



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN YENİ ORTA
NOKTA TIPLI EŞİTSİZLİKLER**

RABİA KAPUCU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. HÜSEYİN BUDAK**

DÜZCE, 2021

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN YENİ ORTA
NOKTA TIPLI EŞİTSİZLİKLER**

Rabia KAPUCU tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Samet ERDEN
Bartın Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 01/07/2021

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

1 Temmuz 2021

Rabia KAPUCU

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans eğitimin boyunca tez konusunun belirlenmesinden son haline getirilinceye kadar bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen ve rehberlik eden çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Hüseyin BUDAK’a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum maddi manevi destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

1 Temmuz 2021

Rabia KAPUCU

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
SİMGELER	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. KONVEKS FONKSİYONLAR VE ÖZELLİKLERİ.....	4
2.2. KESİRLİ İNTEGRALLER	7
2.3. BAZI EŞİTSİZLİKLER	9
2.4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ	13
2.5. GENELLEŞTİRİLMİŞ ORTA NOKTA TIPLI EŞİTSİZLİKLER	15
3. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇİN ORTA NOKTA TIPLI EŞİTSİZLİKLER	18
4. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇİN YENİ GENELLEŞTİRİLMİŞ ORTA NOKTA TIPLI EŞİTSİZLİKLER	28
5. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN ORTA NOKTA TIPLI EŞİTSİZLİKLER.....	40
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	58
7. KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	63

SİMGELER

$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar
f'	f fonksiyonunun 1. dereceden türevi
I	Reel sayılarda herhangi bir aralık
I°	I aralığının içi
$\kappa_1 + J_\varphi f$	Genelleştirilmiş sol kesirli integral
$\kappa_2 - J_\varphi f$	Genelleştirilmiş sağ kesirli integral
$J_{\kappa_1+}^\alpha f$	α . mertebeden sol kesirli integral
$J_{\kappa_2-}^\alpha f$	α . mertebeden sağ kesirli integral
$J_{\kappa_1+,k}^\alpha f$	α . mertebeden sol k kesirli integral
$J_{\kappa_2-,k}^\alpha f$	α . mertebeden sağ k kesirli integral
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{R}^n$	n - boyutlu Öklid uzayı
Γ	Gamma fonksiyonu

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN YENİ ORTA NOKTA TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Rabia KAPUCU

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin BUDAK

Temmuz 2021, 62 sayfa

Bu tez çalışması genelleştirilmiş kesirli integraller için orta nokta tipli eşitsizlikler üzerinedir. Altı bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü giriş niteliğindedir. İkinci bölümü ise tezde kullanılan bazı tanım ve teoremlerden oluşmaktadır. Ayrıca ikinci bölümde genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri ve genelleştirilmiş orta nokta tipli eşitsizlikler verilmiştir. Üçüncü bölümde Budak ve Agarwal tarafından elde edilen Riemann-Liouville kesirli integralleri için orta nokta tipli eşitsizlikler sunulmuştur. Tez çalışmasının ana kısmını dördüncü ve beşinci bölümler oluşturmaktadır. Dördüncü bölümde Riemann-Liouville kesirli integralleri için yeni orta nokta tipli eşitsizlikler ispatlanmıştır. Beşinci bölümde ise genelleştirilmiş kesirli integraller için orta nokta tipli eşitsizlikler elde edilmiş ve bu eşitsizliklerin özel durumları araştırılmıştır. Tezin son kısmı olan altıncı bölümde ise bazı sonuçlar ve sonraki çalışmalar için öneriler verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Kesirli integraller, Konveks fonksiyonlar, Orta Nokta eşitsizliği.

ABSTRACT

NEW MIDPOINT TYPE INEQUALITIES FOR GENERALIZED FRACTIONAL INTEGRALS

Rabia KAPUCU

Düzce University

Institute of Graduate Studies, Department of Mathematics

Master's Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin BUDAK

July 2021, 62 pages

This thesis is on midpoint type inequalities for generalized fractional integrals. The first part of this thesis, which consists of six chapters, is an introduction. The second part consists of some definitions and theorems used in the thesis. Moreover, in the second chapter, generalized fractional integral operators and generalized midpoint type inequalities are given. In the third chapter, midpoint type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals obtained by Budak and Agarwal are presented. The fourth and fifth sections constitute the main part of the thesis study. In the fourth chapter, new midpoint type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals are proved. In the fifth chapter, midpoint type inequalities for generalized fractional integrals are obtained and special cases of these inequalities are investigated. In the sixth section, the last part of the thesis, some results and suggestions for future studies are given.

Keywords: Hermite-Hadamard inequalities, Fractional integrals, Convex functions, Midpoint inequality.

