



**T.C.  
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LEAVITT YOL CEBİRLERİNİN İDEALLERİNİN  
SINIFLANDIRILMASI**

**SUAT SERT**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN  
PROF. DR. MÜGE KANUNİ ER**

**DÜZCE, 2020**

**T.C.**  
**DÜZCE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LEAVITT YOL CEBİRLERİNİN İDEALLERİNİN**  
**SINIFLANDIRILMASI**

Suat SERT tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Prof. Dr. Müge KANUNİ ER  
Düzce Üniversitesi

**Eş Danışman**

Doç. Dr. Ayten KOÇ  
Gebze Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Prof. Dr. Müge KANUNİ ER  
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Ayten KOÇ  
Gebze Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. M. Zeki SARIKAYA  
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Emrah Evren KARA  
Düzce Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Zakir DENİZ  
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 07/02/2020

## BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

07/02/2020

Suat SERT

## TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Müge KANUNİ ER'e en içten dileklerle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyen eş danışmanım Doç. Dr. Ayten KOÇ'a da şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

07/02/2020

Suat SERT

# İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vii
SİMGELER.....	viii
ÖZET.....	x
ABSTRACT.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	4
2.1. ÇİZGE TEORİSİ.....	4
2.2. LEAVITT YOL CEBİRLERİ.....	10
3. LEAVITT YOL CEBİRLERİNİN İDEALLERİ.....	13
3.1. DERECELİ İDEALLER.....	14
3.2. DERECELİ İDEALLERİN YAPI TEOREMİ.....	15
3.3. İKİ YÖNLÜ İDEALLERİN YAPISI.....	17
3.4. ASAL VE İLKEL İDEALLER.....	18
3.5. MAKSİMAL İDEALLER.....	21
4. LEAVITT YOL CEBİRİNİN SONLU BOYUTLU BÖLÜMLERİ.....	27
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	33
6. KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ.....	39

## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. $E$ çizgesi.....	4
Şekil 2.2. Kısıtlama çizgesi için $E$ çizgesi.....	7
Şekil 2.3. $E_H$ Kısıtlama çizgesi.....	7
Şekil 2.4. Bölüm çizgesi için $E$ çizgesi.....	8
Şekil 2.5. $E/H$ Bölüm çizgesi.....	8
Şekil 2.6. Kirpi çizgesi için $E$ çizgesi.....	8
Şekil 2.7. ${}_H E$ Kirpi çizgesi.....	9
Şekil 2.8. $E_1$ çizgesi.....	11
Şekil 2.9. $E_2$ çizgesi.....	11
Şekil 2.10. $R_1$ çizgesi.....	11
Şekil 2.11. $R_n$ çizgesi.....	12
Şekil 3.1. İki kulak çizgesi.....	21
Şekil 3.2. Dereceli maksimal ideal için örnek $E$ çizgesi.....	22
Şekil 3.3. Ters iki kulak çizgesi.....	23
Şekil 3.4. Dereceli ve derecesiz maksimal ideal için örnek $E$ çizgesi.....	23
Şekil 3.5. İdeal örneği için $E$ çizgesi.....	25
Şekil 3.6. $E$ çizgesinin ideal diagramı.....	26
Şekil 4.1. Maksimal bataklık ve maksimal döngü için $E$ çizgesi.....	27
Şekil 4.2. $E_{\rightsquigarrow v_2}$ tam altçizgesi için $E$ çizgesi.....	28
Şekil 4.3. $E_{\rightsquigarrow v_2}$ tam altçizgesi.....	28
Şekil 4.4. $E$ çizgesi.....	28
Şekil 4.5. $E_{\rightsquigarrow u}$ çizgesi.....	29
Şekil 4.6. $E_{\rightsquigarrow v}$ çizgesi.....	29
Şekil 4.7. Boyut fonksiyonu için $E$ çizgesi.....	29
Şekil 4.8. Örnek $E$ çizgesi.....	30
Şekil 4.9. $E$ çizgesi.....	31
Şekil 4.10. $\bar{E}$ için $E$ çizgesi.....	32
Şekil 4.11. $\bar{E}$ çizgesi.....	32
Şekil 4.12. $F$ çizgesi.....	32

## ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Çizelge 3.1. <i>E</i> çizgesinin kalıtsal doymuş altkümelerine göre ideal türleri. ....	25



## SİMGELER

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi ( $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ )
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\alpha$	Alfa
$\beta$	Beta
$\gamma$	Gama
$\Gamma$	Gama
$\lambda$	Lambda
$\mu$	Mü
$\varphi$	Varphi
$\in$	Elemanı
$\notin$	Elemanı değil
$<$	Küçük
$\leq$	Küçük eşit
$>$	Büyük
$\geq$	Büyük eşit
$=$	Eşit
$\neq$	Eşit değil
$:=$	Eşit kabul edilir
$\cong$	İzomorfik
$\setminus$	Küme farkı
$/$	Bölüm
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
$\subset$	Altküme
$\subseteq$	Altküme ve eşit
$\supseteq$	Altküme ama eşit değil
$\{ \}$	Küme parantezi
$( )$	Açık parantez
$[ ]$	Kapalı parantez
$\oplus$	Direk toplam
$\Sigma$	Toplam
$\cup$	Birleşimleri
$\cap$	Kesişimleri
$\times$	Kartezyen çarpım
$\iff$	Ancak ve ancak
$\mapsto$	İle eşleşir
$\rightsquigarrow$	Bağlantılı
$K$	$K$ cismi
$E$	$E$ çizgesi
$E^0$	$E$ çizgesinin köşelerinin kümesi
$E^1$	$E$ çizgesinin kenarlarının kümesi

$v$	Köşe
$e$	Kenar
$e^*$	Hayalet kenar
$s(e)$	$e$ kenarının kaynağı
$r(e)$	$e$ kenarının hedefi
$s^{-1}(v)$	$v$ köşesi tarafından yayılan kenarların kümesi
$r^{-1}(v)$	$v$ köşesi tarafından alınan kenarların kümesi
$ s^{-1}(v) $	$s^{-1}(v)$ kümesinin eleman sayısı
$der(v)$	$v$ köşesinin derecesi
$der(e)$	$e$ kenarının derecesi
$p$	$E$ çizgesinin $p$ yolu
$p^0$	$p$ yolunun tüm köşelerinin kümesi
$l(p)$	$p$ yolunun uzunluğu
$Yol(E)$	$E$ çizgesindeki tüm yolların kümesi
$v \rightsquigarrow w$	$v$ köşesi, $w$ köşesi ile bağlantılıdır
$T(v)$	$v$ köşesinin bağlantılı olduğu tüm köşelerin kümesi
$M(v)$	Hedefi $v$ köşesi olan tüm yolların köşelerinin kümesi
$H$	$E$ çizgesinin kalıtsal doymuş altkümüsi
$\mathcal{H}$	Kalıtsal doymuş altkümelerin kümesi
$P_l(E)$	$E^0$ daki tüm çizgi noktası olan köşelerin kümesi
$E_H$	$E$ çizgesinin kısıtlama çizgesi
$E/H$	$E$ çizgesinin bölüm çizgesi
${}_H E$	$E$ çizgesinin kirpi çizgesi
$v^H$	Kırılma köşesi
$B_H$	Kırılma köşelerinin kümesi
$S$	$B_H$ nin altkümüsi
$(H, S)$	$H, S$ geçerli çifti
$R$	$R$ halkası
$IBN$	Değişmez Taban Sayısı ( Invariant Bases Number )
$LPA$	Leavitt Yol Cebirleri ( Leavitt Path Algebras )
$L_K(E)$	$K$ cismi üzerindeki $E$ çizgesinin Leavitt yol cebiri
$M_n(K)$	$K$ cebiri üzerinde $n \times n$ tipindeki $M$ matrisi
$L_n$	Leavitt yol cebirinin $n$ . homojen bileşeni
$span_K$	$K$ cebiri tarafından gerilen
$\langle x \rangle$	$x$ tarafından üretilen ideal
$\wedge$	İnfimum
$\vee$	Supremum
$\mathcal{L}_{gr}(L_K(E))$	$L_K(E)$ nin tüm dereceli ideallerinin latislerinin kümesi
$\mathcal{P}(B_H)$	$B_H$ nin tüm altkümelerinin kümesi
$\mathcal{S}$	$\mathcal{P}(B_H)$ kümelerinin birleşimi
$\mathcal{T}_E$	$\mathcal{H}_E \times \mathcal{S}$ kartezyen çarpım kümesinin altkümüsi
$Spec(R)$	$R$ halkasının asal spektrumu
$gr(N)$	En büyük dereceli $N$ ideali
$d(v)$	Boyut fonksiyonunun $v$ köşesindeki değeri
$K[x]$	Katsayılarını $K$ cisminden alan polinomlar cebiri
$K[x, x^{-1}]$	Laurent polinomlar cebiri
$P(x)$	$P$ polinomu
$f(x)$	$f$ fonksiyonu
$dim(v)$	$v$ köşesinin boyutu
$E_{\rightsquigarrow v}$	$M(v)$ kümesinin tam alt çizgesi

## ÖZET

### LEAVITT YOL CEBİRLERİNİN İDEALLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

Suat SERT

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Müge KANUNİ ER

Şubat 2020, 38 sayfa

Bir  $K$  cismi ve  $E$  yönlü çizgesi üzerinde kurulan Leavitt yol cebirleri, 2005 yılında tanımlanmış ve günümüze kadar hem fonksiyonel analiz, hem de halka teorisinin popüler bir araştırma konusu haline gelmiştir. Halka teorisinde, ideallerin sınıflandırılması halkanın yapısı ile ilgili bilgi içerdiği için önemlidir. Leavitt yol cebirlerinin idealleri tek başına ele alınmamış olmakla beraber, pek çok araştırmanın içinde sonuçları mevcuttur. Bu çalışmada konuyla ilgili yayımlanmış makale, kitap ve tezler incelenmiş ve çift yönlü ideal yapısı ile ilgili bilinen tüm sonuçlar derlenerek Türkçe kaynak oluşturulmuştur. Tezde Leavitt yol cebirlerinin, asal, maksimal, ilkel ideal yapıları, dereceli ideal için yapı teoremi, sonlu boyutlu bölümleri incelenmiştir.

**Anahtar sözcükler:** Asal idealler, Keyfi çizgeler, Leavitt yol cebirleri, Maksimal idealler.

# ABSTRACT

## CLASSIFICATION OF IDEALS IN LEAVITT PATH ALGEBRAS

Suat SERT

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Muge KANUNI ER

February 2020, 38 pages

Leavitt path algebras that were constructed on a field  $K$  and a directed graph  $E$ , were first defined in 2005, and have since become a popular research topic in both functional analysis and ring theory. In ring theory, the classification of ideals is important, because it contains information about the structure of the ring. Although the ideals of Leavitt path algebras have not been dealt with alone, their results are in many studies. In this study, published articles, books and theses on the subject were examined, all known results related to two sided ideal structure have been compiled and a source in Turkish has been created. In this thesis, prime, maximal, primitive ideal structures, structure theorem for graded ideals, finite dimensional quotients of Leavitt path algebras have been studied.

**Keywords:** Arbitrary graphs, Leavitt path algebras, Maximal ideals, Prime ideals.

# 1. GİRİŞ

Sıfırdan farklı bir vektör uzayı, eğer baz vektörler kümesi sonlu sayıda vektörü içeriyor ise sonlu boyutlu olarak adlandırılır. Sonlu boyutlu bir vektör uzayı için her hangi iki baz küme aynı sayıda vektöre sahiptir. Sonlu boyutlu bir vektör uzayının boyutu baz vektör kümesindeki vektör sayısıdır. Bu sonucun standart doğrulaması, sıfırdan farklı katsayıları yoketmeye dayanır. Çünkü  $\mathbb{R}$  bir cisim olduğu için bu mümkündür. Sonlu üretilen serbest modülleri  $\mathbb{Z}^+$  pozitif tamsayılar gibi davranan herhangi bir  $R$  halkasının *Invariant Bases Number-Değişmez Taban Sayısı (IBN)* özelliğine sahip olduğu söylenir. Birçok halka bu özelliğe sahip değildir. Örneğin  $S$ , pozitif tamsayılar tarafından endekslenen satır ve sütunlara sahip sonsuz matrislerden her sütununda 0 a eşit pek çok girdisi olan bir matris olsun. Tek sütunların ilk ve çift sütunların ikinci toplamaya karşılık gelmesine izin vererek  $S = S \oplus S := S^2$  elde edilir. Bunu kullanarak  $S^n \cong S$  elde edebiliriz. Yani *IBN* in maksimum epik hatası ile karşılaşırız. O zaman, "Sonlu üretilen serbest modüllerin davranışının  $\mathbb{R}$  ve  $S$  arasında bir yerde olan halkalar var mı?" sorusu ortaya çıkıyor. Örneğin serbest modül olarak  $R^2 \not\cong R$  ancak  $R^3 \cong R$  olan bir  $R$  halkası var mı?

Aslında 1962'de W. G. Leavitt tarafından  $R^2 \not\cong R$  (ve çok daha fazlası) kuruldu [1]. Bu  $R$  halkasına  $(1,3)$  tipli *Leavitt cebiri* denir. Her bir  $n \geq 2$  tamsayısı için benzer bir Leavitt cebir tipi  $(1,n)$  vardır.

G. Bergman, 1974'te yaptığı çalışmalar [2] ile herhangi bir uygun monoid ile başlayan ve karşılık gelen bir cebir üreten açık bir yapı tanımladı. Ortaya çıkan bu cebir için  $\oplus$  işlemine sahip sonlu üretilen projektif modüllerin monoidinin, verilen monoid gibi davrandığı özelliğine sahiptir. Yapının özel bir örneği  $M_n = \{0, x, 2x, \dots, (n-1)x\}$  monoidinden  $nx = x$  ilişkisi ile başlayarak  $(1,n)$  tipli Leavitt cebirini verir.

