayı 10, ss. 1465–1481, 2007.
- [45] M. K. Kadalbajoo, & K. K. Sharma, "A numerical method based on finite difference for boundary value problems for singularly perturbed delay differential equations," *Applied Mathematics and Computation*, c. 197, sayı 2, ss. 692–707, 2008.
- [46] M. K. Kadalbajoo, & K. K. Sharma, "Numerical analysis of singularly perturbed delay differential equations with layer behavior," *Applied Mathematics and Computation*, c. 157, sayı 1, ss. 11–28, 2004.
- [47] M. K. Kadalbajoo, & V. Ramesh, "Numerical methods on shishkin mesh for singularly perturbed delay differential equations with a grid adaptation strategy," *Applied Mathematics and Computation*, c. 188, sayı 2, ss. 1816–1831, 2007.
- [48] M. Kadalbajoo, & K. Sharma, "Numerical treatment of boundary value problems for second order singularly perturbed delay differential equations," *Computational Applied Mathematics*, c. 24, ss. 151–172, 2005.
- [49] Mustafa Kudu, İlham Amiralı, & Gabil M. Amiralıyev, "Analysis of difference approximations to delay pseudo-parabolic equations," *Springer International Publishing Switzerland, Differential and Difference Equations with Applications, Springer Proceedings in Mathematics Statistics*, c. 164, ss. 159- 168, doi: 10.1007/978-3-319-32857-7_16, 2016.
- [50] Mustafa Kudu, İlham Amiralı, & Gabil M. Amiralıyev, "A finite difference method for singularly perturbed delay integro-differential equation," *J. Comput. Appl. Math.*, c. 308, ss. 379-390, 2016.
- [51] Ömer Yapman, Gabil M. Amiralıyev, & İlham Amiralı, "Convergence analysis of fitted numerical method for a singularly perturbed nonlinear Volterra integro-differential equation with delay," *J. Comput. Appl. Math.*, doi.org/10.1016/j.cam.2019.01.026, 2019.

- [52] Ömer Yapman, & Gabil M. Amiraliyev, "Convergence analysis of the homogeneous second order difference method for a singularly perturbed Volterra delay-integro-differential equation," *Chaos, Solitons Fractals*, c. 150, 111100, <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111100>, 2021.
- [53] P. Farrell, A. Hegarty, J. M. Miller, E. O'Riordan, & G. I. Shishkin, "Robust computational techniques for boundary layers," *CRC Press*, 2000.
- [54] P. Getto, & M. Waurick, "A differential equation with state-dependant delay from cell population biology," *Journal of Differential Equations*, c. 260, ss. 6176-6200, doi:10.1016/j.jde.2015.12.038, 2016.
- [55] Pınar Okçu, & Gabil M. Amiraliyev, "Error estimates for differential difference schemes to pseudo-parabolic initial-boundary value problem with de lay," *Mathematical and Computational Applications*, c. 18, sayı 3, ss. 283-292, <https://doi.org/10.3390/mca18030283>, 2013.
- [56] R. B. Stein, "A theoretical analysis of neuronal variability," *Biophysical Journal*, c. 5, sayı 2, ss. 173–194, 1965.
- [57] R. Bellman, & K. L. Cooke, "Differential difference equations," *Academic Press*, 1963.
- [58] R. D. Driver, "Ordinary and delay differential equations," *Springer-Verlag*, New York, 1977.
- [59] R. E. O'Malley Jr, "Singular perturbation methods for ordinary differential equations," *Springer-Verlag*, 1991.
- [60] S. B. Norkin, "Differential equations of the second order with retarded argument," 1972.
- [61] S. K. Ntouyas, Y. G. Sficas, & P. C. Tsimatos, "An existence principle for boundary value problems for second order functional differential equations," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, c. 20, sayı 3, ss. 215–222, 1993.
- [62] T. Koto, "Stability of Runge-Kutta methods for delay integro differential equations," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 145, sayı 2, ss. 483-492, doi:10.1016/S0377-0427(01)00596-9, 2002.

- [63] V. Andreev, "Green's function and uniform convergence of monotone difference schemes for a singularly perturbed convection-diffusion equation on shishkin's mesh in one-and two-dimensions," *Preprint MS-01-15*, Dublin City University, Írlanda, 2001.
- [64] V. B. Andreev, "The green function and a priori estimates of solutions of monotone three-point singularly perturbed finite-difference schemes," *Differential Equations*, c. 37, sayı 7, ss. 923–933, 2001.
- [65] W. Enright, & M. Hu, "Continuous runge-kutta methods for neutral Volterra integro-differential equations with delay," *Applied Numerical Mathematics*, c.24(2-3), ss. 175-190, doi:10.1016/S0168-9274(97)00019-6, 1997.
- [66] X. Jun-tao, "Singular perturbation solution of boundary-value problem for a second-order differential-difference equation," *Applied Mathematics and Mechanics*, c. 9, sayı 7, ss. 681–692, 1988 .
- [67] Z. Jackiewicz, "Existence and uniqueness of solutions of neutral delay differential equations with state dependant delays," *Funkcial. Ekvac.*, c. 30, ss. 9-17, 1987.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ece EROĞLU

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2023
Lisans	Matematik	Kocaeli Üniversitesi	2013
Lise		Figen Sakallıoğlu Anadolu Lisesi	2009

TEZDEN ÇIKAN YAYIN: İ. Amiralı, & E. Eroğlu, A brief survey on numerical solutions of singularly perturbed problems, *"The Sixth International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2022)"*, Ordu, Türkiye, 2022, ss. 166-179.