1. GİRİŞ

Matematikte "eşitsizlik" kelime anlamı olarak en az iki farklı değer arasındaki farkı ifade eden bir ilişkidir. Aslında karşılaştırmalar sonucu ortaya çıkan bir kavramdır. Eşitsizlik kavramı çok eski tarihlere dayansa da sistematik olarak matematiğe dahil olması 20. yüzyılın başlarında Jensen tarafından ele alınmıştır. Eşitsizliklerin uygulama alanı yalnız matematik alanı ile sınırlı kalmayıp aynı zamanda fizik ve mühendislik alanlarında da kendine yer bulmuştur. Eşitsizlik alanında yapılan ilk temel çalışma 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Polya tarafından kaleme alınan "Inequalities" kitabıdır [1]. 1934 yılından sonra elde edilen yeni eşitsizlikleri içeren "Inequalities" adlı kitap 1961 yılında E. F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından yayımlanmıştır [2]. 1970 yılında Mitrinoviç'in yayımladığı yukarıda sözü edilen iki kitapta yer almayan konuları "Analytic Inequalities" isimli kitabında yer vermiştir [3].

Konvekslik; analiz, topoloji, olasılık teorisi, grafik teorisi, fonksiyonel analiz ve ayrıca lineer olmayan analiz gibi uygulama alanları ile çok köklü bir geçmişe sahiptir. Konvekslik ve konkavlık kavramları farklı alanlarda ve günlük hayatta fazlasıyla kullanılmaktadır. Güzel sanatlarda, finans matematiğinde, sağlık alanında konveks ve konkav lenslerde, fizik alanında konveks ve konkav aynalarda, biyoloji alanında yaprak sınıflandırması gibi pek çok şekilde karşımıza çıkmaktadır.

Konveks fonksiyon eşitsizlik üzerinde kurulmuş bir tanımdır. Bir çok eşitsizlik konveks fonksiyon yardımıyla elde edilmiştir. Bu sebeple konveks fonksiyonlar için eşitsizlik çok önemli bir yere sahiptir. Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π (pi) değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Hermite, 1881 yılında konvekslik kavramı ile ilgili elde ettiği eşitsizlik 1883 yılında Mathesis dergisinde yayımlanmıştır. Hadamard ise 1893 yılında bu eşitsizliği bağımsız bir şekilde tekrar ele almıştır. Bu sebeple literatüre Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak geçmiştir. Özel olarak Hermite-Hadamard eşitsizliği literatürde çok önemli bir yere sahip olduğu göz ardı edilemez. Eşitsizlik uzun yıllardır çalışılan bir alandır. İntegral eşitsizlikleri ise bir çok

matematikçi tarafından son otuz yıldır ilgi gören ve üzerine bir çok makale yazılan bir konudur.

En iyi matematikçilerden biri olan Newton 1661 de vebadan kaçmak için ailesiyle gittiği çiftliklerinde kaldığı iki yıl içerisinde türev ve integral üzerine çalışmalar yapmıştır. Fakat bu çalışmalarını hemen yayımlamamıştır. Newtondan habersiz olarak Leibniz ise türev ve integral tanımları üzerinde çalışmış 1684 ve 1686 yıllarında yayımlamıştır.

Kesirli türev ve kesirli integral kavramlarının temeli ise 1695'te Leibniz'in L'Hospital'e "Tam sayılı mertebeden türevlerin anlamı tam sayılı olmayan türevlere genişletilebilir mi?" sorusunu sorduğu bir mektupla başlar. Bu mektuba L'Hospital ise "1/2. mertebeden olursa ne olur?" sorusu ile cevap vermiştir. Leibniz "ileride bir gün çok güzel sonuçlara yol açacak ancak şimdilik bir paradoks" demiştir. Bu mektuptan sonra kesirli türev ve integral birçok matematikçi için çalışma alanı olmuştur. Ancak kesirli türev ve integral tanımlarını ilk olarak Liouville ele almıştır.

Konveks fonksiyonlar için en önemli eşitsizliklerden biri olan Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir:

Eğer $f : I \rightarrow R$ konveks bir fonksiyon ve $\kappa_1, \kappa_2 \in I$ olmak üzere $\kappa_1 < \kappa_2$ olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x) dx \leq \frac{f(\kappa_1) + f(\kappa_2)}{2} \quad (1.1)$$

dir. f konkav fonksiyon ise her iki eşitsizlik ters yönde olur [4].

