



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI**

FATMA ERTUĞRAL

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA**

DÜZCE, 2021

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Fatma ERTUĞRAL tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Fuat Usta
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi

Dr. Öğr.Üyesi Gülhan AYAR
Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi

Dr. Öğr.Üyesi Elif SEGHAH ÖZTAŞ
Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 24/12/2021

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

24 Aralık 2021

Fatma ERTUĞRAL

TEŐEKKÜR

Lisans eğitim boyunca destek olan, yüksek lisansa yönlendiren ardında da doktora yapma konusunda teŐvik eden ve bu uzun süreç boyunca bilgisini ve emeğini paylaŐmaktan kaçınmayan kıymetli hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerle teŐekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca zaman, fikir ve manevi desteği ile katkısı çok olan saygıdeğer Doç.Dr. Hüseyin Budak'a ve Düzce Üniversitesi Matematik bölümündeki tüm kıymetli hocalara sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

Doktora baŐlamamda ve devam ettirmemde maddi ve manevi desteklerinden dolayı sevgili ablam Semra Ertuğral'a, canım annem Emine Ertuğral'a, kıymetli babam Mustafa Ertuğral'a ve tüm aileme en içten dileklerle teŐekkür ederim.

24 Aralık 2021

Fatma ERTUĞRAL

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
SİMGELER	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
EXTENDED ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	7
2.1. TANIM VE TEOREMLER.....	7
2.2. KESİRLİ İNTEGRALLER VE ÖZELLİKLERİ	11
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER	20
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN TRAPEZOİD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER.....	30
4.1. BİRİNCİ TÜREVİNİN MUTLAK DEĞERİ KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN TRAPEZOİD EŞİTSİZLİĞİ.....	30
4.2. İKİNCİ TÜREVİNİN MUTLAK DEĞERİ KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN TRAPEZOİD EŞİTSİZLİKLERİ.....	56
5. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN MİDPOINT TIPLİ EŞİTSİZLİKLER.....	63
5.1. BİRİNCİ TÜREVİNİN MUTLAK DEĞERİ KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN MİDPOINT TIPLİ EŞİTSİZLİKLER	63
5.2. İKİNCİ TÜREVİNİN MUTLAK DEĞERİ KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN MİDPOINT EŞİTSİZLİKLERİ	88
6. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN SİMPSON EŞİTSİZLİĞİ.....	94
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	100
8. KAYNAKLAR	101
ÖZGEÇMİŞ	105

SİMGELER

\mathbb{C}	Kompleks Sayılar
F'	F fonksiyonunun 1. dereceden türevi
I	Reel sayılarda herhangi bir aralık
I°	I aralığının içi
$I_{\rho^-}^\alpha$	Riemann liouville sol kesirli integral
$I_{\sigma^+}^\alpha$	Riemann liouville sağ kesirli integral
$\rho^- I_\varphi$	Sol taraflı kesirli integral
$\sigma^+ I_\varphi$	Sağ taraflı kesirli integral
$I_{\rho^-,k}^\alpha$	k -Riemann liouville sol k kesirli integral
$I_{\sigma^+,k}^\alpha$	k -Riemann liouville sağ k kesirli integral
\mathbb{R}	Reel Sayılar
\mathbb{R}^n	n - boyutlu Öklid uzayı
Γ	Gamma fonksiyonu
β	Beta fonksiyonu

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Fatma ERTUĞRAL
Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Aralık 2021, 104 sayfa

Bu çalışmanın amacı çeşitli kesirli integraller ile ifade edilen eşitsizlikleri birleştirip genelleştirerek tek forma dönüştürmektir. Tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümü oluşturan giriş kısmında eşitsizlik, konvekslik, konvekslik özelliği olan fonksiyonların sağladığı Hermite-Hadamard eşitsizliği ve kesirli integrallerin ortaya çıkışından günümüze kadar ki gelişimi hakkında bilgiler verilmektedir. İkinci bölümde ise ilk bölümde ortaya çıkışı ve gelişiminden bahsedilen konuların tanımları, aralarındaki ilişkiler ve tezde kullanılan tanım ile teoremler verilmektedir. Orjinal sonuçların başlangıcı olan üçüncü bölümde ise literatürde önemli yere sahip olan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin kesirli integraller için genelleştirilmiş ifadesi ve özel fonksiyon seçimleri ile hangi kesirli integralleri genelleştirdiği gösterilmiştir. Bu genelleştirme sınırların değiştirilmesi ile üç farklı formda elde edilmiştir. Her genelleştirmenin farklı sonuçları olmuştur. Dördüncü ve beşinci bölümlerde ise Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ ve sol kısımlarının ifade ettiği Trapezoid ve Midpoint tipli eşitsizliklerinin birinci ve ikinci derceden diferansiyellenebilir fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integraller ile ifadeleri verilmiştir. Altıncı bölümde ise nümerik analizde kullanılan simpson yönteminin cebirsel ifadesi olan Simpson eşitsizliğinin mikroskobik ölçüde daha hassas sonuçlar verebilmeyi sağlayan kesirli integraller ile ifadesinin genelleştirilmiş şekli ve sonuçları verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Kesirli integral, Konveks fonksiyon, Midpoint eşitsizliği, Simpson eşitsizliği

ABSTRACT

INTEGRAL INEQUALITIES AND APPLICATIONS FOR GENERALIZED FRACTIONAL INTEGRAL

Fatma ERTUĞRAL

Düzce University

Institute of Graduate Studies, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

December 2021, 104 pages

The aim of this thesis is to transform the inequalities, which express various fractional integral, one form by combining and generalizing. The dissertation is consist of six part. In the first part there are informations about; inequalities, convexion, the Hermite-Hadamard inequalities revealed by the functions which has character and the progress of fractional integral form naissance until today. In the second part there are definitions, connections between the notions, which giving information about naissance and progress in the first part and also definitions, theorems used in the dissertation. In the third part, beginning of our original results, we showed the Hermite-Hadamard inequalities, an important point in literature; generalization term of fractional integral and which fractional integrals are generalized by specific function selection. This generalization made three different form by changing limits. Every generalization has different results. In the fourth and fifth parts, given the generalized fractional integral express for the Trapezoid and Midpoint type of inequalities, revealed by the Hermite-Hadamard inequality's left and right sections, first and second degree of differentiable functions. In the six part, given fractional integral and its generalized form result of express of algebraic expression of the Simpson inequalities which is the Simpson method used in numerical analysis, providing microscopic scale of result.

Keywords: Hermite-Hadamard inequalities, Fractional integrals, Convex functions, Midpoint inequality

EXTENDED ABSTRACT

INTEGRAL INEQUALITIES AND APPLICATIONS FOR GENERALIZED FRACTIONAL INTEGRAL

Fatma ERTUĞRAL

Düzce University

Institute of Graduate Studies, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

December 2021, 104 pages

1. INTRODUCTION

Mathematical inequalities from Newton and Euler until today played an important role in many branches of science. First basic monograph of this important subject was published in 1934, by name of “Inequalities”. Following years publications and studies has continued and increased. By the 21 th Century, it has been inevitable that mathemmatical analysis by increasing applications in many fields. For that reason a number of inequalities have been added to the literature.

Convex functions theory, indicating an inequality by itself, take place in literature by an article published by Jensen in 1905 and 1906. Some inequalities were founded by the classical definition of convex functions. One of them is Hermite-Hadamard inequalities. It was first used in a journal published in 1881 by Hermite. This inequality was named Hermite-Hadamard for reason that the same inequality was founded by Hadamard too. This inequality receives great deal of attention for including double-sided inequality and the same time finding limit value for non-computable integrals.

Since the emerge of concepts of derivative and integral, the rank of non whole numbers application of these processes were curious question. It was a point at issue by Leibniz expressing question to idea in 1665. For long years various definitions have been made with the contributions of many mathematicans. By using this definition many inequalities were are expressed. Our aim in this thesis; to generalize and give a single form for several kinds of fractional integrals.

With our new definition; Hermite-Hadamard inequality, Midpoint, Trapezoid and Simpson type inequalities were generalised and make it easier to applicability of them.

2. MATERIAL AND METHODS

Firstly, its given convexional definition and characteristic of a function which provides Hermite-Hadamard inequality. After that its given; Hermite-Hadamard inequality, equalities

that gives left and right sections, result and theorems. It gives the definition of Hölder, Minkowski and Power-mean inequalities which are the definition of inequality topic. After that it gives fractional integral topic and its characteristics that has an important point in literature. It gives Riemann-Liouville fractional integrals, the most common of lots of other fractional integrals, how to procure and the definitions and inequalities using in that process. Finally the studies, that expressing by fractional of this important inequality, were examined and presented.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

In this thesis we are providing simplicity for inequalities which is an important point in literature and has lots of different versions, by generalizing. Our original results are comprising in parts of 3-4-5-6. In main parts we give various definition of fractional integral, that has range of application area in different science sections, and generalized version of Hermite-Hadamard inequality. In this generalizing, we analyzed different limit values and getting different results.

The generalizing gives result for the Trapezoid and Midpoint inequalities which found by right and left of Hermite-Hadamard inequalities that has double inequalities, we reached important limit values. In the last part we re-express the Simpson inequalities, which is important for numeric calculation, with fractional integral that makes it more comprehensive

4. CONCLUSION AND OUTLOOK

In this study we generalized the Hermite-Hadamard inequality, that express by various fractional integral definition, by using a function. Also found new results for the Trapezoid and Midpoint inequalities for Simpson inequality we made a integral definition. For new studies, it's possible to generalize more inequality by adding different features. This generalizing can obtain various features.

1. GİRİŞ

Matematiksel eşitsizlikler Newton ve Euler'den günümüze dek, matematiğin çeşitli dallarının yanı sıra fizik biliminin matematiksel uygulamalarında, mühendislikte ve bilimin birçok branşında önemli rol oynamıştır. Bu önemli konunun ilk temel monografisi 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Polya tarafından "İnequalities" adı ile yayınlanmıştır. Bu çalışmayı 1961 yılında yazarları Beckenbach ve Bellman olan aynı isim ile yeni bir eser takip etmiştir. 1970 yılında ise Mitrinovicin "Analitic inequalities" isimli yayını ile de bu alanın temeller taşları oluşturulmuştur [1], [2], [5].

Eşitsizlikler teorisi programlama, ekonomi, oyun teorisi, değişkenler metodu, kontrol teori, olasılık ve istatistik gibi bilimin birçok yerinde uygulama alanı bulması ile çok sayıda araştırmacının dikkatini çekmiş ve bu yüzden 1934 yılından itibaren yeni tip eşitsizliklerin bulunması ve uygulanması için yoğun çaba sarfedilmiştir. Bu çabaların devamlılığı gelişimi sürekli kılmıştır. Eşitsizlik teorisinin gelişimi, çok sayıda yeni problem ve sonuçlarının ortaya çıkması, zor soruların basit ispatlarının bulunmasında etkili bakış açıları kazandırmıştır. Matematiğin yeni alanlarının doğmasında önemli bir faktör olmuştur. 21. yüzyıla geldiğinde matematiksel eşitsizliğin hızla büyüyen bir disiplin ve birçok alanda artan uygulamaları ile matematiksel analizin merkez alanlarından biri haline gelmesi kaçınılmaz olmuştur.

Literatüre sürekli yeni bir dizi eşitsizlikler ilave olmakla birlikte birçok eşitsizlik türü arasından Jensen, Hadamard, Hilbert, Hardy, Opial, Levin ve Sobolev ile ilişkili olanlar matematiğin çeşitli dallarında büyük etki oluşturmuştur. Son yıllarda bu eşitsizlikler ile ilgili önemli gelişmelere tanık olduk. Birçok önemli uygulama ile çeşitli araştırma alanlarına sahip olan bu eşitsizlikler aktif araştırma alanı olmaya devam etmektedir. Analizin birçok bölümünde uygulama alanı bulan ve tezimizin alt yapısını oluşturan bazı önemli eşitsizlikler ile devam edelim.

Başlı başına kendisinde bir eşitsizlik belirten konveks fonksiyonlar teorisi 1905 ve 1906 yıllarında danimarkalı ünlü mühendis ve matematikçi J. Jensen tarafından yayınlanan makaleler ile literatüre girmiştir. Modern analizde doğrudan ya da dolaylı olarak konveks fonksiyon içeren uygulamalardan dolayı hızlı bir gelişim göstermiştir. [43] nolu kaynak detaylı bilgi içermektedir. AG eşitsizliği, Hölder eşitsizliği ve Minkowski eşitsizliği konveks fonksiyonların uygulamalarından elde edilen önemli eşitsizliklerinden bazılarıdır. Ayrıca konveks fonksiyonların klasik tanımı diğer fonksiyon sınıflarının bazıları için değiştirilebilir, genişletilebilir ve eşitsizlikler elde edilebilir. Bunlardan biri literatüre girişi bulunuşundan çok sonra olan hatta iki farklı matematikçinin birbirinden habersiz ispatladığı Hermite-Hadamard eşitsizliğidir [3].

1881 yılında Hermite, Mathesis dergisine konveks bir fonksiyonun aşağıdaki eşitsizliği sağladığını ifade eden çalışmasını göndermiştir.

$$(\rho - \sigma) F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \leq \int_{\sigma}^{\rho} F(x) dx \leq (\rho - \sigma) \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} \quad (1.1)$$

1883 yılında ise bu dergide yayınlanır. Fakat literatürde hiçbir yerde bahsedilmediği gibi Hermite eşitsizliği olarak da alıntıları yapılmamıştır. E.F.Beckenbach bir çalışmasında Hermite adı ile literatüre girmeyen bu eşitsizliği 1893 yılında ilk ispatlayanın Hadamard olduğunu yazmıştır. Konveks fonksiyonlar teorisi ve tarihinde uzman olmasına rağmen bu eşitsizliğin 10 yıl önce Hermite tarafından bulunduğunu farketmemiştir. Hatta eşitsizliğin ilk monografisi olan eserde “sürekli $F(x)$ fonksiyonun

$$F(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} F(\tau) d\tau \dots \dots \sigma \leq x-h \leq x \leq x+h \leq \rho \quad (1.2)$$

konveks olabilmesi için (1.2) eşitsizliği sağlanmalıdır” şeklinde bir çalışma mevcuttur. Bu işlemin sonucu Hermite eşitsizliğinin ilk kısmına eşittir.

Fakat (1.1) eşitsizliğindeki konvekslik sonucunun (1.2) eşitsizliği için gerekli yeterli kriter dönüşü kim tarafından ve ne zaman gerçekleştirildiği hala belirsizdir. Fakat Hermite eşitsizliğinin önemi konvekslik özelliği ile tanımlanan (1.2) eşitsizliğine uygulanabilirliği ile yaygınlaşmıştır. Bu önemli teoremi birbirinden habersiz olarak yapan iki kişinin isimlerini alarak Hermite-Hadamard eşitsizliği şeklinde kullanılmaktadır. Bu eşitsizlik ve uygulamalarına ait daha detaylı bilgiyi [6] nolu kaynaktan edinebilir. Hermite-Hadamard

ile konvekslik arasındaki ilişki [4] ve [42] nolu kaynaklarda ve çeşitli konveksliklere uygulanışı [44], [45] nolu çalışmalarda mevcuttur.

Ayrıca günümüzde Hermite-Hadamard eşitsizliğinin temel seviyede çok sayıda ispatı bulunmaktadır. Geometrik ispatında da fonksiyonun ortalama değeri için üst sınır sağladığı açıkça görülmüştür ve bu üst sınırı veren eşitsizlik

$$\frac{1}{(\rho - \sigma)} \int_{\sigma}^{\rho} F(x) dx \leq \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} \quad (1.3)$$

şeklinde trapezoid eşitsizliği olarak isimlendirilmiştir. İntegrallenebilir fonksiyonlar için trapezoid eşitliği [10] nolu çalışmada mevcuttur. Trapezoid eşitsizliği farklı şekillerde de ifade edilmiştir [36]. Farklı konveksliklere uygulanabilirlik açısından yeni trapezoid eşitsizlikleri elde edilmiştir [40]. İkinci dereceden diferansiyellenebilen fonksiyonlar içinde trapezoid eşitliği ve farklı konvekslik için uygulamaları yapılmıştır [47], [48]. Hadamard eşitsizliğinin orta ve sol kısmı arasındaki fark midpoint eşitliği olarak ifade edilir ve türevinin mutlak değerinin konveksliğinden yararlanılarak sonuçlar elde edilmiştir [16]. İkinci dereceden türevlenebilir fonksiyonlar için de midpoint eşitsizliğinin yeni sonuçları hesaplanmıştır [35]. İkinci dereceden diferansiyellenebilen fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinden yararlanılarak elde edilen yeni eşitsizlik ikinci türevinin mutlak değerinin konveksliği kullanılarak birkaç eşitsizliği veren önemli çalışmada [33] nolu çalışmada bulunmaktadır.

Konveks fonksiyonun ortalaması için üst ve alt sınır sağlayan bu eşitsizliğin geometrik yorumdan da integral ile ilişkisi net bir şekilde gözükmemektedir. Türev ve integral kavramı matematikte, mühendislikte ve bilimin birçok dalındaki problemler için çözüm kaynağıdır. Tamsayı mertebesinde uygulanan türev ve integral kavramlarının kesirli sayılar içinde genelleştirilmesi diferansiyel hesabın doğuşuyla ortaya çıkan bir ihtiyaçtır. Bu fikri tartışmaya yönelik ilk girişim Leibniz'in yazışmalarında yer aldı. Bernoulli fonksiyonların türevlenebilmesine ilişkin olarak Leibniz'e yazdığı mektuplardan birinde bu teoremin tam sayı olmaması durumundaki anlamını sormuştur. Leibniz, (1665)L'Hospital'e ve (1697)Wallis'e mektuplar yazarak konuyu meslektaşlarıyla paylaşımı ile konu üzerine çalışmalar başlamıştır. İlk adımı atan Euler 1738 yılında $\frac{d^p x^\sigma}{dx^p}$ türevinde p nin tamsayı olmayan sonucunu gözlemlemiştir. J.L. Lagrange ise 1772 yılında diferansiyel operatörler

için kuvvet alma kanunundan bahsettiği çalışmasında dolaylı olarak kesirli analize katkıda bulunmuştur. 1812 yılında P.S. Laplace, integraller yoluyla kesirli türevi tanımlamış ve 1819 yılında S.F. Lacroix 700 sayfalık çalışmasında keyfi mertebeden türevlerden bahsetmiştir. Bunu takiben J.B.J. Fourier 1822 yılında keyfi mertbeden türevleri çalışma konusu yapmıştır. Kesirli operatörler ilk kez N.H. Abel tarafından 1823 yılında Tautochrone probleminin çözümünde kullanılmıştır. J.Liouville, 1832 yılında kesirli analiz tanımlarını teorik problemlere uygulayarak ilk önemli çalışmayı yapmıştır. 1867 yılında A.K. Grünwald kesirli operatörler üzerine çalışmalar yapmıştır. G.F.B. Riemann 1892 yılında yayınladığı çalışmasında üzerinde uzun yıllar çalıştığı kesirli integrasyon teorisini geliştirmiştir. A.V.Letnikov 1868 ile 1872 yılları arasında bu konu üzerine pek çok makale yayımlamıştır. 1900 ve 1970 yılları arasında kesirli analiz konusuna katkıda bulunan birçok bilim adamı vardır. H.H. Hardy ve M.Riesz (1915 iraksak serilerin toplamı için kesirli integrasyon), H.Weyl(1917 periyodik fonksiyonlar için uygun kesirli integrasyon) S.Blair, S.Samko, bu konuda önemli katkılar sağlayan isimlerdir. Tamsayı metotlara göre çok daha doğru sonuçlar verdiği için geniş uygulama alanı bulmuş ve hakkında oldukça makale yazılmıştır. Sürekli gelişimine ve uzun tarihine rağmen monografisi 1974 yılında Oldham ve Spanier tarafından yazılmıştır [7]. Sonrasında konunun yaygınlaşması ile kaynaklar da artmıştır. [8] nolu kaynak da konu ile ilgili önemli bilgiler sunar.

Kesirli kalkulus diferansiyel denklemlerdeki çözümler için ciddi yarar sağlamıştır [9]. Farklı fonksiyonlar tanımlarını genelleştirmesi ile uygulanabilirliğini arttırmıştır [13]. Birçok alana uygulanabilirliği farklı tanımları da beraberinde getirmiş ve yıllarca birçok matematikçi kendi notasyonlarını ve yaklaşımlarını kullanarak tamsayı olmayan mertebeden integral ve türev fikrine uygun birçok tanım vermişlerdir. Riemann-Liouville kesirli integrali, Hadamard kesirli integrali, Weyl kesirli integrali, Chen kesirli integrali, Cosar kesirli integrali, Erdely kesirli integrali, Kober kesirli integrali, Hilfer kesirli integrali ve conformable kesirli integrali tanımları mevcuttur. Bu tanımlamalardan en popüler olarak ortaya çıkan Riemann-Liouville'nin tanımı olmuştur. Eşitsizlikler arasında önemli biryere sahip olan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin Riemann-Liouville ile ifadesi kaçınılmaz olmuştur [14]. Hermite-Hadamard eşitsizliğinin kesirli integral ile ifadesini değişik açıdan ele alıp farklı sonuçlar bulunmuş [19] ve farklı sınırlar içinde eşitsizlik yeniden elde edilmiştir [15]. Her yeni çalışma bir sonraki çalışma için basamak olmuştur. Riemann-Liouville kesirli integrali ile ifade edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği

farklı konvekslik özellikleri sağlayan fonksiyonlar için farklı sonuçlar elde edilmiştir [18], [20], [21]. Sadece Hermite-Hadamard değil farklı eşitsizliklerde Riemann-Liouville kesirli integrali ile ifade edilmiştir [17]. Zamanla Riemann-Liouville kesirli integrali de çeşitlendirilmiştir ve genelleştirilmiştir [11]. Bu çeşitlendirme üzerine de uygulamalar yapılmıştır [12]. Özel hali Riemann-Liouville kesirli integralini veren k -Riemann-Liouville kesirli integrali tanımlanıp uygulamaları yapılmıştır [24]. Ardından Hermite-Hadamard eşitsizliğide bu tanım ile ifade edilmiştir [25]. k -Riemann-Liouville kesirli integral tanımı ile ifade edilen Hadamard eşitsizliğinden yararlanılarak farklı konvekslikler için eşitsizlikler elde edilmiştir [26]. Çalışmalar devam ettikçe Riemann-Liouville kesirli ve Hadamard kesirli integralini tek bir formda veren Katugampola kesirli integrali tanımlanmıştır [27]. Riemann integralinin yetersiz kaldığı noktada tanımlanmış olan conformable integralinin de keyfi derece için integrali tanımlanmıştır [28]. Hermite-Hadamard conformable(uygun) kesirli integrali içinde ifade edilmiştir [46]. Üstel çekirdek ile ifade edilen kesirli integral içinde Hermite-Hadamard eşitsizliği ve farklı eşitsizlikler elde edilmiştir [22]. Riemann-Liouville kesirli integrali ile Hermite-Hadamard eşitsizliği farklı sınır değerleri içinde yeniden ifade edilmiştir [31]. Bu yeni sınırı koruyarak üstel çekirdekli kesirli integral için Hermite-Hadamard tanımı yapıp farklı eşitsizliklerde dönüştürülmüştür [32].

Hemite-Hadamard iki eşitsizliği de içerdiği için Hemite-Hadamard eşitsizliğini elde edilen çalışmalarda midpoint ve trapezoid karşılıkları da mevcuttur. Özel hali integrallenebilir fonksiyonlar için trapezoid eşitliği veren R-L kesirli integrallerinden yararlanılarak genel trapezoid eşitsizlikleri de elde edilmiştir [41]. Farklı konveksliklere uygulanabilirlik açısından yeni trapezoid eşitsizlikleride R-L kesirli integrallerinden yararlanılarak ifade edilip yeni sonuçlar vermiştir [30]. Hemite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı midpoint eşitsizliğini verir. Bu midpoint eşitsizliği R-L kesirli integrali ile de ifade edilip farklı sonuçlara ulaşılmıştır[23]. İkinci dereceden diferansiyellenebilir fonksiyonlar içinde R-L kesirli integrali tanımı ile midpoint eşitsizliği elde edilmiştir [34]. İkinci dereceden diferansiyellenebilirliği farklı konveksliklerle ilişkilendirilmesi ile kesirli integral ifadesi mevcut olan trapezoid ve farklı eşitsizlikler elde edilmiştir [49].

$$\int_{\sigma}^{\rho} F(x) dx \quad (1.4)$$

integrali analizin bilinen yöntemleriyle hesaplanamadığı zaman veya $F(x)$ fonksiyonun sadece sonlu sayıda noktada bilinmesi halinde bu fonksiyon için sonuç belirli eşitsizlikler ile yaklaşık değerde hesaplanır ve bu eşitsizliklerden biri de Simpson eşitsizliğidir. Kapalı aralıkta tanımlı dördüncü dereceden diferansiyellenebilen fonksiyonun

$$\left| \frac{1}{6} \left[F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) + F(\rho) \right] - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} F(x) dx \right| \leq \frac{1}{2880} \|F^{(4)}\|_{\infty} (\rho - \sigma)^4 \quad (1.5)$$

sağladığı eşitsizliğe Simpson eşitsizliği denir. Bu eşitsizlik daha düşük dereceden diferansiyelenebilir fonksiyonlar içinde sağlanmıştır [50]. Konveks fonksiyonlar için de [38] nolu çalışmada Simpson eşitliği verilmiş ve [39] nolu çalışmada da bu eşitliğin Riemann-Liouville kesirli integrali ile karşılığı elde edilmiştir.

Bu tezdeki amacımız birkaç kesirli integral tanımı kapsayacak şekilde genelleştirilmiş kesirli integral tanımı yapmak ve bu tanım yardımı ile de Hermite-Hadamard, Trapezoid, Midpoint ve Simpson eşitsizliklerini genelleştirmektir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak bazı tanım ve teoremler verilecektir.

İlk olarak konveks fonksiyon ve özellikleri verilecektir. Daha sonra konveks fonksiyonlar için geçerli olan Hermite-Hadamard eşitsizliği ve bu eşitsizlikten elde edilen Trapezoid, Midpoint ve Simpson tipli eşitsizlikleri verilecektir. Ayrıca tezde kullanılan diğer temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.1. (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve $A \subset L$ ve herhangi $x, y \in A$ olsun.

$$M = \{m \in L : m = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A \quad (2.1)$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $m \in M$ ise $m = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğinde x ve y 'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her α için doğrudur. Bazen $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayacak şekilde negatif olmayan α, β reel sayıları kullanılabiliriz.

Geometrik anlamda M kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda konveks küme boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını içeren kümedir [51].