$E$  çizgesi, köşe kümesi  $E^0$  olan sonlu yönlü bir çizge olsun.  $v = \sum r(e)$  formundaki modül ilişkisi altında  $E^0$  tarafından üretilen değişmeli monoidi  $M_E$  yi düşünelim. Genel  $E$  çizgesi için, Bergman'ın  $M_E$  için karşılık gelen cebiri,  $E$  çizgesinin Leavitt yol cebiri olarak

adlandırılır. Leavitt yol cebirleri, 2005 yılında [3]'te Abrams, Aranda Pino ve [4]'te Ara, Moreno, Pardo tarafından karakterize edilmiştir. Leavitt yol cebirleri  $K$  cismi ve satır sonlu  $E$  çizgesi üzerinde *Cuntz ve Kriger*'in  $C(E)$  formundaki  $C$ -cebirleri ile cebirsel bir uyum sağlar. Aynı zamanda *W. G. Leavitt* tarafından [1] ve [5]'te inşa edilen cebirleri de genelleştirir ve bu bağlantı nedeniyle *Leavitt yol cebirleri* adını alır. Leavitt yol cebirlerinin bilinen örnekleri arasında  $n \times n$  matris cebiri ve Laurent polinom ( $K[x, x^{-1}]$ ) cebiri bulunur. Daha ilginç örnekler belki de beklenmedik davranışlara sahiptir.

Başlangıçta satır sonlu çizgeler için birçok çalışma yapılmış ve sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra satır sonlu olmayan çizgeler ve sonrasında da daha da genişletilerek keyfi çizgeler üzerinde çalışmalar yapılmaya başlandı.

Leavitt yol cebirlerinin ideal yapıları ile ilgili ilk çalışmalar [3]'te Abrams ve Aranda Pino tarafından satır sonlu bir çizgenin kalıtsal doymuş altkümeleri üzerinde, [6]'da Tomford tarafından keyfi çizgeler üzerinde yapıldı. Daha sonra [7]'de Abrams, Bell ve Rangaswamy asal ve aşikar olmayan Leavitt yol cebirleri ve [8]'de Abrams ve Rangaswamy keyfi çizgeler üzerinde çalışmalar yaptı. [9]'da Aranda Pino, Pardo ve Siles Molina asal ve aşikar Leavitt yol cebirleri üzerinde çalışmalar yaptılar. Rangaswamy, Leavitt yol cebirlerinin [10]'da asal idealleri, [11]'de iki yönlü ideallerini, [12]'de dereceli ilkel idealleri üzerinde çalışmalar yaptı. Rangaswamy, Esin ve Kanuni [13]'te Leavitt yol cebirlerinin iki yönlü ideallerinin kesişimleri üzerine çalışmalar yaptılar. [14]'te Esin ve Kanuni Leavitt yol cebirlerinin maksimal idealleri üzerine çalışmalar yaptılar. Kanuni ve Sert [15]'te Leavitt yol cebirlerinin ideal yapıları üzerine yapılmış çalışmalarını derledikleri bir kitap bölümü olan çalışmalarını yayımladılar.

Leavitt yol cebirlerinin sonlu boyutlu bölümleri ile ilgili çalışmalar [16] ve [17]'de Koç ve Özaydın tarafından yapıldı. Koç ve Özaydın satır sonlu yönlü bir çizge üzerinde uyguladıkları yeni bir algoritma olan indirgeme algoritmasını tanımlayıp, verilen sonlu çizgeye bu algoritmayı uygulayarak elde edilen çizgenin Leavitt yol cebiri ile verilen çizgenin Leavitt yol cebirlerinin Morita denk olduklarını gösterdiler. Satır sonlu yönlü bir çizgenin sonlu boyutlu bölümünün olması için sonlu sayıda öncülleri olan maksimal batak ve maksimal döngüye sahip olması gerektiğini ifade ettiler. [16]'da satır sonlu bir çizgenin Leavitt yol cebirlerinin tüm sonlu boyutlu bölümleri sınıflandırıldı.

Bu tezde, öncelikle Leavitt yol cebirleri ve Leavitt yol cebirlerinin ideal yapılarını göstermek için gerekli olan çizge teorisi tanım ve özelliklerinden bahsedildi. Daha sonra Leavitt yol cebirlerinin tanımı yapılarak, özel durumlardaki çizgeler için izomorf olduğu durumlara örnekler verildi. Verilen bu ön bilgiler ışığında Leavitt yol cebirlerinin ideallerinin varlığı için sağlaması gereken koşullar, tanım ve teoremler verildi. Daha sonra Leavitt yol cebirlerinin dereceli idealleri tanımlandı ve dereceli ideallerinin yapı teoremi hakkında bilgi verildi. Leavitt yol cebirlerinin ideallerinin varlığı için gerekli koşullar ve dereceli ideallerinin yapısının gösterilmesinin ardından, ideallerin sınıflandırılması yapıldı. Sırasıyla iki yönlü idealler, asal ve ilkel idealler ile maksimal ideallerin sağlanması için gerek ve yeter koşullar gösterildi, örnekler verildi. Son bölümde ise Leavitt yol cebirlerinin sonlu boyutlu bölümleri ile ilgili çalışmalara yer verildi. Leavitt yol cebirlerinin sonlu boyutlu bölümlerinin varolabilmesi için gerek ve yeter koşullar incelendi. Boyut fonksiyonu ve Leavitt yol cebirlerinin sonlu boyutlu bölümleri arasındaki ilişki verildi. Leavitt yol cebirlerinin sonlu boyutlu bölümlerinin ne şekilde olduğundan bahsedildi.

Bu tez, Leavitt yol cebirlerinin ideal yapıları ve sonlu boyutlu bölümleri ile ilgili Türkçe kaynak oluşturulmak amacı ile hazırlandı. Türkiye'deki birçok üniversiteden akademisyen ve öğrencilerin katılımı ile 2017 yılından bu yana Düzce Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Müge Kanuni Er önderliğinde Leavitt yol cebirleri ile ilgili online dersler ve seminerler düzenlenmektedir. Leavitt yol cebirleri ile ilgili çalıştaylar düzenlenmekte, çeşitli üniversitelerde düzenlenen matematik ile ilgili organizasyonlarda sunumlar yapılmaktadır. Yapılan tüm bu çalışmaların bir araya getirilerek herkese açık şekilde sunulduğu [lpa.duzce.edu.tr](http://lpa.duzce.edu.tr) internet sayfası 2019 yılı Kasım ayı itibarı ile aktif hale getirildi.

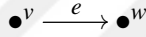
## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

### 2.1. ÇİZGE TEORİSİ

Leavitt yol cebirlerinde yönlü çizgeler tarafından oluşturulan  $K$ -cebiri vardır. Bu bölümde, yönlü bir çizge ve Leavitt yol cebirlerini incelerken yararlı olacak birkaç önemli çizge kavramı tanımlayacağız.

**Tanım 2.1. Yönlü Çizgeler :** Yönlü çizge  $E = (E^0, E^1, s, r)$ ,  $E^0$  ve  $E^1$  olmak üzere iki küme ile  $r, s : E^1 \rightarrow E^0$  olmak üzere iki dönüşüm içerir.  $E^0$  kümesinin elemanları köşeler ve  $E^1$  kümesinin elemanları kenarlar olarak adlandırılır.

$E$



Şekil 2.1.  $E$  çizgesi.

Her  $e \in E^1$  için  $s(e)$ ,  $e$  kenarının kaynağı ve  $r(e)$ ,  $e$  kenarının hedefi anlamına gelir.  $s(e) = v$  ve  $r(e) = w$  ise  $v$ ,  $e$  kenarını yayıyor ve  $w$ ,  $e$  kenarını alıyor demektir.

Eğer  $e_1, e_2 \in E^1$  için  $r(e_1) = s(e_2)$  ise,  $e_1$  ve  $e_2$  kenarlarına komşu denir.

Her  $v \in E^0$  için,  $s^{-1}(v)$ ,  $v$  tarafından yayılan kenarların kümesi,  $r^{-1}(v)$  ise  $v$  tarafından alınan kenarların kümesini ifade eder. Eğer bir  $v$  köşesi hiç kenar yaymıyorsa, yani  $s^{-1}(v) = \emptyset$  ise  $v$  köşesi *batak*, bir  $v$  köşesi hiç kenar almıyorsa, yani  $r^{-1}(v) = \emptyset$  ise  $v$  köşesi *kaynak* olarak adlandırılır.

Eğer bir  $v$  köşesi için  $|s^{-1}(v)| = \infty$  ise  $v$  köşesi *sonsuz yayan* olarak adlandırılır. Bir  $v$  köşesi bir batak ya da bir sonsuz yayıcı ise  $v$  köşesine *tekil köşe* denir. Eğer bir  $v$  köşesi tekil köşe değil ise *düzgün köşe* olarak adlandırılır. Yani bir  $v$  köşesi düzgün köşe ise  $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$  olur.

$E$  bir çizge olmak üzere,  $E^0$  ve  $E^1$  kümeleri sonlu ise,  $E$  çizgesi *sonlu çizge* olarak adlandırılır. Eğer  $E$  çizgesi hiç sonsuz yayan köşe içermiyorsa,  $E$  çizgesine *satır-sonlu çizge* denir.

Bir  $E$  çizgesinde, her  $i = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$  için  $r(e_i) = s(e_{i+1})$  olacak şekilde,  $e_1 e_2 e_3 \dots e_n$  şeklindeki kenarlar dizisine  $E$  çizgesinin  $p$  yolu denir. Bir  $p$  yolu,  $n$  adet kenar içeriyorsa bu  $p$  yolunun uzunluğu  $n$  dir ve  $l(p) = n$  ile gösterilir.

Eğer bir  $p$  yolu sonsuz sayıda kenar içeriyorsa,  $p$  sonsuz uzunlukludur denir. Bir  $p$  yolunun kaynağı, ilk kenarının kaynağı ile aynıdır, yani  $s(p) = s(e_1)$  dir. Eğer bu yol sonlu uzunlukta ise, hedefi son kenarının hedefi ile aynıdır, yani  $r(p) = r(e_n)$  dir. Ayrıca her  $v \in E^0$  köşesini  $s(v) = v = r(v)$  olmak üzere 0 (sıfır) uzunluklu bir yol olarak düşünebiliriz.

$E$  çizgesinin tüm yollarının kümesi  $Yol(E)$  ile gösterilir.  $p = e_1 e_2 \dots e_n \in Yol(E)$  yolu için  $p$  nin tüm köşelerinin kümesi  $p^0$  ile gösterilir.

$$p^0 = \{s(e_1), r(e_i) : i = 1, 2, \dots\}$$

$p = e_1 e_2 \dots e_n$  bir yol ve  $s(e) = s(e_i)$  iken  $e \neq e_i$  olacak şekilde bir  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  varsa,  $e \in E^1$  kenarına  $p$  yolu için bir *çıkış* denir.

$E$  çizgesi üzerindeki bir  $\mu$  yolu için,  $v = s(\mu) = r(\mu)$  ise;  $\mu$  ye  $v$  köşesini taban olarak alan bir *kapalı yol* denir.

$v \in E^0$  köşesini taban alan bir  $\mu = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n \in Yol(E)$  kapalı yolunda her  $i > 1$  için  $s(\eta_i) \neq v$  ise  $\mu$  yoluna  $v$  köşesini taban olarak alan *kapalı basit yol* adı verilir.

Bir  $p$  yolu,  $s(p) = r(p)$  ve her  $i \neq j$  için  $s(e_i) \neq s(e_j)$  ise *döngü* olarak adlandırılır.  $s(c) = r(c) = v$  olmak üzere  $c$  bir döngü ise,  $v$  köşesi  $c$  döngüsünün tabanıdır. Bir  $E$  çizgesi hiç döngü içermiyorsa,  $E$  çizgesine *döngüsüz çizge* denir.

**Tanım 2.2.**  $E^0$  üzerindeki  $\rightsquigarrow$  bağıntısı;  $p \in Yol(E)$  için,  $s(p) = v$  ve  $r(p) = w$  ise  $v \rightsquigarrow w$  ile tanımlanır. Bu durumda  $v, w$  ile *bağlantılı* denir. Eğer tek köşeden oluşan bir yol göz önüne alırsak,  $v = w$  olur. Her köşe kendisi ile bağlantılıdır.

**Tanım 2.3.** Her  $v \in E^0$  için,  $E^0$  da  $v$  ile bağlantılı olan tüm köşelerin kümesine,  $v$  köşesinin *ağacı* denir ve  $T(v)$  ile gösterilir. Bu durumda;

$$T(v) = \{w \in E^0 : v \rightsquigarrow w\}$$

olarak tanımlanır. Her zaman  $v \in T(v)$  olur. Ayrıca, hedefi  $v$  olan tüm yolların köşelerinin kümesi  $M(v)$  ile gösterilir. Bu durumda;

$$M(v) = \{u \in E^0 : u \rightsquigarrow v\}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 2.4.**  $E$  çizgesinde kapalı basit yol üzerindeki her  $v \in E^0$  için, tabanı  $v$  köşesi olan  $\alpha, \beta$  gibi en az iki farklı kapalı basit yol varsa,  $E$  çizgesi *(K)Koşulu*'nu sağlar denir.

$E$  çizgesi üzerindeki her bir döngünün çıkışı varsa,  $E$  çizgesi *(L)Koşulu*'u sağlar denir.

$E$  çizgesi üzerindeki bir  $c$  döngüsü içindeki herhangi bir köşe  $E$  çizgesi üzerinde başka bir döngünün tabanı değil ise  $c$  döngüsüne *K'sız döngü* olarak adlandırılır.

$E^0$  köşe kümesinin sayılabilir bir altkümesi  $S$  varsa, ve her  $u \in E^0$  için  $u \rightsquigarrow w$  olacak şekilde öyle bir  $w \in S$  varsa,  $E$  çizgesine *Sayılabılır Ayırma Özelliği*'ni sağlar denir.

$E$  bir çizge,  $S$  ise  $E^0$  'ın boş kümeden farklı sayılabilir altkümesi olsun. Her  $u, v \in E^0$  için  $u \rightsquigarrow w$  ve  $v \rightsquigarrow w$  olacak şekilde  $w \in S$  varsa,  $E$  çizgesine *sayılabilir bir şekilde yönlendirilmiş* denir.