Dragomir ve Agarwal [5] Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı olan

$$\frac{f(\kappa_1) + f(\kappa_2)}{2} - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x) dx \quad (1.2)$$

farkı için, Kırmacı [6] Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı olan

$$\frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x) dx - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \quad (1.3)$$

farkı için (sırasıyla yamuk tipli ve orta nokta tipli) üst sınırlar elde etmişlerdir. Son yıllarda Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genellemeleri ve birçok yamuk ve orta nokta tipli eşitsizlik elde edilmiştir. Örneğin; bazı çalışmalarda yazarlar Hermite-Hadamard eşitsizliğini diğer konveks türleri için elde etmişlerdir ([7], [8], [9], [10], [11], [12]). Qaisar ve Hussain konveks ve konkav fonksiyonlar için birçok genelleştirilmiş orta nokta eşitsizlikleri elde etmiştir [13]. Diğer yandan, Sarıkaya ve ark. Riemann-Liouville kesirli integralleri için Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ve yamuk tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir [14]. Iqbal ve ark. ise orta nokta eşitsizliklerini Riemann-Liouville kesirli integralleri için genelleştirmişlerdir [15]. Budak ve Agarwal ise Riemann-Liouville kesirli integralleri için daha genel orta nokta tipli eşitsizlikler ispatlamışlardır [16]. Ayrıca Sarıkaya ve Yıldırım Riemann-Liouville kesirli integralleri için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin başka bir versiyonunu elde edip, bu eşitsizliğe uygun orta nokta tipli eşitsizlikler vermişlerdir [17]. Farid ve ark. da k -Riemann-Liouville kesirli integralleri için Hermite-Hadamard eşitsizlikleri elde etmişlerdir [18]. Literatürde kesirli integraller için Hermite-Hadamard ve orta nokta tipli eşitsizlikler üzerine çalışılmış birçok makale vardır. Bunlardan bazıları [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31] biçiminde sıralanabilir.

Bu tez çalışmasında, Budak ve Agarwal'ın elde ettiği sonuçlar dikkate alınarak ilk olarak Riemann-Liouville kesirli integralleri için yeni genelleştirilmiş orta nokta eşitsizlikleri elde edilecek. Daha sonra genelleştirilmiş kesirli integraller için benzer sonuçlar sunulacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak bazı tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. KONVEKS FONKSİYONLAR VE ÖZELLİKLERİ

Bu alt bölümde çeşitli konveks fonksiyon sınıfları sunulacaktır.

Tanım 2.1. (Konveks Fonksiyon): $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $x, y \in I$ ve $\xi \in [0, 1]$ için

$$f(\xi x + (1 - \xi)y) \leq \xi f(x) + (1 - \xi)f(y) \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizlik yön değiştirdiği takdirde f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir [32].

Tanım 2.2. (J-Konveks Fonksiyon): $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (2.2)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde J-konveks fonksiyon denir [3].

Tanım 2.3. (h-Konveks Fonksiyon): $h : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in I$, $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y) \quad (2.3)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna h-konveks fonksiyon denir. Eşitsizlik yön değiştirdiği takdirde h fonksiyonuna h-konkav fonksiyon denir [33].

Tanım 2.4. (Kesin J-Konveks Fonksiyon): $\forall x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (2.4)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Kesin J-konveks fonksiyon denir [3].

Tanım 2.5. (Quasi-Konveks Fonksiyon): $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme ve $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (2.5)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna quasi-konveks fonksiyon denir.

Aynı koşullar altında

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \max\{f(x), f(y)\} \quad (2.6)$$

ise f fonksiyonuna quasi-konkav fonksiyon denir [34].

Tanım 2.6. (Wright-Konveks Fonksiyon): $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > 0$, $\delta > 0$ koşulları altında $\forall x, y, y + \delta \in I$ ve $\forall \alpha \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\frac{1}{2} [f(\alpha x + (1 - \alpha)y) + f((1 - \alpha)x + \alpha y)] \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (2.7)$$

ya da

$$\frac{1}{2} [f(y) + f((x + \delta))] \leq \max\{f(x), f(y + \delta)\} \quad (2.8)$$

eşitsizliklerinden herhangi biri gerçekleşiyorsa f fonksiyonuna $I \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde Wright-quasi-konveks fonksiyon denir [34].

Tanım 2.7. (J-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\forall x, y \in I$ olsun.

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (2.9)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna J-quasi-konvektir denir [34].

Tanım 2.8. (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > x$, $\delta > 0$ koşulları altında $\forall x, y, y + \delta \in I$ ve $\forall \alpha \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\frac{1}{2} [f(\alpha x + (1 - \alpha)y) + f((1 - \alpha)x + \alpha y)] \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (2.10)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna Wright-quasi-konvektir denir [34].

Tanım 2.9. (Log-Konveks Fonksiyon): $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ve $I \subseteq \mathbb{R}$ aralık olsun. $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq f^\alpha(x) f^{1-\alpha}(y) \quad (2.11)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna Log-konvektir denir [32].

Tanım 2.10. (r-Konveks Fonksiyon): f pozitif bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in [\kappa_1, \kappa_2]$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \begin{cases} \lambda f^r(x) + (1 - \lambda) f^r(y), & r \neq 0 \\ [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığında r -konveks denir [35].