Tanım 2.2. (Konveks Fonksiyon): $\forall \alpha, \rho \in L$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$F(\lambda \sigma + (1 - \lambda)\rho) \leq \lambda F(\alpha) + (1 - \lambda)F(\rho) \quad (2.2)$$

eşitsizliğini sağlayan $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir $x \neq y$ ve $\lambda \in (0, 1)$ koşullarında eşitsizliğin sağlanması durumunda fonksiyona kesin konveks fonksiyon denir. Eğer eşitsizlik ' \geq ' iken sağlanırsa fonksiyona konkav fonksiyon denir. Geometrik olarak bu eşitsizlik, $(\sigma, F(\sigma))$ ve $(\rho, F(\rho))$ noktalarını içeren doğru parçasının F fonksiyonunun grafiğinin üst kısmında yer almasıdır.

Tanım 2.3. (J-Konveks Fonksiyon) $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan F fonksiyonu $\forall x, y \in [\sigma, \rho]$ için

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{F(x) + F(y)}{2} \quad (2.3)$$

eşitsizliği sağlanırsa F fonksiyonuna J-konveks fonksiyon denir. Bu eşitsizlik eğer $x \neq y$ için sağlanıyorsa F fonksiyonuna kesin J-konveks fonksiyon denir [5].

Aşağıda bazı konveks fonksiyon örnekleri verilmiştir.

i) $e^{\sigma x}$

ii) $-\log(x)$

iii) x^{σ} , (\mathbb{R}^+) , $\sigma \geq 1$ ve $\sigma \leq 0$

iv) x^{σ} , (\mathbb{R}^+) , $\sigma \leq 0 \leq 1$

v) $|x|^{\sigma}$, $\sigma \geq 1$

vi) $x \log(x)$, (\mathbb{R}^+)

Tanım 2.4. $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reel sayıların alt aralığı olan I üzerinde tanımlanan konveks bir fonksiyon ve $\sigma, \rho \in I$, $\sigma < \rho$ olsun. Aşağıdaki çift taraflı eşitsizlik literatürde iyi bilinen Hermite-Hadamard eşitsizliğidir [3].

$$F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \leq \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} F(x) dx \leq \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} \quad (2.4)$$

Dragomir ve Agarval tarafından ispatlanan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili sonuçlar aşağıda verilmiştir [10].

Lemma 2.5. $F : I^{\circ} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon $\sigma, \rho \in I^{\circ}$ (I° , I nin iç bölgesi) ve $\sigma < \rho$ dir. Eğer $F' \in L[\sigma, \rho]$, ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} F(x) dx = \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 (1 - 2\tau) F'(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) d\tau. \quad (2.5)$$

Teorem 2.6. $F : I^{\circ} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon, $\sigma, \rho \in I^{\circ}$ (I° , I nin iç bölgesi) ve $\sigma < \rho$ dir. Eğer $|F'|$, $[\sigma, \rho]$ aralığında konveks ise aşağıdaki eşitsizlik

sağlanır.

$$\left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} F(x) dx \right| \leq \frac{(\rho - \sigma)}{8} (|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|) \quad (2.6)$$

[16], nolu çalışmada Kırmacı (2.4) eşitsizliğinin sol tarafı için sınır olan eşitliği aşadaki şekilde ifade etmiştir.

Lemma 2.7. $F : I^{\circ} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° , üzerinde diferansiyellenebilir, $\sigma, \rho \in I^{\circ}$ (I° , I nin iç bölgesi) ve $\sigma < \rho$. Eğer $F' \in L[\sigma, \rho]$, ise aşağıdaki özdeşlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} F(\tau) d\tau - F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \\ &= (\rho - \sigma) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \tau F'(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - \tau) F'(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) d\tau \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Teorem 2.8. $F : I^{\circ} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon, $\sigma, \rho \in I^{\circ}$ (I° , I nin iç bölgesi) ve $\sigma < \rho$ dir. Eğer $|F'|$, $[\sigma, \rho]$ aralığında konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır. Bu eşitsizlik literatürde iyi bilinen orta nokta eşitsizliğidir [16].

$$\left| \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} F(x) dx - F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right| \leq \frac{(\rho - \sigma)}{8} (|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|) \quad (2.8)$$

Teorem 2.9. (Hölder Eşitsizliği) $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ ve $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n -lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere a) $p > 1$ ise

$$\sum_{k=1}^n |\sigma_k \rho_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\sigma_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |\rho_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.9)$$

b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise

$$\sum_{k=1}^n |\sigma_k \rho_k| \geq \left(\sum_{k=1}^n |\sigma_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |\rho_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.10)$$

eşitsizlikleri geçerlidir [5].

Teorem 2.10. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun F ve g $[\sigma, \rho]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar $|F|^p$ ve $|g|^q$, $[\sigma, \rho]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_{\sigma}^{\rho} |F(x)g(x)| \leq \left(\int_{\sigma}^{\rho} |F(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\sigma}^{\rho} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.11)$$

eşitsizliği geçerlidir [5].

Ayrıca Hölder Eşitsizliğinin bir sonucu olan power mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Tanım 2.11. (Power Mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. F ve g $[\sigma, \rho]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar $|F|$ ve $|g|^q$ $[\sigma, \rho]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_{\sigma}^{\rho} |F(x)g(x)| \leq \left(\int_{\sigma}^{\rho} |F(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\sigma}^{\rho} |F(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.12)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Aşağıda diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar için Simpson eşitsizliği verilmiştir [38].

Lemma 2.12. $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde mutlak sürekli, $\sigma < \rho$ ve $\sigma, \rho \in I^\circ$ iken $F' \in L_1[\sigma, \rho]$ ise aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left[F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + F(\rho) \right] - \frac{1}{\rho-\sigma} \int_{\sigma}^{\rho} F(x) dx \\ &= \frac{\rho-\sigma}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\tau}{2} - \frac{1}{3}\right) F' \left(\frac{1+\tau}{2} \rho + \frac{1-\tau}{2} \sigma \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{3} - \frac{\tau}{2}\right) F' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) \right] d\tau \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.2. KESİRLİ İNTEGRALLER VE ÖZELLİKLERİ

İntegral ve diferansiyel kavramı elementer kalkülüsdeki çalışmalara benzemektedir. Örneğin, $F(x) = x^2$ fonksiyonunun birinci mertebeden integrali $\int F(x) dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ ve aynı fonksiyonun ikinci mertebeden integrali

$$\int \left[\int F(x) dx \right] dx = \frac{1}{12}x^4 + c_1x + c_2 \quad (2.14)$$

dır. Benzer olarak $\frac{d}{dx}F(x) = 2x$ ve $\frac{d^2}{dx^2}F(x) = 2$ dir. Bununla birlikte, $F(x)$ fonksiyonun $\frac{1}{2}$ -ci mertebeden integrali ve türevi olabilir mi? Nasıl tanımlayabiliriz? Kesirli integralleri yorumlayabilmemiz için bazı temel tanım ve gösterimlere ihtiyacımız vardır. Bunun için öncelikle n - katlı bir integral ele almalıyız. Şimdi bazı özel integralleri ele alarak başlayalım. $x \in \mathbb{R}^+$ için

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (2.15)$$

integralini hesaplayalım. Bunun için ilk olarak

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (2.16)$$

tanımlamasını yapalım bu tanımlama yardımıyla,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned} \quad (2.17)$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitliğin sağ tarafında

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (2.18)$$

ve

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \theta dr d\theta + r \sin^2 \theta dr d\theta \\ &= r dr d\theta \end{aligned} \quad (2.19)$$

şeklindeki kutupsal koordinatları göz önüne alıp $r^2 = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-u} du d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (2.20)$$

bulunur.

Şimdi de kesirli integral ve türevin anlamlı hale gelmesinde oldukça yaygın kullanılan iki kavramı ele alalım.

Tanım 2.13 (Gamma Fonksiyonu). $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyon

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \quad (2.21)$$

şeklinde parametreye bağlı genelleştirilmiş integrale Gama fonksiyonu veya ikinci çeşit Euler integrali denir.(2.21) ile ifade edilen fonksiyon

i) $0 < p < \infty$ için yakınsak

ii) $p \leq 0$ için ıraksaktır.

Gama fonksiyonuna ait bazı özellikleri aşağıda sıralayalım:

i) $p > 0$ için $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ dir.

$$\text{ii)} \Gamma(p) = (p-1)!$$

$$\text{iii)} \Gamma(1) = 0! = 1$$

$$\text{iv)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Gama fonksiyonunun farklı versiyonu olan k-gama fonksiyonu ve birkaç özelliğini verelim.

$$\Gamma_k(\varkappa) = \int_0^{\infty} \tau^{\varkappa-1} e^{-\frac{\tau^k}{k}} d\tau \quad (2.22)$$

$$\Gamma(\varkappa) = \lim_{k \rightarrow 1} \Gamma_k(\varkappa)$$

$$\Gamma_k(\varkappa) = k^{\frac{\varkappa}{k}-1} \Gamma\left(\frac{\varkappa}{k}\right)$$

$$\Gamma_k(\varkappa+k) = \varkappa \Gamma_k(\varkappa)$$

Tanım 2.14 (Beta Fonksiyonu). $\varkappa, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$\beta(\varkappa, y) = \int_0^1 \tau^{\varkappa-1} (1-\tau)^{y-1} d\tau \quad (2.23)$$

integrali ile tanımlanan $\beta : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna Beta fonksiyonu veya birinci çeşit Euler integrali denir. (2.23) ile ifade edilen fonksiyonu için

i) $\varkappa > 0$ ve $y > 0$ için yakınsaktır.

ii) $\varkappa \leq 0$ ve $y \leq 0$ için ıraksaktır.

Beta fonksiyonuna ait bazı özellikleri aşağıda sıralayalım:

$$\text{i)} \beta(\varkappa, y) = \beta(y, \varkappa)$$

$$\text{ii)} \varkappa > 1 \text{ için } \beta(\varkappa, y) = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+y-1} \beta(\varkappa-1, y)$$

iii) $\beta(\mathcal{x}, y)$ fonksiyonu için

$$\beta(\mathcal{x}, y) = \int_0^{\infty} \frac{\tau^{\mathcal{x}-1}}{(1+\tau)^{\mathcal{x}+y}} d\tau \quad (2.24)$$

Gamma ve Beta fonksiyonu arasında

$$\beta(\mathcal{x}, y) = \frac{\Gamma(\mathcal{x})\Gamma(y)}{\Gamma(\mathcal{x}+y)}, \mathcal{x}, y \in \mathbb{R}^+ \quad (2.25)$$

ilişkisi vardır.

Kesirli integralleri ifade etmeden önce gerekli bazı temel kavramlardan bahsedelim sonrada kesirli integral fikri ile yakından ilişkili Abel integral eşitliğini verelim.

Tanım 2.15 (L_p Uzayı). $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere R üzerinde

$$L_p = L_p(R) = \left\{ F : \|F\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(\mathcal{x})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} < \infty \quad (2.26)$$

olarak ifade edilen F fonksiyonlarının uzayına L_p uzayı denir. Bunun anlamı mutlak değerinin n . kuvvetleri integrallenebilen fonksiyonların uzayı şeklinde ifade edilir. Özel olarak $[\sigma, \rho] \subset R$ ve $p = 1$ için $L_p([\sigma, \rho])$ uzayı

$$L_1([\sigma, \rho]) = \left\{ F : \int_{\sigma}^{\rho} |F(\mathcal{x})| d\mathcal{x} < \infty \right\} \quad (2.27)$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.16 (İntegraller için Minkowski Eşitsizliği). $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere δ_1 ve δ_2 kümeleri üzerinde ölçülebilir $F(\mathcal{x}, y)$ fonksiyonu için,

$$\left\{ \int_{\delta_1} \left(\int_{\delta_2} |F(\mathcal{x}, y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} d\mathcal{x} \right\} \leq \int_{\delta_2} \left(\int_{\delta_1} |F(\mathcal{x}, y)|^p d\mathcal{x} \right)^{\frac{1}{p}} dy \quad (2.28)$$

eşitsizliğine Minkowski eşitsizliği denir.

Tanım 2.17 (Abel integral denklemi). $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad x > 0 \quad (2.29)$$

olarak ifade edilen integrale Abel integrali denir.

Tanım 2.18 (Dirichet Formülü). $\delta_1 = [\sigma, \rho]$, $\delta_2 = [c, d]$ olmak üzere $F(x, y)$ fonksiyonu δ_1 ve δ_2 cümlesi üzerinde ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda da

$$\begin{aligned} \sigma < y < x & \text{ ise } \sigma < y < x < \rho \\ \sigma < x < \rho & \end{aligned} \quad (2.30)$$

sınır değişimine göre

$$\int_{\sigma}^{\rho} \left(\int_{\sigma}^x F(x, y) dy \right) dx = \int_{\sigma}^{\rho} \left(\int_y^{\rho} F(x, y) dx \right) dy \quad (2.31)$$

eşitliğine Dirichlet İntegrali denir.

Şimdi kesirli mertebeden integral tanımını ifade edelim. Bunun için

$$\int_{\sigma}^x \int_{\sigma}^{c_1} \int_{\sigma}^{c_2} \dots \int_{\sigma}^{c_{n-1}} F(c_n) dc_n dc_{n-1} \dots dc_2 dc_1 \quad (2.32)$$

şeklindeki n katlı integrali göz önüne alalım.(2.32) ile ifade edilen integrasyonda Dirichlet formülü dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \sigma < c_1 < x & \implies c_2 < c_1 < x \\ \sigma < c_2 < c_1 & \implies c_3 < c_2 < x \\ \sigma < c_3 < c_2 & \implies c_4 < c_3 < x \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ \sigma < c_{n-1} < c_{n-2} & \implies c_n < c_{n-1} < x \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}\sigma < c_n < c_{n-1} &\implies c_{n-1} < c_n < \varkappa \\ \sigma < c_n < c_{n-1} < \dots < c_3 < c_2 < c_1 < \varkappa\end{aligned}$$

integrasyon sınırları yukarıdaki şekilde değiştirilirse

$$\begin{aligned}& \int_{\sigma}^{\varkappa} \int_{\sigma}^{c_1} \int_{\sigma}^{c_2} \dots \int_{\sigma}^{c_{n-1}} F(c_n) dc_n dc_{n-1} \dots dc_2 dc_1 \\ &= \int_{\sigma}^{\varkappa} F(c_n) \left(\int_{c_n}^{\varkappa} \left(\int_{c_{n-1}}^{\varkappa} \dots \left(\int_{c_2}^{\varkappa} dc_1 \right) dc_{n-1} \right) dc_n \right)\end{aligned}\quad (2.34)$$

eşitliği yazılır. Elde edilen bu (2.34) eşitliğinin sağ tarafındaki integraller iç integralden başlanarak dışa doğru hesaplandığında,

$$\begin{aligned}\int_{c_2}^{\varkappa} dc_1 &= \varkappa - c_2 \\ \int_{c_3}^{\varkappa} (\varkappa - c_2) dc_2 &= \frac{(\varkappa - c_3)^2}{2} \\ \int_{c_4}^{\varkappa} \frac{(\varkappa - c_3)^2}{2} dc_3 &= \frac{(\varkappa - c_4)^3}{2.3} \\ \int_{c_n}^{\varkappa} \frac{(\varkappa - c_{n-1})^{n-1}}{2.3 \dots (n-2)} dc_{n-1} &= \frac{(\varkappa - c_n)^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)}\end{aligned}\quad (2.35)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler (2.34) integralinde kullanılırsa,

$$\int_{\sigma}^{\varkappa} \int_{\sigma}^{c_1} \int_{\sigma}^{c_2} \dots \int_{\sigma}^{c_{n-1}} F(c_n) dc_n dc_{n-1} \dots dc_2 dc_1 = \int_{\sigma}^{\varkappa} \frac{(\varkappa - c_n)^{n-1}}{(n-1)!} F(c_n) dc_n \quad (2.36)$$

yazılır. Elde edilen bu (2.36) ifadesinde

$$(n-1)! = \Gamma(n)$$

eşitliği sağlanan gamma fonksiyonu kullanılırsa

$$\int_{\sigma}^{c_1} \int_{\sigma}^{c_2} \dots \int_{\sigma}^{c_{n-1}} F(c_n) dc_n dc_{n-1} \dots dc_2 dc_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{\sigma}^{\varkappa} \frac{F(c_n)}{(\varkappa - c_n)^{1-n}} dc_n \quad (2.37)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada dikkat edilmesi gereken husus n doğal sayısının integrasyon tekrar sayısıdır. Gamma fonksiyonu pozitif tamsayılar dışında da tanımlıdır. Ve bu bilgilerin birleşiminden istenilen tanıma artık ulaşılmıştır.

Tanım 2.19 (Riemann-Liouville kesirli integrali). F fonksiyonu $J' = (0, \infty)$ bölgesinde noktasal sürekli ve $J = [0, \infty]$ aralığının herhangi bir alt aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda $\tau > 0$ için $\alpha \in C(R(\alpha) > 0)$ ise

$$I_{\sigma^+}^{\alpha} F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sigma}^x \frac{F(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad x > \sigma \quad (2.38)$$

$$I_{\rho^-}^{\alpha} F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\rho} \frac{F(\tau)}{(\rho-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad x < \rho \quad (2.39)$$

integrallerine sırasıyla α . mertebeden sağ ve sol Riemann-Liouville kesirli integrali denir [9]. Şimdi birkaç özellik ve örnek verelim.

Birleşme ve Değişme Özellikleri:

$$i) I_{\sigma^+}^{\alpha} I_{\sigma^+}^{\beta} = I_{\sigma^+}^{\alpha+\beta}$$

$$ii) I_{\rho^-}^{\alpha} I_{\rho^-}^{\beta} = I_{\rho^-}^{\alpha+\beta}$$

$$iii) I_{\sigma^+}^{\alpha} I_{\sigma^+}^{\beta} = I_{\sigma^+}^{\beta} I_{\sigma^+}^{\alpha}$$

$$iv) I_{\rho^-}^{\alpha} I_{\rho^-}^{\beta} = I_{\rho^-}^{\beta} I_{\rho^-}^{\alpha}$$

Şimdi Konveks fonksiyonun sağladığı Hermite-Hadamard eşitsizliğinin kesirli integraller türünden ifadesi ve bunların sonuçlarını verelim. Sarıkaya ve arkadaşları tarafından yapılan [14] nolu çalışmada Riemann-Liouville kesirli integralleri için Hermite Hadamard eşitsizliği aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

Teorem 2.20. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif fonksiyon $\sigma < \rho$ ve $F \in L_1([\sigma, \rho])$. Eğer F , $[\sigma, \rho]$ aralığı üzerinde konveks ise $\alpha > 0$ iken kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\rho - \sigma)^\alpha} \left[J_{\sigma+}^\alpha F(\rho) + J_{\rho-}^\alpha F(\sigma) \right] \leq \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} \quad (2.40)$$

Lemma 2.21. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, (σ, ρ) aralığı üzerinde difersansiyellenebilir fonksiyon ve $\sigma < \rho$. dir. Eğer $F' \in L[\sigma, \rho]$, ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitlik sağlanır [14].

$$\frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\rho - \sigma)^\alpha} \left[J_{\sigma+}^\alpha F(\rho) + J_{\rho-}^\alpha F(\sigma) \right] \quad (2.41)$$

$$= \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 [(1 - \tau)^\alpha - \tau^\alpha] F'(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) d\tau$$

Teorem 2.22. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, (σ, ρ) üzerinde difersansiyellenebilir fonksiyon, $\sigma < \rho$. dir. Eğer $|F'|$, $[\sigma, \rho]$ aralığı üzerinde konveks ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [14].

$$\left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\rho - \sigma)^\alpha} \left[J_{\sigma+}^\alpha F(\rho) + J_{\rho-}^\alpha F(\sigma) \right] \right| \leq \frac{\rho - \sigma}{2(\alpha + 1)} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha} \right) [F'(\sigma) + F'(\rho)] \quad (2.42)$$

Aynı zamanda Sarıkaya ve arkadaşları Riemann-Liouville kesirli integralleri için Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki şekilde verilmiştir [29].

Teorem 2.23. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif fonksiyon, $\sigma < \rho$ ve $F \in L_1[\sigma, \rho]$. olsun. Eğer F fonksiyonu $[\sigma, \rho]$, aralığı üzerinde konveks ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha + 1)}{(\rho - \sigma)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)+}^\alpha F(\rho) + J_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)-}^\alpha F(\sigma) \right] \leq \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} \quad (2.43)$$

Simpson eşitliğinin Riemann-Liouville kesirli integrali ile ifadesi aşağıda verilmiştir [39].

Lemma 2.24. $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde mutlak sürekli, $\sigma < \rho$ ve $\sigma, \rho \in I^\circ$ iken $F' \in L_1[\sigma, \rho]$ ise aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} \left[F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + F(\rho) \right] \\
& - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\rho-\sigma)^\alpha} \left[J_{\rho^-}^\alpha F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + J_{\sigma^+}^\alpha F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \\
= & \frac{\rho-\sigma}{2} \left[\int_0^1 \left(\frac{\tau^\alpha}{2} - \frac{1}{3}\right) F'\left(\frac{1+\tau}{2}\rho + \frac{1-\tau}{2}\sigma\right) d\tau \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{\tau^\alpha}{2}\right) F'\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) d\tau \right] \tag{2.44}
\end{aligned}$$

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TIPLI EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde kesirli integrallerden yararlanılarak genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizliğinin üç farklı hali ve bu eşitsizliklerin daha önceki çalışmalardan hangilerini genelleştirdiği gösterilecektir. Öncelikle kesirli integralleri genelleştirmekte yararlandığımız fonksiyonu, özelliklerini ve bu fonksiyon ile oluşturduğumuz kesirli integrali verelim. Ardında da genelleştirdiğimiz kesirli integralin özel hallerinden, Riemann integrali, Riemann-Liouville kesirli integral, k -Riemann-Liouville kesirli integral, Katugampola kesirli integral, conformable kesirli integrallerini verdiğini gösterelim. Bu kesirli integrallerden yararlanılarak elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genelleştirilmiş halini verelim.

Aşağıdaki koşulu sağlayan $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun.

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau < \infty \quad (3.1)$$

Bu fonksiyondan yararlanarak aşağıdaki eşitlikleri sırasıyla sağ taraflı ve sol taraflı kesirli integaller şeklinde tanımlayabiliriz.

$${}_{\sigma^+}I_{\varphi}F(x) = \int_{\sigma}^x \frac{\varphi(x-\tau)}{x-\tau} F(\tau) d\tau, \quad x > \sigma \quad (3.2)$$

$${}_{\rho^-}I_{\varphi}F(x) = \int_x^{\rho} \frac{\varphi(\tau-x)}{\tau-x} F(\tau) d\tau, \quad x < \rho \quad (3.3)$$

Genelleştirilmiş kesirli integralin en önemli özelliği, Riemann-Liouville kesirli integral, k -Riemann-Liouville kesirli integral, Katugampola kesirli integral, conformable kesirli integral, Hermite-Hadamard kesirli integral gibi birçok kesirli integrallerin genelleştirilmiş hali olmasıdır. (3.2) ve (3.3)' deki integral operatörlerinin önemli özel durumları aşağıda ifade edilmiştir.

i) Eğer $\varphi(\tau) = \tau$ alınırsa (3.2) ve (3.3) integralleri Riemann integraline dönüşür.

$$I_{\sigma^+} F(\varkappa) = \int_{\sigma}^{\varkappa} F(\tau) d\tau, \quad \varkappa > \sigma \quad (3.4)$$

$$I_{\rho^-} F(\varkappa) = \int_{\varkappa}^{\rho} F(\tau) d\tau, \quad \varkappa < \rho \quad (3.5)$$

ii) Eğer $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$, alınırsa (3.2) ve (3.3) integralleri, (2.38) ve (2.39)'deki sağ ve sol Riemann-Liouville kesirli integrallerine dönüşür.

iii) Eğer $\varphi(\tau) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \tau^{\frac{\alpha}{k}}$, alınırsa (3.2) ve (3.3) integralleri k -Riemann-Liouville kesirli integrallerine dönüşür.

$$I_{\sigma^+,k}^{\alpha} F(\varkappa) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_{\sigma}^{\varkappa} (\varkappa - \tau)^{\frac{\alpha}{k}-1} F(\tau) d\tau, \quad \varkappa > \sigma \quad (3.6)$$

$$I_{\rho^-,k}^{\alpha} F(\varkappa) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_{\varkappa}^{\rho} (\tau - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}-1} F(\tau) d\tau, \quad \varkappa < \rho \quad (3.7)$$

burada

$$\Gamma_k(\alpha) = \int_0^{\infty} \tau^{\alpha-1} e^{-\frac{\tau^k}{k}} d\tau, \quad \mathcal{R}(\alpha) > 0 \quad (3.8)$$

ve

$$\Gamma_k(\alpha) = k^{\frac{\alpha}{k}-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{k}\right), \quad \mathcal{R}(\alpha) > 0; k > 0 \quad (3.9)$$

Mubeen ve Habibullah tarafından ifade edilmiştir [24].

iv) Eğer

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \tau (\varkappa - \tau)^s (\varkappa^{s+1} - \tau^{s+1})^{\alpha-1} \quad (3.10)$$

ve

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \tau (\tau - \varkappa)^s (\tau^{s+1} - \varkappa^{s+1})^{\alpha-1} \quad (3.11)$$

alınırsa $\alpha > 0$ ve $s \neq -1$ bir reel sayı için (3.2) ve (3.3) ifadeleri sırasıyla Katugampola kesirli integraline dönüşür [27].

$$I_{\sigma^+,s}^{\alpha} F(\varkappa) = \frac{(s+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sigma}^{\varkappa} (\varkappa^{s+1} - \tau^{s+1})^{\alpha-1} \tau^s F(\tau) d\tau, \quad \varkappa > \sigma \quad (3.12)$$

$$I_{\rho^-,s}^{\alpha} F(\varkappa) = \frac{(s+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa}^{\rho} (\varkappa^{s+1} - \tau^{s+1})^{\alpha-1} \tau^s F(\tau) d\tau, \quad \varkappa < \rho \quad (3.13)$$

v) Eğer $\varphi(\tau) = \tau(\varkappa - \tau)^{\alpha-1}$, alınırsa (3.2) integrali Khalil tarafından ifade edilen conformable kesirli integrale dönüşür [28].