**Tanım 2.5.**  $H \subseteq E^0$  olsun.

(i)  $v \in H$  iken,  $T(v) \subseteq H$  oluyorsa,  $H$  kümesine *kalıtsal altküme* denir.

(ii) Her  $v \in E^0$  düzgün köşesi için  $\{r(e) : s(e) = v\} \subseteq H$  iken,  $v \in H$  ise,  $H$  kümesine *doymuş altküme* denir.

Bir  $v \in E^0$  köşesi birden fazla kenar yayıyorsa,  $|s^{-1}(v)| > 1$  ise,  $v$  köşesine *çatallanma* denir.

Her  $w \in T(v)$  için,  $w$  köşesini taban alan herhangi bir döngü ve çatallanma yoksa,  $v \in E^0$  köşesine *çizgi noktası* adı verilir. Bu durumda her bataklık aynı zamanda bir çizgi noktası olur.  $E^0$  daki tüm çizgi noktası olan köşelerin kümesi  $P_l(E)$  ile gösterilir.

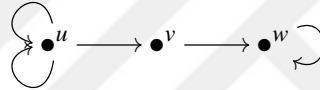
**Tanım 2.6.** (*Kısıtlama Çizgesi ( $E_H$ )*)  $E$  keyfi bir çizge ve  $H, E^0$  in kalıtsal bir altkümesi olsun.  $E$  çizgesinin  $H$  kalıtsal altkümesi tarafından oluşturulan kısıtlama çizgesi  $E_H$  aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$E_H^0 := H, \quad E_H^1 := \{e \in E^1 \mid s(e) \in H\}$$

$E_H$  nin kaynak ve hedef fonksiyonu  $E$  çizgesinin  $H$  tarafından kısıtlanan kaynak ve hedef fonksiyonudur.

$E$  çizgesini aşağıdaki şekilde alalım.  $H = \{v, w\}$  kalıtsal doymuş altkümesi için;

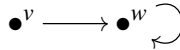
$E$



Şekil 2.2. Kısıtlama çizgesi için  $E$  çizgesi.

$E_H$  kısıtlama çizgesi aşağıdaki gibi olur.

$E_H$



Şekil 2.3.  $E_H$  Kısıtlama çizgesi.

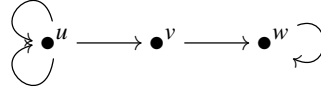
**Tanım 2.7.** *Kalıtsal Altkümenin Bölüm Çizgesi ( $E/H$ )* Herhangi bir  $E$  çizgesi alalım.  $H, E^0$  in kalıtsal altkümesi olsun.  $E$  çizgesinin  $H$  kalıtsal altkümesi tarafından oluşturulan bölüm çizgesi  $E/H$  aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$(E/H)^0 = E^0 \setminus H, \quad (E/H)^1 = \{e \in E^1 \mid r(e) \notin H\}$$

$E/H$  bölüm çizgesinin kaynak ve hedef fonksiyonu,  $E$  in  $E/H$  tarafından kısıtlanan kaynak ve hedef fonksiyonudur.

$E$  çizgesini aşağıdaki şekilde alalım.  $H = \{v, w\}$  kalıtsal doymuş altkümesi için;

$E$



Şekil 2.4. Bölüm çizgesi için  $E$  çizgesi.

$E/H$  bölüm çizgesi aşağıdaki gibi olur.

$E/H$



Şekil 2.5.  $E/H$  Bölüm çizgesi.

**Tanım 2.8.** (*Kalıtsal Altkümenin Kirpi Çizgesi* ( $F_E(H)$ )) Herhangi bir  $E$  çizgesi alalım.  $H, E^0$  ın boş olmayan kalıtsal altkümesi olsun.  $F_E(H)$  kirpi çizgesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$F_E(H) = \{\alpha \in Yol(E) \mid \alpha = e_1 \dots e_n, s(e_1) \in E^0 \setminus H, r(e_i) \in E^0 \setminus H \text{ her } 1 \leq i < n, \text{ ve } r(e_n) \in H\}$$

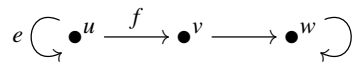
$F_E(H)$  kirpi çizgesinin bir diğer kopyası  $\bar{F}_E(H)$  olarak tanımlanır. Eğer  $\alpha \in F_E(H)$  ise  $\bar{\alpha}$  da  $\alpha$  nın kopyası olarak yazılır, buradan  $\bar{\alpha} \in \bar{F}_E(H)$  olur.  ${}_H E$  çizgesi  ${}_H E = ({}_H E^0, {}_H E^1, s', r')$  olacak şekilde tanımlanır.

$${}_H E^0 = H \cup F_E(H) \quad \text{ve} \quad {}_H E^1 = \{e \in E^1 \mid s(e) \in H\} \cup \bar{F}_E(H)$$

$s'$  ve  $r'$  kaynak ve hedef fonksiyonları, her  $e \in E^1$  için  $s(e) \in H$  olacak şekilde  $s'(e) = s(e)$  ve  $r'(e) = r(e)$ , ve her  $\bar{\alpha} \in \bar{F}_E(H)$  için  $s'(\bar{\alpha}) = s(\alpha)$  ve  $r'(\bar{\alpha}) = r(\alpha)$  olacak şekilde tanımlanır.

$E$  çizgesini aşağıdaki şekilde alalım.  $H = \{v, w\}$  kalıtsal doymuş altkümesi için;

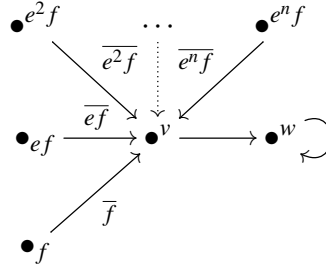
$E$



Şekil 2.6. Kirpi çizgesi için  $E$  çizgesi.

${}_H E$  kirpi çizgesi aşağıdaki gibi olur.

${}_H E$



Şekil 2.7.  ${}_H E$  Kirpi çizgesi.

**Tanım 2.9.**  $E$  bir çizge ve  $H \subseteq E^0$  kalıtsal doymuş bir altküme olsun.  $H$  kümesinin elemanlarına sonsuz sayıda ve  $E^0 \setminus H$  kümesinin elemanlarına ise sonlu sayıda kenar yayan köşesine *kırılma köşesi* denir ve bu köşelerin kümesi  $B_H$  ile gösterilir.

$$B_H := \{v \in E^0 \setminus H : |s^{-1}(v)| = \infty \text{ ve } 0 < |s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)| < \infty\}$$

ve her  $v \in B_H$  için,

$$v^H := v - \sum_{s(e)=v, r(e) \notin H} ee^*$$

şeklinde tanımlanır.  $S \subseteq B_H$  için  $(H, S)$  ikilisine *geçerli çift* denir.

$E$  bir çizge ve  $(H, S)$   $E$  kümesinde bir geçerli çift olsun.

(1)  $E/(H, S)$  bölüm çizgesi,

$$(E/(H, S))^0 := (E^0 \setminus H) \cup \{v' : v \in B_H \setminus S\}$$

$$(E/(H, S))^1 := \{e \in E^1 : r(e) \in E^0 \setminus H\} \cup \{e' : e \in E^1, r(e) \in B_H \setminus S\}$$

ve  $s(e') = s(e)$  ile  $r(e') = r(e)'$  şeklinde  $r$  ve  $s$  fonksiyonlarının genişletilmesi ile tanımlanır.

(2)  $E_{(H, S)}$  çizgesi,

$$(E_{(H, S)})^0 := H \cup S$$

$$(E_{(H, S)})^1 := \{e \in E^1 : s(e) \in H\} \cup \{e \in E^1 : s(e) \in S \text{ ve } r(e) \in H\}$$

$r$  ile  $s$  fonksiyonlarının kısıtlanmasıyla tanımlanır.

**Tanım 2.10.**  $E$  bir çizge ve  $F \subseteq E$  olsun. Eğer  $F^0 \subset E^0$  ve  $F^1 \subset E^1$  olduğunda  $f \in F^1$  için  $s(f), r(f) \in F^0$  oluyorsa  $F$  altçizgesi her  $v, w \in F^0$  için  $E$  çizgesini tam olarak sağlar ve  $F$  altçizgesine  $E$  çizgesinin öz altçizgesi denir.

$$\{f \in F^1 | s(f) = v, r(f) = w\} = \{e \in E^1 | s(e) = v, r(e) = w\}$$

$M, E$  çizgesinin boş olmayan öz altçizgesi olsun.  $M$  aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $M$  ye maksimum kuyruk denir.

MT-1 ) Eğer  $v \in E^0, w \in M^0$  ve  $v \rightsquigarrow w$  ise  $v \in M^0$  dır.

MT-2 ) Eğer  $v \in M^0$  ve  $s_E^{-1}(v) \neq \emptyset$  ise,  $s(e) = v$  ve  $r(e) \in M^0$  olacak şekilde bir  $e \in E^1$  vardır.

MT-3 ) Eğer  $v, w \in M^0$  için  $v \rightsquigarrow y$  ve  $w \rightsquigarrow y$  ise  $y \in M^0$  vardır.

MT-3 koşulu literatürde daha yaygın olarak *aşağı yönlülük* olarak adlandırılır. Ancak metinde tutarlılık için biz MT-3 olarak kullanacağız.

## 2.2. LEAVITT YOL CEBİRLERİ

Bu bölümde Leavitt yol cebirlerinin tanımını yaparak, birkaç örnek ile farklı çizgeler üzerinde izomorfik olduğu yapıları göstereceğiz. Leavitt yol cebirlerinin  $\mathbb{Z}$ -dereceli  $K$ -cebiri olduğunu ifade edeceğiz.

**Tanım 2.11.** [19, Definition 1.2.3]  $K$  bir cisim ve  $E$  keyfi bir çizge olsun. Leavitt yol cebiri  $L_K(E)$ , bir  $\{v : v \in E^0\}$  kümesi tarafından ortogonal değişkenler çifti  $\{e, e^* : e \in E^1\}$  ile birlikte oluşturulan  $K$  – *cebiri* olarak tanımlanır ve aşağıdaki koşulları sağlar:

- i) Her  $e \in E^1$  için  $s(e)e = e = er(e)$
- ii) Her  $e \in E^1$  için  $r(e)e^* = e^* = e^*s(e)$
- iii) (CK-1) Her  $e, f \in E^1$  için  $e^*e = r(e)$  ve eğer  $e \neq f$  ise  $e^*f = 0$
- iv) (CK-2) Her  $v \in E^0$  düzgün köşesi için,

$$v = \sum_{e \in E^1, s(e)=v} ee^*$$

Leavitt yol cebirleri, tek terimliler kümesi tarafından  $K$ - vektör uzayı olarak ele alınır.

$$\{\gamma\lambda^* \mid \gamma, \lambda \in \text{Yol}(E) \quad \text{öyle ki} \quad r(\gamma) = r(\lambda)\}$$

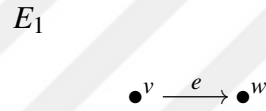
Yani,  $x \in L_K(E)$  olsun, bazı  $k_i \in K$  ve  $\gamma_i, \lambda_i \in \text{Yol}(E)$  için,

$$x = \sum_{i=1}^n k_i \gamma_i \lambda_i^*$$

olur.

Bazı bildiğimiz halkalar, Leavitt yol cebirlerinin örnekleri olarak görülür.

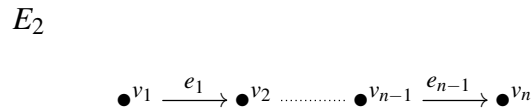
**Örnek 2.12.**  $E_1$  yönlü çizgesini aşağıdaki şekilde alırsak,



Şekil 2.8.  $E_1$  çizgesi.

$L_K(E_1) \cong M_2(K)$  olur.

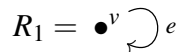
**Örnek 2.13.**  $E_2$  yönlü çizgesini aşağıdaki şekilde alırsak,



Şekil 2.9.  $E_2$  çizgesi.

$L_K(E_2) \cong M_n(K)$  olur.

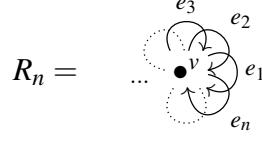
**Örnek 2.14.**  $R_1$  yönlü çizgesini aşağıdaki şekilde alırsak,



Şekil 2.10.  $R_1$  çizgesi.

$v \mapsto 1, e \mapsto x, e^* \mapsto x^{-1}$  olduğundan dolayı bu durumda,  $L_K(R_1) \cong K[x, x^{-1}]$  olur.

**Örnek 2.15.**  $n \geq 2$  için,  $R_n$  yönlü çizgesini aşağıdaki şekilde alırsak,



Şekil 2.11.  $R_n$  çizgesi.

$L_K(R_n) \cong L_K(1, n)$  olacağından, Leavitt yol cebirinin tipi  $(1, n)$  olur.

Bir  $R$  halkasının lokal birimler kümesi  $F$  olsun. O zaman  $F$ ,  $R$  deki *idempotentlerin* kümesi olur. Buradan  $R$  deki her sonlu altkümeler  $r_1, r_2, \dots, r_n$  için her  $1 \leq i \leq n$  için  $fr_i f = r_i$  olacak şekilde  $f \in F$  vardır.  $R$  halkası birimli ve birimi 1 ise o zaman lokal birimler kümesi  $F = \{1\}$  olur.

Leavitt yol cebirlerinde, her  $x \in L_K(E)$  için  $x = fxf$  olacak şekilde  $f = \sum_{v \in V(x)} v$  olan farklı köşelerin oluşturduğu  $V(x)$  kümesi vardır.  $E^0$  sonlu olduğunda,  $L_K(E)$  birim elemanı  $1 = \sum_{v \in E^0} v$  olan birimli bir halka olur. Aksi takdirde,  $L_K(E)$  birimli bir halka değildir, ama  $E^0$  in farklı elemanlarının toplamından oluşan yerel birimli bir halkadır.