Tanım 2.11. (Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \quad (2.13)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna birinci anlamda s -konveks fonksiyon denir. Birinci anlamda s -konveks fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile tanımlanır [36].

Tanım 2.12. (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon): $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \quad (2.14)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna ikinci anlamda s -konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s -konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir [36].

Burada birinci anlamda ve ikinci anlamda s konveks fonksiyon tanımları $s = 1$ için konveks fonksiyon elde edilir.

Tanım 2.13. (m-Konveks Fonksiyon): $f : [0, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon ve $\kappa_2 > 0$ olsun. $\forall x, y \in [0, \kappa_2]$, $m \in [0, 1]$ ve $\xi \in [0, 1]$ olmak üzere

$$f(\xi x + m(1 - \xi)y) \leq \xi f(x) + m(1 - \xi) f(y) \quad (2.15)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna m -konveks fonksiyon denir [37].

$f(0) \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan $[0, \kappa_2]$ aralığı üzerinde tanımlı bütün m -konveks fonksiyonlar sınıfı $K_m(\kappa_2)$ ile tanımlanır.

2.2. KESİRLİ İNTEGRALLER

Bu alt bölümde ilk olarak Gamma fonksiyonu tanımı verilip, daha sonra bir çok kesirli integral operatörleri tanıtılacaktır.

Tanım 2.14. (Gamma Fonksiyonu) Γ gamma fonksiyonu, her $\alpha > 0$ için

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanır ve $x > 0$ için yakınsaktır. Aynı zamanda

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)} \quad (2.17)$$

olarak da tanımlanabilir [38].

Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

i) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$,

ii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

iii) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, 0 < p < 1$,

iv) $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$.

Tanım 2.15. (k-Gamma Fonksiyonu): $k > 0, z \in \mathbb{C}$

$$\Gamma_k(z) = \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-\frac{u^k}{k}} du, \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanan $\Gamma_k(z)$ fonksiyonuna k -gamma fonksiyonu denir. Ayrıca

$$\Gamma_k(z) = (k)^{\frac{z}{k}-1} \Gamma\left(\frac{z}{k}\right) \quad (2.19)$$

olduğu aşikârdır.

Tanım 2.16. (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali): $f \in L_1[\kappa_1, \kappa_2]$ olsun. $\alpha > 0$ olmak üzere α -inci mertebesinden Riemann-Liouville integralleri $J_{\kappa_1+}^\alpha f$ ve $J_{\kappa_2-}^\alpha f$ sırasıyla

$$J_{\kappa_1+}^\alpha f(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\kappa_1}^{\varkappa} (\varkappa - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \varkappa > \kappa_1 \quad (2.20)$$

ve

$$J_{\kappa_2-}^\alpha f(\varkappa) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa}^{\kappa_2} (\xi - \varkappa)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \varkappa < \kappa_2 \quad (2.21)$$

ile tanımlanır [39].

Tanım 2.17. (k-Riemann-Liouville Kesirli İntegrali): $f \in L_1[\kappa_1, \kappa_2]$ olsun. $\alpha > 0$ olmak üzere α -inci mertebesinden k -Riemann-Liouville integralleri $J_{\kappa_1+,k}^\alpha f$ ve $J_{\kappa_2-,k}^\alpha f$ sırasıyla

$$J_{\kappa_1+,k}^\alpha f(\varkappa) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_{\kappa_1}^{\varkappa} (\varkappa - \xi)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(\xi) d\xi, \varkappa > \kappa_1 \quad (2.22)$$

ve

$$J_{\kappa_2-,k}^\alpha f(\varkappa) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_{\varkappa}^{\kappa_2} (\xi - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(\xi) d\xi, \varkappa < \kappa_2 \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna k -Riemann-Liouville kesirli integrali denir [40].

Tanım 2.18. (Katugampola Kesirli İntegrali): α ve $\rho \neq -1$ olmak üzere, Katugampola kesirli integrali

$${}^\rho_{\kappa_1} I_{\varkappa}^\alpha f(\varkappa) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\kappa_1}^{\varkappa} (\varkappa^{\rho+1} - \xi^{\rho+1})^{\alpha-1} \xi^\alpha \xi^\rho f(\xi) d\xi \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlanır [41].

Tanım 2.19. (Uyumlu Kesirli İntegralleri): $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. Bu durumda sırasıyla α mertebeli sol uyumlu ve sağ uyumlu kesirli integralleri

$$(I_{\alpha}^{\kappa_1} f)(\xi) = J_{\kappa_1+}^{n+1} \left((\xi - \alpha)^{\beta-1} f(\xi) \right) = \frac{1}{n!} \int_{\kappa_1}^{\xi} (\xi - \varkappa)^n (\varkappa - \kappa_1)^{\beta-1} f(\varkappa) d\varkappa \quad (2.25)$$

ve

$$({}^{\kappa_2}I_{\alpha}f)(\xi) = J_{\kappa_2}^{n+1} \left((\kappa_2 - \xi)^{\beta-1} f(\xi) \right) = \frac{1}{n!} \int_{\kappa_1}^{\xi} (\varkappa - \xi)^n (\kappa_2 - \varkappa)^{\beta-1} f(\varkappa) d\varkappa \quad (2.26)$$

olarak tanımlanır [42].