$$I_{\sigma}^{\alpha} F(\varkappa) = \int_{\sigma}^{\varkappa} \tau^{\alpha-1} F(\tau) d\tau = \int_{\sigma}^{\varkappa} F(\tau) d_{\alpha}\tau, \quad \varkappa > \sigma, \quad \alpha \in (0,1) \quad (3.14)$$

vi) Eğer

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{[(\log \varkappa - \log(\varkappa - \tau))^{\alpha-1}}{\varkappa - \tau} \quad (3.15)$$

ve

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \tau \frac{[(\log(\tau - \varkappa) - \log \varkappa)^{\alpha-1}}{\tau - \varkappa} \quad (3.16)$$

alınırsa (3.2) ve (3.3), integralleri sırasıyla aşağıdaki gibi sağ taraf ve sol taraf Hadamard kesirli integrallerine dönüşür.

$$I_{\sigma^+}^{\alpha} F(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sigma}^{\varkappa} (\log \varkappa - \log \tau)^{\alpha-1} \frac{F(\tau)}{\tau} d\tau, \quad 0 < \sigma < \varkappa < \rho \quad (3.17)$$

$$I_{\rho^-}^{\alpha} F(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa}^{\rho} (\log \tau - \log \varkappa)^{\alpha-1} \frac{F(\tau)}{\tau} d\tau, \quad 0 < \sigma < \varkappa < \rho \quad (3.18)$$

vii) Eğer $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp(-\frac{1-\alpha}{\alpha} \tau)$ operatörü (3.2) ve (3.3) integrallerinde kullanılırsa $\alpha \in (0,1)$ için bu integraller sırasıyla Kirane ve Torebenk tarafından ifade edilen sağ taraflı ve sol taraflı üstel çekirdekli kesirli integral operatörüne dönüşürler [22].

$$\mathcal{I}_{\sigma^+}^{\alpha} F(\varkappa) = \frac{1}{\alpha} \int_{\sigma}^{\varkappa} \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(\varkappa - \tau)\right) F(\tau) d\tau, \quad \sigma < \varkappa \quad (3.19)$$

$$\mathcal{I}_{\rho^-}^{\alpha} F(\varkappa) = \frac{1}{\alpha} \int_{\varkappa}^{\rho} \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(\tau - \varkappa)\right) F(\tau) d\tau, \quad \varkappa < \rho \quad (3.20)$$

Bu kısımda kısalık olması için aşağıdaki tanımlardan yararlandık.

$$\Lambda(s) = \int_0^s \frac{\varphi((\rho - \sigma)\tau)}{\tau} d\tau < \infty, \quad \Delta(s) = \int_s^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)\tau)}{\tau} d\tau < \infty \quad (3.21)$$

Teorem 3.1. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[\sigma, \rho]$ kapalı aralığı üzerinde konveks ve $\sigma < \rho$, genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \leq \frac{1}{2\Lambda(1)} [\sigma^+ I_\varphi F(\rho) + \rho^- I_\varphi F(\sigma)] \leq \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} \quad (3.22)$$

İspat. $\tau \in [0, 1]$ iken $x = \tau\sigma + (1 - \tau)\rho$, $y = (1 - \tau)\sigma + \tau\rho$. alınır ve F fonksiyonunun konveksliğinden yararlanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) = F\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{F(x) + F(y)}{2} \quad (3.23)$$

$$2F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \leq F(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) + F((1 - \tau)\sigma + \tau\rho) \quad (3.24)$$

(3.24) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{\varphi((\rho - \sigma)\tau)}{\tau}$ ifadesi ile çarpılır ve τ ye göre $(0, 1]$ aralığı üzerinde integral alınır ise aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$\begin{aligned} 2F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \int_0^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)\tau)}{\tau} d\tau & \quad (3.25) \\ \leq \int_0^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)\tau)}{\tau} F(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) d\tau & \\ + \int_0^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)\tau)}{\tau} F((1 - \tau)\sigma + \tau\rho) d\tau & \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte gerekli işlemler yapılırsa

$$2F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \int_0^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)\tau)}{\tau} d\tau \leq [\sigma^+ I_\varphi F(\rho) + \rho^- I_\varphi F(\sigma)] \quad (3.26)$$

ifadesi elde edilir ve bu da eşitsizliğin ilk kısmını ispatlar. Eşitsizliğin ikinci kısmının ispatına geçilir. Her $\tau \in [0, 1]$ iken F fonksiyonunun konveksliğinden yararlanarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$F(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) + F((1 - \tau)\sigma + \tau\rho) \leq F(\sigma) + F(\rho) \quad (3.27)$$

(3.27) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{\varphi((\rho-\sigma)\tau)}{\tau}$ ifadesi ile çarpılır ve τ ye göre $(0, 1]$ aralığı üzerinde integral alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$[\sigma^+ I_{\varphi} F(\rho) + \rho^- I_{\varphi} F(\sigma)] \leq [F(\sigma) + F(\rho)] \int_0^1 \frac{\varphi((\rho-\sigma)\tau)}{\tau} d\tau \quad (3.28)$$

Ve eşitsizliğin ikinci kısmı da ispatlanır. \square

Sonuç 3.2. Eğer Teorem 3.1’de $\varphi(\tau) = \tau$ alınırsa (3.22) eşitsizliği (2.4) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.3. Eğer Teorem 3.1’de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa (3.22) eşitsizliği (2.6) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.4. Eğer Teorem 3.1’de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ alınırsa (3.22) eşitsizliğinden

$$F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \leq \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{\sigma^+,k}^{\alpha} F(\rho) + I_{\rho^-,k}^{\alpha} F(\sigma) \right] \leq \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} \quad (3.29)$$

Farid arkadaşları tarafından ispatlanan eşitsizliğe ulaşılır [25].

Sonuç 3.5. Theorem 3.1’in koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau(\rho-\tau)^{\alpha-1}$, alınır ve F fonksiyonunun $\frac{(\sigma+\rho)'}{2}$ ye göre simetrikliğinden yararlanılırsa conformable kesirli integraller için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik elde edilir.

$$F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \leq \frac{\alpha}{\rho^{\alpha}-\sigma^{\alpha}} \int_{\sigma}^{\rho} F(\tau) d_{\alpha}\tau \leq \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} \quad (3.30)$$

Sonuç 3.6. Teorem 3.1’in koşulları altında $\alpha \in (0, 1)$, ve $A = \frac{1-\alpha}{\alpha}(\rho-\sigma)$ iken $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau\right)$ alınırsa

$$F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \leq \frac{1-\alpha}{2(1-\exp(-A))} \left[\mathcal{I}_{\sigma^+}^{\alpha} F(\rho) + \mathcal{I}_{\rho^-}^{\alpha} F(\sigma) \right] \leq \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} \quad (3.31)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu sonuç Kirane ve Torebek tarafından yapılan [22] nolu çalışmada elde edilmiştir.

Bu kısımda daha önceki çalışmalarda elde edilmiş kesirli integraller için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genelleştirilmiş başka bir formu ve yeni sonuçları ifade edilecektir.

Teorem 3.7. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow R$ tanımlanan bir fonksiyon, $\sigma < \rho$ ve $F \in L_1[\sigma, \rho]$ olsun. Eğer F , $[\sigma, \rho]$ aralığı üzerinde konveks ise genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \leq \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})+}I_{\varphi}F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})-}I_{\varphi}F(\sigma) \right] \leq \frac{F(\sigma)+F(\rho)}{2} \quad (3.32)$$

burada $\Psi : [0, 1] \rightarrow R$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\Psi(s) = \int_0^s \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} d\tau \quad (3.33)$$

İspat. F , $[\sigma, \rho]$, aralığı üzerinde konveks iken her $x, y \in [\sigma, \rho]$ için aşağıdaki eşitsizlik kolaylıkla yazılır

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{F(x)+F(y)}{2} \quad (3.34)$$

$x = \frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho$ ve $y = \frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho$, ifadeleri kullanılırsa

$$2F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \leq F\left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho\right) + F\left(\frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho\right) \quad (3.35)$$

(3.35) eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau}$, ve $[0, 1]$, aralığı üzerinde τ ye göre integral alınırsa aşağıdaki eşitsizlik oluşur.

$$\begin{aligned} & 2F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} d\tau \\ & \leq \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} F\left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho\right) d\tau + \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} F\left(\frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho\right) d\tau. \end{aligned} \quad (3.36)$$

$u = \frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho$ ve $v = \frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho$, ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} & 2F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \Psi(1) d\tau \\ & \leq \int_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^{\rho} \frac{\varphi(\rho-u)}{\rho-u} F(u) du + \int_{\sigma}^{\frac{\sigma+\rho}{2}} \frac{\varphi(v-\sigma)}{v-\sigma} F(v) dv \\ & = \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})+}I_{\varphi}F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})-}I_{\varphi}F(\sigma) \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

yukarıdaki eşitsizlik elde edilir bu da eşitsizliğin ilk kısmını ispatlar. \square

(3.32) eşitsizliğinin ikinci kısmının ispatına geçilirse öncelikle F fonksiyonunun konveksliğinden

$$F\left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho\right) \leq \frac{\tau}{2}F(\sigma) + \frac{2-\tau}{2}F(\rho) \quad (3.38)$$

ve

$$F\left(\frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho\right) \leq \frac{2-\tau}{2}F(\sigma) + \frac{\tau}{2}F(\rho) \quad (3.39)$$

eşitsizlikleri yazılır ve bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$F\left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho\right) + F\left(\frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho\right) \leq F(\sigma) + F(\rho) \quad (3.40)$$

(3.40) eşitliği oluşur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau}$ ifadesi ile çarpılır ve τ 'ye göre $[0, 1]$ aralığı üzerinde integral alınır aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} F\left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho\right) d\tau \\ & + \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} F\left(\frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho\right) d\tau \\ & \leq [F(\sigma) + F(\rho)] \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} d\tau \end{aligned} \quad (3.41)$$

Bu eşitsizlik (3.32) nin sağ tarafına denktir.

$$\left[({}_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^+ I_{\varphi} F(\rho) + ({}_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^- I_{\varphi} F(\sigma))\right] \leq \Psi(1) [F(\sigma) + F(\rho)] \quad (3.42)$$

bundan dolayı ispat tamamlanır.

Sonuç 3.8. Teorem 3.7 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ fonksiyonu kullanılırsa (3.32) eşitsizliği (2.4).nolu eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.9. Teorem 3.7 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (3.32) eşitsizliği (2.43) nolu eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.10. Teorem 3.7 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (3.32) eşitsizliği [25] nolu çalışmanın (2.1) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.11. Teorem 3.7 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau\right)$, fonksiyonu kullanılırsa $A = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\rho-\sigma}{2}$ iken, (3.32) eşitsizliği Usta ve arkadaşları tarafından ispatlanan aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür [32].

$$F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \leq \frac{1-\alpha}{2[1-\exp\{-A\}]} \left[\mathcal{I}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+}^{\alpha} F(\rho) + \mathcal{I}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^-}^{\alpha} F(\sigma) \right] \leq \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} \quad (3.43)$$

Bu kısımda da genelleştirilmiş kesirli integraller için Hermite-Hadamard eşitsizliği için farklı bir teorem ve sonuçları verilecektir.

Teorem 3.12. F fonksiyonu $F : [\sigma, \rho] \rightarrow R$ tanımlı $\sigma < \rho$ ve $F \in L_1[\sigma, \rho]$.dir. Eğer F fonksiyonu $[\sigma, \rho]$ kapalı aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \leq \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \leq \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} \quad (3.44)$$

burada Ψ fonksiyonu 3.33'deki şekilde tanımlıdır.

İspat. F , $[\sigma, \rho]$ kapalı aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon ve $\varkappa, y \in [\sigma, \rho]$ iken

$$F\left(\frac{\varkappa+y}{2}\right) \leq \frac{F(\varkappa) + F(y)}{2} \quad (3.45)$$

eşitsizliği yazılır $\varkappa = \frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho$ ve $y = \frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho$, değişken değiştirmesi yapılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$2F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \leq F\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) + F\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) \quad (3.46)$$

(3.46) nolu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau}$ ile çarpılıp ve ardından τ ye göre $[0, 1]$ aralığı üzerinde integral alındığında

$$\begin{aligned} & 2F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} d\tau \\ & \leq \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} F\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) d\tau \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$+ \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} F\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) d\tau$$

elde edilen eşitsizlikte $u = \frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho$ ve $v = \frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho$, değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} & 2F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \Lambda(1) d\tau \tag{3.48} \\ & \leq \int_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^{\rho} \frac{\varphi\left(u - \frac{\sigma+\rho}{2}\right)}{u - \frac{\sigma+\rho}{2}} F(u) du + \int_{\sigma}^{\frac{\sigma+\rho}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{\sigma+\rho}{2} - v\right)}{\frac{\sigma+\rho}{2} - v} F(v) dv \\ & = \left[\sigma^+ I_{\varphi} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + \rho^- I_{\varphi} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve eşitsizliğin ilk kısmı ispatlanır. \square

(3.44) nolu eşitsizliğin ikinci kısmı için, ilk olarak F fonksiyonunun konveksliğinden yararlanarak aşağıdaki eşitsizlikler yazılır.

$$F\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) \leq \frac{1-\tau}{2}F(\sigma) + \frac{1+\tau}{2}F(\rho) \tag{3.49}$$

$$F\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) \leq \frac{1+\tau}{2}F(\sigma) + \frac{1-\tau}{2}F(\rho) \tag{3.50}$$

Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanıp aşağıdaki gibi tek bir eşitsizlik elde edilir.

$$F\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) + F\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) \leq F(\sigma) + F(\rho) \tag{3.51}$$

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau}$ ile çarpılır ve τ ye göre $[0, 1]$, aralığı üzerinde integral alınır aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} F\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) d\tau \tag{3.52} \\ & + \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} F\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) d\tau \end{aligned}$$

$$\leq [F(\sigma) + F(\rho)] \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} d\tau$$

bu eşitsizlikde

$$\left[\sigma_+ I_{\varphi} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + \rho_- I_{\varphi} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \leq \Psi(1) [F(\sigma) + F(\rho)] \quad (3.53)$$

şeklinde ifade edilir. İspat tamamlanır.

Sonuç 3.13. Teorem 3.12 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ olarak alınır (3.44) nolu eşitsizlik 2.4 eşitsizliği verir.

Sonuç 3.14. Teorem 3.12 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ olarak alınır aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) &\leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\rho-\sigma)^\alpha} \left[\sigma_+ J_{\varphi} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + \rho_- J_{\varphi} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \\ &\leq \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Sonuç 3.15. Teorem 3.12 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^k}{k\Gamma_k(\alpha)}$ olarak alınır aşağıdaki eşitsizlik alınır.

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma_k(\alpha+k)2^{\frac{\alpha}{k}-1}}{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{\sigma^+,k} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + I_{\rho^-,k} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \\ &\leq \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} \end{aligned} \quad (3.55)$$

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN TRAPEZOİD TIPLI EŞİTSİZLİKLER

4.1. BİRİNCİ TÜREVİNİN MUTLAK DEĞERİ KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN TRAPEZOİD EŞİTSİZLİĞİ

Öncelikle genelleştirilmiş trapezoid tipli eş

Lemma 4.1. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$. Eğer $F' \in L[\sigma, \rho]$, ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned} & \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [\sigma^+ I_{\varphi} F(\rho) + \rho^- I_{\varphi} F(\sigma)] \\ &= \frac{(\rho - \sigma)}{2\Lambda(1)} \int_0^1 [\Lambda(1 - \tau) - \Lambda(\tau)] F'(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) d\tau \\ &= \frac{(\rho - \sigma)}{2\Lambda(1)} \int_0^1 \Lambda(\tau) [F'(\tau\rho + (1 - \tau)\sigma) - F'(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho)] d\tau \end{aligned} \quad (4.1)$$

İspat. (4.1) eşitliğinin sağ tarafının ilk kısmına kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 \left[\int_0^{\tau} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right] F'(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) d\tau \\ &= -\frac{F(\sigma)}{\rho - \sigma} \int_0^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du + \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \frac{\varphi((\rho - \sigma)\varkappa)}{\varkappa} F(\varkappa) d\varkappa \end{aligned} \quad (4.2)$$

ve benzer işlemler ile

$$S_2 = \int_0^1 \left[\int_0^{\tau} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right] F'(\tau\rho + (1 - \tau)\sigma) d\tau \quad (4.3)$$

$$= \frac{F(\rho)}{\rho - \sigma} \int_0^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \frac{\varphi((\rho - \sigma)\varkappa)}{\varkappa} F(\varkappa) d\varkappa$$

sonuçları elde edilir. S_2 eşitliğinden S_1 eşitliği çıkartılır ve $(\rho - \sigma)$ ile çarpılırsa (4.1) eşitliği sağlanır ve ispat tamamlanır. \square

Sonuç 4.2. Eğer Lemma 4.1'de $\varphi(\tau) = \tau$ fonksiyonu alınırsa (4.1) eşitliğinden 2.5 özdeşliği elde edilir.

Sonuç 4.3. Eğer Lemma 4.1'de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (4.1) eşitliğinden (2.41) özdeşliği elde edilir.

Sonuç 4.4. Eğer Lemma 4.1'de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (4.1) eşitliği Farid ve arkadaşları tarafından ispatlanan aşağıdaki özdeşliğe dönüşür [25].

$$\begin{aligned} & \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{\sigma^+, k}^\alpha F(\rho) + I_{\rho^-, k}^\alpha F(\sigma) \right] \\ &= \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 \left[(1 - \tau)^{\frac{\alpha}{k}} - \tau^{\frac{\alpha}{k}} \right] F'(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) d\tau \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sonuç 4.5. Lemma 4.1 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau(\rho - \tau)^{\alpha-1}$ fonksiyonu kullanılır ve F fonksiyonunun $\frac{(\sigma+\rho)'}{2}$ ye göre simetrikliğinden yararlanılırsa aşağıdaki özdeşlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{\alpha}{\rho^\alpha - \sigma^\alpha} \int_{\sigma}^{\rho} F(\tau) d\alpha\tau \\ &= \frac{(\rho - \sigma)}{2(\rho^\alpha - \sigma^\alpha)} \int_0^1 \left([\rho - (\rho - \sigma)(1 - \tau)]^\alpha - [\rho - (\rho - \sigma)\tau]^\alpha \right) \\ & \quad \times F'(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) d\tau \\ &= \frac{(\rho - \sigma)}{2(\rho^\alpha - \sigma^\alpha)} \int_0^1 \left(\rho^\alpha - [\rho - (\rho - \sigma)\tau]^\alpha \right) \\ & \quad \times \left[F'(\tau\rho + (1 - \tau)\sigma) - F'(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) \right] d\tau \end{aligned} \quad (4.5)$$

Sonuç 4.6. Eğer Lemma 4.1’de $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau)$ fonksiyonu kullanılırsa $\alpha \in (0, 1)$ iken Kirane and Torebek tarafından ispatlanan aşağıdaki özdeşlik elde edilir [22].

$$\begin{aligned} & \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1-\alpha}{2(1-\exp(-A))} \left[\mathcal{I}_{\sigma^+}^{\alpha} F(\rho) + \mathcal{I}_{\rho^-}^{\alpha} F(\sigma) \right] \\ &= \frac{\rho - \sigma}{2(1-\exp(-A))} \int_0^1 [\exp(-A\tau) - \exp(-A(1-\tau))] F'(\tau\sigma + (1-\tau)\rho) d\tau \end{aligned} \quad (4.6)$$

Teorem 4.7. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$. Eğer $|F'|$, $[\sigma, \rho]$ aralığı üzerinde konveks ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [\sigma^+ I_{\varphi} F(\rho) + \rho^- I_{\varphi} F(\sigma)] \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)}{\Lambda(1)} \int_0^1 \tau |\Lambda(1-\tau) - \Lambda(\tau)| d\tau \left(\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

İspat. Lemma 4.1 ve $|F'|$ nin konveksliğinden yararlanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [\sigma^+ I_{\varphi} F(\rho) + \rho^- I_{\varphi} F(\sigma)] \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)}{2\Lambda(1)} \int_0^1 \left[\int_0^{1-\tau} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du - \int_0^{\tau} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right] |F'(\tau\sigma + (1-\tau)\rho)| d\tau \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)}{2\Lambda(1)} |F'(\sigma)| \int_0^1 \tau \left| \int_0^{1-\tau} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du - \int_0^{\tau} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right| d\tau \\ & \quad + \frac{(\rho - \sigma)}{2\Lambda(1)} |F'(\rho)| \int_0^1 (1-\tau) \left| \int_0^{1-\tau} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du - \int_0^{\tau} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right| d\tau \end{aligned} \quad (4.8)$$

Bu da (4.7) eşitsizliğini ispatlar. □

Sonuç 4.8. Eğer Teorem 4.7’ de $\varphi(\tau) = \tau$ fonksiyonu kullanılırsa (4.7) eşitsizliği (2.6) özdeşliğine dönüşür.

Sonuç 4.9. Eğer Teorem 4.7’de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (4.7) eşitsizliği (2.42) özdeşliğine dönüşür.

Sonuç 4.10. Eğer Teorem 4.7’de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{k\Gamma_k(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (4.7) eşitsizliği Farid tarafından ispatlanan aşağıdaki özdeşliğe dönüşür [25].

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{\sigma^+, k}^\alpha F(\rho) + I_{\rho^-, k}^\alpha F(\sigma) \right] \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)}{\left(\frac{\alpha}{k} + 1\right)} \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}}}\right) \left(\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sonuç 4.11. Teorem 4.7 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau(\rho - \tau)^{\alpha-1}$ fonksiyonu kullanılır ve F in $\frac{(\sigma+\rho)}{2}$, ye göre simetrikliğinden yararlanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{\alpha}{\rho^\alpha - \sigma^\alpha} \int_\sigma^\rho F(\tau) d_\alpha \tau \right| \\ & \leq \frac{1}{(\rho^\alpha - \sigma^\alpha)(\alpha + 1)} \left[\sigma^{\alpha+1} + \rho^{\alpha+1} - \frac{(\sigma + \rho)^{\alpha+1}}{2^\alpha} \right] \left[\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

İspat. (4.7) nolu eşitsizliğinde eğer $\varphi(\tau) = \tau(\rho - \tau)^{\alpha-1}$, fonksiyonu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{\alpha}{\rho^\alpha - \sigma^\alpha} \int_\sigma^\rho F(\tau) d_\alpha \tau \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)\alpha}{(\rho^\alpha - \sigma^\alpha)} \int_0^1 \tau |\Lambda(1 - \tau) - \Lambda(\tau)| d\tau \left(\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

eşitsizliği yazılır (4.11) ifadesindeki $M = \int_0^1 \tau |\Lambda(1 - \tau) - \Lambda(\tau)| d\tau$ değeri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \tau \left| [\rho - (\rho - \sigma)(1 - \tau)]^\alpha - [\rho - (\rho - \sigma)\tau]^\alpha \right| d\tau \\ &= \frac{1}{\alpha(\rho - \sigma)^2} \int_\sigma^\rho (u - \sigma) \left| u^\alpha - [\sigma + \rho - u]^\alpha \right| du \\ &= \frac{1}{\alpha(\rho - \sigma)^2} \int_\sigma^{\frac{\sigma+\rho}{2}} (u - \sigma) \left([\sigma + \rho - u]^\alpha - u^\alpha \right) du \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\alpha(\rho - \sigma)^2} \int_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^{\rho} (u - \sigma) (u^\alpha - [\sigma + \rho - u]^\alpha) du \\
& = \frac{1}{\alpha(\rho - \sigma)(\alpha + 1)} \left[\sigma^{\alpha+1} + \rho^{\alpha+1} - \frac{(\sigma + \rho)^{\alpha+1}}{2^\alpha} \right]
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir buda ispatı tamamlar. \square

Sonuç 4.12. Eğer sonuç 4.11’de $\alpha = 1$ alınırsa Dragomir ve Agarwal tarafından ispatlanan (2.6) nolu eşitsizlik elde edilir [10].

Sonuç 4.13. Eğer Teorem 4.7’ de $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau)$ fonksiyonu kullanılırsa $\alpha \in (0, 1)$ iken Kirane and Torebek tarafından ispatlanan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir [22]

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1 - \alpha}{2(1 - \exp(-A))} \left[\mathcal{I}_{\sigma^+}^\alpha F(\rho) + \mathcal{I}_{\rho^-}^\alpha F(\sigma) \right] \right| \quad (4.13) \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2A} \tanh\left(\frac{A}{4}\right) \left(\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right)
\end{aligned}$$

Teorem 4.14. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ dir. Eğer $|F'|^q$, $[\sigma, \rho]$ aralığında konveks ise $q > 1$ iken kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlar.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_\varphi F(\rho) + {}_{\rho^-}I_\varphi F(\sigma) \right] \right| \quad (4.14) \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)}{2\Lambda(1)} \left(\int_0^1 |\Lambda(1 - \tau) - \Lambda(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

İspat. Lemma 4.1’de Hölder eşitsizliğinden ve $|F'|^q$ nin konveksliğinden yararlanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_\varphi F(\rho) + {}_{\rho^-}I_\varphi F(\sigma) \right] \right| \quad (4.15) \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)}{2\Lambda(1)} \left(\int_0^1 \left| \int_0^{1-\tau} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du - \int_0^\tau \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 |F'(\tau\sigma + (1-\tau)\rho)|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)}{2\Lambda(1)} \left(\int_0^1 \left| \int_0^{1-\tau} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du - \int_0^\tau \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \tau |F'(\sigma)|^q + (1-\tau) |F'(\rho)|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Bu da (4.14) eşitsizliğini ispatlar. □

Sonuç 4.15. Eğer Teorem 4.14'de $\varphi(\tau) = \tau$ fonksiyonu kullanılırsa (4.14) eşitsizliği [10] nolu çalışmanın (2.4) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.16. Eğer Teorem 4.14'de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (4.14) eşitsizliği [19] nolu çalışmanın (2.7) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.17. Eğer Teorem 4.14'de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (4.14) eşitsizliğinde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\frac{\alpha}{k} \in [0, 1]$, iken Farid ve arkadaşları tarafından ispatlanan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir [25].