Leavitt yol cebirlerinin en önemli özelliklerinden biri, her  $L_K(E)$  nin  $\mathbb{Z}$ -dereceli bir  $K$ -cebiri olmasıdır. Buradan, her  $v \in E^0$  ve  $e \in E^1$  için,  $der(v) = 0$ ,  $der(e) = 1$ ,  $der(e^*) = -1$  değerlerine bağlı olarak  $L_K(E) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L_n$  olarak tanımlanır. Ayrıca her  $n \in \mathbb{Z}$  için,  $L_n$  homojen bileşeni,

$$L_n = \{ \sum k_i \alpha_i \beta_i^* \in L_K(E) : l(\alpha_i) - l(\beta_i) = n, k_i \in K, \alpha_i, \beta_i \in Yol(E) \}.$$

şeklinde verilir.

$I$ ,  $L_K(E)$  nin bir ideali olsun, eğer  $I = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (I \cap L_n)$  ise,  $I$  idealine *dereceli ideal* denir.

### 3. LEAVITT YOL CEBİRLERİNİN İDEALLERİ

Eğer  $R^2 \neq 0$  ve  $R$  nin öz ve aşık ar olmayan idealleri varsa,  $R$  cebirine *basit* denir. Basit Leavitt yol cebirleri, Abrams ve Aranda Pino tarafından [3] 'te karakterize edilmiştir. Bu bölümde Leavitt yol cebirlerinin idealleri ile ilgili çalışmalarını göz önüne alarak Leavitt yol cebirlerinin ideallerini sınıflandıracakız. Önce Leavitt yol cebirlerinin idealleri ile  $E$  çizgesindeki köşeler arasındaki ilişkiden bahsederek başlayalım.

**Teorem 3.1.**  $K$  bir cisim ve  $E$  herhangi bir çizge olsun.  $E$   $(L)$ Koşulu'nu sağlıyor ve kalıtsal doymuş altkümeleri sadece  $\emptyset$  ve  $E^0$  ise o zaman  $L_K(E)$  basittir.

Leavitt yol cebirlerinde, herhangi bir idealin köşeler kümesi ile kesişimi her zaman kalıtsal bir kümedir.

**Yardımcı Teorem 3.2.** ([3, Lemma 3.9])  $K$  bir cisim,  $E$  herhangi bir çizge ve  $N$  de  $L_K(E)$  nin bir ideali olsun. O zaman  $N \cap E^0 \in \mathcal{H}_E$  dir.

$N \cap E^0$  boş küme olabilir. Ancak Leavitt yol cebiri  $(L)$ Koşulu'nu sağlayan bir çizge üzerinde ise, o zaman  $N$  kesinlikle bir köşe içerir.

**Önerme 3.3.** ([3, Corollary 3.8])  $K$  bir cisim ve  $E$  de  $(L)$ Koşulu'nu sağlayan herhangi bir çizge olsun.  $L_K(E)$  nin sıfırdan farklı her ideali bir köşe içerir.

**Önerme 3.4.**  $K$  bir cisim,  $E$  herhangi bir çizge ve  $H$  de  $E^0$  ın kalıtsal altkümeleri olsun. O zaman her  $v \in E_H^0, e \in E_H^1$  için  $v \mapsto v, e \mapsto e, e^* \mapsto e^*$  yoluyla  $L_K(E_H)$  den  $L_K(E)$  ye  $\mathbb{Z}$ -dereceli bir  $\varphi$  fonksiyonu vardır.

Bir çizgede, köşelerin kalıtsal altkümeleri tarafından üretilen ideallerin elamanlarını tanımlayalım.

**Yardımcı Teorem 3.5.** ([6, Lemma 5.6])  $K$  bir cisim ve  $E$  herhangi bir çizge olsun.

(i)  $H, E^0$  in kalıtsal bir altkümesi olsun. O zaman  $I(H)$  ideali

$$I(H) = \text{span}_K(\{\gamma\lambda^* | \gamma, \lambda \in \text{Yol}(E) \text{ öyle ki } r(\gamma) = r(\lambda) \in H\})$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^n k_i \gamma_i \lambda_i^* \mid n \geq 1, k_i \in K, \gamma_i, \lambda_i \in \text{Yol}(E) \text{ öyle ki } r(\gamma_i) = r(\lambda_i) \in H \right\}$$

(ii)  $H, E^0$  in kalıtsal bir altkümesi ve  $S$  de  $B_H$  nin altkümesi olsun. O zaman  $I(H, S)$  ideali

$$I(H, S) = \text{span}_K(\{\gamma\lambda^* | \gamma, \lambda \in \text{Yol}(E) \text{ öyle ki } r(\gamma) = r(\lambda) \in H\})$$

$$+ \text{span}_K(\{\alpha v^H \beta^* | \alpha, \beta \in \text{Yol}(E) \text{ ve } v \in S\}).$$

olur.

### 3.1. DERECELİ İDEALLER

Bu bölümde Leavitt yol cebirlerinin dereceli ideallerinin yapısından bahsedeceğiz. İlk olarak,  $L_K(E)$  aşıkır olmayan dereceli ideallere sahip olmadığı zaman, dereceli basitliğin sonucundan bahsedebiliriz. [19, Corollary 2.5.15]'te belirttiği gibi,  $L_K(E)$  basit dereceli ise ancak ve ancak  $E^0$  in kalıtsal doymuş altkümesi sadece  $\emptyset$  ve  $E^0$  olmalı. Örnek 2.14 'te görüldüğü gibi  $K[x, x^{-1}]$ , basit dereceli Leavitt yol cebirleri için tipik bir örnektir. Ancak,  $\langle 1 + x \rangle$  (derecelendirilmeyen) bir ideal olduğu için,  $K[x, x^{-1}]$  basit değildir. Bu nedenle, basit dereceli halkada aşıkır olmayan derecesiz ideallerin olması mümkündür.

Şimdi, [20, Remark 2.2]'de olduğu gibi Leavitt yol cebirlerinde dereceli idealleri tanımlamaya hazırız.

**Teorem 3.6.**  $K$  bir cisim ve  $E$  herhangi bir çizge olsun. O zaman  $L_K(E)$  deki her dereceli ideal  $N$ ,  $H \cup S^H$  tarafından üretilir. Burada  $H = N \cap E^0 \in \mathcal{H}_E$  ve  $S = \{v \in B_H \mid v^H \in N\}$  dir, diğer bir deyişle  $N = I(H, S)$  dir.

Özellikle,  $L_K(E)$  nin her dereceli ideali, homojen idempotentlerin kümesi tarafından üretilir.

Eğer  $N = I(H, S)$  dereceli ideal ise, bu durumda  $N = \langle H, v^H : v \in S \rangle$  nin üreteçlerinin  $u \in H$  ve  $v^H$  deki tüm idempotentler olduğuna dikkat edelim. Eğer  $N$  dereceli ideal

ise o zaman  $N = N^2$  dir, yani hepsi  $N^2$  ye aittir. Tersine,  $N$  ideali,  $N = N^2$  gibi bir ideal ise [13]'teki sonucu kullanabiliriz. [13, Theorem 3.6]'da, herhangi bir ideal  $N$  için,  $\{N^n : n > 0\}$  kümelerinin kesişiminin bir dereceli ideal olduğu belirtilir. Buradan, eğer  $N^2 = N$  ise, o zaman  $N = \cap\{N^n : n > 0\}$  dereceli idealdir. Böylece, bir Leavitt yol cebirinin dereceli ideallerinin bir karakterizasyonu elde edilir. ([19, Cor. 2.9.11]'de farklı bir şekilde kanıtlanmıştır.)

**Teorem 3.7.**  $K$  bir cisim ve  $E$  herhangi bir çizge ve  $N, L_K(E)$  nin bir ideali olsun.  $N$  in  $L_K(E)$  de dereceli ideal olması için gerek ve yeter koşul  $N^2 = N$  olmasıdır.

Bu noktada, Leavitt yol cebirlerinin idealine bölümü ile bölüm çizgesinin Leavitt yol cebirleri arasındaki ilişkiye dikkat çekmek gerekir. Aşağıdaki teoremin (i) kısmı [20, Lemma 2.3]'te ve (ii) kısmı [6, Theorem 5.7]'de gösterilmiştir.

**Teorem 3.8.**  $K$  herhangi bir cisim olsun.

- (i)  $E$  satır sonlu bir çizge ve  $H \in \mathcal{H}_E$  olsun. O zaman  $\mathbb{Z}$ -dereceli  $K$ -cebiri üzerinde  $L_K(E)/I(H) \cong L_K(E/H)$  olur .
- (ii)  $E$  keyfi bir çizge,  $H \in \mathcal{H}_E$  ve  $S \subset B_H$  olsun. O zaman  $\mathbb{Z}$ -dereceli  $K$ -cebiri üzerinde  $L_K(E)/I(H, S) \cong L_K(E/(H, S))$  olur.

### 3.2. DERECELİ İDEALLERİN YAPI TEOREMİ

Şimdi Dereceli İdeallerin Yapı Teoremi ile,  $E^0$  da belirtilen altkümelerin, Leavitt yol cebirlerindeki dereceli ideallerin latislerini tam olarak tanımlamaya hazırız. Bu bölümdeki sonuçlar ilk olarak [4]'te satır sonlu çizgeler için ve [6]'da isteğe bağlı çizgeler için ortaya çıkmıştır.

**Tanım 3.9.**  $K$  bir cisim ve  $E$  keyfi bir çizge olsun.  $\mathcal{L}_{gr}(L_K(E))$  kümesini  $L_K(E)$  deki tüm dereceli ideallerin latislerinin kümesi olarak tanımlayalım.  $\mathcal{L}_{gr}(L_K(E))$  kümesi,  $\subseteq$  bağıntısına göre bir kısmi sıralı kümedir. Ayrıca  $A, B \in \mathcal{L}_{gr}(L_K(E))$  için;

$$A \wedge B := A \cap B \text{ ideal kesişimi ,}$$

$$A \vee B := \langle A \cup B \rangle \text{ ideal birleşimi}$$

olmak üzere  $\mathcal{L}_{gr}(L_K(E))$  bir latis yapısı oluşturur.

**Not 3.10.**  $E$  keyfi bir çizge olsun.  $\mathcal{H}_E$  de,  $H \subseteq H'$  olması durumunda  $H \leq H'$  sıralama bağıntısını tanımlarız. Bu nedenle,  $\mathcal{H}_E$ , sırasıyla  $\bigvee_{i \in \Gamma} H_i := \overline{\bigcup_{i \in \Gamma} H_i}$  ve  $\bigwedge_{i \in \Gamma} H_i := \bigcap_{i \in \Gamma} H_i$  işlemleri ile verilen  $\mathcal{H}_E$  de supremum  $\bigvee$  ve infimum  $\bigwedge$  ye sahip tam bir latistir.

**Tanım 3.11.**  $E$  keyfi bir çizge ve  $\mathcal{P}(B_H)$ ,  $B_H$  nin (Tanım 2.9) tüm altkümelerinin kümesi olsun;

$$\mathcal{S} = \bigcup_{H \in \mathcal{H}_E} \mathcal{P}(B_H)$$

olmak üzere,  $S \in \mathcal{P}(B_H)$  olacak şekilde  $(H, S)$  formundaki geçerli çiftlerden oluşan  $\mathcal{H}_E \times \mathcal{S}$  altkümelerini,  $\mathcal{T}_E$  olarak gösterelim.  $\mathcal{T}_E$  de şu ilişkiyi tanımlarız:

$$(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2) \text{ ancak ve ancak } H_1 \subseteq H_2 \text{ ve } S_1 \subseteq H_2 \cup S_2.$$

**Önerme 3.12.**  $E$  keyfi bir çizge olsun.  $(H_1, S_1), (H_2, S_2) \in \mathcal{T}_E$  için,

$$(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2) \iff I(H_1, S_1) \subseteq I(H_2, S_2)$$

olur. Burada  $\leq$ ,  $\mathcal{T}_E$  de bir sıralama bağıntısıdır.

$\mathcal{T}_E$  nin latis yapısı hakkında daha fazla ayrıntı için, [19] 'a bakabilirsiniz.

**Teorem 3.13.** ([6, Theorem 5.7])  $K$  bir cisim ve  $E$  keyfi bir çizge olsun. Aşağıda verilen  $\varphi$  fonksiyonu, latis izomorfizması sağlar:

$$\varphi : \mathcal{L}_{gr}(L_K(E)) \rightarrow \mathcal{T}_E \quad \text{öyle ki} \quad I \mapsto (I \cap E^0, S).$$

$H = I \cap E^0$  için  $S = \{v \in B_H \mid v^H \in I\}$  olur.  $\varphi$  in ters fonksiyonu  $\varphi'$  aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\varphi' : \mathcal{T}_E \rightarrow \mathcal{L}_{gr}(L_K(E)) \quad \text{öyle ki} \quad (H, S) \mapsto I(H \cup S^H).$$

**Teorem 3.14.** ([4, Theorem 5.3])  $K$  bir cisim ve  $E$  satır sonlu bir çizge olsun. Aşağıda verilen  $\varphi$  fonksiyonu, latis izomorfizması sağlar:

$$\varphi : \mathcal{L}_{gr}(L_K(E)) \rightarrow \mathcal{H}_E \quad \text{öyle ki} \quad \varphi(I) = I \cap E^0,$$

tersi de

$$\varphi' : \mathcal{H}_E \rightarrow \mathcal{L}_{gr}(L_K(E)) \quad \text{öyle ki} \quad \varphi'(H) = I(H)$$

şeklinde verilir.

$E$  keyfi bir çizge ve  $K$  herhangi bir cisim olsun.  $L_K(E)$  nin her dereceli ideali bir  $K$ -cebiridir ve Leavitt yol cebirlerine izomorfiktir. Aşağıdaki teoremin (i) kısmı,  $E_H$  çizgesinin (L)Koşulu'nu sağladığı hipotezi altında [20, Lemma 5.2]'de görülmektedir.

**Teorem 3.15.**  $E$  keyfi bir çizge ve  $K$  bir cisim olsun.  $E$  nin boş olmayan kalıtsal altkümesi  $H$  ve  $S \subseteq B_H$  alalım. O zaman;

- (i)  $I(H)$ ,  $K$ -cebiridir ve  $L_K(H E)$  ye izomorfiktir.
- (ii)  $I(H, S)$ ,  $L_K((H, S) E)$  ye  $K$ -cebiri olarak izomorfiktir.