Tanım 2.20. (Hadamard Kesirli İntegralleri): (κ_1, κ_2) $(-\infty \leq \kappa_1 < \kappa_2 \leq \infty)$ aralığı $\mathbb{R}^+$ yarı ekseninde sınırlı veya sınırsız bir aralık olsun. Ayrıca $Re(\alpha) > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$, ve $\eta \in \mathbb{C}$ olsun. $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $Re(\alpha) > 0$ için $f \in L(\kappa_1, \kappa_2)$ ise

$$(H_{\kappa_1+}^{\alpha}f)(\varkappa) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\kappa_1}^{\varkappa} \left(\log \frac{\varkappa}{\xi} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi, \quad \varkappa > \kappa_1, \quad (2.27)$$

ve

$$(H_{\kappa_2-}^{\alpha}f)(\varkappa) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa}^{\kappa_2} \left(\log \frac{\xi}{\varkappa} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi, \quad \varkappa < \kappa_2 \quad (2.28)$$

kesirli integralleri sırasıyla sol taraflı ve sağ taraflı Hadamard kesirli integralleri denir [39].

Kesirli integraller için daha fazla bilgi için [39], [43], [44], [45] nolu kitaplara bakılabilir.

2.3. BAZI EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde bazı temel eşitsizlikler ve tezin temelinin oluşturan bazı teoremler verilecektir.

Tanım 2.21. (Hölder Eşitsizliği): $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n -lisi olsun. O halde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.29)$$

b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \geq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.30)$$

sağlanır [3].

Tanım 2.22. (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği): $[\kappa_1, \kappa_2] \subseteq \mathbb{R}$, $f \in L^p[\kappa_1, \kappa_2]$ ve $g \in L^q[\kappa_1, \kappa_2]$ olsun. $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} |f(\varkappa)| |g(\varkappa)| d\varkappa \leq \left(\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} |f(\varkappa)|^p d\varkappa \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} |g(\varkappa)|^q d\varkappa \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.31)$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir [46].

Tanım 2.23. (Jensen Eşitsizliği): $f : I = [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$, I üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. $h : I \rightarrow (0, \infty)$ ve $u : I \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar ise bu durumda

$$f \left(\frac{\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} h(\xi) u(\xi) d\xi}{\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} h(\xi) d\xi} \right) \leq \frac{\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} h(\xi) f(u(\xi)) d\xi}{\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} h(\xi) d\xi} \quad (2.32)$$

eşitsizliğine Jensen eşitsizliği denir. f konkav fonksiyon olduğunda eşitsizlik yön değiştirir [47].

Teorem 2.24. $f : I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\kappa_1 < \kappa_2$ (I° , I nın içi) için $\kappa_1, \kappa_2 \in I^\circ$ olsun. Eğer $f' \in [\kappa_1, \kappa_2]$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(\varkappa) d\varkappa - f \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) \\ &= (\kappa_2 - \kappa_1) \left[\int_0^{1/2} \xi f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi) \kappa_2) d\xi + \int_{1/2}^1 (\xi - 1) f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi) \kappa_2) d\xi \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

dır [6].

Teorem 2.25. $f : I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\kappa_1 < \kappa_2$ için $\kappa_1, \kappa_2 \in I^\circ$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konveks fonksiyon ise bu durumda

$$\left| \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(\varkappa) d\varkappa - f \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) \right| \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{8} \left(|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)| \right) \quad (2.34)$$

eşitsizliği elde edilir [6].

Teorem 2.26. $f : I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\kappa_1 < \kappa_2$ için $\kappa_1, \kappa_2 \in I^\circ$ olsun. Eğer $|f'(\kappa_1)|^q$ fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konveks ve $p > 1$ olmak üzere, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(\varkappa) d\varkappa - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{16} \left(\frac{4}{p+1} \right)^{1/p} \left[\left(|f'(\kappa_1)|^q + 3|f'(\kappa_2)|^q \right)^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + \left(3|f'(\kappa_1)|^q + |f'(\kappa_2)|^q \right)^{1/q} \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

eşitsizliği elde edilir [6].

Teorem 2.27. $f : I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\kappa_1 < \kappa_2$ için $\kappa_1, \kappa_2 \in I^\circ$ olsun. Eğer $|f'(\kappa_1)|^q$ fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konveks ve $p > 1$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(\varkappa) d\varkappa - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \\ & \leq \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \right) \left(\frac{4}{p+1} \right)^{1/p} \left(|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)| \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir [6].