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{\sigma^+, k}^\alpha F(\rho) + I_{\rho^-, k}^\alpha F(\sigma) \right] \right| \quad (4.16) \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)}{2 \left(\frac{\alpha}{k} p + 1 \right)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Sonuç 4.18. Teorem 4.14'de ki koşullar altında $\varphi(\tau) = \tau(\rho - \tau)^{\alpha-1}$ fonksiyonu kullanılır ve F fonksiyonunun $\frac{(\sigma + \rho)'}{2}$ ye göre simetrikliğinden yararlanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{\alpha}{\rho^\alpha - \sigma^\alpha} \int_\sigma^\rho F(\tau) d_\alpha \tau \right| \quad (4.17) \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^{\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}} (\rho^\alpha - \sigma^\alpha) (\alpha p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left[\sigma^{\alpha p + 1} + \rho^{\alpha p + 1} - \frac{(\sigma + \rho)^{\alpha p + 1}}{2^{\alpha p}} \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\frac{|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

İspat. (4.14) eşitsizliğinde $\varphi(\tau) = \tau(\rho - \tau)^{\alpha-1}$ alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{\alpha}{\rho^\alpha - \sigma^\alpha} \int_{\sigma}^{\rho} F(\tau) d_{\alpha}\tau \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)\alpha}{2(\rho^\alpha - \sigma^\alpha)} \left(\int_0^1 |\Lambda(1 - \tau) - \Lambda(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$A \geq B > 0$ ve $q > 1$, iken $(A - B)^q \leq A^q - B^q$, eşitsizliğinden yararlanarak (4.18) eşitsizliğinin sağ tarafının integrali hesaplanırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |\Lambda(1 - \tau) - \Lambda(\tau)|^p d\tau \\ & = \frac{1}{\alpha^p} \int_0^1 |[\rho - (\rho - \sigma)(1 - \tau)]^\alpha - [\rho - (\rho - \sigma)\tau]^\alpha|^p d\tau \\ & = \frac{1}{\alpha^p(\rho - \sigma)} \int_{\sigma}^{\rho} |u^\alpha - [\sigma + \rho - u]^\alpha|^p du \\ & = \frac{1}{\alpha^p(\rho - \sigma)} \int_{\sigma}^{\frac{\sigma+\rho}{2}} ([\sigma + \rho - u]^\alpha - u^\alpha)^p du \\ & \quad + \frac{1}{\alpha^p(\rho - \sigma)} \int_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^{\rho} (u^\alpha - [\sigma + \rho - u]^\alpha)^p du \\ & \leq \frac{1}{\alpha^p(\rho - \sigma)} \int_{\sigma}^{\frac{\sigma+\rho}{2}} ([\sigma + \rho - u]^{\alpha p} - u^{\alpha p}) du \\ & \quad + \frac{1}{\alpha^p(\rho - \sigma)} \int_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^{\rho} (u^{\alpha p} - [\sigma + \rho - u]^{\alpha p}) du \\ & = \frac{2}{\alpha^p(\rho - \sigma)(\alpha p + 1)} \left[\sigma^{\alpha p + 1} + \rho^{\alpha p + 1} - \frac{(\sigma + \rho)^{\alpha p + 1}}{2^{\alpha p}} \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

buda ispatı tamamlar. □

Bu kısımda öncelikle ana teoremdede kullanılacak olan diferansiyellenebilir fonksiyonlar için geçerli olan lemma verilecek daha sonra ise önceki çalışmaların genelleştirilmiş olan bazı trapezoid tipli eşitsizlikler verilecektir.

Lemma 4.19. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ olsun. Eğer $F' \in L[\sigma, \rho]$, ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[({}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})+}I_{\varphi}F(\rho) + ({}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})-}I_{\varphi}F(\sigma)) \right] \\ &= \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 \Phi(\tau)F' \left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho \right) d\tau - \int_0^1 \Phi(\tau)F' \left(\frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho \right) d\tau \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

burada $\Phi(\tau)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\Phi(\tau) = \int_{\tau}^1 \frac{\varphi \left(\frac{\rho - \sigma}{2} u \right)}{u} du \quad (4.21)$$

aynı zamanda $\Phi(0) = \Psi(1)$ eşitliği sağlanır.

İspat. Eşitlik iki kısımda ele alınır ve ilk kısım için kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 \Phi(\tau)F' \left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho \right) d\tau \\ &= -\frac{2}{\rho - \sigma} \Phi(\tau)F \left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho \right) \Big|_0^1 \\ &\quad - \frac{2}{\rho - \sigma} \int_0^1 \frac{\varphi \left(\frac{\rho - \sigma}{2} \tau \right)}{\tau} F \left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho \right) d\tau \\ &= \frac{2}{\rho - \sigma} \Psi(1)F(\rho) - \frac{2}{\rho - \sigma} ({}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})+}I_{\varphi}F(\rho)) \end{aligned} \quad (4.22)$$

olur ve benzer işlemlerle

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 \Phi(\tau)F' \left(\frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho \right) d\tau \\ &= -\frac{2}{\rho - \sigma} \Psi(1)F(\sigma) + \frac{2}{\rho - \sigma} ({}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})-}I_{\varphi}F(\sigma)) \end{aligned} \quad (4.23)$$

sonucu elde edilir. Elde edilen sonuçlar düzenlenirse

$$\frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)}(I_3 - I_4) = \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+} I_{\varphi} F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-} I_{\varphi} F(\sigma) \right] \quad (4.24)$$

istenilen sonuca varılır. İspat tamamlanır. \square

Sonuç 4.20. Lemma 4.19'un koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ fonksiyonu kullanılırsa (4.20) özdeşliği (2.5) özdeşliğine dönüşür.

Sonuç 4.21. Lemma 4.19'un koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (4.20) özdeşliği $\varkappa = \frac{\sigma+\rho}{2}$ olması durumunda [30] nolu çalışmanın Lemma 2'deki özdeşliğini verir.

Sonuç 4.22. Lemma 4.19'un koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa k -kesirli integraller için geçerli aşağıdaki önemli eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1} \Gamma_k(\alpha + k)}{(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+}^{\alpha, k} F(\rho) + I_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-}^{\alpha, k} F(\sigma) \right] \quad (4.25) \\ & = \frac{\rho - \sigma}{4} \left[\int_0^1 \left(1 - \tau^{\frac{\alpha}{k}}\right) F' \left(\frac{\tau}{2} \sigma + \frac{2-\tau}{2} \rho \right) d\tau - \int_0^1 \left(1 - \tau^{\frac{\alpha}{k}}\right) F' \left(\frac{2-\tau}{2} \sigma + \frac{\tau}{2} \rho \right) d\tau \right] \end{aligned}$$

Sonuç 4.23. Lemma 4.19'un koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp(-\frac{1-\alpha}{\alpha} \tau)$ fonksiyonu kullanılırsa $A = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\rho-\sigma}{2}$ olduğunda üstel çekirdekli kesirli integraller için aşağıdaki önemli özdeşlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1 - \alpha}{2[1 - \exp\{-A\}]} \left[\mathcal{I}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+}^{\alpha} F(\rho) + \mathcal{I}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-}^{\alpha} F(\sigma) \right] \quad (4.26) \\ & = \frac{\rho - \sigma}{4[1 - \exp\{-A\}]} \left[\int_0^1 (\exp\{-A\tau\} - \exp\{-A\}) F' \left(\frac{\tau}{2} \sigma + \frac{2-\tau}{2} \rho \right) d\tau \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 (\exp\{-A\tau\} - \exp\{-A\}) F' \left(\frac{2-\tau}{2} \sigma + \frac{\tau}{2} \rho \right) d\tau \right] \end{aligned}$$

Teorem 4.24. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ olsun. Eğer $|F'|$ konveks ise genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için

aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})^+} I_{\varphi} F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})^-} I_{\varphi} F(\sigma) \right] \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| d\tau \right) [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \end{aligned} \quad (4.27)$$

İspat. Lemma 4.19'da $|F'|$ 'nin konveksliğinden yararlanılarak çözümlenirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})^+} I_{\varphi} F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})^-} I_{\varphi} F(\sigma) \right] \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F' \left(\frac{\tau}{2} \sigma + \frac{2-\tau}{2} \rho \right) \right| d\tau + \int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F' \left(\frac{2-\tau}{2} \sigma + \frac{\tau}{2} \rho \right) \right| d\tau \right] \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left[\frac{\tau}{2} |F'(\sigma)| + \frac{2-\tau}{2} |F'(\rho)| \right] d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\Phi(\tau)| \left[\frac{2-\tau}{2} |F'(\sigma)| + \frac{\tau}{2} |F'(\rho)| \right] d\tau \right] \\ & = \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| d\tau \right) [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \end{aligned} \quad (4.28)$$

□

Sonuç 4.25. Teorem 4.24'de $\varphi(\tau) = \tau$ alınırsa (4.27) eşitsizliği [10] nolu çalışmanın Teorem 2.3'deki eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.26. Teorem 4.24'de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa (2.43) eşitsizliğinin sağ tarafını içeren aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\rho - \sigma)^\alpha} \left[J_{(\frac{\sigma+\rho}{2})^+}^\alpha F(\rho) + J_{(\frac{\sigma+\rho}{2})^-}^\alpha F(\sigma) \right] \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \frac{\alpha}{\alpha+1} \left[\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Sonuç 4.27. Teorem 4.24’de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ alınırsa k -kesirli integraller için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ kısmını içeren aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+}^{\alpha,k} F(\rho) + I_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-}^{\alpha,k} F(\sigma) \right] \right| \quad (4.30) \\ & \leq \frac{\rho-\sigma}{2} \left(\frac{\alpha+1-k}{\alpha+1} \right) \left[\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right] \end{aligned}$$

Sonuç 4.28. Teorem 4.24’de $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau)$, alınırsa $A = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\rho-\sigma}{2}$ iken üstel çekirdekli kesirli integraller için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ kısmı için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1-\alpha}{2[1-\exp\{-A\}]} \left[\mathcal{I}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+}^{\alpha} F(\rho) + \mathcal{I}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-}^{\alpha} F(\sigma) \right] \right| \quad (4.31) \\ & \leq \frac{\rho-\sigma}{2} \left(\frac{1-\exp\{-A\} - A \exp\{-A\}}{A(1-\exp\{-A\})} \right) \left[\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right] \end{aligned}$$

Teorem 4.29. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow R$ tanımlanan fonksiyon (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ olsun. Eğer $q > 1$ iken $|F'|^q$ konveks ise kesirli integral operatöleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[I_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+} \varphi F(\rho) + I_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-} \varphi F(\sigma) \right] \right| \\ & \leq \frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq \frac{\rho-\sigma}{2^{\frac{2}{q}}\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \quad (4.32) \end{aligned}$$

burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir. Ψ ve Φ fonksiyonları da yukarıda tanımlanmıştır.

İspat. Lemma 4.19'a iyi bilinen Hölder eşitsizliği uygulanır ve $|F'|^q$ konveksliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+} I_{\varphi} F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-} I_{\varphi} F(\sigma) \right] \right| \quad (4.33) \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F' \left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho \right) \right| d\tau + \int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F' \left(\frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho \right) \right| d\tau \right] \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (4.32)'deki ilk eşitsizlik ispatlanmış olur. \square

(4.32)'deki ikinci eşitsizliğin ispatı da (4.93) eşitsizliğinde açıkça görülür.

Sonuç 4.30. Teorem 4.29'da $\varphi(\tau) = \tau$, alınrsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} F(\tau) d\tau \right| \quad (4.34) \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4} \left(\frac{4}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|].
\end{aligned}$$

Sonuç 4.31. Teorem 4.29'da $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ alınrsa (2.43) eşitsiliğinin sağ kısmı için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\rho - \sigma)^{\alpha}} \left[J_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+}^{\alpha} F(\rho) + J_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-}^{\alpha} F(\sigma) \right] \right| \quad (4.35) \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4} \left(\frac{1}{p\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4} \left(\frac{4}{p\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|]
\end{aligned}$$

Sonuç 4.32. Teorem 4.29’da $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa k -kesirli integraller için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı için önemli olan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+}^{\alpha,k} F(\rho) + I_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-}^{\alpha,k} F(\sigma) \right] \right| \quad (4.36) \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{4} \left(\frac{k}{p\alpha+k} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{4} \left(\frac{4k}{p\alpha+k} \right)^{\frac{1}{p}} [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|].
\end{aligned}$$

İspat. $w \in (0, 1]$ ve $\forall \tau_1, \tau_2 \in [0, 1]$, iken $|\tau_1^w - \tau_2^w| \leq |\tau_1 - \tau_2|^w$ eşitsizliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\Phi(\tau)|^p d\tau &= \left[\frac{1}{\Gamma_k(\alpha+k)} \left(\frac{\rho-\sigma}{2} \right)^{\frac{\alpha}{k}} \right]^p \int_0^1 (1-\tau^{\frac{\alpha}{k}})^p d\tau \quad (4.37) \\
&\leq \left[\frac{1}{\Gamma_k(\alpha+k)} \left(\frac{\rho-\sigma}{2} \right)^{\frac{\alpha}{k}} \right]^p \int_0^1 (1-\tau)^{\frac{\alpha}{k}p} d\tau \\
&= \left[\frac{1}{\Gamma_k(\alpha+k)} \left(\frac{\rho-\sigma}{2} \right)^{\frac{\alpha}{k}} \right]^p \frac{k}{p\alpha+k}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. İspat tamamlanır. \square

Sonuç 4.33. Teorem 4.29’da $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau)$ alınırsa $A = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\rho-\sigma}{2}$ iken, üstel çekirdekli kesirli integraller için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ kısmı ile ilgili aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1-\alpha}{2[1-\exp\{-A\}]} \left[\mathcal{I}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+}^{\alpha} F(\rho) + \mathcal{I}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-}^{\alpha} F(\sigma) \right] \right| \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{4} \left(\int_0^1 [\exp\{-A\tau\} - \exp\{-A\}]^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.38) \\
& \quad \times \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{2^{\frac{2}{q}}} \left(\int_0^1 [\exp\{-A\tau\} - \exp\{-A\}]^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|]
\end{aligned}$$

Teorem 4.34. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan fonksiyon (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ olsun. Eğer $|F'|^q$ konveks ise $q \geq 1$, iken genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+} I_{\varphi} F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-} I_{\varphi} F(\sigma) \right] \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{2^{2+\frac{1}{q}} \Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left[(B_5 |F'(\sigma)|^q + B_6 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} + (B_6 |F'(\sigma)|^q + B_5 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

burada Ψ ve Φ daha önce tanımlandıkları biçimde ifade edilir. B_5 ve B_6 sabitleri de aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$B_5 = \int_0^1 |\Phi(\tau)| \tau d\tau \text{ and } B_6 = \int_0^1 |\Phi(\tau)| (2 - \tau) d\tau \quad (4.40)$$

İspat. $q = 1$ olması durumunda Teorem 4.24'de açıkça görülür

$q > 1$, iken Lemma 4.19'daki özdeşliğe power mean eşitsizliği uygularsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+} I_{\varphi} F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-} I_{\varphi} F(\sigma) \right] \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F' \left(\frac{\tau}{2} \sigma + \frac{2-\tau}{2} \rho \right) \right| d\tau + \int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F' \left(\frac{2-\tau}{2} \sigma + \frac{\tau}{2} \rho \right) \right| d\tau \right] \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)|^q d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left[\left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F' \left(\frac{\tau}{2} \sigma + \frac{2-\tau}{2} \rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F' \left(\frac{2-\tau}{2} \sigma + \frac{\tau}{2} \rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

ifadesine ulaşılır. Bu eşitsizlikde $|F'|^q$ konveksliğinden yararlanılırsa

$$\left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+} I_{\varphi} F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-} I_{\varphi} F(\sigma) \right] \right| \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)|^q d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left[\left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left[\frac{\tau}{2} |F'(\sigma)|^q + \frac{2-\tau}{2} |F'(\rho)|^q \right] d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left[\frac{2-\tau}{2} |F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q \frac{\tau}{2} \right] d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= \frac{\rho - \sigma}{2^{2+\frac{1}{q}}\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)|^q d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left[(B_5 |F'(\sigma)|^q + B_6 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} + (B_6 |F'(\sigma)|^q + B_5 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. İspat tamamlanır. \square

Sonuç 4.35. Teorem 4.34'ün koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ fonksiyonu kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \int_{\sigma}^{\rho} F(\tau) d\tau \right| \\
&\leq \frac{\rho - \sigma}{8} \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 5|F'(\rho)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{5|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq \frac{6^{1-\frac{1}{q}}}{8} (\rho - \sigma) [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Sonuç 4.36. Teorem 4.34'ün koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (2.43) eşitsizliğinin sağ kısmı ile ilgili aşağıdaki önemli eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\rho - \sigma)^\alpha} \left[J_{(\frac{\sigma+\rho}{2})^+}^\alpha F(\rho) + J_{(\frac{\sigma+\rho}{2})^-}^\alpha F(\sigma) \right] \right| \tag{4.44} \\
&\leq \frac{\rho - \sigma}{2^{2+\frac{1}{q}}} \frac{\alpha}{\alpha+1} \left[\left(\frac{(\alpha+1)}{2(\alpha+2)} |F'(\sigma)|^q + \frac{(3\alpha+7)}{2(\alpha+2)} |F'(\rho)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{(3\alpha+7)}{2(\alpha+2)} |F'(\sigma)|^q + \frac{(\alpha+1)}{2(\alpha+2)} |F'(\rho)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

Sonuç 4.37. Teorem 4.34'ün koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^k}{k\Gamma_k(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa k -kesirli integraller için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ kısmı ile ilgili aşağıdaki

önemli eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1} \Gamma_k(\alpha+k)}{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+}^{\alpha,k} F(\rho) + I_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^-}^{\alpha,k} F(\sigma) \right] \right| \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{2^{2+\frac{1}{q}}} \left(\frac{\alpha}{\alpha+k} \right) \left[\left(\frac{\alpha+k}{2(\alpha+2k)} |F'(\sigma)|^q + \frac{(3\alpha+7k)}{2(\alpha+2k)} |F'(\rho)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{(3\alpha+7k)}{2(\alpha+2k)} |F'(\sigma)|^q + \frac{\alpha+k}{2(\alpha+2k)} |F'(\rho)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \quad (4.45)
\end{aligned}$$

İspat. Sonuç 4.32'nin ispatına benzer şekilde ispatlanır. \square

Sonuç 4.38. Teorem 4.34'ün koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau\right)$, fonksiyonu kullanılırsa $A = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\rho-\sigma}{2}$ iken, üstel çekirdekli kesirli integraller için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ kısmı ile ilgili aşağıdaki önemli eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1-\alpha}{2[1-\exp\{-A\}]} \left[\mathcal{I}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+}^{\alpha} F(\rho) + \mathcal{I}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^-}^{\alpha} F(\sigma) \right] \right| \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{2^{2+\frac{1}{q}}} \left(\frac{1-\exp\{-A\} - A \exp\{-A\}}{A(1-\exp\{-A\})} \right) \quad (4.46) \\
& \quad \times \left[(B_7 |F'(\sigma)|^q + B_8 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} + (B_8 |F'(\sigma)|^q + B_7 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

burada B_7 ve B_8 değerleri sırasıyla

$$B_7 = \frac{2 - 2A \exp\{-A\} - 2 \exp\{-A\} - A^2 \exp\{-A\}}{2A(1 - \exp\{-A\} - A \exp\{-A\})} \quad (4.47)$$

ve

$$B_8 = \frac{-2 + 4A - 2A \exp\{-A\} + 2 \exp\{-A\} - 3A^2 \exp\{-A\}}{2A(1 - \exp\{-A\} - A \exp\{-A\})} \quad (4.48)$$

olarak ifade edilir.

Sonuç 4.39. Corollary 4.38'de $\alpha \rightarrow 1$ iken $A \rightarrow 0$ ise

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{1 - \exp\{-A\} - A \exp\{-A\}}{A(1 - \exp\{-A\})} = \frac{1}{2} \quad (4.49)$$

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{2 - 2A \exp\{-A\} - 2 \exp\{-A\} - A^2 \exp\{-A\}}{2A(1 - \exp\{-A\} - A \exp\{-A\})} = \frac{1}{3} \quad (4.50)$$

ve

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{-2 + 4A - 2A \exp\{-A\} + 2 \exp\{-A\} - 3A^2 \exp\{-A\}}{2A(1 - \exp\{-A\}) - A \exp\{-A\}} = \frac{5}{3} \quad (4.51)$$

sonuçları elde edilir. Böylece (4.46) eşitsizliği (4.43) eşitsizliğine dönüşür.

Bu kısımda ilk olarak trapezoid eşitliğinin farklı sınır değerli kesirli integral ile ifadesi verilecektir. Daha sonra da önceki çalışmaların hangilerinin genelleştirdiği ve elde edilen yeni sonuçlar verilecektir.

Lemma 4.40. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow R$ tanımlı F fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ dir. Eğer $F' \in L[\sigma, \rho]$, ise genelleştirilmiş integral operatörleri için aşağıdaki özdeşlik sağlanır.

$$\begin{aligned} & \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma+}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + {}_{\rho-}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 \Psi(\tau) F' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) d\tau \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 \Psi(\tau) F' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) d\tau \right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

burada $\Psi(\tau)$ fonksiyonu yukarıda (3.33) nolu şekilde tanımlanmıştır ve $\Psi(0) = \Phi(1)$.

İspat. Kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 \Psi(\tau) F' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) d\tau \\ &= -\frac{2}{\rho - \sigma} \Psi(\tau) F \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) \Big|_0^1 \\ & \quad - \frac{2}{\rho - \sigma} \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} F \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) d\tau \\ &= \frac{2}{\rho - \sigma} \Psi(1) F(\rho) - \frac{2}{\rho - \sigma} {}_{\rho-}I_{\varphi}F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

sonucu ve benzer şekildeki işlemler ile

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 \Psi(\tau) F' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) d\tau \\ &= -\frac{2}{\rho-\sigma} \Psi(1) F(\sigma) + \frac{2}{\rho-\sigma} \sigma^+ I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

sonucu elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen sonuca varılır.

$$\begin{aligned} &\frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)} (I_3 - I_4) \\ &= \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[\sigma^+ I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) + \rho^- I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.55)$$

İspat tamamlanır. □

Sonuç 4.41. Lemma 4.40'ın koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} &\frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{\rho-\sigma} \int_{\sigma}^{\rho} F(x) dx \\ &= \frac{\rho-\sigma}{4} \left[\int_0^1 \tau F' \left(\frac{1-\tau}{2} \sigma + \frac{1+\tau}{2} \rho \right) d\tau + \int_0^1 \tau F' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) d\tau \right] \end{aligned} \quad (4.56)$$

Sonuç 4.42. Lemma 4.40'ın koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} &\frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\rho-\sigma)^{\alpha}} \left[\sigma^+ J^{\alpha} F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) + \rho^- J^{\alpha} \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \right] \\ &= \frac{\rho-\sigma}{4} \int_0^1 \tau^{\alpha} F' \left(\frac{1-\tau}{2} \sigma + \frac{1+\tau}{2} \rho \right) d\tau + \int_0^1 \tau^{\alpha} F' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) d\tau \end{aligned} \quad (4.57)$$

Sonuç 4.43. Lemma 4.40'ın koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} &\frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1} \Gamma_k(\alpha+k)}{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \\ &\quad \times \left[I_{\sigma^+,k}^{\alpha} F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) + I_{\rho^-,k}^{\alpha} \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \right] \\ &= \frac{\rho-\sigma}{4} \left[\int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{k}-1} F' \left(\frac{1-\tau}{2} \sigma + \frac{1+\tau}{2} \rho \right) d\tau \right. \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$+ \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{k}-1} F' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) d\tau \Bigg]$$

Teorem 4.44. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow R$ tanımlı F fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ dir. Eğer $|F'|$ konveks ise genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma^+} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + {}_{\rho^-} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| d\tau \right) [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \end{aligned} \quad (4.59)$$

İspat. Lemma 4.40 eşitliği ve $|F'|$ nin konveksliği göz önüne alınarak gerekli işlemler uygulanırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma^+} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + {}_{\rho^-} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F' \left(\frac{1-\tau}{2} \sigma + \frac{1+\tau}{2} \rho \right) \right| d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) \right| d\tau \right] \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left[\frac{1-\tau}{2} |F'(\sigma)| + \frac{1+\tau}{2} |F'(\rho)| \right] d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\Psi(\tau)| \left[\frac{1+\tau}{2} |F'(\sigma)| + \frac{1-\tau}{2} |F'(\rho)| \right] d\tau \right] \\ & = \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| d\tau \right) [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \end{aligned} \quad (4.60)$$

İspat tamamlanır. □

Teorem 4.45. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow R$ tanımlı F fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ dir. Eğer $q < 1$ iken $|F'|^q$ konveks ise genelleştirilmiş

kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2^{\frac{2}{q}}\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|]
\end{aligned} \tag{4.61}$$

burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve Λ, Δ fonksiyonlarının (3.21) eşitliklerindeki tanımları geçerlidir.

İspat. Hölder eşitsizliği ve $|F'|^q$ konveksiliğinden yararlanılarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F'\left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho\right) \right| d\tau \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F'\left(\frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho\right) \right| d\tau \right] \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Böylece (4.61) eşitsizliğinin ilk kısmı ispatlanmış olur. Eşitsizliğin ikinci kısmının ispatı (4.93) eşitsizliğinden açıkça elde edilir. \square

Teorem 4.46. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow R$ tanımlı F fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ dır. Eğer $q \geq 1$ iken $|F'|^q$ konveks ise genelleştirilmiş

kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[\sigma^+ I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \rho^- I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2^{2+\frac{1}{q}} \Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left[(B_5 |F'(\sigma)|^q + B_6 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} + (B_6 |F'(\sigma)|^q + B_5 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned} \tag{4.63}$$

burada kullanılan Λ fonksiyonu (3.21) tanımdaki haliyle, B_5 ve B_6 sabitleride (4.40) nolu eşitlikte tanımlıdır.