### 3.3. İKİ YÖNLÜ İDEALLERİN YAPISI

Rangaswamy [11]'de, bir idealin üreteçlerini göstermiş ve dereceli ve dereceli olmayan bölümünün yararlı bir karakterizasyonunu vermiştir. Leavitt yol cebirlerinde sonlu olarak üretilen herhangi bir idealin esas ideal olduğunu göstermiştir. Aşağıdaki sonuçlar Rangaswamy'den kaynaklanmaktadır [11].

**Teorem 3.16.**  $K$  herhangi bir cisim ve  $E$  keyfi bir çizge olsun.  $L_K(E)$  nin sıfırdan farklı herhangi bir ideali, aşağıdaki formun elemanları tarafından üretilir.

$$\left( u + \sum_{i=1}^k k_i g^{r_i} \right) \left( u - \sum_{e \in X} e e^* \right)$$

Burada  $u \in E^0$ ,  $k_i \in K$ ,  $r_i$  pozitif tamsayılar,  $X$ ,  $s^{-1}(u)$  nun sonlu (ya da boş) uygun bir altkümesidir ve bazı  $i$  ler için  $k_i \neq 0$  olduğu zaman,  $g$ ,  $u$  yu taban olarak alan tek bir dögüdür.

[11]'in ana sonucu aşağıdaki teoremdir:

**Teorem 3.17.**  $I$ ,  $L_K(E)$  nin sıfırdan farklı keyfi bir ideali,  $I \cap E^0 = H$  ve  $S = \{v \in B_H : v^H \in I\}$  olsun. O zaman  $I$  ideali,  $H \cup \{v^H : v \in S\} \cup Y$  tarafından üretilir. Burada  $Y$  aşağıdaki ifadelerin bulunduğu  $(u + \sum_{i=1}^n k_i g^{r_i})$  formundaki karşılıklı ortogonal elamanlar kümesidir.

- (i)  $g, E^0 \setminus H$  deki  $u$  köşesine dayanarak  $E^0 \setminus H$  de hiçbir çıkışı olmayan, (tek) bir dögüdür; ve
- (ii) En az bir  $k_i \neq 0$  olacak şekilde  $k_i \in K$  dır.

Eğer  $I$  dereceli değil ise,  $Y$  boş küme değildir.

**Özellik 3.18.**  $L_K(E)$  nin her sonlu üreteçli ideali esas idealdir. Hatta,  $E$  eğer sonlu çizge ise, o zaman her ideal esas idealdir.

### 3.4. ASAL VE İLKEİ İDEALLER

Asal ideallerin yapısı halka teorisinde kilit bir rol oynamıştır. Leavitt yol cebirinde, satır sonlu çizgelerdeki Leavitt yol cebirlerinin asal ve ilkel ideallerine odaklanan ilk çalışma [9]'dadır. Daha sonra herhangi bir çizge üzerinde ana ideal yapısı [10] 'da çalışılmış, ilkel Leavitt yol cebirleri [7]'de açıklanmıştır. İlkel cebirler Kaplansky'nin "Düzenli bir asal halka mutlaka ilkel midir?" sorusunun cevabını vermesi açısından da önemlidir.

Birkaç halka teorisi tanımını hatırlayalım.  $P \neq R$  olması durumunda,  $R$  halkasının iki yönlü ideali  $P$  asaldır ve  $P$ , eğer  $IJ \subseteq P$  ise o zaman  $I \subseteq P$  ya da  $J \subseteq P$  olacak şekilde  $R$  de iki yönlü  $I, J$  ideallerine sahiptir.  $R$  halkası asal ise, bu durumda  $\{0\}$ ,  $R$  nin asal idealidir. Eğer  $R/P$  asal halka ise, o zaman  $P$  nin  $R$  de asal ideal olduğu kolayca gösterilebilir.  $R$  nin tüm asal ideallerinin kümesine  $R$  nin *asal spektrumu* denir ve  $Spec(R)$  ile gösterilir. Eğer  $R$  basit sıfırlayıcısız sol  $R$ -modül ise,  $R$  ye *sol ilkel halka* denir. Herhangi bir ilkel halkanın asal olduğunu göstermek kolaydır.

Her  $a \in R$  için  $a = axa$  olacak şekilde  $x \in R$  nin mevcut olması durumunda bir halka *von Neumann düzenlidir*. Leavitt yol cebirlerinin teorisinde,  $L_K(E)$  nin düzenli olması için gerekli ve yeterli koşul Abrams ve Rangaswamy tarafından [8]'de verilmektedir.

**Teorem 3.19.**  $K$  herhangi bir cisim ve  $E$  keyfi bir çizge olsun.  $L_K(E)$  nin von Neumann düzenli olması için gerek ve yeter koşul  $E$  nin dögü içermemesidir.

Örnek 2.14'te bir köşe ve bir bukleden oluşan  $R_1$  çizgesine bakalım.  $K[x, x^{-1}] \cong L_K(R_1)$  esas ideal kümesinin asal idealleri, genel Leavitt yol cebirlerinin asal spektrumları için bir model sağlar.  $R_1$  çizgesinin temel özelliği, çıkışları olmayan benzersiz bir dögü

içermesidir. Spesifik olarak,  $\text{Spec}(K[x, x^{-1}])$ ,  $K[x, x^{-1}]$  in indirgenemez polinomları tarafından oluşturulan ideallerle birlikte ideal  $\{0\}$  dan oluşur. İndirgenemez polinomlar  $x^n f(x)$  biçimindedir, burada  $f(x)$  standart polinom halkası  $K[x]$  içindeki indirgenemez bir polinomdur ve  $n \in \mathbb{Z}$  dir. Özellikle,  $L_K(R_1)$  de tam olarak tek dereceli ideal (yani,  $\{0\}$ ) vardır. Kalan tüm  $L_K(R_1)$  idealleri,  $K[x, x^{-1}]$  deki indirgenemez polinomlara karşılık gelen derecelendirilmemiş ideallerdir.

Leavitt yol cebirlerinin asal idealleri, aşağıdaki teoremden tamamen tanımlanır.  $M(u)$  nun Tanım 2.3'te tanımlandığını hatırlayalım.

**Teorem 3.20.** [10, Theorem 3.12]  $K$  herhangi bir cisim ve  $E$  keyfi bir çizge olsun.  $P \cap E^0 = H$  olacak şekilde  $L_K(E)$  de bir  $P$  ideali alalım. Eğer  $P$  aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa ancak ve ancak o zaman  $P$ ,  $L_K(E)$  nin asal ideali olur.

- (i)  $P = \langle H, \{v^H : v \in B_H\} \rangle$  ve  $E^0 \setminus H$ ,  $MT - 3$  koşulunu sağlamalı;
- (ii)  $P = \langle H, \{v^H : v \in B_H \setminus \{u\}\} \rangle$ , bazı  $u \in B_H$  ve  $E^0 \setminus H = M(u)$  için;
- (iii)  $P = \langle H, \{v^H : v \in B_H\}, f(c) \rangle$ , burada  $c$ ,  $E^0 \setminus H = M(u)$  olacak şekilde  $u$  köşesini taban olarak alan  $E$  de  $K$ 'sız bir döngüdür ve  $f(x)$ ,  $K[x, x^{-1}]$  de indirgenemez bir polinomdur.

Eğer  $\{0\}$  asal ideal ise o zaman  $R$  halkasının asal olduğunu hatırlayalım. Bu nedenle Teorem 3.20'ye ait önemli bir sonuca ulaşırız.

**Sonuç 3.21.**  $K$  herhangi bir cisim ve  $E$  keyfi bir çizge olsun. O zaman  $L_K(E)$  nin asal olması için gerek ve yeter koşul  $E$  çizgesinin  $MT - 3$  koşulunu sağlamasıdır.

$E$  satır sonlu bir çizge olduğunda,  $L_K(E)$  nin ilkel olduğu ile ilgili karakteristiği [9]'da gösterilmiştir.

**Teorem 3.22.**  $K$  herhangi bir cisim ve  $E$  satır sonlu bir çizge olsun. O zaman,  $L_K(E)$  nin ilkel olması için gerek ve yeter koşul,  $E$  çizgesinin  $MT - 3$  ve  $(L)Koşulu$ 'nu sağlamasıdır.

$E$  keyfi bir çizge olduğunda, bu sonuç çizge üzerinde yeni bir koşul gerektirir [7].

**Teorem 3.23.**  $K$  herhangi bir cisim ve  $E$  de keyfi bir çizge olsun. O zaman,  $L_K(E)$  nin ilkel olması için gerek ve yeter koşul,  $E$  çizgesinin  $MT - 3$ ,  $(L)Koşulu$  ve Sayılabilir Ayırma Özelliği'ne sahip olmasıdır.

Burada, Kaplansky'nin "Düzenli bir asal halka mutlaka ilkel mi?" Sorusuna örnek teşkil eden bir Leavitt yol cebiri örneği verelim.

**Örnek 3.24.**  $X$  sayılamayan bir küme ve  $S$  de,  $X$  in sonlu altkümelerinin kümesi olsun.  $E$  çizgesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

- (1)  $S$  ile endeksli köşeler , ve
- (2) Uygun altküme ilişkisi ile indirgenmiş yollar.

O zaman  $L_K(E)$  düzenli, asal ama ilkel olmayan bir Leavitt yol cebiridir.

Aşağıdaki sonuçlar [10]'dan alınmıştır..

**Yardımcı Teorem 3.25.** ([10, Lemma 3.8])  $H = P \cap E^0$  olacak şekilde  $L_K(E)$  de bir  $P$  asal ideali alalım ve  $S = \{v \in B_H : v^H \in P\}$  olsun. O zaman  $I(H, S)$  ideali, aynı zamanda  $L_K(E)$  nin asal idealidir.

**Özellik 3.26.** ([10, Corollary 3.9])  $E$  keyfi bir çizge ve  $K$  herhangi bir cisim olsun. O zaman Leavitt yol cebiri  $L_K(E)$ , sadece herhangi bir köşe içermeyen  $L_K(E)$  in bir ideali varsa, bir asal halkadır.

Ortaya çıkan doğal bir soru, Kaplansky'nin sorusunun dereceli versiyonuna, yani her asal dereceli von Neumann düzenli Leavitt yolu cebirinin ilkel dereceli olup olmadığını cevaplamaktır. Bu soru, son zamanlarda Rangaswamy'nin yayınlanmamış eseriyle çözüldü [12].

**Teorem 3.27.** Herhangi bir  $E$  keyfi çizgelsi için, aşağıdaki maddeler denktir:

- (i)  $L_K(E)$  ilkel derecelidir;
- (ii)  $E^0$  sayılabilir yönlüdür;
- (iii)  $L_K(E)$  asal derecelidir ve bazı  $v \in E^0$  köşeleri için,  $T(v)$  ağacı Sayılabilir Ayırma Özelliği'ni sağlamaktadır.

Rangaswamy, [12]'de, asal dereceli ancak ilkel dereceli olmayan, dereceli von Neumann düzenli halkalarının birçok örneğini sunmaktadır.

### 3.5. MAKSİMAL İDEALLER

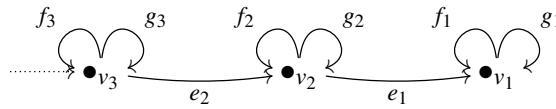
Birimli bir halkada, herhangi bir maksimal ideal, aynı zamanda bir asal idealdir. Ancak, bu birimli olmayan bir halka için mutlaka doğru değildir. Örneğin, birimli olmayan halka  $2\mathbb{Z}$  ve onun ideali  $4\mathbb{Z}$  olsun.  $4\mathbb{Z}$  ifadesinin maksimal bir ideal olduğuna dikkat edelim, ancak  $2\mathbb{Z}$  de asal bir ideal değildir. Sadece  $E^0$  sonlu ise Leavitt yol cebirleri birimli halkadır. Bu yüzden, maksimal idealleri birimli olmayan bir ortamda incelemek faydalı olacaktır. Birimli olmayan Leavitt yol cebirlerinde maksimal ve asal idealler üzerine aşağıdaki çalışmalar [10, pp.86-87]'de gösterilmiştir.

**Önerme 3.28.** Bir  $R$  halkasında  $R^2 = R$  oluyorsa, herhangi bir maksimal ideal bir asal idealdir. Bu nedenle, herhangi bir Leavitt yol cebirinde, herhangi bir maksimal ideal bir asal idealdir.

[10, Lemma 3.6]'da belirtildiği gibi, bir Leavitt yolu cebiri  $L_K(E)$  de, en büyük dereceli ideal,  $H = N \cap E^0$  ve  $S = \{v \in B_H \mid v^H \in N\}$  olacak şekilde  $(H, S)$  geçerli çifti tarafından üretilen herhangi bir  $N$  idealini içerir ( $gr(N)$  şeklinde ifade edilir) yani  $gr(N) = I(H, S)$  dir. Eğer derecelendirilmemiş bir ideal  $N$ , bir Leavitt yol cebirindeki iki taraflı ideallerin latisi  $\mathcal{L}_{gr}(L_K(E))$  de maksimal bir eleman ise, o zaman  $gr(N)$ , Leavitt yol cebirinin tüm iki taraflı derecelendirilmiş ideallerinin latisi olan  $\mathcal{L}_{gr}(L_K(E))$  de bir maksimal elemandır.

Maksimal idealler her zaman birimli halkada bulunur; ancak, bu birimli olmayan bir halkada her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnekte Leavitt yol cebirine bakalım:

**Örnek 3.29.**  $E$ , her  $i$  için  $E^0 = \{v_i : i = 1, 2, \dots\}$  olacak şekilde satır sonlu çizge olsun.  $e_i$  ile  $r(e_i) = v_i, s(e_i) = v_{i+1}$  olacak şekilde kenarları, ayrıca  $v_i$  lerin her birinde iki döngü  $f_i, g_i$  olacak şekilde  $v_i = s(f_i) = r(f_i) = s(g_i) = r(g_i)$  köşeleri vardır.



Şekil 3.1. İki kulak çizgesi.