Teorem 2.28. (Kesirli Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f \in L_1[\kappa_1, \kappa_2]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon ise, $\alpha > 0$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} [J_{\kappa_1+}^\alpha f(\kappa_2) + J_{\kappa_2-}^\alpha f(\kappa_1)] \leq \frac{f(\kappa_1) + f(\kappa_2)}{2} \quad (2.37)$$

eşitsizlikleri vardır [14].

Teorem 2.29. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f \in L_1[\kappa_1, \kappa_2]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon ise, $\alpha > 0$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha + 1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)+}^\alpha f(\kappa_2) + J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)-}^\alpha f(\kappa_1) \right] \quad (2.38)$$

$$\leq \frac{f(\kappa_1) + f(\kappa_2)}{2}$$

eşitsizlikleri vardır [17].

Lemma 2.30. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f' \in L^1[\kappa_1, \kappa_2]$ ise bu durumda Riemann kesirli integralleri için aşağıdaki özdeşlik verilir.

$$f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} [J_{\kappa_1+}^\alpha f(\kappa_2) + J_{\kappa_2-}^\alpha f(\kappa_1)] = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2} \sum_{k=1}^4 I_k. \quad (2.39)$$

Burada

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{1/2} \xi^\alpha f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi) \kappa_1) d\xi, \\ I_2 &= \int_0^{1/2} (-\xi^\alpha) f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi) \kappa_2) d\xi, \\ I_3 &= \int_{1/2}^1 (\xi^\alpha - 1) f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi) \kappa_1) d\xi, \\ I_4 &= \int_{1/2}^1 (1 - \xi^\alpha) f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi) \kappa_2) d\xi \end{aligned} \quad (2.40)$$

dir [15].

Teorem 2.31. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon ise $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} [J_{\kappa_1+}^\alpha f(\kappa_2) + J_{\kappa_2-}^\alpha f(\kappa_1)] \right| \\ \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2^{\alpha+1}(\alpha + 1)} \left(|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)| \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

eşitsizliği elde edilir [15].

Teorem 2.32. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L^1[\kappa_1, \kappa_2]$ olsun. $|f'|^q, p \geq 1$, fonksiyonu (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde

konveks fonksiyon ise bu durumda Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| &\leq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} [J_{\kappa_1+}^\alpha f(\kappa_2) + J_{\kappa_2-}^\alpha f(\kappa_1)] \\ &\leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2^{\alpha+1}(\alpha p + 1)^{1/p}} \\ &\quad \times \left[\left(\frac{3|f'(\kappa_1)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{4} \right)^{1/q} + \left(\frac{|f'(\kappa_1)|^q + 3|f'(\kappa_2)|^q}{4} \right)^{1/q} \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $0 < \alpha \leq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 'dir [15].

Teorem 2.33. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L^1[\kappa_1, \kappa_2]$ olsun. $|f'|^q$, $q > 1$, fonksiyonu (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde konveks fonksiyon ise bu durumda Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| &\leq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} [J_{\kappa_1+}^\alpha f(\kappa_2) + J_{\kappa_2-}^\alpha f(\kappa_1)] \\ &\leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2^{\alpha+1}(\alpha + 1)} \left[\left(\frac{(\alpha + 1)|f'(\kappa_2)|^q + (\alpha + 3)|f'(\kappa_1)|^q}{2(\alpha + 2)} \right)^{1/q} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{(\alpha + 1)|f'(\kappa_1)|^q + (\alpha + 3)|f'(\kappa_2)|^q}{2(\alpha + 2)} \right)^{1/q} \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\alpha > 0$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 'dir [15].

2.4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Bu alt bölümde tezde sıkça kullanılacak olan ve Sarıkaya ve Ertuğral tarafından tanımlanan genelleştirilmiş integral operatörleri tanıtılacaktır [48].

İlk olarak aşağıdaki koşulu sağlayan $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlansın:

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi < \infty \quad (2.44)$$

Aşağıdaki sol taraflı ve sağ taraflı genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerini sırasıyla şu şekilde tanımlarız:

$${}_{\kappa_1+}J_{\varphi}f(\varkappa) = \int_{\kappa_1}^{\varkappa} \frac{\varphi(\varkappa - \xi)}{\varkappa - \xi} f(\xi) d\xi, \quad \varkappa > \kappa_1, \quad (2.45)$$

$${}_{\kappa_2-}J_{\varphi}f(\varkappa) = \int_{\varkappa}^{\kappa_2} \frac{\varphi(\xi - \varkappa)}{\xi - \varkappa} f(\xi) d\xi, \quad \varkappa < \kappa_2. \quad (2.46)$$

Genelleştirilmiş kesirli integrallerin en önemli özelliği, Riemann-Liouville kesirli integral, k -Riemann-Liouville kesirli integral, Katugampola kesirli integralleri, vb. gibi bazı kesirli integral türlerini genelleştirmektedir. (2.45) ve (2.46) integral operatörlerinin bu önemli özel durumlarından bazıları aşağıda belirtilmiştir.