İspat. $q = 1$ olduğu durum, Teorem 4.44'den açıkça görülür. $q > 1$, durumunda Lemma 4.40'daki eşitliğini, power-mean eşitsizliği kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[\sigma^+ I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \rho^- I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) \right| d\tau \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) \right| d\tau \right] \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)|^q d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left[\left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned} \tag{4.64}$$

eşitsizliğelde edilir. Bu eşitsizlikde $|F'|^q$, nin konveksliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[\sigma^+ I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \rho^- I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Lambda(\tau)|^q d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(\int_0^1 |\Lambda(\tau)| \left[\frac{1-\tau}{2} |F'(\sigma)|^q + \frac{1+\tau}{2} |F'(\rho)|^q \right] d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 |\Lambda(\tau)| \left[\frac{1+\tau}{2} |F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q \frac{1-\tau}{2} \right] d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = \frac{\rho - \sigma}{2^{2+\frac{1}{q}} \Lambda(1)} \left(\int_0^1 |\Lambda(\tau)|^q d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left[(B_5 |F'(\sigma)|^q + B_6 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} + (B_6 |F'(\sigma)|^q + B_5 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.İspat tamamlanır. eşitsizliğelde edilir. Bu eşitsizlikde $|F'|^q$, nin konveksliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma^+} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + {}_{\rho^-} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \right| \quad (4.66) \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)|^q d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left[\left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left[\frac{1-\tau}{2} |F'(\sigma)|^q + \frac{1+\tau}{2} |F'(\rho)|^q \right] d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left[\frac{1+\tau}{2} |F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q \frac{1-\tau}{2} \right] d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = \frac{\rho - \sigma}{2^{2+\frac{1}{q}} \Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)|^q d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left[(B_5 |F'(\sigma)|^q + B_6 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} + (B_6 |F'(\sigma)|^q + B_5 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.İspat tamamlanır. □

Bu kısımda trapezoid eşitliğinin genelleştirilmiş kesirli integraller için farklı bir karşılığı ve sonuçları verilecektir. Öncelikle kullanılan ϖ ve Ω fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\varpi(\tau) = \int_{\tau}^1 \frac{\varphi((\varkappa - \sigma)u)}{u} du < \infty, \quad \Omega(\tau) = \int_{\tau}^1 \frac{\varphi((\rho - \varkappa)u)}{u} du < \infty \quad (4.67)$$

Lemma 4.47. $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan F fonksiyonu I° üzerinde mutlak sürekli $\sigma, \rho \in I^\circ$ ve $\sigma < \rho$ olsun. Eğer $F' \in L_1([\sigma, \rho])$ ise aşağıdaki özdeşlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega(0)F(\rho) + \varpi(0)F(\sigma)}{\rho - \sigma} - \frac{1}{\rho - \sigma} [\varkappa^+ I_\varphi F(\rho) + \varkappa^- I_\varphi F(\sigma)] \\ &= \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} \int_0^1 \Omega(\tau) F'(\tau\varkappa + (1-\tau)\rho) d\tau - \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} \int_0^1 \varpi(\tau) F'(\tau\varkappa + (1-\tau)\sigma) d\tau \end{aligned} \quad (4.68)$$

İspat. Eşitliğin sağ kısmını ele alalım

$$\begin{aligned} I &= \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} \int_0^1 \Omega(\tau) F'(\tau\varkappa + (1-\tau)\rho) d\tau \\ &\quad - \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} \int_0^1 \varpi(\tau) F'(\tau\varkappa + (1-\tau)\sigma) d\tau \end{aligned} \quad (4.69)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlik iki kısma ayrılır ve ilk kısım için kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} \left[\Omega(\tau) F(\tau\varkappa + (1-\tau)\rho) \frac{1}{\varkappa - \rho} \Big|_0^1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varkappa - \rho} \int_0^1 \frac{\varphi((\rho - \varkappa)\tau)}{\tau} F(\tau\varkappa + (1-\tau)\rho) d\tau \right] \\ &= \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} \left[\frac{\Omega(0)F(\rho)}{\rho - \varkappa} - \frac{1}{\rho - \varkappa} \int_\varkappa^\rho \frac{\varphi(\rho - s)}{\rho - s} F(s) ds \right] \\ &= \frac{\Omega(0)F(\rho) - \varkappa^+ I_\varphi F(\rho)}{\rho - \sigma} \end{aligned} \quad (4.70)$$

sonucu elde edilir ve benzer işlemlerle

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} \int_0^1 \varpi(\tau) F'(\tau\varkappa + (1-\tau)\sigma) d\tau \\ &= \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} \left[\frac{\varpi(0)F(\sigma)}{\varkappa - \sigma} - \frac{1}{\varkappa - \sigma} \int_\sigma^\varkappa \frac{\varphi(s - \sigma)}{s - \sigma} F(s) ds \right] \\ &= \frac{\varpi(0)F(\sigma) - \varkappa^- I_\varphi F(\sigma)}{\rho - \sigma} \end{aligned} \quad (4.71)$$

sonucu elde edilir. (4.70) eşitliğinden (4.71) eşitliği çıkartılırsa

$$I_1 - I_2 = \frac{\Omega(0)F(\rho) + \varpi(0)F(\sigma)}{\rho - \sigma} - \frac{1}{\rho - \sigma} [\mathcal{I}_{\varkappa^+} F(\rho) + \mathcal{I}_{\varkappa^-} F(\sigma)] \quad (4.72)$$

istenilen sonuç elde edilir. \square

Sonuç 4.48. Eğer Lemma 4.47’de $\varphi(\tau) = \tau$ alınırsa Lemma 4.47, [36] nolu çalışmanın Lemma 1’e denk olur.

Sonuç 4.49. Eğer Lemma 4.47’de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa Lemma 4.47, [37] nolu çalışmanın Lemma 1’e denk olur.

Sonuç 4.50. Eğer Lemma 4.47’de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{k\Gamma_k(\alpha)}$ alınırsa Lemma 4.47’den aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}+1}}{(\rho - \sigma)\Gamma_k(\alpha + k)} \int_0^1 \left(1 - \tau^{\frac{\alpha}{k}}\right) F'(\tau\varkappa + (1 - \tau)\rho) d\tau \\ & - \frac{(\varkappa - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}+1}}{(\rho - \sigma)\Gamma_k(\alpha + k)} \int_0^1 \left(1 - \tau^{\frac{\alpha}{k}}\right) F'(\tau\varkappa + (1 - \tau)\sigma) d\tau \\ & = \frac{(\rho - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}} F(\rho) + (\varkappa - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}} F(\sigma)}{(\rho - \sigma)\Gamma_k(\alpha + k)} - \frac{1}{\rho - \sigma} \left[I_{\varkappa^-, k}^\alpha F(\sigma) + I_{\varkappa^+, k}^\alpha F(\rho) \right] \end{aligned} \quad (4.73)$$

Teorem 4.51. $F : I = [\sigma, \rho] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan F fonksiyonu I° üzerinde mutlak sürekli $\sigma, \rho \in I^\circ$ ve $\sigma < \rho$ olsun. Eğer $F' \in L_1([\sigma, \rho])$ iken $|F'|$, $[\sigma, \rho]$ aralığı üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Omega(0)F(\rho) + \varpi(0)F(\sigma)}{\rho - \sigma} - \frac{1}{\rho - \sigma} [\mathcal{I}_{\varkappa^+} F(\rho) + \mathcal{I}_{\varkappa^-} F(\sigma)] \right| \\ & \leq \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} |F'(\varkappa)| \int_0^1 |\Omega(\tau)| \tau d\tau + \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} |F'(\varkappa)| \int_0^1 |\varpi(\tau)| \tau d\tau \\ & \quad + \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} |F'(\rho)| \int_0^1 |\Omega(\tau)| (1 - \tau) d\tau + \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} |F'(\sigma)| \int_0^1 |\varpi(\tau)| (1 - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.74)$$

İspat. (4.68) eşitliğinden ve $|F'|$ 'i $[\sigma, \rho]$ kapalı aralığı üzerinde konveksliğinden yararlanılarak çözüm yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Omega(0)F(\rho) + \varpi(0)F(\sigma)}{\rho - \sigma} - \frac{1}{\rho - \sigma} [{}_{\varkappa^+}I_{\varphi}F(\rho) + {}_{\varkappa^-}I_{\varphi}F(\sigma)] \right| \\
& \leq \left| \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} \int_0^1 \Omega(\tau) F'(\tau\varkappa + (1 - \tau)\rho) d\tau - \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} \int_0^1 \varpi(\tau) F'(\tau\varkappa + (1 - \tau)\sigma) d\tau \right| \\
& \leq \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} \int_0^1 |\Omega(\tau)| |F'(\tau\varkappa + (1 - \tau)\rho)| d\tau \\
& \quad + \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} \int_0^1 |\varpi(\tau)| |F'(\tau\varkappa + (1 - \tau)\sigma)| d\tau \tag{4.75} \\
& \leq \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} \int_0^1 |\Omega(\tau)| (\tau |F'(\varkappa)| + (1 - \tau) |F'(\rho)|) d\tau \\
& \quad + \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} \int_0^1 |\varpi(\tau)| (\tau |F'(\varkappa)| + (1 - \tau) |F'(\sigma)|) d\tau \\
& \leq \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} |F'(\varkappa)| \int_0^1 |\Omega(\tau)| \tau d\tau + \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} |F'(\varkappa)| \int_0^1 |\varpi(\tau)| \tau d\tau \\
& \quad + \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} |F'(\rho)| \int_0^1 |\Omega(\tau)| (1 - \tau) d\tau + \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} |F'(\sigma)| \int_0^1 |\varpi(\tau)| (1 - \tau) d\tau.
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. İspat tamamlanır. \square

Sonuç 4.52. Teorem 4.51 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ fonksiyonu kullanılırsa Teorem 3.12, [36] nolu çalışmanın Teorem 4'e denk olur.

Sonuç 4.53. Teorem 4.51 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\rho)(\rho - \varkappa)^\alpha + F(\sigma)(\varkappa - \sigma)^\alpha}{\rho - \sigma} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\rho - \sigma} [J_{\varkappa^-}F(\sigma) + J_{\varkappa^+}F(\rho)] \right| \\
& \leq \frac{\alpha}{2(\alpha + 2)} \left[\frac{(\rho - \varkappa)^{\alpha+1} + (\varkappa - \sigma)^{\alpha+1}}{\rho - \sigma} \right] |F'(\varkappa)| \tag{4.76} \\
& \quad + \frac{\alpha^2 + 3\alpha}{2(\alpha + 2)} \left[\frac{(\rho - \varkappa)^{\alpha+1} |F'(\rho)| + (\varkappa - \sigma)^{\alpha+1} |F'(\sigma)|}{\rho - \sigma} \right]
\end{aligned}$$

Sonuç 4.54. Teorem 4.51 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{k\Gamma_k(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \frac{(\rho - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}+1}}{(\rho - \sigma)\Gamma_k(\alpha + k)} \int_0^1 \left(1 - \tau^{\frac{\alpha}{k}}\right) F'(\tau\varkappa + (1 - \tau)\rho) d\tau \\
& - \frac{(\varkappa - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}+1}}{(\rho - \sigma)\Gamma_k(\alpha + k)} \int_0^1 \left(1 - \tau^{\frac{\alpha}{k}}\right) F'(\tau\varkappa + (1 - \tau)\sigma) d\tau \\
\leq & \frac{(\rho - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}+1} + (\varkappa - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}+1}}{(\rho - \sigma)\Gamma_k(\alpha + k)} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2k}\right) |F'(\varkappa)| \\
& + \frac{1}{(\rho - \sigma)\Gamma_k(\alpha + k)} \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\alpha + k} + \frac{k}{\alpha + 2k}\right) \\
& \times \left[(\rho - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}+1} |F'(\rho)| + (\varkappa - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}+1} |F'(\sigma)| \right]
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Teorem 4.55. $F : I = [\sigma, \rho] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan F fonksiyonu I° üzerinde mutlak süreklili $\sigma, \rho \in I^\circ$ ve $\sigma < \rho$ olsun. Eğer $F' \in L_1([\sigma, \rho])$, iken $q > 1$, durumunda $|F'|^q$, $[\sigma, \rho]$, aralığı üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Omega(0)F(\rho) + \varpi(0)F(\sigma)}{\rho - \sigma} - \frac{1}{\rho - \sigma} [\varkappa^+ I_\varphi F(\rho) + \varkappa^- I_\varphi F(\sigma)] \right| \\
\leq & \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} \left(\int_0^1 |\Omega(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|F'(\varkappa)|^q + |F'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} \left(\int_0^1 |\varpi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|F'(\varkappa)|^q + |F'(\sigma)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat. Lemma 4.47'deki eşitliğe Hölder's eşitsizliğinden yararlanılarak işlem yapılırsa istenilen sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Omega(0)F(\rho) + \varpi(0)F(\sigma)}{\rho - \sigma} - \frac{1}{\rho - \sigma} [\varkappa^+ I_\varphi F(\rho) + \varkappa^- I_\varphi F(\sigma)] \right| \\
\leq & \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} \left(\int_0^1 |\Omega(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |F'(\tau\varkappa + (1 - \tau)\rho)|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} \left(\int_0^1 |\varpi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |F'(\tau\varkappa + (1 - \tau)\sigma)|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq & \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} \left(\int_0^1 |\Omega(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (\tau |F'(\varkappa)|^q + (1 - \tau) |F'(\rho)|^q) d\tau \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} \left(\int_0^1 |\varpi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (\tau |F'(\varkappa)|^q + (1-\tau) |F'(\sigma)|^q) d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{\rho - \varkappa}{\rho - \sigma} \left(\int_0^1 |\Omega(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|F'(\varkappa)|^q + |F'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{\varkappa - \sigma}{\rho - \sigma} \left(\int_0^1 |\varpi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|F'(\varkappa)|^q + |F'(\sigma)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.79}
\end{aligned}$$

□

Sonuç 4.56. Teorem 4.55 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ fonksiyonu kullanılırsa Teorem 4.55, [36] nolu çalışmanın Teorem 5'ine denk olur.

Sonuç 4.57. Teorem 4.55 koşulları altına $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(\rho)(\rho - \varkappa)^\alpha + F(\sigma)(\varkappa - \sigma)^\alpha}{\rho - \sigma} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\rho - \sigma} [J_{\varkappa^-} F(\sigma) + J_{\varkappa^+} F(\rho)] \right| \\
& \leq \left(\frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} \right) \frac{(\rho - \varkappa)^{\alpha+1}}{(\rho - \sigma)} \left(\frac{|F'(\varkappa)|^q + |F'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} \right) \frac{(\varkappa - \sigma)^{\alpha+1}}{(\rho - \sigma)} \left(\frac{|F'(\varkappa)|^q + |F'(\sigma)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.80}
\end{aligned}$$

4.2. İKİNCİ TÜREVİNİN MUTLAK DEĞERİ KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN TRAPEZOİD EŞİTSİZLİKLERİ

Bu kısımda ikinci türevinin mutlak değeri konveks olan fonksiyonlar için bazı trapezoid eşitsizlikleri verilecektir.

Lemma 4.58. $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan F fonksiyonu I° aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon ve $\sigma, \rho \in I^\circ$, $\sigma < \rho$ iken $F'' \in L([\sigma, \rho])$ ise aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}
& \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[\rho_- I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \sigma_+ I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \\
& = \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Psi(1)} \int_0^1 \nabla(\tau) \left[F'' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) + F'' \left(\frac{1-\tau}{2} \sigma + \frac{1+\tau}{2} \rho \right) \right] d\tau \tag{4.81}
\end{aligned}$$

yukarıdaki eşitlikte kullanılan fonksiyonların gösterimleri aşağıdaki şekildedir.

$$\nabla(\tau) = \int_{\tau}^1 \Psi(s) ds, \quad \Psi(s) = \int_0^s \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}u\right)}{u} du. \quad (4.82)$$

İspat. İlk olarak integral kısmını ele alalım.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \nabla(\tau) F'' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) d\tau + \int_0^1 \nabla(\tau) F'' \left(\frac{1-\tau}{2} \sigma + \frac{1+\tau}{2} \rho \right) d\tau \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (4.83)$$

İntegrali I_1 ve I_2 şeklinde iki kısım olarak parçaya ayıralım ve ilk kısım için iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \nabla(\tau) F'' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) d\tau \\ &= \nabla(\tau) \frac{2}{\rho-\sigma} F' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) \Big|_0^1 \\ &\quad - \frac{2}{\rho-\sigma} \int_0^1 \Psi(\tau) F' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) d\tau \\ &= \nabla(0) \frac{2}{\rho-\sigma} F' \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) - \frac{2}{\rho-\sigma} \left[-\Psi(\tau) \frac{2}{\rho-\sigma} F \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) \Big|_0^1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\rho-\sigma} \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} F \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) d\tau \right] \\ &= \nabla(0) \frac{2}{\rho-\sigma} F' \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) + \Psi(1) \frac{4}{(\rho-\sigma)^2} F(\sigma) \\ &\quad - \frac{4}{(\rho-\sigma)^2} \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} F \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) d\tau \\ &= \nabla(0) \frac{2}{\rho-\sigma} F' \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) + \Psi(1) \frac{4}{(\rho-\sigma)^2} F(\sigma) \\ &\quad - \frac{4}{(\rho-\sigma)^2} \int_{\frac{\sigma}{2}}^{\frac{\sigma+\rho}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{\sigma+\rho}{2}-\varkappa\right)}{\frac{2}{\rho-\sigma}\left(\frac{\sigma+\rho}{2}-\varkappa\right)} F(\varkappa) \frac{2}{\rho-\sigma} d\varkappa \\ &= \nabla(0) \frac{2}{\rho-\sigma} F' \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) + \frac{4}{(\rho-\sigma)^2} \left[\Psi(1) F(\sigma) - \sigma_+ I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.84)$$

sonucu elde edilir. Benzer işlemler I_2 içinde yapılırsa

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \nabla(\tau) F'' \left(\frac{1-\tau}{2} \rho + \frac{1+\tau}{2} \sigma \right) d\tau \\ &= -\nabla(0) \frac{2}{\rho - \sigma} F' \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \frac{4}{(\rho - \sigma)^2} \left[\Psi(1) F(\rho) - {}_{\rho-} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.85)$$

sonucu elde edilir. I_1 ve I_2 sonuçları yerine koyulup $\frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Psi(1)}$ ile çarpılırsa istenilen sonuç elde edilir. \square

Sonuç 4.59. Eğer Lemma 4.58’de $\varphi(\tau) = \tau$ olarak seçilirse Lemma 4.58’deki eşitlik Lemma 1 eşitliğini sağlar [47].

Sonuç 4.60. Eğer Lemma 4.58’de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} &\frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha + 1)}{(\rho - \sigma)^\alpha} \left[J_{\rho-}^\alpha F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + J_{\sigma+}^\alpha F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \\ &= \frac{(\rho - \sigma)^2}{8(\alpha + 1)} \int_0^1 (1 - \tau^{\alpha+1}) \left[F'' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) + F'' \left(\frac{1-\tau}{2} \sigma + \frac{1+\tau}{2} \rho \right) \right] d\tau \end{aligned} \quad (4.86)$$

Teorem 4.61. $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan F fonksiyonu I° aralığında ikinci dereceden diferansiyellenebilir bir fonksiyon $\sigma, \rho \in I^\circ$, ve $\sigma < \rho$. Eğer $|F''|$, $[\sigma, \rho]$ da konveks ise genelleştirilmiş kesirli integral operatörler için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{\Psi(1)} \left[{}_{\rho-} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + {}_{\sigma+} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \right| \\ &\leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 \nabla(\tau) d\tau \right] \left[\frac{|F''(\sigma)| + |F''(\rho)|}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.87)$$

burada $\Delta(\tau)$ fonksiyonunun (3.21)’deki tanımı geçerlidir.

İspat. Lemma 4.58’deki eşitliğin mutlak değeri alınır ve $|F''|$ konveksliğinden yararlanılarak çözüm yapılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

$$\left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{\Psi(1)} \left[{}_{\rho-} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + {}_{\sigma+} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \right| \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Psi(1)} \left| \int_0^1 \nabla(\tau) F'' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \nabla(\tau) F'' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) d\tau \right| \\
&\leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\nabla(\tau)| \left| F'' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) \right| d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 |\nabla(\tau)| \left| F'' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) \right| d\tau \right] \\
&\leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\nabla(\tau)| \left(\frac{1+\tau}{2} |F''(\sigma)| + \frac{1-\tau}{2} |F''(\rho)| \right) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 |\nabla(\tau)| \left(\frac{1-\tau}{2} |F''(\sigma)| + \frac{1+\tau}{2} |F''(\rho)| \right) d\tau \right] \\
&\leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{16\Psi(1)} \left[|F''(\sigma)| \int_0^1 |\nabla(\tau)| (1+\tau) d\tau + |F''(\rho)| \int_0^1 |\nabla(\tau)| (1-\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. + |F''(\sigma)| \int_0^1 |\nabla(\tau)| (1-\tau) d\tau + |F''(\rho)| \int_0^1 |\nabla(\tau)| (1+\tau) d\tau \right] \\
&= \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Psi(1)} (|F''(\sigma)| + |F''(\rho)|) \left(\int_0^1 |\nabla(\tau)| d\tau \right)
\end{aligned}$$

İspat tamamlanır. □

Sonuç 4.62. Eğer Teorem 4.61’de $\varphi(\tau) = \tau$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [33].

$$\left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} F(\tau) d\tau \right| \leq \frac{\rho - \sigma}{12} \left[\frac{|F''(\sigma)| + |F''(\rho)|}{2} \right] \quad (4.89)$$

Sonuç 4.63. Eğer Teorem 4.61’de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\rho - \sigma)^\alpha} \left[I_{\rho-F} \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + I_{\sigma+F} \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \right|$$

$$\leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{4(\alpha + 2)} \left[\frac{|F''(\sigma)| + |F''(\rho)|}{2} \right] \quad (4.90)$$

Teorem 4.64. $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan $F'' \in L([\sigma, \rho])$ ait, I° üzerinde ikinci dereceden diferansiyellenebilen fonksiyon ve $\sigma, \rho \in I^\circ$ iken $\sigma < \rho$ dir. Eğer bu fonksiyonun $q > 1$ iken $|F''|^q$ si $[\sigma, \rho]$, üzerinde konveks ise genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{\Psi(1)} \left[\rho_- I_\varphi F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \sigma_+ I_\varphi F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\nabla(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left\{ \left(\frac{3|F''(\sigma)|^q + |F''(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|F''(\sigma)|^q + 3|F''(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2^{\frac{2}{q}}\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\nabla(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|F''(\sigma)| + |F''(\rho)|}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.91)$$

burada $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

İspat. Lemma 4.58'deki eşitliği $|F''|^q$ konveklığı ve Hölder's eşitsizliğinden yararlanarak düzenleyip gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{1}{\Psi(1)} \left[\rho_- I_\varphi F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \sigma_+ I_\varphi F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\nabla(\tau)| \left| F'' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) \right| d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\nabla(\tau)| \left| F'' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) \right| d\tau \right] \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Psi(1)} \left\{ \left(\int_0^1 |\nabla(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| F'' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 |\nabla(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| F'' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\nabla(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \times \left[\left(\int_0^1 \left| F'' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 \left| F'' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\nabla(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \times \left[\left(\int_0^1 \left[\frac{1+\tau}{2} |F''(\sigma)|^q + \frac{1-\tau}{2} |F''(\rho)|^q \right] d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 \left[\frac{1-\tau}{2} |F''(\sigma)|^q + \frac{1+\tau}{2} |F''(\rho)|^q \right] d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\nabla(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \times \left[\left(\frac{3|F''(\sigma)|^q + |F''(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{|F''(\sigma)|^q + 3|F''(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece (4.91) nolu eşitliğin ilk eşitsizliğinin ispatı tamamlanır.

İkinci eşitsizliğin ispatı için $\sigma_1 = 3|F'(\sigma)|^q$, $\rho_1 = |F'(\rho)|^q$, $\sigma_2 = |F'(\sigma)|^q$ ve $\rho_2 = 3|F'(\rho)|^q$ olarak seçilir ve aşağıdaki eşitsizlikte yararlanılır

$$\sum_{k=1}^n (\sigma_k + \rho_k)^s \leq \sum_{k=1}^n \sigma_k^s + \sum_{k=1}^n \rho_k^s, \quad 0 \leq s < 1 \quad (4.93)$$

ve $3^{\frac{1}{q}} + 1 \leq 4$, olduğundan istenilen sonuç elde edilir. \square

Sonuç 4.65. Eğer Teorem 4.64'de $\varphi(\tau) = \tau$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{2}{(\rho - \sigma)} \int_{\sigma}^{\rho} F(\tau) d\tau \right| \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{4} \left(\frac{2p}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left\{ \left(\frac{3|F''(\sigma)|^q + |F''(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|F''(\sigma)|^q + 3|F''(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&\leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2^{1+\frac{2}{q}}} \left(\frac{2p}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|F''(\sigma)| + |F''(\rho)|}{2} \right] \quad (4.94)
\end{aligned}$$

İspat. $A > B \geq 0$ ve $p \geq 0$ iken geçerli olan aşağıdaki eşitsizlik gözönüne alındığında ispat açıktır.

$$(A - B)^p \leq A^p - B^p \quad (4.95)$$

$$\int_0^1 (1 - \tau^2)^p d\tau \leq \int_0^1 (1 - \tau^{2p}) d\tau = \frac{2p}{2p+1} \quad (4.96)$$

□

Sonuç 4.66. Eğer Teorem 4.64’de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\sigma) + F(\rho)}{2} - \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)}{(\rho - \sigma)^\alpha} \left[I_{\rho^-}^\alpha F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) + I_{\sigma^+}^\alpha F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right] \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8(\alpha + 1)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{p(\alpha + 1)}{p(\alpha + 1) + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left\{ \left(\frac{3|F''(\sigma)|^q + |F''(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|F''(\sigma)|^q + 3|F''(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.97) \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2^{\frac{2}{q}}(\alpha + 1)} \left(\frac{p(\alpha + 1)}{p(\alpha + 1) + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|F''(\sigma)| + |F''(\rho)|}{2} \right] \end{aligned}$$

İspat. (4.95) nolu eşitsizlikten ispat açıktır. □

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN MİDPOINT TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

5.1. BİRİNCİ TÜREVİNİN MUTLAK DEĞERİ KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN MİDPOINT TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Öncelikle bu bölümde yaralanılacak olan lemmayı verelim.

Lemma 5.1. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ dir. Eğer $F' \in L[\sigma, \rho]$, ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki özdeşlik geçerlidir.

$$F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) - \frac{1}{2\Lambda(1)} [\sigma^+ I_{\varphi} F(\rho) + \rho^- I_{\varphi} F(\sigma)] = \frac{\rho - \sigma}{2\Lambda(1)} \sum_{k=1}^4 J_k \quad (5.1)$$

aşağıdaki şekilde ifade edilen eşitlikler kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \Lambda(\tau) F'(\tau\rho + (1-\tau)\sigma) d\tau & J_2 &= \int_0^{\frac{1}{2}} (-\Lambda(\tau)) F'(\tau\sigma + (1-\tau)\rho) d\tau \\ J_3 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (-\Delta(\tau)) F'(\tau\rho + (1-\tau)\sigma) d\tau & J_4 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \Delta(\tau) F'(\tau\sigma + (1-\tau)\rho) d\tau \end{aligned} \quad (5.2)$$

İspat. (5.1) özdeşliğinin ispatında her parça için kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\tau} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right) F'(\tau\rho + (1-\tau)\sigma) d\tau \\ &= \frac{1}{\rho - \sigma} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right) F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi((\rho - \sigma)\tau)}{\tau} F(\tau\rho + (1-\tau)\sigma) d\tau \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(- \int_0^\tau \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right) F'(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) d\tau & (5.4) \\
&= \frac{1}{\rho - \sigma} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right) F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi((\rho - \sigma)\tau)}{\tau} F(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(- \int_\tau^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right) F'(\tau\rho + (1 - \tau)\sigma) d\tau & (5.5) \\
&= \frac{1}{\rho - \sigma} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right) F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)\tau)}{\tau} F(\tau\rho + (1 - \tau)\sigma) d\tau,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_4 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_\tau^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right) F'(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) d\tau & (5.6) \\
&= \frac{1}{\rho - \sigma} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right) F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)\tau)}{\tau} F(\tau\sigma + (1 - \tau)\rho) d\tau
\end{aligned}$$

yukarıdaki ifadeler elde edilir. Bu da (5.1) özdeşliği için istenilen sonuçtur. \square

Sonuç 5.2. Lemma 5.1'de $\varphi(\tau) = \tau$ fonksiyonu kullanılırsa (5.1) özdeşliği [16] nolu çalışmanın (1.4) özdeşliğine dönüşür.