$E$  de köşelerin  $n \geq 1$  için  $H_n = \{v_1, \dots, v_n\}$  olacak şekilde boş kümeden farklı uygun kalıtsal doymuş altkümeleri, küme işlemleri altında sonsuz bir zincir oluşturur.  $E$

çizgesi  $(K)Koşulu$ 'nu sağlar, bu yüzden tüm idealler derecelidir ve bazı  $n$  ler için  $H_n$  tarafından üretilir. Ayrıca küme işlemleri altında bir zincir oluşturur. İdealler zinciri sonlanmadığından,  $L_K(E)$  herhangi bir maksimal ideal içermez. Ayrıca, her  $n$  için  $E^0 \setminus (H_n, \emptyset)$  nin  $MT - 3$  koşulunu sağladığını ve bu nedenle tüm ideallerin asal ideal olduğunu görüyoruz.

İyi bilinen bir soru, birimli olmayan bir Leavitt yol cebirinde maksimal bir idealin ne zaman var olduğunu bulmaktır. Gerekli ve yeterli koşul, [14] 'te kanıtlandığı gibi,  $E^0$  in maksimal kalıtsal ve doymuş altkümesinin varlığına bağlıdır.

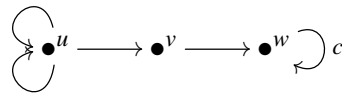
**Teorem 3.30.** (Varolma Teoremi)  $L_K(E)$ , ancak ve ancak  $\mathcal{H}_E$  bir maksimal elemana sahipse, maksimal ideale sahiptir.

Dahası,  $\mathcal{H}_E$  nin poset yapısı, Leavitt yol cebirindeki her idealin maksimal bir ideali içerip içermediğini belirler.

**Teorem 3.31.** Aşağıdaki iddialar eşdeğerdir:

- (i) Her  $X \in \mathcal{H}_E$  elemanı,  $Z \in \mathcal{H}_E$  maksimal elemanında bulunur.
- (ii)  $L_K(E)$  nin her ideali, maksimal idealde bulunur.

**Örnek 3.32.**  $E$  bir çizge olsun



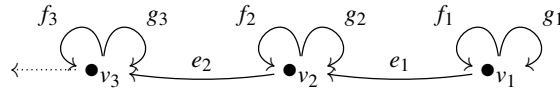
Şekil 3.2. Dereceli maksimal ideal için örnek  $E$  çizgesi.

$E$   $(K)Koşulu$ 'nu sağlamaz, bu yüzden  $E$  üzerindeki Leavitt yol cebiri hem derecelendirilmiş hem de derecelendirilmemiş ideallere sahiptir.  $Q$  kalıtsal doymuş altküme  $H = \{v, w\}$  tarafından oluşturulan derecelendirilmiş bir ideal olsun.  $Q$ ,  $L/Q$  ve  $L_K(E \setminus H)$  izomorfik olduğu ve aynı zamanda da basit Leavitt cebirine  $L(1, 2)$  izomorfik olduğu için maksimal idealdir. Teorem 3.20'yi kullanarak  $L$  deki asal idealleri sınıflandırabiliriz. Her biri  $f(c)$  tarafından üretilen ve  $f(x)$  in  $K[x, x^{-1}]$  de bulunan indirgenemez bir polinom olduğu ve hepsi  $Q$  da bulunan, sonsuz sayıda derecelendirilmemiş asal ideal vardır. Ayrıca  $E$   $MT - 3$

koşulunu sağlıyorsa aşikar ideal  $\{0\}$  asaldır ve  $L_K(E)$  tek bir  $Q$  maksimal elemanına sahiptir.

Aşağıdaki örnekte sonsuz sayıda kalıtsal doymuş altküme içeren bir çizge örneği veriliyor. Buna karşılık gelen Leavitt yol cebiri, derecelendirilmiş bir maksimal ideale sahiptir.

**Örnek 3.33.**  $E$ , her  $i$  için  $E^0 = \{v_i : i = 1, 2, \dots\}$  olacak şekilde satır sonlu çizge olsun.  $e_i$  ile  $s(e_i) = v_i$ ,  $r(e_i) = v_{i+1}$  olacak şekilde kenarları, ayrıca  $v_i$  lerin her birinde iki döngü  $f_i, g_i$  olacak şekilde  $v_i = s(f_i) = r(f_i) = s(g_i) = r(g_i)$  köşeleri vardır.

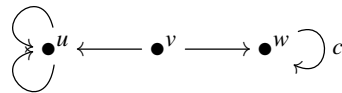


Şekil 3.3. Ters iki kulak çizgesi.

$E$  satır sonlu bir çizgedir ve  $E$  içindeki köşelerin boş olmayan uygun kalıtsal doymuş altkümeleri  $H_n = \{v_n, v_{n+1}, \dots\}$  bazı  $n \geq 2$  ve  $H_{n+1} \subsetneq H_n$ , küme işlemleri altında sonsuz bir zincir oluşturur ve  $H_2 = \{v_2, v_3, \dots\}$ ,  $\mathcal{H}_E$  kümesindeki maksimal elemandır.  $E$  çizgesi  $(K)$ Koşulu'nu sağlar, bu nedenle tüm idealler derecelidir ve bazı  $n$  ler için  $H_n$  ile üretilir. Yani  $L_K(E)$  tek bir maksimal ideal olan  $I(H_2)$  yı içerir. Ayrıca,  $E^0 \setminus H_n$  her  $n$  için  $MT - 3$  koşulunu sağlar ve bu nedenle  $L_K(E)$  nin tüm ideallerinin asal ideal olduğu görülür.

Bir Leavitt yol cebirinde, eğer tek bir maksimal ideal varsa, o zaman dereceli bir idealdir. Ayrıca, her maksimal ideal  $L_K(E)$  de dereceli ise, ancak ve ancak  $\mathcal{H}_E$  deki her bir maksimal eleman  $H$  için,  $E \setminus (H, B_H)$   $(L)$ Koşulu'nu sağlar. Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi hem dereceli hem de derecesiz maksimal idealleri içeren Leavitt yol cebirlerinin olduğuna dikkat edelim.

**Örnek 3.34.**  $E$  bir çizge olsun



Şekil 3.4. Dereceli ve derecesiz maksimal ideal için örnek  $E$  çizgesi.

$E$  üzerindeki Leavitt yol cebiri hem dereceli hem de derecesiz maksimal ideallere sahiptir.  $\mathcal{H}_E$  kümesi sonludur ve bu nedenle herhangi bir ideal maksimal idealde bulunur. Boş küme

tarafından oluşturulan dereceli bir ideal olan aşık ideal  $\{0\}$ ,  $E$ ,  $MT - 3$  koşulunu yerine getirmediğinden asal değildir.  $f(x)$ ,  $K[x, x^{-1}]$  de  $\{0\}$  ı içeren indirgenemez bir polinom olduğundan, her biri  $f(c)$  tarafından üretilen sonsuz çoklukta dereceli olmayan asal ideal vardır.  $N$  kalıtsal doymuş altküme  $H = \{u\}$  tarafından oluşturulan dereceli ideal olsun, bu durumda,  $E \setminus H$  bölüm çizgesi  $(L)Koşulu$ 'nu sağlamaz.  $f(x)$ ,  $K[x, x^{-1}]$  de  $\{N\}$  i içeren indirgenemez bir polinom olduğundan, her biri  $f(c)$  tarafından üretilen sonsuz çoklukta dereceli olmayan maksimal ideal vardır. Ayrıca,  $Q$  kalıtsal doymuş altküme  $H = \{w\}$  tarafından oluşturulan dereceli ideal olsun. Bu durumda,  $E \setminus H$  bölüm çizgesi  $(L)Koşulu$ 'nu sağlar. Dolayısıyla  $Q$  maksimal bir idealdir.  $L_K(E)$  sonsuz sayıda maksimal ideale sahiptir. Bunlardan biri olan  $Q$  derecelidir ve dereceli kısmı  $N$  olan sonsuz sayıda derecesiz idealler vardır.

Sıfır olmayan tüm ana ideallerin maksimal olduğu sorusuna cevap vermek ilginçtir, çünkü bu halkalara Krull boyutunda sıfır olan halkalar denir. Aslında, Krull boyutunda öngörülen Leavitt yol cebirleri [10]'da çalışılmıştır. Bu bölümü [10]'dan iki sonuç ile bitirelim.

**Teorem 3.35.** [10, Theorem 6.1]  $E$  keyfi bir çizge ve  $K$  herhangi bir cisim olsun. O halde Leavitt yol cebiri  $L_K(E)$  nin sıfır olmayan her bir asal ideali, eğer  $E$  aşağıdaki iki koşuldan birini sağlarsa, maksimaldir:

**Koşul I:**

- (i)  $E^0$ , maksimum bir kuyruktur;
- (ii)  $E^0$  ın kalıtsal doymuş altkümeleri sadece  $E^0$  ve  $\emptyset$  dir;
- (iii)  $E$ ,  $(K)Koşulu$ 'nu sağlamaz.

**Koşul II:**

- (i)  $E$ ,  $(K)Koşulu$ 'nu sağlar.
- (ii) Her maksimum  $M$  kuyruğu için, kısıtlı  $E_M$  çizgesi, boş olmayan kalıtsal doymuş altkümeler içermez;
- (iii)  $H$ ,  $E^0$  ın kalıtsal doymuş bir altkümesi ise, o zaman her  $u \in B_H$  için  $M(u) \subsetneq E^0 \setminus H$  olur.

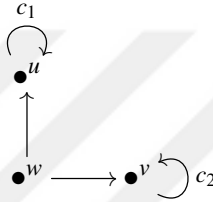
$E$  sonlu çizge olduğunda, cevap çok daha basittir.

**Özellik 3.36.**  $E$  sonlu bir çizge olsun. Öyleyse  $L_K(E)$  nin sıfır olmayan her bir asal ideali, eğer  $n$  pozitif tamsayısı için  $L_K(E) \cong M_n(K[x, x^{-1}])$  ise maksimaldir. Ya da  $E$   $(K)$ Koşulu'nu sağlar ve her  $M$  maksimum kuyruğu için,  $E_M$  kısıtlı çizgesi, köşelerin boş olmayan kalıtsal doymuş altkümelerini içermez.

Şimdi,  $E$  çizgesi üzerinde  $L_K(E)$  nin ideallerinin gösterilmesi ile ilgili örnek verelim.

**Örnek 3.37.** [14]  $K$  bir cisim ve  $E$  satır sonlu bir çizge olmak üzere  $E$  çizgesini aşağıdaki gibi alalım.

$E$



Şekil 3.5. İdeal örneği için  $E$  çizgesi.

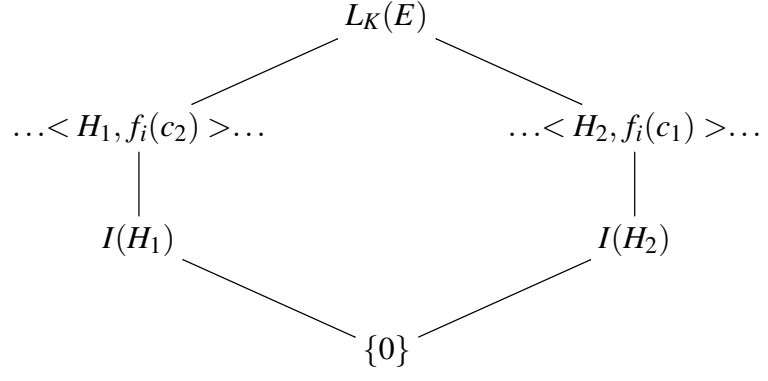
$E$  çizgesi  $(K)$ koşulu,  $(L)$ koşulunu ve  $MT - 3$  koşulunu sağlamıyor.  $E$  çizgesinin kalıtsal doymuş altkümeleri  $H_\emptyset = \emptyset$ ,  $H_1 = \{u\}$ ,  $H_2 = \{v\}$ ,  $H_E = E^0$  şeklinde olur.

$J$  bir indeks kümesi ve her  $i \in J$  için  $f_i(x) \in K[x, x^{-1}]$  in indirgenemez polinomu olsun. Kalıtsal doymuş altkümelere göre idealleri bulalım.

Çizelge 3.1.  $E$  çizgesinin kalıtsal doymuş altkümelerine göre ideal türleri.

$H$	$B_H$	$E^0 \setminus H$	İdealler
$H_\emptyset = \emptyset$	$\emptyset$	$E^0 \setminus H_\emptyset = E^0$ MT-3 değil	$I(\emptyset)$ Asal değil
$H_1 = \{u\}$	$\emptyset$	$E^0 \setminus H_1 = \{w, v\}$ MT-3'ü sağlar $E^0 \setminus H_1 = M(v)$	$I(H_1)$ Tip 1, asal $\langle H_1, f_i(c_2) \rangle$ Tip 3, asal, derecesiz
$H_2 = \{v\}$	$\emptyset$	$E^0 \setminus H_2 = \{w, u\}$ MT-3'ü sağlar $E^0 \setminus H_2 = M(u)$	$I(H_2)$ Tip 1, asal $\langle H_2, f_i(c_1) \rangle$ Tip 3, asal, derecesiz
$H_E = E^0$	$\emptyset$	$E^0 \setminus H_E = \emptyset$ MT-3 değil	$I(E^0)$ Tip 3, Asal

Bulduğumuz bu sonuçlara göre  $L_K(E)$  nin *ideal diyagramı* aşağıdaki şekilde olur.



Şekil 3.6.  $E$  çizgesinin ideal diagramı.

Yukarıdaki örnekte  $E$  çizgesi üzerindeki Leavitt yol cebirlerinin asal, maksimal ve derecesiz asal ideallerini gösterdik.

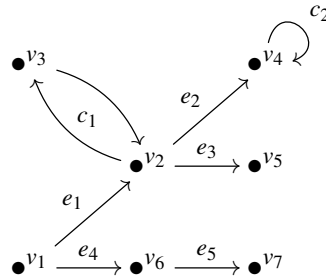
#### 4. LEAVITT YOL CEBİRİNİN SONLU BOYUTLU BÖLÜMLERİ

Bu kısımda, satır sonlu yönlü çizgeler üzerindeki Leavitt yol cebirlerinin sonlu boyutlu bölümleri ve bu bölümler üzerinde yapılan çalışmalara yer vereceğiz. Bu kısımda  $E$  yi satır sonlu yönlü çizge alacağız.