- i) $\varphi(\xi) = \xi$ olarak seçilirse, (2.45) ve (2.46) operatörleri Riemann integraline,
- ii) $\varphi(\xi) = \frac{\xi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ olarak alınırsa, (2.45) ve (2.46) operatörleri Riemann-Liouville kesirli operatörlerine,
- ii) $\varphi(\xi) = \frac{\xi^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ olarak alınırsa, (2.45) ve (2.46) operatörleri k -Riemann-Liouville kesirli operatörlerine dönüşür.

Sarıkaya ve Ertuğral ayrıca genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde etmiştir.

Teorem 2.34. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. O halde genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2\Psi(1)} \left[{}_{\kappa_1+}J_{\varphi}f(\kappa_2) + {}_{\kappa_2-}J_{\varphi}f(\kappa_1) \right] \leq \frac{f(\kappa_1) + f(\kappa_2)}{2}. \quad (2.47)$$

Burada $\Psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\Psi(\varkappa) = \int_0^{\varkappa} \frac{\varphi((\kappa_2 - \kappa_1)\xi)}{\xi} d\xi \quad (2.48)$$

ile tanımlanır [48].

Genelleştirilmiş kesirli integraller üzerine ispatlanmış diğer sonuçlar için [49], [50], [51], [52], [53], [54] nolu makaleler incelenebilir.

2.5. GENELLEŞTİRİLMİŞ ORTA NOKTA TIPLI EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde Qaisar ve Hussain tarafından elde edilen bazı genelleştirilmiş orta nokta eşitsizlikleri ispatsız olarak sunulacaktır [13].

Lemma 2.35. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\kappa_1 < \kappa_2$ için $\kappa_1, \kappa_2 \in I^\circ$ olsun. Her bir $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ için $f' \in L[\kappa_1, \kappa_2]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u) du - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \\ &= \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_0^1 (1 - \xi) f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \\ & \quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_0^1 (\xi - 1) f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \end{aligned} \quad (2.49)$$

eşitliği elde edilir [13].

Theorem 2.36. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Kabul edilsin ki $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu I üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. $\kappa_1 < \kappa_2$ için $\kappa_1, \kappa_2 \in I^\circ$ olsun. Her bir $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere $f' \in L[\kappa_1, \kappa_2]$ olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u) du - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\ & \leq \left(\frac{1}{p+1} \right)^{1/p} \left(\frac{1}{2} \right)^{1/q} \left[\frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \left[|f'(\kappa_2)|^q + |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q \right]^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \left[|f'(\kappa_1)|^q + |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q \right]^{1/q} \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir [13].

Theorem 2.37. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q \geq 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu I üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. $\kappa_1 < \kappa_2$ için $\kappa_1, \kappa_2 \in I^\circ$ ve

her bir $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere $f' \in L[\kappa_1, \kappa_2]$ olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u) du - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{1/q} \times \left[\frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \left[\left| f'(\kappa_2) \right|^q + 2 \left| f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right|^q \right]^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \left[\left| f'(\kappa_1) \right|^q + 2 \left| f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right|^q \right]^{1/q} \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir [13].

Teorem 2.38. f , Lemma 2.35'deki gibi tanımlansın. $|f'|$ fonksiyonu I üzerinde konveks bir fonksiyon ise bu durumda

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u) du - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\ & \leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \left[\frac{\left| f'(\kappa_2) \right| + 2 \left| f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right|}{6} \right] \\ & \quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \left[\frac{\left| f'(\kappa_1) \right| + 2 \left| f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right|}{6} \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

eşitsizliği elde edilir [13].

Teorem 2.39. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q > 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu I üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. $\kappa_1 < \kappa_2$ için $\kappa_1, \kappa_2 \in I^\circ$ ve her bir $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere $f' \in L[\kappa_1, \kappa_2]$ olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u) du - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\ & \leq \left[\frac{q-1}{2q-1} \right]^p \left[\frac{(\varkappa - \kappa_1)^2 \left| f' \left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2 - \varkappa}{2} \right) \right| + (\kappa_2 - \varkappa)^2 \left| f' \left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2 - \varkappa}{2} \right) \right|}{\kappa_2 - \kappa_1} \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

dir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir [13].