Sonuç 5.3. Lemma 5.1'de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (5.1) özdeşliği [23] nolu çalışmanın (1.9) özdeşliğine dönüşür.

Sonuç 5.4. Lemma 5.1'in koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{k\Gamma_k(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (5.1) eşitliği aşağıdaki özdeşliğine dönüşür.

$$F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{\sigma^+,k}^\alpha F(\rho) + I_{\rho^-,k}^\alpha F(\sigma) \right] = \frac{\rho-\sigma}{2} \sum_{k=1}^4 I_k^1 \quad (5.7)$$

burada

$$\begin{aligned} I_1^1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{\alpha}{k}} F'(\tau\rho + (1-\tau)\sigma) d\tau & I_2^1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\tau^{\frac{\alpha}{k}}\right) F'(\tau\sigma + (1-\tau)\rho) d\tau \\ I_3^1 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\tau^{\frac{\alpha}{k}} - 1\right) F'(\tau\rho + (1-\tau)\sigma) d\tau & I_4^1 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 - \tau^{\frac{\alpha}{k}}\right) F'(\tau\sigma + (1-\tau)\rho) d\tau \end{aligned} \quad (5.8)$$

Sonuç 5.5. Lemma 5.1'in koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau(\rho-\tau)^{\alpha-1}$ fonksiyonu kullanılır ve F fonksiyonunun $\frac{(\sigma+\rho)'}{2}$ ye göre simetrikliğinden yararlanılırsa aşağıdaki özdeşlik elde edilir.

$$F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - \frac{\alpha}{\rho^\alpha - \sigma^\alpha} \int_\sigma^\rho F(\tau) d_\alpha \tau = \frac{\rho-\sigma}{2(\rho^\alpha - \sigma^\alpha)} \sum_{k=1}^4 J_k^1 \quad (5.9)$$

burada

$$J_1^1 = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{1}{2}} (\rho^\alpha - [\rho - (\rho - \sigma)\tau]^\alpha) F'(\tau\rho + (1-\tau)\sigma) d\tau \quad (5.10)$$

$$J_2^1 = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{1}{2}} (\rho^\alpha - [\rho - (\rho - \sigma)\tau]^\alpha) F'(\tau\sigma + (1-\tau)\rho) d\tau \quad (5.11)$$

$$J_3^1 = -\frac{1}{\alpha} \int_{\frac{1}{2}}^1 ([\rho - (\rho - \sigma)\tau]^\alpha - \sigma^\alpha) F'(\tau\rho + (1-\tau)\sigma) d\tau \quad (5.12)$$

$$J_4^1 = \frac{1}{\alpha} \int_{\frac{1}{2}}^1 ([\rho - (\rho - \sigma)\tau]^\alpha - \sigma^\alpha) F'(\tau\sigma + (1-\tau)\rho) d\tau \quad (5.13)$$

İspat. (5.1) eşitliğinde eğer $\varphi(\tau) = \tau(\rho-\tau)^{\alpha-1}$ alınırsa

$$\Lambda(\tau) = \frac{1}{\alpha} (\rho^\alpha - [\rho - (\rho - \sigma)\tau]^\alpha) \quad (5.14)$$

ve

$$\Delta(\tau) = \frac{1}{\alpha} ([\rho - (\rho - \sigma)\tau]^\alpha - \sigma^\alpha) \quad (5.15)$$

şeklinde ifade eşitliklerden aşağıdaki özdeşlik elde edilir.

$$F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - \frac{\alpha}{\rho^\alpha - \sigma^\alpha} \int_\sigma^\rho F(\tau) d_\alpha \tau = \frac{\rho - \sigma}{2(\rho^\alpha - \sigma^\alpha)} \sum_{k=1}^4 J_k^1 \quad (5.16)$$

ispat tamamlanır. \square

Sonuç 5.6. Lemma 5.1'in koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau\right)$ alınırsa $\alpha \in (0, 1)$ iken aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - \frac{1-\alpha}{2(1-\exp(-A))} \left[\mathcal{I}_{\sigma^+}^\alpha F(\rho) + \mathcal{I}_{\rho^-}^\alpha F(\sigma) \right] \quad (5.17)$$

$$= \frac{\rho - \sigma}{2(1-\exp(-A))} \sum_{k=1}^4 J_k^1$$

Bu eşitlikte $A = \frac{1-\alpha}{\alpha}(\rho - \sigma)$ ve

$$\begin{aligned} J_1^1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} (\exp(-A\tau) - 1) F'(\tau\rho + (1-\tau)\sigma) d\tau \\ J_2^1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \exp(-A\tau)) F'(\tau\sigma + (1-\tau)\rho) d\tau \\ J_3^1 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (\exp(-A\tau) - \exp(-A)) F'(\tau\rho + (1-\tau)\sigma) d\tau \\ J_4^1 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (\exp(-A) - \exp(-A\tau)) F'(\tau\sigma + (1-\tau)\rho) d\tau \end{aligned} \quad (5.18)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 5.7. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$. Eğer $|F'|$, $[\sigma, \rho]$ aralığı üzerinde konveks ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\left| F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_\varphi F(\rho) + {}_{\rho^-}I_\varphi F(\sigma) \right] \right| \quad (5.19)$$

$$\leq \frac{(\rho - \sigma)}{\Lambda(1)} \left[\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right] \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\Lambda(\tau)| d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta(\tau)| d\tau \right)$$

İspat. $|F'|$ 'nin konveksliğini kullanılarak (5.19) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) - \frac{1}{2\Lambda(1)} [\sigma^+ I_{\varphi} F(\rho) + \rho^- I_{\varphi} F(\sigma)] \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)}{2\Lambda(1)} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left| \int_0^{\tau} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right| d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| \int_{\tau}^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right| d\tau \right] \\ & \quad \times [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \end{aligned} \quad (5.20)$$

□

Sonuç 5.8. Eğer Teorem 5.7'de $\varphi(\tau) = \tau$ alınırsa (5.19) eşitsizliği [16] nolu çalışmanın (2.1) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 5.9. Eğer Teorem 5.7'de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa (5.19) eşitsizliği [23] nolu çalışmanın (3) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 5.10. Teorem 5.7'nin koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ alınırsa $\frac{\alpha}{k} \in [0, 1]$ iken (5.19) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür.

$$\begin{aligned} & \left| F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) - \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{2(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} [I_{\sigma^+, k}^{\alpha} F(\rho) + I_{\rho^-, k}^{\alpha} F(\sigma)] \right| \quad (5.21) \\ & \leq (\rho - \sigma) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{k} + 1\right)} + \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{k} + 1\right) 2^{\frac{\alpha}{k}}} \right] \left(\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right) \end{aligned}$$

İspat. (5.19) eşitsizliğinde eğer $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) - \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{2(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} [I_{\sigma^+, k}^{\alpha} F(\rho) + I_{\rho^-, k}^{\alpha} F(\sigma)] \right| \quad (5.22) \\ & \leq (\rho - \sigma) \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right] \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\Lambda(\tau)| d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta(\tau)| d\tau \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\Lambda(\tau) = \frac{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} \tau^{\frac{\alpha}{k}}$ iken (5.22) eşitsizliğinde iki integralde hesaplanırsa

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |\Lambda(\tau)| d\tau = \frac{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} \int_0^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{\alpha}{k}} d\tau = \frac{k(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{(\alpha+k)\Gamma_k(\alpha+k)2^{\frac{\alpha}{k}+1}} \quad (5.23)$$

ve $\Delta(\tau) = \frac{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} \left(1 - \tau^{\frac{\alpha}{k}}\right)$,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta(\tau)| d\tau &= \frac{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 - \tau^{\frac{\alpha}{k}}\right) d\tau \\ &= \frac{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{(\alpha+k)} + \frac{k}{(\alpha+k)2^{\frac{\alpha}{k}+1}} \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

bu hesaplamalar sonucu aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |\Lambda(\tau)| d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta(\tau)| d\tau = \frac{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} \left[\frac{1}{2} - \frac{k}{(\alpha+k)} + \frac{k}{(\alpha+k)2^{\frac{\alpha}{k}+1}} \right] \quad (5.25)$$

bu sonuç ise ispatı tamamlar. □

Sonuç 5.11. Teorem 5.7'nin koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau(\rho - \tau)^{\alpha-1}$ alınır ve F fonksiyonunun $\frac{(\sigma+\rho)'}{2}$ ye göre simetrikliğinden yararlanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} &\left| F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - \frac{\alpha}{\rho^\alpha - \sigma^\alpha} \int_\sigma^\rho F(\tau) d_\alpha \tau \right| \\ &\leq \frac{1}{(\rho^\alpha - \sigma^\alpha)} \left[(\sigma^{\alpha+1} + \rho^{\alpha+1}) \frac{\alpha}{\alpha+1} - (\sigma^\alpha + \rho^\alpha) \frac{\sigma+\rho}{2} + \frac{(\sigma+\rho)^{\alpha+1}}{2^\alpha(\alpha+1)} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right] \end{aligned} \quad (5.26)$$

İspat. (5.19) eşitsizliğinde eğer $\varphi(\tau) = \tau(\rho - \tau)^{\alpha-1}$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$\left| F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - \frac{\alpha}{\rho^\alpha - \sigma^\alpha} \int_\sigma^\rho F(\tau) d_\alpha \tau \right| \quad (5.27)$$

$$\leq (\rho - \sigma) \frac{\alpha}{\rho^\alpha - \sigma^\alpha} \left[\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right] \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\Lambda(\tau)| d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta(\tau)| d\tau \right)$$

(5.27) eşitsizliğindeki iki integral sırasıyla

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} |\Lambda(\tau)| d\tau &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{1}{2}} |\rho^\alpha - [\rho - (\rho - \sigma)\tau]^\alpha| d\tau & (5.28) \\ &= \frac{1}{\alpha(\rho - \sigma)} \int_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^{\rho} |\rho^\alpha - s^\alpha| ds \\ &= \frac{1}{\alpha(\rho - \sigma)} \left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \rho^{\alpha+1} + \frac{(\sigma + \rho)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} - \rho^\alpha \frac{\sigma + \rho}{2} \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta(\tau)| d\tau &= \frac{1}{\alpha} \int_{\frac{1}{2}}^1 |[\rho - (\rho - \sigma)\tau]^\alpha - \sigma^\alpha| d\tau & (5.29) \\ &= \frac{1}{\alpha(\rho - \sigma)} \int_{\sigma}^{\frac{\sigma+\rho}{2}} |s^\alpha - \sigma^\alpha| ds \\ &= \frac{1}{\alpha(\rho - \sigma)} \left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \sigma^{\alpha+1} + \frac{(\sigma + \rho)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} - \sigma^\alpha \frac{\sigma + \rho}{2} \right] \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır bunlardan yararlanılarak aşağıdaki özdeşlik elde edilir.

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}} |\Lambda(\tau)| d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta(\tau)| d\tau \\ &= \frac{1}{\alpha(\rho - \sigma)} \left[(\sigma^{\alpha+1} + \rho^{\alpha+1}) \frac{\alpha}{\alpha+1} - (\sigma^\alpha + \rho^\alpha) \frac{\sigma + \rho}{2} + \frac{(\sigma + \rho)^{\alpha+1}}{2^\alpha(\alpha+1)} \right] & (5.30) \end{aligned}$$

ispat tamamlanır. □

Sonuç 5.12. Eğer sonuç 5.11’de $\alpha = 1$ alınrsa Kırmacı tarafından ispatlanan (2.8) nolu eşitsizlik elde edilir [16].

Sonuç 5.13. Teorem 5.7 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau\right)$ alınırsa $\alpha \in (0, 1)$ iken aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - \frac{1-\alpha}{2(1-\exp(-A))} \left[\mathcal{I}_{\sigma^+}^{\alpha} F(\rho) + \mathcal{I}_{\rho^-}^{\alpha} F(\sigma) \right] \right| \quad (5.31) \\ & \leq \frac{(\rho-\sigma)}{(1-\exp(-A))} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-A) + \frac{1}{A} \left(2 \exp\left(-\frac{A}{2}\right) - \exp(-A) - 1 \right) \right) \\ & \quad \times \left[\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right] \end{aligned}$$

İspat. (5.19) eşitsizliğinde $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau\right)$ alınırsa $\alpha \in (0, 1)$ iken

$$\begin{aligned} & \left| F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - \frac{1-\alpha}{2(1-\exp(-A))} \left[\mathcal{I}_{\sigma^+}^{\alpha} F(\rho) + \mathcal{I}_{\rho^-}^{\alpha} F(\sigma) \right] \right| \quad (5.32) \\ & \leq \frac{(\rho-\sigma)}{(1-\exp(-A))} \left[\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right] \\ & \quad \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |1 - \exp(-A\tau)| d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 |\exp(-A) - \exp(-A\tau)| d\tau \right) \\ & = \frac{(\rho-\sigma)}{(1-\exp(-A))} \left[\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right] \\ & \quad \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{A} + \frac{2}{A} \exp\left(-\frac{A}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right) \exp(-A) \right) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. İspat tamamlanır. □

Sonuç 5.14. Eğer sonuç 5.13'te $\alpha = 1$ için $A \rightarrow 0$ ise aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$(\rho-\sigma) \lim_{A \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-A)}{(1-\exp(-A))} + \frac{2 \exp\left(-\frac{A}{2}\right) - \exp(-A) - 1}{A(1-\exp(-A))} \right] = \frac{(\rho-\sigma)}{4} \quad (5.33)$$

Bu eşitlik kullanılarak Kırmacı tarafından ispatlanan 2.6 eşitsizliği elde edilir [16].

Teorem 5.15. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$. Eğer $|F'|^q$, $[\sigma, \rho]$ aralığı üzerinde konveks ise $q > 1$, iken aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\left| F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}F(\rho) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}F(\sigma) \right] \right| \quad (5.34)$$

$$\leq \frac{(\rho - \sigma) S_p}{2^{\frac{1}{q}} \Lambda(1)} \left[\left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

burada

$$S_p = \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\Lambda(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |\Lambda(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \right] \quad (5.35)$$

İspat. $|F'|^q$ konveksliğini kullanılarak (5.34) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left| F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) - \frac{1}{2\Lambda(1)} [\sigma^+ I_{\varphi} F(\rho) + \rho^- I_{\varphi} F(\sigma)] \right| \quad (5.36)$$

$$\leq \frac{(\rho - \sigma)}{2^{\frac{1}{q}} \Lambda(1)} \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| \int_0^{\tau} \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left| \int_{\tau}^1 \frac{\varphi((\rho - \sigma)u)}{u} du \right|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ \times \left[\left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

ispat tamamlanır. □

Sonuç 5.16. Eğer Teorem 5.15’de $\varphi(\tau) = \tau$ alınırsa (5.34) eşitsizliğinden Kirmaci tarafından ispatlanan [16] nolu çalışmanın (1.5) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.17. Eğer Teorem 5.15’de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa (5.34) eşitsizliğinden Iqbal ve arkadaşları tarafından ispatlanan [23] nolu çalışmanın (4) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.18. Teorem 5.15’in koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ alınırsa (5.34) eşitsizliği $\frac{\alpha}{k} \in [0, 1]$ iken aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür.

$$\left| F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) - \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{2(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} [I_{\sigma^+, k}^{\alpha} F(\rho) + I_{\rho^-, k}^{\alpha} F(\sigma)] \right| \quad (5.37) \\ \leq \frac{(\rho - \sigma)}{(\frac{\alpha}{k} p + 1)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{\alpha}{k}}} \left[\left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

İspat. (5.34) eşitsizliğinde eğer $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\left| F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) - \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{2(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} [I_{\sigma^+, k}^{\alpha} F(\rho) + I_{\rho^-, k}^{\alpha} F(\sigma)] \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\rho - \sigma) \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{2^{\frac{1}{q}} (\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \tag{5.38} \\
&\times \left[\left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\times \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\Lambda(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \right]
\end{aligned}$$

(5.38) eşitsizliğindeki iki integral hesaplanmalı $\Lambda(\tau) = \frac{(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)} \tau^{\frac{\alpha}{k}}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} |\Lambda(\tau)|^p d\tau &= \left[\frac{(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)} \right]^p \int_0^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{\alpha}{k} p} d\tau \tag{5.39} \\
&= \left[\frac{(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)} \right]^p \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{k} p + 1\right) 2^{\frac{\alpha}{k} p + 1}}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\alpha \in (0, 1]$ ve $\forall \tau_1, \tau_2 \in [0, 1]$, $|\tau_1^\alpha - \tau_2^\alpha| \leq |\tau_1 - \tau_2|^\alpha$ ifadesinden yararlanılarak, $\Delta(\tau) = \frac{(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)} \left(1 - \tau^{\frac{\alpha}{k}}\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta(\tau)|^p d\tau &\leq \left[\frac{(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)} \right]^p \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - \tau)^{\frac{\alpha}{k} p} d\tau \\
&\leq \left[\frac{(\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)} \right]^p \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{k} p + 1\right) 2^{\frac{\alpha}{k} p + 1}}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. İspat tamamlanır. \square

Sonuç 5.19. Teorem 5.15'in koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau(\rho - \tau)^{\alpha-1}$ alınır ve F fonksiyonunun $\frac{(\sigma + \rho)'}{2}$ ye göre simetrikliğinden yararlanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\left| F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) - \frac{\alpha}{\rho^\alpha - \sigma^\alpha} \int_\sigma^\rho F(\tau) d_\alpha \tau \right| \tag{5.40} \\
&\leq \frac{(\rho - \sigma)^{\frac{1}{q}} \Upsilon(\sigma, \rho; \alpha; p)}{2^{\frac{1}{q}} (\rho^\alpha - \sigma^\alpha)} \\
&\times \left[\left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte aşağıdaki ifade kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} \Upsilon(\sigma, \rho; \alpha; p) &= \left[\left(\frac{\alpha p}{\alpha p + 1} - \frac{\sigma + \rho}{2} \right) \rho^{\alpha p + 1} + \frac{(\sigma + \rho)^{\alpha p + 1}}{2^{\alpha p + 1} (\alpha p + 1)} \right]^{\frac{1}{p}} \\ &+ \left[\left(\frac{\alpha p}{\alpha p + 1} - \frac{\sigma + \rho}{2} \right) \sigma^{\alpha p + 1} + \frac{(\sigma + \rho)^{\alpha p + 1}}{2^{\alpha p + 1} (\alpha p + 1)} \right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (5.41)$$

İspat. Eğer (5.19) eşitsizliğinde $\varphi(\tau) = \tau(\rho - \tau)^{\alpha - 1}$, alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) - \frac{\alpha}{\rho^\alpha - \sigma^\alpha} \int_\sigma^\rho F(\tau) d_\alpha \tau \right| \\ & \leq \frac{\alpha(\rho - \sigma)}{2^{\frac{1}{q}} (\rho^\alpha - \sigma^\alpha)} \\ & \times \left[\left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \times \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\Delta(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \right] \end{aligned} \quad (5.42)$$

$A \geq B > 0$ ve $q > 1$, $(A - B)^q \leq A^q - B^q$, eşitsizliklerinden yararlanılarak (5.42) eşitsizliğindeki integraller sırasıyla

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} |\Delta(\tau)|^p d\tau &= \frac{1}{\alpha^p} \int_0^{\frac{1}{2}} |\rho^\alpha - [\rho - (\rho - \sigma)\tau]^\alpha|^p d\tau \\ &\leq \frac{1}{\alpha^p (\rho - \sigma)} \int_{\frac{\sigma + \rho}{2}}^\rho (\rho^{\alpha p} - s^{\alpha p}) ds \\ &\leq \frac{1}{\alpha^p (\rho - \sigma)} \left[\left(\frac{\alpha p}{\alpha p + 1} - \frac{\sigma + \rho}{2} \right) \rho^{\alpha p + 1} + \frac{(\sigma + \rho)^{\alpha p + 1}}{2^{\alpha p + 1} (\alpha p + 1)} \right] \end{aligned} \quad (5.43)$$

ve

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta(\tau)|^p d\tau = \frac{1}{\alpha^p} \int_{\frac{1}{2}}^1 |[\rho - (\rho - \sigma)\tau]^\alpha - \sigma^\alpha|^p d\tau \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\alpha^p(\rho - \sigma)} \int_{\sigma}^{\frac{\sigma+\rho}{2}} (s^{\alpha p} - \sigma^{\alpha p}) ds \\
&= \frac{1}{\alpha^p(\rho - \sigma)} \left[\left(\frac{\alpha p}{\alpha p + 1} - \frac{\sigma + \rho}{2} \right) \sigma^{\alpha p + 1} + \frac{(\sigma + \rho)^{\alpha p + 1}}{2^{\alpha p + 1}(\alpha p + 1)} \right]
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve bu hesaplamalardan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\Lambda(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |\Delta(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.45} \\
&\leq \frac{1}{\alpha(\rho - \sigma)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left[\left(\frac{\alpha p}{\alpha p + 1} - \frac{\sigma + \rho}{2} \right) \rho^{\alpha p + 1} + \frac{(\sigma + \rho)^{\alpha p + 1}}{2^{\alpha p + 1}(\alpha p + 1)} \right]^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \left. + \left[\left(\frac{\alpha p}{\alpha p + 1} - \frac{\sigma + \rho}{2} \right) \sigma^{\alpha p + 1} + \frac{(\sigma + \rho)^{\alpha p + 1}}{2^{\alpha p + 1}(\alpha p + 1)} \right]^{\frac{1}{p}} \right\}
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır. □

Bu bölümde öncelikle ana teoremden kullanılacak olan diferansiyellenebilir fonksiyonlar için geçerli olan lemma verilecek daha sonra ise önceki çalışmaların genelleştirilmiş olan bazı midpoint tipli eşitsizlikler verilecektir.

Lemma 5.20. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ olsun. Eğer $F' \in L[\sigma, \rho]$, ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki özdeşlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+} I_{\varphi} F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-} I_{\varphi} F(\sigma) \right] - F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \\
&= \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 \Psi(\tau) F' \left(\frac{\tau}{2} \sigma + \frac{2-\tau}{2} \rho \right) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \Psi(\tau) F' \left(\frac{2-\tau}{2} \sigma + \frac{\tau}{2} \rho \right) d\tau \right] \tag{5.46}
\end{aligned}$$

burada $\Psi(\tau)$ fonksiyonu Teorem 3.7'de olduğu gibi tanımlanmıştır.

İspat. Kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \Psi(\tau) F' \left(\frac{\tau}{2} \sigma + \frac{2-\tau}{2} \rho \right) d\tau \\
&= -\frac{2}{\rho - \sigma} \Psi(\tau) F \left(\frac{\tau}{2} \sigma + \frac{2-\tau}{2} \rho \right) \Big|_0^1 \\
&\quad + \frac{2}{\rho - \sigma} \int_0^1 \frac{\varphi \left(\frac{\rho - \sigma}{2} \tau \right)}{\tau} F \left(\frac{\tau}{2} \sigma + \frac{2-\tau}{2} \rho \right) d\tau \\
&= -\frac{2}{\rho - \sigma} \Psi(1) F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \frac{2}{\rho - \sigma} \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right)_+ I_\varphi F(\rho)
\end{aligned} \tag{5.47}$$

sonucu ve benzer işlemler ile

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \Psi(\tau) F' \left(\frac{2-\tau}{2} \sigma + \frac{\tau}{2} \rho \right) d\tau \\
&= \frac{2}{\rho - \sigma} \Psi(1) F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) - \frac{2}{\rho - \sigma} \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right)_- I_\varphi F(\sigma)
\end{aligned} \tag{5.48}$$

sonucu elde edilir (5.47) ifadesinden (5.48) sonucu çıkartılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} (I_1 - I_2) \\
&= -\Psi(1) F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \frac{1}{2\Psi(1)} \left[\left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right)_+ I_\varphi F(\rho) + \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right)_- I_\varphi F(\sigma) \right]
\end{aligned} \tag{5.49}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik yeniden düzenlenilirse istenilen sonuca ulaşılır. \square

Sonuç 5.21. Lemma 5.20 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ fonksiyonu kullanılırsa (5.46) özdeşliği (2.7) ifadesine dönüşür.

Sonuç 5.22. Lemma 5.20 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (5.46) özdeşliği [31] nolu çalışmanın (3.1) eşitliğine dönüşür.

Sonuç 5.23. Lemma 5.20 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^k}{k\Gamma_k(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (5.46) özdeşliği [25] nolu çalışmanın (3.1) eşitliğine dönüşür.

Sonuç 5.24. Lemma 5.20 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau\right)$ fonksiyonu kullanılırsa $A = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\rho-\sigma}{2}$ iken Usta ve arkadaşları tarafından ispatlanan aşağıdaki eşitliği verir [32].

$$\begin{aligned} & \frac{1-\alpha}{2[1-\exp\{-A\}]} \left[\mathcal{I}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+}^{\alpha} F(\rho) + \mathcal{I}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^-}^{\alpha} F(\sigma) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \\ &= \frac{\rho-\sigma}{4[1-\exp\{-A\}]} \left[\int_0^1 [1-\exp\{-A\tau\}] F'\left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho\right) d\tau \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 [1-\exp\{-A\tau\}] F'\left(\frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho\right) d\tau \right] \end{aligned} \quad (5.50)$$

Teorem 5.25. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ olsun. Eğer $|F'|$ konveks fonksiyon ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+} I_{\varphi} F(\rho) + {}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^-} I_{\varphi} F(\sigma) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| d\tau \right) [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \end{aligned} \quad (5.51)$$

burada $\Psi(\tau)$ fonksiyonu Teorem 3.7'de olduğu gibi tanımlanmıştır.