$L_K(E)$  nin sıfırdan farklı sonlu boyutlu bir bölümünün var olması için gerek ve yeter koşulu ifade etmek için ihtiyacımız olacak tanım, Tanım 2.3'te vermiştik.  $s(p) = v$  ve  $r(p) = w$  olacak şekilde bir  $p$  yolu varsa,  $v, w$  ile bağlantılıdır ve  $\rightsquigarrow$  ile gösterilir. Bu,  $E^0$  köşeler kümesi üzerinde bir ön sıralama bağıntısı (yansıma ve geçişme) tanımlar.  $v$  ve  $w$  köşeleri bir döngü üzerinde ise  $v \rightsquigarrow w$  ve  $w \rightsquigarrow v$  olur.  $U, E$  çizgesinin bataklık ve döngülerinin kümesi olsun. Bu bağıntı  $U$  üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olması için gerek ve yeter koşul çizgenin döngülerinin ayrık olmasıdır.  $u' \rightsquigarrow u$  olması durumunda  $u' = u$  oluyorsa  $u \in U$  batağına veya döngüsüne *maksimal* denir.  $u$  ve  $v$  bir  $c$  döngüsü üzerindeki iki köşe ise bu köşeler aynı *öncüllere* sahiptir ve böylece  $M(c)$  iyi tanımlıdır.  $M(v)$  kümesinin *tam altçizgesi*  $E_{\rightsquigarrow v}$  ile gösterilir.

**Örnek 4.1.**  $E$  çizgesi aşağıdaki gibi verilsin.  $E$  çizgesinin maksimal bataklık ve maksimal döngüsüne bakalım.

$E$



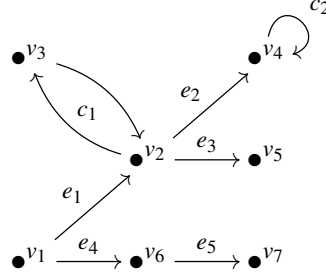
Şekil 4.1. Maksimal bataklık ve maksimal döngü için  $E$  çizgesi.

$E$  çizgesinin maksimal bataklık olan köşesi çizgedeki döngülerden kendisine yol olmadığı için  $v_7$  köşesidir. Maksimal döngüsü ise  $v_2$  köşesindeki  $c_1$  döngüsüdür.  $v_5$  köşesine  $c_1$

döngüsünden yol olduğu için maksimal bataklık ve aynı şekilde  $c_2$  döngüsüne  $c_1$  döngüsünden yol olduğu için maksimal döngü değildir.

**Örnek 4.2.**  $E$  çizgesi aşağıdaki gibi verilsin.

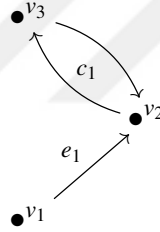
$E$



Şekil 4.2.  $E_{\rightsquigarrow v_2}$  tam altçizgesi için  $E$  çizgesi.

$E$  çizgesinde  $M(v_2) = \{v_1, v_2, v_3\}$  olduğundan  $E_{\rightsquigarrow v_2}$  tam altçizgesi aşağıdaki şekilde olur.

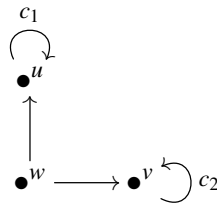
$E_{\rightsquigarrow v_2}$



Şekil 4.3.  $E_{\rightsquigarrow v_2}$  tam altçizgesi.

**Örnek 4.3.**  $E$  satır sonlu bir çizge olmak üzere  $E$  çizgesi aşağıdaki gibi olsun.  $E$  çizgesinde

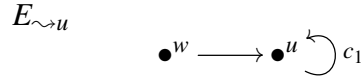
$E$



Şekil 4.4.  $E$  çizgesi.

maksimum bataklık yok.  $c_1$  ve  $c_2$  döngülerine herhangi bir döngüden yol olmadığı için ikisi de maksimal döngü olur.

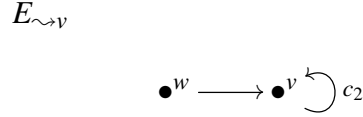
$c_1$  maksimal döngüsü için  $M(u) = \{u, w\}$  olduğundan  $E_{\rightsquigarrow u}$  tam çizgesi;



Şekil 4.5.  $E_{\rightsquigarrow u}$  çizgesi.

şeklinde olur.

$c_2$  maksimal döngüsü için  $M(v) = \{w, v\}$  olduğundan  $E_{\rightsquigarrow v}$  tam çizgesi;



Şekil 4.6.  $E_{\rightsquigarrow v}$  çizgesi.

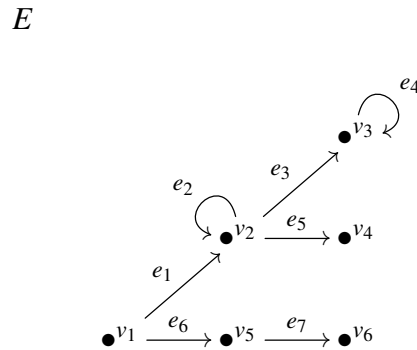
şeklinde olur.

**Tanım 4.4.** [16, Definition 3.8] (*Boyut Fonksiyonu*)  $E$  satır sonlu yönlü bir çizge olsun.  $d : E^0 \rightarrow \mathbb{N}$  fonksiyonu her  $v \in E^0$  için  $d(v) = \sum_{s(e)=v} d(r(e))$  yi sağlıyorsa  $d$  fonksiyonuna  $E$  çizgesinin *boyut fonksiyonu* denir.

Aşağıdaki teorem Leavitt yol cebirinin sıfırdan farklı sonlu boyutlu bölümünün varolması için gerek ve yeter koşulu vermektedir. Çizge satır sonlu olması durumunda Leavitt yol cebirlerinin tüm olası sonlu boyutlu bölümleri Teorem 4.8’de ifade ediliyor.

**Teorem 4.5.** [16, Sonuç 3.7]  $E$  çizgesinin sıfırdan farklı bir boyut fonksiyonunun var olması için gerek ve yeter koşul sonlu boyutlu sıfırdan farklı bir bölümünün olmasıdır.

**Örnek 4.6.**  $E$  çizgesi aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 4.7. Boyut fonksiyonu için  $E$  çizgesi.

$E$  çizgesi için sıfırdan farklı boyut fonksiyonları için bağıntıları yazalım:

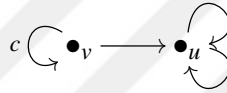
$$d(v_1) = d(v_2) + d(v_5) \quad d(v_2) = d(v_2) + d(v_3) + d(v_4)$$

$$d(v_3) = d(v_3) \quad d(v_5) = d(v_6)$$

Bu bağıntılara göre  $d(v_2) = d(v_2) + d(v_3) + d(v_4)$  eşitliğinden  $d(v_3) + d(v_4) = 0$  elde edilir. Buradan  $d(v_3) = 0$ ,  $d(v_4) = 0$  olduğu görülür.  $d(v_6) = n \in \mathbb{N}$  ise  $d(v_5) = n$  dir. Ayrıca  $d(v_2) = m \in \mathbb{N}$  ise  $d(v_1) = m + n$  elde edilir. O halde  $E$  çizgesi için  $m, n \in \mathbb{N}$  için sonsuz çoklukta boyut fonksiyonu vardır.  $m, n$  doğal sayılarından birini sıfırdan farklı alırsak sıfırdan farklı bir boyut fonksiyonu elde ederiz.

**Örnek 4.7.** Aşağıdaki  $E$  çizgesini göz önüne alalım.

$E$



Şekil 4.8. Örnek  $E$  çizgesi.

$d : E^0 \rightarrow \mathbb{N}$  fonksiyonu  $E$  çizgesinin bir boyut fonksiyonu ise  $d(u) = d(u) + d(u)$  ve  $d(v) = d(v) + d(u)$  olduğundan  $d(u) = 0$  ve de  $d(v) = n \in \mathbb{N}$  olmalıdır.

Aşağıdaki teorem ile satır sonlu bir çizgenin Leavitt yol cebirlerinin tüm sonlu boyutlu bölümleri karakterize ediliyor.

**Teorem 4.8.** [16, Theorem 6.2]  $E$  satır sonlu yönlü bir çizge olsun. Eğer  $A$ ,  $L_K(E)$  Leavitt yol cebirinin bir sonlu boyutlu bölümü ise her bir  $n_k$  pozitif tamsayısı için  $P_k(x)$ ,  $P_k(0) = 1$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) olacak şekilde sabit olmayan bir polinom ve  $B_k = K[x]/(P_k(x))$  olmak üzere

$$A \cong \bigoplus_{k=1}^m M_{n_k}(B_k)$$

olur. Buradaki  $m$ , çizgedeki sonlu sayıda öncülü olan maksimal bataklık ve maksimal döngülerin sayısını,  $n_k$  ise  $k$ . maksimal bataklık ve maksimal döngüye gelen yol sayısını ifade eder.

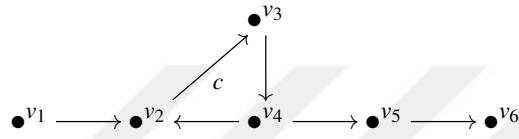
**Sonuç 4.9.** [16, Corollary 6.4] Verilen dereceli ideal  $I$  için  $K$ -vektör uzayı olarak  $\dim(L_K(E)/I)$  sonlu boyutlu ise o zaman  $A := L_K(E)/I$  bölüm cebiri  $K$  üzerindeki matris cebirlerinin direkt toplamına izomorfiktir.

Aşağıdaki teorem  $L_K(E)$  nin ne zaman sıfırdan farklı sonlu boyutlu bölümünün olduğu sorusuna çizgesel olarak cevap verir.

**Teorem 4.10.** [16, Theorem 6.5]  $E$  satır sonlu bir yönlü çizge olsun.  $L_K(E)$  nin sıfırdan farklı sonlu boyutlu bir bölümünün olması için gerek ve yeter koşul  $E$  çizgesinin sonlu sayıda öncülleri olan maksimal bataklık ve ya maksimal döngüsünün olmasıdır.

**Örnek 4.11.** Teorem 4.8 e göre  $E$  çizgesinin Leavitt yol cebirlerinin tüm sonlu boyutlu bölümlerini yazalım.

$E$



Şekil 4.9.  $E$  çizgesi.

$E$  çizgesinde  $c$  maksimal döngüdür, fakat maksimal bataklık yoktur.  $S$ ,  $L_K(E)$  nin sonlu boyutlu bir bölümü olsun. O halde  $S \cong \bigoplus_{k=1}^m M_{n_k}(B_k)$  olacak şekilde  $B_k = K[x]/(P_k(x))$  i bulalım. Burada  $P_k(x)$ ,  $P(0) = 1$  olacak şekilde bir polinomdur. Burada  $c$  tek bir maksimal döngü olduğundan ve de maksimal bataklık olmadığından  $m = 1$  ve  $c$  döngüsünde  $v_2$  köşesini taban olarak alırsak  $n_1 = 4$  olur. Buradan  $B_1 = K[x]/(P(x))$  ve  $P(0) = 1$  olmak üzere  $S \cong M_4(B_1)$  dir. Dolayısıyla sonsuz çoklukta sonlu boyutlu bölümleri vardır.

Bir  $E$  çizgesindeki tüm maksimal bataklık ve maksimal döngülerin öncüllerinin tam alt çizgesi  $\bar{E}$  ile gösterilsin.  $\bar{E}$  da döngülerin çıkışı yoktur.

Aşağıdaki teorem çizgedeki döngülerin çıkışı olmaması durumunda Leavitt yol cebirlerinin ne olduğunu verir.

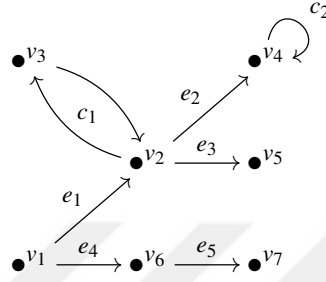
**Teorem 4.12.** [22, Theorem 3.8]  $E$ ,  $L_K(E)$  yerel olarak sonlu bir cebir olacak şekilde bir çizge olsun. O zaman

$$L_K(E) \cong \left( \bigoplus_{i=1}^m M_{n_i}(K[x, x^{-1}]) \right) \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^{m'} M_{n_j}(K) \right)$$

dir. Burada  $m$  çizge üzerindeki döngülerin sayısı,  $n_i$  de  $i$ . döngü üzerinde taban olarak alınacak köşeye gelen yolların sayısıdır.  $m'$  ise çizge üzerindeki batakların sayısı,  $n_j$  ise  $j$ . batağa gelen yolların sayısıdır.

**Örnek 4.13.** Örnek 4.1 deki  $E$  çizgesini alalım.  $E$  çizgesine göre  $c_1$  maksimal döngü ve  $v_7$  köşesi maksimal bataktır.

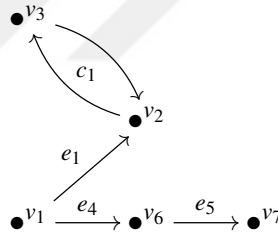
$E$



Şekil 4.10.  $\bar{E}$  için  $E$  çizgesi.

O zaman  $\bar{E}$  çizgesi

$\bar{E}$



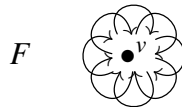
Şekil 4.11.  $\bar{E}$  çizgesi.

Teorem 4.12'ye göre

$$L_K(\bar{E}) \cong M_3(K[x, x^{-1}]) \oplus M_3(K)$$

olur.

**Örnek 4.14.** Aşağıdaki gibi bir çizge aldığımızda,



Şekil 4.12.  $F$  çizgesi.

$F$  çizgesinde maksimal batak ve maksimal döngü olmadığı için bu çizgenin Leavitt yol cebirinin sonlu boyutlu bölümü yoktur.

## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

2005 yılında [3]'te Abrams, Aranda Pino ve [4]'te Ara, Moreno, Pardo tarafından karakterize edilen Leavitt yol cebirleri, 15 yıllık geçmişi olmasına rağmen hala ilgi çekiciliğini kaybetmemiştir. Çizgeler üzerinde karakterize edilen Leavitt yol cebirlerinin, her geçen zamanda araştırmacıların farklı bakış açılarıyla yeni özellikleri ortaya çıkmaktadır.