İspat. Lemma 5.20'de $|F'|$ 'nin konveksliğinden yararlanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+} I_{\varphi} F(\rho) + {}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^-} I_{\varphi} F(\sigma) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right| \quad (5.52) \\ & \leq \frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F'\left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho\right) \right| d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F'\left(\frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho\right) \right| d\tau \right] \\ & \leq \frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left[\frac{\tau}{2} |F'(\sigma)| + \frac{2-\tau}{2} |F'(\rho)| \right] d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\Psi(\tau)| \left[\frac{2-\tau}{2} |F'(\sigma)| + \frac{\tau}{2} |F'(\rho)| \right] d\tau \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| d\tau \right) [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|]$$

ispat tamamlanır. □

Sonuç 5.26. Teorem 5.25 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ fonksiyonu kullanılırsa (5.51) eşitsizliği (2.8) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 5.27. Teorem 5.25 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (5.51) eşitsizliği $q = 1$ için [31] nolu çalışmada (3.5) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 5.28. Teorem 5.25 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^k}{k\Gamma_k(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (5.51) eşitsizlik $q = 1$ için [25] nolu çalışmada (3.4) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 5.29. Teorem 5.25 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau)$, fonksiyonu kullanılırsa $A = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\rho-\sigma}{2}$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1-\alpha}{2[1-\exp\{-A\}]} \left[\mathcal{I}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})+}^\alpha F(\rho) + \mathcal{I}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})-}^\alpha F(\sigma) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \frac{A + \exp\{-A\} - 1}{A(1 - \exp\{-A\})} \left[\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right] \end{aligned} \quad (5.53)$$

Teorem 5.30. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$. olsun. Eğer $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $q > 1$ iken $|F'|^q$ fonksiyonu konveks ise genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})+} I_\varphi F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})-} I_\varphi F(\sigma) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{2^{\frac{2}{q}}\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \end{aligned} \quad (5.54)$$

burada $\Psi(\tau)$ fonksiyonu Teorem 3.7'de olduğu gibi tanımlanmıştır.

İspat. Hölder eşitsizliğinden yararlanılarak (5.54) eşitsizliği aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})+}I_{\varphi}F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})-}I_{\varphi}F(\sigma) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F'\left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho\right) \right| d\tau \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F'\left(\frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho\right) \right| d\tau \right] \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\int_0^1 \left| F'\left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho\right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left| F'\left(\frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho\right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned} \tag{5.55}$$

burada $q > 1$, iken $|F'|^q$ konveks ise

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left| F'\left(\frac{\tau}{2}\sigma + \frac{2-\tau}{2}\rho\right) \right|^q d\tau & \leq \int_0^1 \left[\frac{\tau}{2} |F'(\sigma)|^q + \frac{2-\tau}{2} |F'(\rho)|^q \right] d\tau \\
& = \frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4}
\end{aligned} \tag{5.56}$$

sonucu elde edilir ve benzer işlemler ile

$$\int_0^1 \left| F'\left(\frac{2-\tau}{2}\sigma + \frac{\tau}{2}\rho\right) \right|^q d\tau \leq \frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \tag{5.57}$$

sonucuna varılır. (5.55) eşitsizliğinde (5.56) ve (5.57) sonuçları yerine yazılırsa (5.54) deki ilk eşitsizlik elde edilir. \square

İkinci eşitsizliğin ispatı için $\sigma_1 = |F'(\sigma)|^q$, $\rho_1 = 3|F'(\rho)|^q$, $\sigma_2 = 3|F'(\sigma)|^q$ ve $\rho_2 = |F'(\rho)|^q$ değerleri kullanılırken 4.93 ve $1 + 3^{\frac{1}{q}} \leq 4$ eşitsizliklerinden yararlanılırsa istenilen sonuç açıkça elde edilir.

Sonuç 5.31. Teorem 5.30 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ fonksiyonu kullanılırsa (5.54) eşitsizliği [16] nolu çalışmanın Teorem 2.3 ve Teorem 2.4 ifadelerini verir.

Sonuç 5.32. Teorem 5.30 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (5.54) eşitsizliği [31] nolu çalışmanın (3.6) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 5.33. Teorem 5.30 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^k}{k\Gamma_k(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa (5.54) eşitsizliği [25] nolu çalışmanın (3.4) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 5.34. Teorem 5.30 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau)$ fonksiyonu kullanılırsa $A = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\rho-\sigma}{2}$ iken üstel çekirdekli kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1-\alpha}{2[1-\exp\{-A\}]} \left[\mathcal{I}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})+}^\alpha F(\rho) + \mathcal{I}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})-}^\alpha F(\sigma) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{4[1-\exp\{-A\}]} \left(\int_0^1 (1-\exp\{-A\tau\})^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{2^{\frac{2}{q}}[1-\exp\{-A\}]} \left(\int_0^1 (1-\exp\{-A\tau\})^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|]
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Teorem 5.35. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan F fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ olsun. Eğer $q \geq 1$ iken $|F'|^q$ konveks ise genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})+} I_\varphi F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})-} I_\varphi F(\sigma) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{2^{2+\frac{1}{q}}\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left[(B_1 |F'(\sigma)|^q + B_2 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} + (B_2 |F'(\sigma)|^q + B_1 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned} \tag{5.59}$$

burada $\Psi(\tau)$ fonksiyonu Teorem 3.7'de olduğu gibi ve B_1 ve B_2 sabitleri de aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$B_1 = \int_0^1 |\Psi(\tau)| \tau d\tau \text{ and } B_2 = \int_0^1 |\Psi(\tau)| (2-\tau) d\tau \tag{5.60}$$

İspat. $q = 1$ alınması durumunda Teorem 5.25 elde edileceği açıktır.

$q > 1$ için (5.46) özdeşliğinde power mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+} I_{\varphi} F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-} I_{\varphi} F(\sigma) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right| \tag{5.61} \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F' \left(\frac{\tau}{2} \sigma + \frac{2-\tau}{2} \rho \right) \right| d\tau + \int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F' \left(\frac{2-\tau}{2} \sigma + \frac{\tau}{2} \rho \right) \right| d\tau \right] \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F' \left(\frac{\tau}{2} \sigma + \frac{2-\tau}{2} \rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left| F' \left(\frac{2-\tau}{2} \sigma + \frac{\tau}{2} \rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonra $|F'|^q$ konveksliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_+} I_{\varphi} F(\rho) + {}_{(\frac{\sigma+\rho}{2})_-} I_{\varphi} F(\sigma) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left[\left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left[\frac{\tau}{2} |F'(\sigma)|^q + \frac{2-\tau}{2} |F'(\rho)|^q \right] d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \tag{5.62} \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| \left[\frac{2-\tau}{2} |F'(\sigma)|^q + \frac{\tau}{2} |F'(\rho)|^q \right] d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = \frac{\rho - \sigma}{2^{2+\frac{1}{q}} \Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Psi(\tau)| d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left[(B_1 |F'(\sigma)|^q + B_2 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} + (B_2 |F'(\sigma)|^q + B_1 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. İspat tamamlanır. □

Sonuç 5.36. Teorem 5.35 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$, fonksiyonu kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} F(\tau) d\tau - F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{8} \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 2|F'(\rho)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq \frac{3^{1-\frac{1}{q}}}{8} (\rho - \sigma) [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \end{aligned} \quad (5.63)$$

İspat. (5.63) eşitsizliğinde $\sigma_1 = |F'(\sigma)|^q$, $\rho_1 = 2|F'(\rho)|^q$, $\sigma_2 = 2|F'(\sigma)|^q$ ve $\rho_2 = |F'(\rho)|^q$ değerleri kullanılırsa ikinci eşitsizlik elde edilir. \square

Sonuç 5.37. Teorem 5.35 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa Teorem 5.35, [31] nolu çalışmanın teorem 5'ine dönüşür.

Sonuç 5.38. Teorem 5.35 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^k}{k\Gamma_k(\alpha)}$ fonksiyonu kullanılırsa Teorem 5.35, [25] nolu çalışmanın teorem 3.1'ine dönüşür.

Sonuç 5.39. Teorem 5.35 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau\right)$ fonksiyonu kullanılırsa $A = \frac{(1-\alpha)(\rho-\sigma)}{2\alpha}$ iken üstel çekirdekli kesirli interaller için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1 - \alpha}{2[1 - \exp\{-A\}]} \left[\mathcal{I}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+}^{\alpha} F(\rho) + \mathcal{I}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^-}^{\alpha} F(\sigma) \right] - F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{2^{2+\frac{1}{q}}} \left(\frac{A + \exp\{-A\} - 1}{A(1 - \exp\{-A\})} \right) \\ & \quad \times \left[(B_3 |F'(\sigma)|^q + B_4 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} + (B_4 |F'(\sigma)|^q + B_3 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \quad (5.64)$$

burada B_3 ve B_4 ifadelerinin karşılıkları aşağıdaki şekildedir.

$$B_3 = \frac{A^2 + 2A \exp\{-A\} + 2 \exp\{-A\} - 2}{2A(A + \exp\{-A\} - 1)} \quad (5.65)$$

ve

$$B_4 = \frac{3A^2 - 4A + 2 + 2A \exp\{-A\} - \exp\{-A\}}{2A(A + \exp\{-A\} - 1)} \quad (5.66)$$

Sonuç 5.40. $\alpha \rightarrow 1$ için $A \rightarrow 0$ iken sonuç 5.35,

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A + \exp\{-A\} - 1}{A(1 - \exp\{-A\})} = \frac{1}{2} \quad (5.67)$$

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A^2 + 2A \exp\{-A\} + 2 \exp\{-A\} - 2}{2A(A + \exp\{-A\} - 1)} = \frac{2}{3} \quad (5.68)$$

ve

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{3A^2 - 4A + 2 + 2A \exp\{-A\} - \exp\{-A\}}{2A(A + \exp\{-A\} - 1)} = \frac{4}{3} \quad (5.69)$$

sonucu elde edilir ve böylece (5.64) eşitsizliği (5.63) eşitsizliğine dönüşür.

Bu bölümde ana teoremimizi ispatlamamıza yardımcı olacak, diferansiyellenebilen fonksiyonlar için geçerli olan lemmayı vereceğiz. Ardından önceki çalışmaların çalışmaların genelleştirilmesi olan bazı midpoint tipli eşitsizlikleri vereceğiz.

Lemma 5.41. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenbilen fonksiyon ve $\sigma < \rho$. dir.Eğer $F' \in L[\sigma, \rho]$, ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \\ &= \frac{\rho-\sigma}{4\Phi(0)} \left[\int_0^1 \Phi(\tau)F'\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) d\tau \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 \Phi(\tau)F'\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) d\tau \right] \end{aligned} \quad (5.70)$$

burada $\Phi(\tau)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\Phi(\tau) = \int_{\tau}^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} d\tau \quad (5.71)$$

İspat. Kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \Phi(\tau)F'\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) d\tau \\ &= \frac{2}{\rho-\sigma} \Phi(\tau)F\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) \Big|_0^1 \\ & \quad + \frac{2}{\rho-\sigma} \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} F\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) d\tau \end{aligned} \quad (5.72)$$

$$= -\frac{2}{\rho - \sigma} \Phi(0) F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) + \frac{2}{\rho - \sigma} \rho^{-} I_{\varphi} F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)$$

ve aynı şekilde benzer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \Phi(\tau) F'\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) d\tau \\ &= \frac{2}{\rho - \sigma} \Phi(0) F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) - \frac{2}{\rho - \sigma} \sigma^{+} I_{\varphi} F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.73)$$

eşitlikleri elde edilir. Son olarak (5.70) nolu eşitlikten (5.72) nolu eşitlik çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\rho - \sigma}{4\Phi(0)} (I_1 - I_2) &= 2 \left[\sigma^{+} I_{\varphi} F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) + \rho^{-} I_{\varphi} F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right] \\ &\quad - 4\Phi(0) F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.74)$$

yukarıdaki eşitlik elde edilir. Bu da istenilen sonuçtur. \square

Sonuç 5.42. Lemma 5.41 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} F(x) dx - F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \\ &= \frac{\rho - \sigma}{4} \left[\int_0^1 \tau F'\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) d\tau + \int_0^1 \tau F'\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) d\tau \right] \end{aligned} \quad (5.75)$$

Sonuç 5.43. Lemma 5.41 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} &\frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\rho - \sigma)^{\alpha}} \left[\sigma^{+} J^{\alpha} F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) + \rho^{-} J^{\alpha} F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right] - F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \\ &= \frac{\rho - \sigma}{4} \int_0^1 \tau^{\alpha} F'\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) d\tau + \int_0^1 \tau^{\alpha} F'\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) d\tau \end{aligned} \quad (5.76)$$

Sonuç 5.44. Lemma 5.41 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{k\Gamma_k(\alpha)}$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{\sigma^+,k}^\alpha F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + I_{\rho^-,k}^\alpha F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \quad (5.77) \\ &= \frac{\rho-\sigma}{4} \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{k}-1} F'\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) d\tau \\ & \quad + \int_0^1 \tau^{\frac{\alpha}{k}-1} F'\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) d\tau \end{aligned}$$

Teorem 5.45. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı F fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ dir. Eğer $|F'|$ konveks ise genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_\varphi F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + {}_{\rho^-}I_\varphi F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right| \quad (5.78) \\ & \leq \frac{\rho-\sigma}{4\Phi(0)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| d\tau \right) [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \end{aligned}$$

buradaki $\Phi(\tau)$ fonksiyonu Teorem 3.12'deki şekilde tanımlıdır.

İspat. Lemma 5.41'den ve $|F'|$ nin konveksliğinden yararlanılarak aşağıdaki işlemler yapılır.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_\varphi F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + {}_{\rho^-}I_\varphi F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right| \quad (5.79) \\ & \leq \frac{\rho-\sigma}{4\Phi(0)} \left[\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F'\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) \right| d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F'\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) \right| d\tau \right] \\ & \leq \frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left[\frac{1-\tau}{2} |F'(\sigma)| + \frac{1+\tau}{2} |F'(\rho)| \right] d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\Phi(\tau)| \left[\frac{1+\tau}{2} |F'(\sigma)| + \frac{1-\tau}{2} |F'(\rho)| \right] d\tau \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho - \sigma}{4\Phi(0)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| d\tau \right) [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|]$$

İstenilen sonuç elde edilir. İspat tamamlanır. \square

Sonuç 5.46. Teorem 5.45 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ olarak alınır (5.70) eşitsizliğinden (2.8) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.47. Teorem 5.45 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ olarak alınır aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\rho-\sigma)^\alpha} \left[\sigma^+ J^\alpha F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) + \rho^- J^\alpha \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \right] - F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \\ & \leq \frac{\alpha(\rho-\sigma)^\alpha}{(\alpha+1)} \left[\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right] \end{aligned} \quad (5.80)$$

Sonuç 5.48. Teorem 5.45 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{k\Gamma_k(\alpha)}$ olarak alınır aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{\sigma^+,k}^\alpha F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) + I_{\rho^-,k}^\alpha \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \right] - F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \\ & \leq \frac{(\rho-\sigma)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{(\alpha+1)} \left[\frac{|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|}{2} \right] \end{aligned} \quad (5.81)$$

Teorem 5.49. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow R$ tanımlı F fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ dir. Eğer $q > 1$, iken $|F'|^q$ konveks ise genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\Psi(1)} \left[\sigma^+ I_\varphi F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) + \rho^- I_\varphi F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \right] - F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\rho - \sigma}{2^{\frac{2}{q}}\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \quad (5.82)$$

burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve Φ fonksiyonu Teorem 3.12'deki şekilde tanımlanmıştır..

İspat. (5.70) nolu eşitliğine Hölder eşitsizliği uygulanırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] - F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F'\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) \right| d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F'\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) \right| d\tau \right] \quad (5.83) \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\int_0^1 \left| F'\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 \left| F'\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

$q > 1$ iken $|F'|^q$ konveks ise aşağıdaki eşitsizlikler yazılır.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| F'\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) \right|^q d\tau & \leq \int_0^1 \left[\frac{1-\tau}{2} |F'(\sigma)|^q + \frac{1+\tau}{2} |F'(\rho)|^q \right] d\tau \\ & = \frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \quad (5.84) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left| F'\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) \right|^q d\tau \leq \frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \quad (5.85)$$

(5.84) nolu ve (5.85) nolu eşitsizlikler (5.83) nolu eşitsizlikte yerine yazılırsa (5.82) eşitsizliğinin ilk kısmı ispatlanmış olur. \square

Eşitsizliğin ikinci kısmının ispatı için $\sigma_1 = |F'(\sigma)|^q$, $\rho_1 = 3|F'(\rho)|^q$, $\sigma_2 = 3|F'(\sigma)|^q$ ve $\rho_2 = |F'(\rho)|^q$ olarak alınır. $1 + 3^{\frac{1}{q}} \leq 4$ iken (4.93) nolu eşitsizliğinden yararlanılırsa istenilen sonuç açıkça elde edilir.

Sonuç 5.50. Teorem 5.49 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left| \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} F(x) dx - F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right| \leq \frac{\rho - \sigma}{2^{\frac{2}{p}}} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \quad (5.86)$$

Sonuç 5.51. Teorem 5.49 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\rho - \sigma)^{\alpha}} \left[{}_{\sigma+}J^{\alpha}F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) + {}_{\rho-}J^{\alpha}F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right] - F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \\ & \leq \frac{2^{\alpha-1-\frac{2}{q}}}{(\rho - \sigma)(p+1)^{\frac{1}{p}}} [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \end{aligned} \quad (5.87)$$

Teorem 5.52. $F : [\sigma, \rho] \rightarrow R$ tanımlı F fonksiyonu (σ, ρ) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\sigma < \rho$ dır. Eğer $q \geq 1$ iken $|F'|^q$ konveks ise genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma+}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) + {}_{\rho-}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right] - F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{2^{2+\frac{1}{q}}\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left[(B_1 |F'(\sigma)|^q + B_2 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} + (B_2 |F'(\sigma)|^q + B_1 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \quad (5.88)$$

burada $\Phi(x)$ Lemma 5.41 şekilde, B_1 ve B_2 aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$B_1 = \int_0^1 |\Phi(\tau)|(1 - \tau) d\tau \text{ ve } B_2 = \int_0^1 |\Phi(\tau)|(1 + \tau) d\tau \quad (5.89)$$

İspat. Teorem 5.45'de $q = 1$ alınırsa çözüm açıktır. Eğer $q > 1$ (5.78) nolu eşitsizlik ve power mean eşitsizliğinden yararlanılarak aşağıdaki adımlar izlenir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma+}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) + {}_{\rho-}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right] - F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left[\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F'\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) \right| d\tau \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) \right| d\tau \Big] \tag{5.90} \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F' \left(\frac{1-\tau}{2} \sigma + \frac{1+\tau}{2} \rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left| F' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

ve $|F'|^q$ konveksliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\Psi(1)} \left[\sigma^+ I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \rho^- I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] - F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left[\left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left[\frac{1-\tau}{2} |F'(\sigma)|^q + \frac{1+\tau}{2} |F'(\rho)|^q \right] d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| \left[\frac{1+\tau}{2} |F'(\sigma)|^q + \frac{1-\tau}{2} |F'(\rho)|^q \right] d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right] \tag{5.91} \\
& = \frac{\rho - \sigma}{2^{2+\frac{1}{q}}\Psi(1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\tau)| d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left[(B_1 |F'(\sigma)|^q + B_2 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} + (B_2 |F'(\sigma)|^q + B_1 |F'(\rho)|^q)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. İspat tamamlanır. \square

5.2. İKİNCİ TÜREVİNİN MUTLAK DEĞERİ KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN MİDPOINT EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde ikinci dereceden diferansiyellenebilen fonksiyonlar için bazı midpoint tipli eşitsizlikler elde edilecektir.

Lemma 5.53. $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan I° üzerinde mutlak sürekli, $F'' \in L([\sigma\rho])$ bir fonksiyon ve $\sigma, \rho \in I^\circ$ iken $\sigma < \rho$ koşulları altında aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Phi(0)} \left[\rho - I_\varphi F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \sigma + I_\varphi F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] - F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \\ &= \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Phi(0)} \int_0^1 \zeta(\tau) \left[F'' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) + F'' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) \right] d\tau \end{aligned} \quad (5.92)$$

burada kullanılan ζ ve Φ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\zeta(\tau) = \int_\tau^1 \Phi(s) ds, \quad \Phi(s) = \int_s^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}u\right)}{u} du \quad (5.93)$$

İspat. İlk olarak eşitlik iki parça şeklinde yazılır.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \zeta(\tau) F'' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) d\tau + \int_0^1 \zeta(\tau) F'' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) d\tau \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (5.94)$$

I_1 ve I_2 olan kısımlar için kısmi integrasyon işlemleri uygulanır

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \zeta(\tau) F'' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) d\tau \\ &= -\zeta(\tau) \frac{2}{\rho - \sigma} F' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) \Big|_0^1 \\ &\quad - \frac{2}{\rho - \sigma} \int_0^1 \Phi(\tau) F' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) d\tau \\ &= \frac{2}{\rho - \sigma} \zeta(0) F' \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) - \frac{2}{\rho - \sigma} \left[-\Phi(\tau) \frac{2}{\rho - \sigma} F \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) \Big|_0^1 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} F \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) d\tau \right] \\ &= \frac{2}{\rho - \sigma} \zeta(0) F' \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \frac{4}{(\rho - \sigma)^2} \left[\Phi(0) F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \sigma + I_\varphi F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.95)$$

ve

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \zeta(\tau) F'' \left(\frac{1-\tau}{2} \sigma + \frac{1+\tau}{2} \rho \right) d\tau \\
&= -\frac{2}{\rho-\sigma} \zeta(0) F' \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \\
&\quad + \frac{4}{(\rho-\sigma)^2} \left[\Phi(0) F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) + {}_{\rho-} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.96}$$

sonuçları elde edilir. Bulunan sonuçlar toplanır ve $\frac{(\rho-\sigma)^2}{8\Phi(0)}$ ile çarpılırsa istenilen sonuç elde edilir. \square

Sonuç 5.54. Eğer Lemma 5.53'de $\varphi(\tau) = \tau$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir [34].

Sonuç 5.55. Eğer Lemma 5.53'de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\rho-\sigma)^\alpha} \left[{}_{\rho-} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) + {}_{\sigma+} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \right] - F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \\
&= \frac{(\rho-\sigma)^2}{8(\alpha+1)} \int_0^1 [(\alpha+1)(1-\tau) - 1 + \tau^{\alpha+1}] \\
&\quad \times \left[F'' \left(\frac{1+\tau}{2} \sigma + \frac{1-\tau}{2} \rho \right) + F'' \left(\frac{1-\tau}{2} \sigma + \frac{1+\tau}{2} \rho \right) \right] d\tau
\end{aligned} \tag{5.97}$$

Teorem 5.56. $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan F fonksiyonu $\sigma, \rho \in I^\circ$ ve $\sigma < \rho$ iken I° üzerinde ikinci dereceden diferansiyellenebilir ve $F'' \in L([\sigma, \rho])$ dir. Eğer $|F''|$, $[\sigma, \rho]$ üzerinde konveks ise genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2\Phi(0)} \left[{}_{\rho-} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) + {}_{\sigma+} I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \right] - F \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) \right| \\
&\leq \frac{(\rho-\sigma)^2}{4\Phi(0)} \left(\int_0^1 |\zeta(\tau)| d\tau \right) \left[\frac{|F''(\sigma)| + |F''(\rho)|}{2} \right]
\end{aligned} \tag{5.98}$$

İspat. Lemma 5.53'deki eşitliğine $|F''|$ konveklığı uygulanır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\Phi(0)} \left[\rho - I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \sigma + I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] - F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right| \quad (5.99) \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Phi(0)} \left[\int_0^1 |\zeta(\tau)| \left| F'' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) \right| d\tau \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 |\zeta(\tau)| \left| F'' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) \right| d\tau \right] \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Phi(0)} \left[\int_0^1 |\zeta(\tau)| \left[\frac{1+\tau}{2} |F''(\sigma)| + \frac{1-\tau}{2} |F''(\rho)| \right] d\tau \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 |\zeta(\tau)| \left[\frac{1-\tau}{2} |F''(\sigma)| + \frac{1+\tau}{2} |F''(\rho)| \right] d\tau \right] \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Phi(0)} \left\{ |F''(\sigma)| \int_0^1 |\zeta(\tau)| \left(\frac{1+\tau}{2} \right) d\tau + |F''(\rho)| \int_0^1 |\zeta(\tau)| \left(\frac{1-\tau}{2} \right) d\tau \right. \\
& \quad \left. + |F''(\sigma)| \int_0^1 |\zeta(\tau)| \left(\frac{1-\tau}{2} \right) d\tau + |F''(\rho)| \int_0^1 |\zeta(\tau)| \left(\frac{1+\tau}{2} \right) d\tau \right\} \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Phi(0)} \left(\int_0^1 |\zeta(\tau)| d\tau \right) (|F''(\sigma)| + |F''(\rho)|)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanır. \square

Sonuç 5.57. Eğer Teorem 5.56'da $\varphi(\tau) = \tau$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir [35].

Sonuç 5.58. Eğer Teorem 5.56'da $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\rho - \sigma)^\alpha} \left[I_{\rho-}^\alpha F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + I_{\sigma+}^\alpha F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] - F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right| \quad (5.100) \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+2} \right) \left[\frac{|F''(\sigma)| + |F''(\rho)|}{2} \right]
\end{aligned}$$

Teorem 5.59. $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan F fonksiyonu $\sigma, \rho \in I^\circ$ ve $\sigma < \rho$ iken I° üzerinde ikinci dereceden diferansiyellenebilir ve $F'' \in L([\sigma, \rho])$ dir. Eğer $q > 1$ iken

$|F''|^q, [\sigma, \rho]$ üzerinde konveks ise genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\Phi(0)} \left[\rho - I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \sigma + I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] - F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right| \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Phi(0)} \left(\int_0^1 |\zeta(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{3|F''(\sigma)|^q + |F''(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|F''(\sigma)|^q + 3|F''(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2^{\frac{2}{q}}\Phi(0)} \left(\int_0^1 |\zeta(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|F''(\sigma)| + |F''(\rho)|}{2} \right] \tag{5.101}
\end{aligned}$$

burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat. Lemma 5.53'deki eşitlikde $|F''|^q$ fonksiyonunun $[\sigma, \rho]$ aralığı üzerinde konveksliği ve Hölder's eşitsizliği uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\Phi(0)} \left[\rho - I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) + \sigma + I_{\varphi} F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right] - F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right| \tag{5.102} \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Phi(0)} \left[\int_0^1 |\zeta(\tau)| \left| F'' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) \right| d\tau \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 |\zeta(\tau)| \left| F'' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) \right| d\tau \right] \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Phi(0)} \left\{ \left(\int_0^1 |\zeta(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| F'' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 |\zeta(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| F'' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Phi(0)} \left(\int_0^1 |\zeta(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\int_0^1 \left| F'' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^1 \left| F'' \left(\frac{1-\tau}{2} \sigma + \frac{1+\tau}{2} \rho \right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg] \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Phi(0)} \left(\int_0^1 |\zeta(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\int_0^1 \left(\frac{1+\tau}{2} |F''(\sigma)|^q + \frac{1-\tau}{2} |F''(\rho)|^q \right) d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left(\frac{1-\tau}{2} |F''(\sigma)|^q + \frac{1+\tau}{2} |F''(\rho)|^q \right) d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{8\Phi(0)} \left(\int_0^1 |\zeta(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{3|F''(\sigma)|^q + |F''(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|F''(\sigma)|^q + 3|F''(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

(5.101) nolu eşitsizliğin ilk kısmı ispatlanmış olur. \square

(5.101) nolu eşitsizliğin ikinci kısmının ispatı (4.93) nolu eşitsizlikten açıkça görülür.