Bu tezde Leavitt yol cebirlerinin idealleri üzerine yapılan çalışmalar incelenip ve Leavitt yol cebirlerinin ideallerinin sınıflandırılması yapıldı. Leavitt yol cebirlerinin ideal yapıları dikkatlice incelenerek, dereceli-derecesiz, asal, ilkel ve maksimal idealleri ile ilgili tanım, teorem, özellik ve sonuçlara yer verildi.

Bir çizgede, köşelerin kalıtsal altkümeleri tarafından üretilen ideallerin elemanları aşağıdaki şekilde tanımlandı.

$K$  bir cisim ve  $E$  herhangi bir çizge olmak üzere;

(i)  $H, E^0$  in kalıtsal bir altkümümesi olsun. O zaman  $I(H)$  ideali

$$\begin{aligned} I(H) &= \text{span}_K(\{\gamma\lambda^* \mid \gamma, \lambda \in \text{Yol}(E) \text{ öyle ki } r(\gamma) = r(\lambda) \in H\}) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n k_i \gamma_i \lambda_i^* \mid n \geq 1, k_i \in K, \gamma_i, \lambda_i \in \text{Yol}(E) \text{ öyle ki } r(\gamma_i) = r(\lambda_i) \in H \right\} \end{aligned}$$

(ii)  $H, E^0$  in kalıtsal bir altkümümesi ve  $S$  de  $B_H$  nin altkümümesi olsun. O zaman  $I(H, S)$  ideali

$$\begin{aligned} I(H, S) &= \text{span}_K(\{\gamma\lambda^* \mid \gamma, \lambda \in \text{Yol}(E) \text{ öyle ki } r(\gamma) = r(\lambda) \in H\}) \\ &\quad + \text{span}_K(\{\alpha v^H \beta^* \mid \alpha, \beta \in \text{Yol}(E) \text{ ve } v \in S\}). \end{aligned}$$

Bu tanımlamadan sonra Leavitt yol cebirlerinin ideallerinin sınıflandırılması yapıldı.

$K$  bir cisim,  $E$  herhangi bir çizge ve  $N, L_K(E)$  nin dereceli ideali olmak üzere,  $L_K(E)$  nin her dereceli ideali,  $H \cup S^H$  tarafından üretilir. Burada  $H = N \cap E^0 \in \mathcal{H}_E$  ve  $S = \{v \in B_H | v^H \in N\}$  dir. Diğer bir deyişle  $N = I(H, S)$  dir.  $L_K(E)$  nin her dereceli ideali, homojen idempotentlerin kümesi tarafından üretilir.  $N$  dereceli ideal ise o zaman  $N = N^2$  dir. O halde  $N$  in  $L_K(E)$  de dereceli ideal olması için gerek ve yeter koşulun  $N = N^2$  olmasıdır.

Leavitt yol cebirlerinin idealine bölümü ile bölüm çizgesinin Leavitt yol cebirleri arasındaki ilişki,  $K$  herhangi bir cisim olmak üzere,

- (i)  $E$  sıra sonlu bir çizge ve  $H \in \mathcal{H}_E$  olsun. O zaman  $\mathbb{Z}$ -dereceli  $K$ -cebiri üzerinde  $L_K(E)/I(H) \cong L_K(E/H)$ ,
- (ii)  $E$  keyfi bir çizge,  $H \in \mathcal{H}_E$  ve  $S \subset B_H$  olsun. O zaman  $\mathbb{Z}$ -dereceli  $K$ -cebiri üzerinde  $L_K(E)/I(H, S) \cong L_K(E/(H, S))$

olarak gösterildi.

Bir idealin üreteçlerini Rangaswamy [11]'de göstermiş ve bir idealin dereceli ve dereceli olmayan bölümünün yararlı bir karakterizasyonunu vermiştir.  $K$  herhangi bir cisim ve  $E$  keyfi bir çizge olsun.  $L_K(E)$  nin sıfırdan farklı herhangi bir ideali, aşağıdaki formun elemanları tarafından üretilir.

$$\left(u + \sum_{i=1}^k k_i g^{r_i}\right) \left(u - \sum_{e \in X} ee^*\right)$$

$I, L_K(E)$  nin sıfırdan farklı keyfi bir ideali,  $I \cap E^0 = H$  ve  $S = \{v \in B_H : v^H \in I\}$  olsun. O zaman  $I, H \cup \{v^H : v \in S\} \cup Y$  tarafından üretilir, burada  $Y$  aşağıdaki ifadelerin bulunduğu  $(u + \sum_{i=1}^n k_i g^{r_i})$  formundaki karşılıklı ortogonal elemanlar kümesidir.

- (i)  $g, E^0 \setminus H$  deki  $u$  köşesine dayanarak  $E^0 \setminus H$  da hiçbir çıkışı olmayan, (tek) bir dögüdür; ve
- (ii) En az bir  $k_i \neq 0$  olacak şekilde  $k_i \in K$  dır.

Eğer  $I$  dereceli değil ise,  $Y$  boş küme değildir.  $L_K(E)$  nin her sonlu üreteçli ideali esas idealdir. Hatta,  $E$  eğer sonlu çizge ise, o zaman her ideal esas idealdir.

$K$  herhangi bir cisim ve  $E$  keyfi bir çizge olsun.  $P \cap E^0 = H$  olacak şekilde  $L_K(E)$  de bir  $P$  ideali alındığında,  $P$  ideali aşağıdaki koşullardan birini sağlaması durumunda  $L_K(E)$  nin asal ideali olur.

- (i)  $P = \langle H, \{v^H : v \in B_H\} \rangle$  ve  $E^0 \setminus H$ ,  $MT - 3$  koşulunu sağlamalı;
- (ii)  $P = \langle H, \{v^H : v \in B_H \setminus \{u\}\} \rangle$ , bazı  $u \in B_H$  ve  $E^0 \setminus H = M(u)$  için;
- (iii)  $P = \langle H, \{v^H : v \in B_H\}, f(c) \rangle$ , burada  $c$ ,  $E^0 \setminus H = M(u)$  olacak şekilde  $u$  köşesini taban olarak alan  $E$  de  $K$ -sız bir döngüdür ve  $f(x)$ ,  $K[x, x^{-1}]$  de indirgenemez bir polinomdur.

$K$  herhangi bir cisim ve  $E$  keyfi bir çizge olsun. O zaman  $L_K(E)$  nin asal olması için gerek ve yeter koşul  $E$  çizgesinin  $MT - 3$  koşulunu sağlamasıdır.

$K$  herhangi bir cisim ve  $E$  satır sonlu bir çizge ise, o zaman  $L_K(E)$  nin ilkel olması için gerek ve yeter koşul,  $E$  çizgesinin  $MT - 3$  ve  $(L)Koşulu$ 'nu sağlamasıdır. Eğer  $E$  keyfi bir çizge ise, o zaman  $L_K(E)$  nin ilkel olması için gerek ve yeter koşul,  $E$  çizgesinin  $MT - 3$ ,  $(L)Koşulu$  ve Sayılabilir Ayırma Özelliği'ne sahip olmasıdır.

Bir  $R$  halkasında  $R^2 = R$  oluyorsa, herhangi bir maksimal ideal bir asal idealdir. Bu nedenle, herhangi bir Leavitt yol cebirinde, herhangi bir maksimal ideal bir asal idealdir.

Leavitt yol cebirlerinde, en büyük dereceli ideal,  $H = N \cap E^0$  ve  $S = \{v \in B_H | v^H \in N\}$  olacak şekilde  $(H, S)$  geçerli çift tarafından üretilen herhangi bir  $N$  idealini içerir ( $gr(N)$  şeklinde ifade edilir) yani  $gr(N) = I(H, S)$  dir.  $L_K(E)$ , ancak ve ancak  $\mathcal{H}_E$  bir maksimal elemana sahipse, maksimal ideale sahiptir.

Satır sonlu çizgelerin Leavitt yol cebirlerinin sonlu boyutlu bölümleri incelendi.  $E$  satır sonlu yönlü çizgesi üzerinde her  $v \in E^0$  için  $d : E^0 \rightarrow \mathbb{N}$  fonksiyonu

$$d(v) = \sum_{s(e)=v} d(r(e))$$

eşitliğini sağlıyorsa  $d$  fonksiyonu  $E$  çizgesinin *boyut fonksiyonu* olarak tanımlandı.

$E$  satır sonlu bir yönlü çizge olsun.  $L_K(E)$  nin sıfırdan farklı sonlu boyutlu bir bölümünün olması için gerek ve yeter koşul  $E$  çizgesinin sonlu sayıda öncülleri olan maksimal bataklık veya maksimal döngüsünün olmasıdır.

Bu tez ile, satır sonlu veya herhangi bir çizgenin Leavitt yol cebirlerinin ideallerinin sınıflandırılması ve satır sonlu yönlü çizgeler üzerinde Leavitt yol cebirlerinin sonlu boyutlu bölümlerinin sınıflandırılması verilerek, Türkçe kaynak oluşturulmaya çalışıldı. Yapılan bu çalışma ile Leavitt yol cebirleri üzerine çalışma yapmayı düşünen akademik personel, yüksek lisans veya doktora öğrencilerine yardımcı olmak amaçlandı.



## 6. KAYNAKLAR

- [1] W. G. Leavitt, "The module type of a ring", *Transactions of the American Mathematical Society*, c. 103, ss. 113–130, 1962.
- [2] G. Bergman, "Coproducts and some universal ring constructions", *Transactions of the American Mathematical Society*, c. 200, ss. 33-88, 1974.
- [3] G. Abrams, G. Aranda Pino, "The Leavitt path algebra of a graph", *Journal of Algebra*, c. 293, ss. 319-334, 2005.
- [4] P. Ara, M.A. Moreno, E. Pardo, "Nonstable  $K$ -theory for graph algebras", *Algebras and Representation Theory*, c. 10, ss. 157-178, 2007.
- [5] W. G. Leavitt, "Modules without invariant basis number", *Transactions of the American Mathematical Society*, c. 8, ss. 322–328, 1957.
- [6] T. Tomforde, "Uniqueness theorems and ideal structure of Leavitt path algebras", *Journal of Algebra*, c. 318, ss. 270-299, 2007.
- [7] G. Abrams, P. J. Bell, K. M. Rangaswamy, "On prime nonprimitive von Neumann regular algebras", *Transactions of the American Mathematical Society*, c. 366, sayı 5, ss. 2375-2392, 2014.
- [8] G. Abrams, K. M. Rangaswamy, "Regularity conditions for arbitrary Leavitt path algebras", *Algebras and Representation Theory*, c. 13, sayı 3, ss. 319–334, 2010.
- [9] G. Aranda Pino, E. Pardo, M. Siles Molina, "Prime spectrum and primitive Leavitt path algebras", *Indiana University Mathematics Journal*, c. 58, sayı 2, ss. 869-890, 2009.
- [10] K. M. Rangaswamy, "The theory of prime ideals of Leavitt path algebras over arbitrary graphs", *Journal of Algebra*, c. 375, ss. 73-96, 2013.
- [11] K. M. Rangaswamy, "On generators of two-sided ideals of Leavitt path algebras over arbitrary graphs", *Communications in Algebra*, c. 42, ss. 2859-2868, 2014.
- [12] K. M. Rangaswamy, "On Graded Primitive Leavitt Path Algebras", preprint, submitted for publication.
- [13] S. Esin, M. Kanuni, K. M. Rangaswamy, "On the intersections of two-sided ideals of Leavitt path algebras", *Journal of Pure and Applied Algebra*, c. 221, ss. 632-644, 2017.
- [14] S. Esin, M. Kanuni, "Existence of maximal ideals in Leavitt path algebras", *Turkish Journal of Mathematics*, c. 42, ss. 2081-2090, 2018.

- [15] M. Kanuni, S. Sert, "A Survey on the Ideal Structure of Leavitt Path Algebras", *Leavitt path algebras and Classical K-Theory*, 1. baskı, Springer - Indian Statistical Institute Series, Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2020, böl. 5, ss. 123-140.
- [16] A. Koç, M. Özaydın, "Representations of Leavitt Path Algebras", *Journal of Pure and Applied Algebra*, c. 224 ss. 1297-1319, 2020.
- [17] A. Koç, M. Özaydın, "Finite-dimensional representations of Leavitt path algebras", *Forum Mathematicum*, c. 30, sayı 4, ss. 915-928, 2018.
- [18] G. Abrams, "Leavitt Path Algebras: The First Decade", *Bulletin of Mathematical Sciences*, c. 5, ss. 59-120, 2015.
- [19] G. Abrams, P. Ara, M. Siles Molina, *Leavitt Path Algebras*, Lecture Notes in Mathematics, London, England: Springer-Verlag, 2017, böl. 2, ss. 23-72.
- [20] G. Aranda Pino, E. Pardo, M. Siles Molina, "Exchange Leavitt path algebras and stable rank", *Journal of Algebra*, c. 305, ss. 912-936, 2006.
- [21] I. Raeburn, "Graph algebras", CBMS Regional Conference Series in Mathematics, c. 103. *American Mathematical Society*, Providence, RI, 2005.
- [22] G. Abrams, G. Aranda Pino, M. Siles Molina, "Locally Finite Leavitt Path Algebras", *Israel Journal of Mathematics*, c. 165, ss. 329 - 348, 2008.

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Suat SERT  
Doğum Tarihi ve Yeri : Düzce 1974  
Yabancı Dili : İngilizce  
Eposta : suatsert@gmail.com

## ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Matematik Ana Bilim Dalı	Düzce Üniversitesi	2020
Lisans	Matematik Bölümü	Çukurova Üniversitesi	1996
Lise	Klasik Fen	Konuralp Lisesi	1991

### A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A1. M. Kanuni, S. Sert, "A Survey on the Ideal Structure of Leavitt Path Algebras", *Leavitt path algebras and Classical K-Theory*, 1. baskı, Springer - Indian Statistical Institute Series, Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2020, böl. 5, ss. 123-140.