Sonuç 5.60. Eğer Teorem 5.59'da $\varphi(\tau) = \tau$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} F(\tau) d\tau - F \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right| \tag{5.103} \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{16(2p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left(\frac{3|F''(\sigma)|^q + |F''(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|F''(\sigma)|^q + 3|F''(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad \frac{(\rho - \sigma)^2}{8} \left(\frac{4}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|F''(\sigma)| + |F''(\rho)|}{2} \right]
\end{aligned}$$

Sonuç 5.61. Bu bölümdeki tüm teoremlerde eğer $\varphi(\tau) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \tau^{\frac{\alpha}{k}}$, $k > 0$, $\varphi(\tau) = \tau(\tau - \sigma)^{\alpha-1}$ ve $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\alpha} \exp(-\frac{1-\alpha}{\alpha} \tau)$, $\alpha \in (0, 1)$ olarak alınırsa sırasıyla k -Riemann-Liouville kesirli, conformable kesirli integral ve üstel çekirdekli kesirli integral operatörleri için trapezoid ve midpoint eşitsizlikleri elde edilir.

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN SİMPSON EŞİTSİZLİĞİ

Bu bölümde eşitsizlikler arasında önemli yer tutan Simpson tipli eşitsizliğin kesirli integraller için genelleştirilmiş hali verilecektir.

Ayrıca kısalık olması amacıyla kullanılan Ψ ve Φ fonksiyonları (3.33) ve (5.71) nolu tanımlar kullanılacaktır.

Lemma 6.1. $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° da mutlak sürekli, $\sigma, \rho \in I^\circ$ ve $\sigma < \rho$ iken $F' \in L_1([\sigma, \rho])$ ise aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left[F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + F(\rho) \right] - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\rho-\sigma}{2\Psi(1)} \int_0^1 \left(\frac{\Psi(\tau)}{2} - \frac{\Psi(1)}{3} \right) F' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) d\tau \\ & \quad + \frac{\rho-\sigma}{2\Psi(1)} \int_0^1 \left(\frac{\Psi(1)}{3} - \frac{\Psi(\tau)}{2} \right) F' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) d\tau \end{aligned} \quad (6.1)$$

İspat. Dikkat edilirse I aşağıdaki şekilde iki kısma ayrılır.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{\Psi(\tau)}{2} - \frac{\Psi(1)}{3} \right) F' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) d\tau \\ & \quad + \int_0^1 \left(\frac{\Psi(1)}{3} - \frac{\Psi(\tau)}{2} \right) F' \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho \right) d\tau \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Her kısma ayrı ayrı kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \left(\frac{\Lambda(\tau)}{2} - \frac{\Lambda(1)}{3} \right) F' \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) d\tau \\ &= \left(\frac{\Lambda(\tau)}{2} - \frac{\Lambda(1)}{3} \right) F \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) \frac{2}{\rho-\sigma} \Big|_0^1 \\ & \quad - \frac{1}{\rho-\sigma} \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\tau\right)}{\tau} F \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho \right) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\rho - \sigma} \left[\frac{\Lambda(1)}{6} F(\rho) + \frac{\Lambda(1)}{3} F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\frac{\sigma + \rho}{2}}^{\rho} \frac{\varphi\left(\varkappa - \frac{\sigma + \rho}{2}\right)}{\varkappa - \frac{\sigma + \rho}{2}} F(\varkappa) d\varkappa \\
&= \frac{\Lambda(1)}{6(\rho - \sigma)} \left[2F(\rho) + F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right] - \frac{1}{\rho - \sigma} (\rho - I_{\varphi}) F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \left(\frac{\Lambda(1)}{3} - \frac{\Lambda(\tau)}{2} \right) F' \left(\frac{1 + \tau}{2} \sigma + \frac{1 - \tau}{2} \rho \right) d\tau \\
&= \frac{\Lambda(1)}{6(\rho - \sigma)} \left[2F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right] - \frac{1}{\rho - \sigma} (\sigma + I_{\varphi}) F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

sonuçları elde edilir. (6.3) ile (6.4) eşitlikleri toplanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\rho - \sigma}{2\Lambda(1)} (I_1 + I_2) &= \frac{1}{6} \left[F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) + F(\rho) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[\sigma + I_{\varphi} F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) + \rho - I_{\varphi} F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Bu da istenilen sonuçtur. □

Sonuç 6.2. Eğer Lemma 6.1'de $\varphi(\tau) = \tau$ alınırsa (5.83) eşitliği elde edilir.

Sonuç 6.3. Eğer Lemma 6.1'de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa (2.44) eşitliği elde edilir.

Sonuç 6.4. Lemma 6.1 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6} \left[F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) + F(\rho) \right] \\
&\quad - \frac{2^{1 - \frac{\alpha}{k}} (\rho - \sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha + k)} \left[I_{\sigma^+, k}^{\alpha} F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) - I_{\rho^-, k}^{\alpha} F\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right] \\
&= \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{2} - \frac{1}{3} \right) F' \left(\frac{1 - \tau}{2} \sigma + \frac{1 + \tau}{2} \rho \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{3} - \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{2} \right) F' \left(\frac{1 + \tau}{2} \sigma + \frac{1 - \tau}{2} \rho \right) \right] d\tau
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Teorem 6.5. $F : I = [\sigma, \rho] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° da mutlak sürekli, $\sigma, \rho \in I^{\circ}$ ve $\sigma < \rho$ iken $F' \in L_1([\sigma, \rho])$. Eğer $|F'|$, $[\sigma, \rho]$ aralığı üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik

sağlanır.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + F(\rho) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{(\rho-\sigma)}{2\Psi(1)} K(\tau) [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \tag{6.7}
\end{aligned}$$

burada $K(\tau)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$K(\tau) = \int_0^1 \left| \frac{\Psi(\tau)}{2} - \frac{\Psi(1)}{3} \right| d\tau \tag{6.8}$$

İspat. Lemma 6.1 ve $|F'|$ 'nin, $[\sigma, \rho]$ aralığı üzerinde konveksliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + F(\rho) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)} \int_0^1 \left[\left| \frac{\Lambda(\tau)}{2} - \frac{\Lambda(1)}{3} \right| \left| F'\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) \right| \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{\Lambda(1)}{3} - \frac{\Lambda(\tau)}{2} \right| \left| F'\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) \right| \right] d\tau \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)} \int_0^1 \left| \frac{\Lambda(\tau)}{2} - \frac{\Lambda(1)}{3} \right| \left(\frac{1-\tau}{2} |F'(\sigma)| + \frac{1+\tau}{2} |F'(\rho)| \right) d\tau \\
& \quad + \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)} \int_0^1 \left| \frac{\Lambda(1)}{3} - \frac{\Lambda(\tau)}{2} \right| \left(\frac{1+\tau}{2} |F'(\sigma)| + \frac{1-\tau}{2} |F'(\rho)| \right) d\tau \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)} [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \int_0^1 \left| \frac{\Lambda(\tau)}{2} - \frac{\Lambda(1)}{3} \right| d\tau \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)} [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] K(\tau) \tag{6.9}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Burada $K(\tau)$ (6.8)'de tanımlanmıştır. İspat tamamlanır. \square

Sonuç 6.6. Teorem 6.5 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ alınırsa Teorem 6.5, [38] nolu çalışmanın Sonuç 1'e dönüşür.

Sonuç 6.7. Teorem 6.5 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$, alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + F(\rho) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{2^{1-\frac{\alpha}{k}}(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} \left[I_{\sigma^+,k}^{\alpha} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - I_{\rho^-,k}^{\alpha} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \right| \\ & \leq \frac{\rho-\sigma}{2} A(\alpha,k) [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \end{aligned} \quad (6.10)$$

burada

$$A(\alpha,k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k}{\alpha}+1} \left(1 - \frac{k}{k+\alpha}\right) + \frac{k}{2(\alpha+k)} - \frac{1}{3} \quad (6.11)$$

şeklinde ifade edilmiştir.

İspat. Eğer Teorem 6.5 'de $\varphi(\tau) = \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + F(\rho) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{2^{1-\frac{\alpha}{k}}(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} \left[I_{\sigma^+,k}^{\alpha} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - I_{\rho^-,k}^{\alpha} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \right| \\ & \leq \frac{\rho-\sigma}{2} [|F'(\sigma)| + |F'(\rho)|] \int_0^1 \left| \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{2} - \frac{1}{3} \right| d\tau \end{aligned} \quad (6.12)$$

eşitsizliği elde edilir ve burada basit hesaplamalar ile

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{2} - \frac{1}{3} \right| d\tau &= \int_0^{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k}{\alpha}}} \left(\frac{1}{3} - \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{2} \right) d\tau + \int_{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k}{\alpha}}}^1 \left(\frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{2} - \frac{1}{3} \right) d\tau \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k}{\alpha}+1} \left(1 - \frac{k}{k+\alpha}\right) + \frac{k}{2(\alpha+k)} - \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (6.13)$$

sonucuna ulaşılır. İspat tamamlanır. □

Sonuç 6.8. Eğer sonuç 6.7'de $\alpha = k = 1$ alınırsa sonuç 6.7, [38] nolu çalışmadaki Sonuç 1'e dönüşür.

Sonuç 6.9. Sonuç 6.7 koşulları altında $k = 1$ alınırsa,

$$\left| \frac{1}{6} \left[F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + F(\rho) \right] \right|$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2^{1-\alpha}(\rho-\sigma)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[I_{\sigma^+}^\alpha F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - I_{\rho^-}^\alpha F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{2} B(\alpha) \left[|F'(\sigma)| + |F'(\rho)| \right]
\end{aligned} \tag{6.14}$$

burada

$$B(\alpha) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{\alpha}+1} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) + \frac{1}{2(\alpha+1)} - \frac{1}{3} \tag{6.15}$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Teorem 6.10. $F : I = [\sigma, \rho] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° da mutlak süreklî, $\sigma, \rho \in I^\circ$ ve $\sigma < \rho$ iken $F' \in L_1([\sigma, \rho])$. Eğer $q > 1$ iken $|F'|^q, [\sigma, \rho]$ aralığı üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + F(\rho) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_\Psi F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + {}_{\rho^-}I_\Psi F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)} \left(\int_0^1 \left| \frac{\Psi(\tau)}{2} - \frac{\Psi(1)}{3} \right|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned} \tag{6.16}$$

burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

İspat. Lemma 6.1 ve Hölder's eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + F(\rho) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\sigma^+}I_\Psi F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + {}_{\rho^-}I_\Psi F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{\rho-\sigma}{2\Psi(1)} \int_0^1 \left[\left| \frac{\Psi(\tau)}{2} - \frac{\Psi(1)}{3} \right| \left| F'\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\rho\right) \right| \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{\Psi(1)}{3} - \frac{\Psi(\tau)}{2} \right| \left| F'\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) \right| \right] d\tau \\
& \leq \left(\int_0^1 \left| \frac{\Psi(\tau)}{2} - \frac{\Psi(1)}{3} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| F'\left(\frac{1+\tau}{2}\rho + \frac{1-\tau}{2}\sigma\right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 \left| \frac{\Psi(1)}{3} - \frac{\Psi(\tau)}{2} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| F'\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\rho\right) \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^1 \left| \frac{\Psi(\tau)}{2} - \frac{\Psi(1)}{3} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left(\frac{1+\tau}{2} |F'(\rho)|^q + \frac{1-\tau}{2} |F'(\sigma)|^q \right)^{\frac{1}{q}} d\tau \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 \left| \frac{\Psi(1)}{3} - \frac{\Psi(\tau)}{2} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left(\frac{1+\tau}{2} |F'(\sigma)|^q + \frac{1-\tau}{2} |F'(\rho)|^q \right)^{\frac{1}{q}} d\tau \right] \right. \\
&\leq \left(\int_0^1 \left| \frac{\Psi(\tau)}{2} - \frac{\Psi(1)}{3} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \tag{6.17}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. \square

Sonuç 6.11. Teorem 6.10 koşulları altında $\varphi(\tau) = \tau$ alınırsa Teorem 6.10, [38] nolu çalışmadaki Teorem 4'e dönüşür.

Sonuç 6.12. Teorem 6.10 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa Teorem 6.10, [39] nolu çalışmadaki Sonuç 2.10 elde edilir.

Sonuç 6.13. Teorem 6.10 koşulları altında $\varphi(\tau) = \frac{\tau^k}{k\Gamma_k(\alpha)}$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{6} \left[F(\sigma) + 4F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) + F(\rho) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{2^{1-\frac{\alpha}{k}}(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} \left[I_{\sigma^+,k}^{\alpha} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - I_{\rho^-,k}^{\alpha} F\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \right] \right| \\
&\leq \frac{\rho-\sigma}{2} \left(\int_0^1 \left| \frac{\tau^{\frac{\alpha}{k}}}{2} - \frac{1}{3} \right|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left[\left(\frac{|F'(\sigma)|^q + 3|F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|F'(\sigma)|^q + |F'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \tag{6.18}
\end{aligned}$$

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tezde sunulan üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı bölümler elde ettiğimiz sonuçları içermektedir.

Öncelikle literatürde önemli yere sahip olan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin Riemann integrali, Riemann-Liouville integrali, k -Riemann-Liouville kesirli integrali, Katugampola kesirli integrali, Katugampola kesirli integrali ile ayrı ayrı ifade edilmiş eşitsizlikleri, tanımladığımız yeni kesirli integral ile tek formda ifade edilmiştir. Bu da literatürdeki kalabalığı toparlayıp yalınlaştırmamıza imkan sunar. Ayrıca tanımladığımız kesirli integral ifadesi ile elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliğini farklı sınır değerler içinde yeniden ifade edilmiştir.

Daha sonraki bölümlerde Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ ve sol tarafının karşılığı olan Midpoint ve Trapezoid tipli eşitsizliklerinde yapılan tanımdan yararlanılarak genelleştirilmesi elde edilmiştir. Son kısımda ise nümerik analizde önemli kullanım alanına sahip olan Simpson eşitsizliğini geliştirip daha yaygın kullanımına imkan sağlanmıştır.

Elde edilen tanım ile bazı eşitsizliklerin birkaç formunu veren genelleştirmeler yapılmıştır. Farklı tipli eşitsizlerin genelleştirilmesinde de kullanılabilir.

8. KAYNAKLAR

- [1] G. H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1952.
- [2] E. F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1965.
- [3] J. Hadamard, “Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d’une fonction considree par”, *Journal de mathematiques pures et appliquees*. c. 58, ss. 171–215, 1893.
- [4] A.G. Azpeitia, “Convex functions and the Hadamard inequality”, *Revista Colombiana de Matematicas*, c.28 , ss. 7-12, 1994.
- [5] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1970.
- [6] Dragomir S. S. and Pearce C. E. M., *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, Victoria, Australia: RGMIA Monographs, University, 2000.
- [7] Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I., *Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications*, Amsterdam, Holland: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [8] S. Miller and B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, New York, ABD:vJohn Wiley & Sons, USA, 1993.
- [9] R. Gorenflo and F. Mainardi, *Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order*, Wien, Australia: Springer Verlag, 1997, ss. 223-276.
- [10] S. S. Dragomir and R.P. Agarwal, “Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula”, *Applied Mathematics Letters*, c. 11, sayı 5, ss. 91-95, 1998.
- [11] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, c.204, Amsterdam, Holland: Elsevier Science Limited, 2006, ss.69-132.
- [12] A. Akkurt, M. E Yıldırım ve H Yıldırım, “On some integral inequalities for (k,h)-Riemann-Liouville fractional integral”, *New Trends in Mathematical Sciences*, c. 4, sayı 1, ss. 138-146, 2016.
- [13] R.K. Raina, “On generalized Wright’s hypergeometric functions and fractional calculus operators”, *East Asian mathematical journal*, c. 21, sayı 2, ss. 191-203, 2005.

- [14] M. Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz ve N. Basak, “Hermite-Hadamard’s inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities”, *Mathematical and Computer Modelling*, c. 57, ss. 2403–2407, 2013.
- [15] M. Z. Sarikaya ve H. Yaldiz, “On generalization integral inequalities for fractional integrals”, *Nihonkai Mathematical Journal*, c. 25, ss.93–104, 2014.
- [16] U. S. Kirmaci, “Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula”, *Applied Mathematics and Computation*, c. 147, ss. 137–146, 2004.
- [17] M. Z. Sarikaya, H. Yaldiz ve N. Basak, “New fractional inequalities of Ostrowski-Grüss type”, *Le Matematiche*, c. LXIX , ss. 227-235, 2014 .
- [18] M. Z. Sarikaya ve H. Yaldiz, “On Hermite-Hadamard Type Inequalities for ϕ -convex Functions via Fractional Integrals”, *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, c. 9, sayı 2, ss. 243-258, 2015.
- [19] M.E. Ozdemir, S.S. Dragomir ve C. Yildiz, “The Hadamard’s inequality for convex function via fractional integrals”, *Acta Mathematica Scientia*, c. 33B, sayı 5, ss. 1293–1299, 2013.
- [20] T. Ali, M. A. Khan and Y. Khurshidi, “Hermite-Hadamard inequality for fractional integrals via eta-convex functions”, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, c. 86, sayı 1, ss. 153-164, 2017.
- [21] M. Kunt ve İ. İşcan, “Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically (α, m) -convex functions by using fractional integrals”, *Konuralp Journal Mathematics*, c.5, sayı 1, ss. 201–213, 2017.
- [22] B. Ahmad, A. Alsaedi, M. Kirane and B. T.Torebek, “Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer, Dragomir-Agarwal and Pachpatte Type Inequalities for Convex Functions via Fractional Integrals”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 353, sayı June, ss.120-129, 2019.
- [23] M. Iqbal, M. I. Bhatti and K. Nazeer, “Generalization of Inequalities Analogous to Hermite–Hadamard Inequality via Fractional Integrals”, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, c. 52, sayı 3, ss. 707-716, 2015.
- [24] S. Mubeen and G. M Habibullah, “k-Fractional integrals and application”, *International Contemporary Mathematical Sciences*, c. 7, sayı. 2, ss. 89 - 94, 2012.
- [25] G. Farid, A. Rehman and M. Zahra, “On Hadamard inequalities for k-fractional integrals”, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, c. 21, sayı 3, ss. 463-478, 2016.
- [26] R. Hussain, A. Ali, A. Latif ve G. Gulshan, “Some k-fractional associates of Hermite-Hadamard’s inequality for quasi-convex functions and applications to special means”, *Fractional Differential Calculus*, c. 7, sayı 2, ss. 301–309, 2017.
- [27] U.N. Katugampola, “New approach to a generalized fractional integral”, *Applied Mathematical Computational*, c. 218, sayı 3, ss.860–865, 2011.

- [28] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef and M. Sababheh, “A new definition of fractional derivative”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 264, ss. 6570, 2014.
- [29] H. Budak, F.Ertuğral ve M.Z. Sarikaya, “ New generalization of hermite-hadamard type inequalities via generalized fractional integrals”, *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, c. 47, sayı 2, ss. 369-386, 2020.
- [30] M. E. Özdemir, M. Avcı-Ardıç ve H. Kavurmacı-Önalın, “ Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex and s-concave functions via fractional integrals”, *Turkish Journal of Science*, c. 1, sayı 1, ss.28-40, 2016.
- [31] M.Z. Sarikaya ve H. Yildirim, “On Hermite-Hadamard type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals”, *Miskolc Mathematical Notes*, c. 17, sayı 2, ss. 1049–1059, 2017.
- [32] F. Usta, H. Budak, M.Z. Sarikaya ve H yildirim, “Some Hermite-Hadamard and Ostrowski type inequalities for fractional integral operators with exponential kernel”, *Acta et Commentationes Universitatis tartuensis de Mathematica*, c.23, sayı 1, 2019.
- [33] M. Z. Sarikaya ve N. Aktan, “On the generalization some integral inequalities and their applications”, *Mathematical and Computer Modelling*, c. 54, sayı 9-10, ss. 2175-2182, 2011.
- [34] M. A. Noor ve M. U. Awan, “Some integral inequalities for two kinds of convexities via fractional integrals”, *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics*, c. 5, sayı 2, ss. 129-136, 2013.
- [35] M. Z. Sarikaya, A. Saglam ve H. Yildirim, “New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex”, *International Journal of Open Problems Computer and Mathematic*, c. 5, sayı 3, ss. 2074-2827, 2012.
- [36] H.Kavurmaci, M. Avcı ve M.E. Özdemir, “New inequalities of hermite-hadamard type for convex functions with applications”, *Journal of Inequalities and Applications*, c.86 , 2011.
- [37] İ. İşcan, “On generalization of different type integral inequalities for s-convex functions via fractional integrals”, *Applicable Analysis*, c. 93, sayı 9, ss. 1846–1862, 2014
- [38] M. Z. Sarikaya, E. Set ve M. E. Ozdemir, “On new inequalities of Simpson’s type for s-convex functions”, *Computers and Mathematics with Applications*, c.60, ss. 2191–2199, 2010.
- [39] J. Chen and X. Huang, “Some new inequalities of Simpson’s type for s-convex functions via fractional integrals”, *Filomat*, c. 31, sayı 15, ss. 4989-4997, 2017
- [40] H. Kavurmacı, M. Avcı ve M.E. Özdemir, “New inequalities of hermite-hadamard type for convex functions with applications”, *Journal of Inequalities and Applications*, c. 86, 2011.

- [41] M.Z. Sarikaya ve H. Budak, “Generalized Hermite-Hadamard type integral inequalities for fractional integrals”, *Filomat*, c. 30, sayı 5, ss. 1315–1326, 2016.
- [42] G. A. Anastassiou, “General fractional Hermite-Hadamard inequalities using m-convexity and (s,m)-convexity”, *Frontiers in Time Scales and Inequalities*, ss. 237-255, 2016.
- [43] J.E. Pečarić, F. Proschan and Y.L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, Academic Press, Boston, 1992.
- [44] M. E. Ödemir, M. Avci, ve E. Set, “On some inequalities of Hermite-Hadamard-type via m-convexity”, *Applied Mathematics Letters*, c. 23, ss. 1065–1070, 2010.
- [45] M. E. Ödemir, M. Avci, ve H. Kavurmaci, “Hermite–Hadamard-type inequalities via (α, m) -convexity”, *Computer Mathematic with Applications*, c. 61, ss. 2614–2620, 2011.
- [46] M.Z. Sarikaya, A. Akkurt , H. Budak, M. E. Yildirim ve H Yildirim, “Hermite-hadamard’s inequalities for conformable fractional integrals”, *Research Report Collection*, c. 19, sayı 83,2016.
- [47] A. Barani, S. Barani, and S. S. Dragomir, “Refinements of Hermite-Hadamard type inequality for functions whose second derivatives absolute values are quasiconvex”, *Research Report Collection*, c. 14, sayı 69, 2011.
- [48] A. Barani, S. Barani, and S. S. Dragomir, “Refinements of Hermite-Hadamard inequalities for functions when a power of the absolute value of the second derivative is P-convex”, *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 615737, 2012.
- [49] İ.İşcan, “On Generalization of different type inequalities for some convex functions via fractional integrals”, *Applicable Analysis*, c. 93, sayı 9, ss. 1846-18622, 2014.
- [50] S.S. Dragomir, R.P. Agarwal and P. Cerone, “On Simpson’s inequality and applications”, *Journal of Inequalities Applied*, c.5, ss. 533-579, 2000.
- [51] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*, Ankara, Türkiye: Gazi Kitapevi, 2006.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Fatma ERTUĞRAL

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2021
Y. Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2015
Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2013
Lise		Dikmen Lisesi	2008

YAYINLAR

- [1] F.Ertugral, M.Z. Sarikaya ve H. Budak, “On Refinements of Hermite-Hadamard-Fejér Type Inequalities for Fractional Integral Operators”, *Application and Applied Mathematic*, c.13, ss. 426-442, 2018.
- [2] F. Usta, H. Budak, F. Ertugral, ve M. Z. Sarikaya, “The Minkowski’s inequalities utilizing newly defined generalized fractional integral operators”, *Ankara University Communications Faculty of Sciences University of Ankara*, c. 68, sayı 1, ss.686–701, 2019.
- [3] M.Z. Sarikaya ve F.Ertugral “Generalized Hermite-Hadamard type integral inequalities for s-convex functions via fractional integrals” *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, c. 41, sayı2, ss. 226-233, 2014.
- [4] M.Z. Sarikaya, F.Ertugral ve F. Yildirim, “On the Hermite-Hadamard-Fejer type integral inequality for s-convex function” *Konuralp Journal of Mathematics*, c.6, sayı 1, ss. 35-41, 2018.

- [5] H. Budak, F. Ertugral, ve E. Pehlivan, “Hermite-Hadamard Type Inequalities for Twice Differentiable Functions via Generalized Fractional Integrals” *Filomat*, c. 33, sayı 15, ss. 4967-4979, 2019.
- [6] F.Ertugral ve M.Z. Sarikaya, “Simpson type integral inequalities for generalized fractional integral” *RACSAM*, c. 113, ss. 3115-3124, 2019.
- [7] M.Z. Sarikaya ve F.Ertugral, “On the generalized Hermite-Hadamard inequalities” *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, c. 47, sayı 1, ss. 193-213, 2020.
- [8] F.Ertugral ve M.Z. Sarikaya, “Some trapezoid type inequalities for generalized fractional integral” *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, c.13, sayı 1, ss. 289-295, 2022.
- [9] H. Budak, F. Ertugral, ve M.Z. Sarikaya, “New Generalization of Hermite-Hadamard type inequalities via generalized fractional integrals” *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, c. 47, sayı 2, ss. 369-386, 2020.
- [10] F. Ertugral ve M.Z. Sarikaya “ On the extended Simpson type integral inequalities” *Proceedings of the international conference on Mathematical studies and application, Karamanoglu Mehmetbey University, Karaman, Turkey, 4-6 October 2018.*
- [11] F.Ertugral,M.Z. Sarikaya ve H. Budak, “On Hermite-Hadamard type inequalities associated with the generalized fractional integrals” submitted
- [12] M.Z. Sarikaya, H. Öğülmüş ve F.Ertugral, “On Hermite-Hadamard type inequalities (P, φ_h) -convex functions” admitted