Teorem 2.40. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q \geq 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu I üzerinde konkav bir fonksiyon olsun. $\kappa_1 < \kappa_2$ için $\kappa_1, \kappa_2 \in I^\circ$ ve

her bir $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere $f' \in L[\kappa_1, \kappa_2]$ olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u) du - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \left| f' \left(\frac{2\kappa_1 + 3\kappa_2 - 2\varkappa}{3} \right) \right| + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \left| f' \left(\frac{3\kappa_1 + 2\kappa_2 - 2\varkappa}{2} \right) \right| \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir [13].

3. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇİN ORTA NOKTA TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde Budak ve Agarwal tarafından elde edilen bazı Orta-Nokta tipli eşitsizlikler sunulacaktır. Bunun için ilk olarak daha sonra sıkça kullanılacak olan aşağıdaki Lemma verilecektir [16].

Lemma 3.1. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $\kappa_1 < \kappa_2$ olsun. Her $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere $f' \in L[\kappa_1, \kappa_2]$ ise Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[(\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{\kappa_2-}^{\alpha} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right. \\ & \quad \left. + (\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{\kappa_1+}^{\alpha} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \\ & \quad - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \\ &= \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 (1 - \xi^{\alpha}) f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \\ & \quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 (\xi^{\alpha} - 1) f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \end{aligned} \tag{3.1}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Kısmi integrasyon kullanılarak,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1 - \xi^{\alpha}) f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \\ &= (1 - \xi^{\alpha}) \frac{f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))}{\varkappa - \kappa_1} \Big|_0^1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha}{\varkappa - \kappa_1} \int_0^1 \xi^{\alpha-1} f'(\xi \kappa_2 + (1-\xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \\
& = - \frac{f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)}{\varkappa - \kappa_1} \\
& \quad + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(\varkappa - \kappa_1)^{\alpha+1}} \int_{\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa}^{\kappa_2} (u - (\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))^{\alpha-1} f(u) du \\
& = - \frac{f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)}{\varkappa - \kappa_1} + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(\varkappa - \kappa_1)^{\alpha+1}} J_{\kappa_2-}^{\alpha} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (\xi^{\alpha} - 1) f'(\xi \kappa_1 + (1-\xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \\
& = - \frac{f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)}{\kappa_2 - \varkappa} + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(\kappa_2 - \varkappa)^{\alpha+1}} J_{\kappa_1+}^{\alpha} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.2) ve (3.3) özdeşlikleri ile istenen (3.1) sonucu elde edilir. $\square$

Teorem 3.2. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2$ olsun. Kabul edilsin ki $q > 1$ için $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde $|f'|^q$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde her $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[(\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{\kappa_2-}^{\alpha} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{\kappa_1+}^{\alpha} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
& \leq \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\frac{\alpha p}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[(\varkappa - \kappa_1)^2 \left[\frac{|f'(\kappa_2)|^q + |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (\kappa_2 - \varkappa)^2 \left[\frac{|f'(\kappa_1)|^q + |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 'dir.

İspat. Lemma 3.1'den,

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[(\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{\kappa_2-}^{\alpha} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right. \right. \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
& + (\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{\kappa_1+}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \Big] - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \Big| \\
& \leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 |1 - \xi^\alpha| |f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))| d\xi \\
& \quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 |\xi^\alpha - 1| |f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))| d\xi
\end{aligned}$$

dır. $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |1 - \xi^\alpha| |f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))| d\xi \tag{3.6} \\
& \leq \left(\int_0^1 |1 - \xi^\alpha|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \left(\int_0^1 (1 - \xi^{p\alpha}) d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 [\xi |f'(\kappa_2)|^q + (1 - \xi) |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q] d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \left(\frac{\alpha p}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(\kappa_2)|^q + |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada herhangi $A > B \geq 0$ ve $q \geq 1$ için

$$(A - B)^q \leq A^q - B^q \tag{3.7}$$

eşitsizliği kullanılmıştır.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |\xi^\alpha - 1| |f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))| d\xi \tag{3.8} \\
& \leq \left(\frac{\alpha p}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(\kappa_1)|^q + |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.6) ve (3.8) eşitsizlikleri (3.5)'te yerine konulursa istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Sonuç 3.3. Teorem 3.2'nin şartları altında $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ alınır

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{\kappa_2-}^\alpha f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + J_{\kappa_1+}^\alpha f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right] - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \quad (3.9) \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left(\frac{\alpha p}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{3 |f'(\kappa_1)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3 |f'(\kappa_2)|^q + |f'(\kappa_1)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left(\frac{4\alpha p}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} [|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)|]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. (3.9)'daki ilk eşitsizliğin ispatı $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliğinden açıktır. İkinci eşitsizliğin ispatı için, $a_1 = 3 |f'(\kappa_1)|^q$, $b_1 = 3 |f'(\kappa_2)|^q$ ve $a_2 = |f'(\kappa_1)|^q$, $b_2 = |f'(\kappa_1)|^q$ olsun.

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^s \leq \sum_{k=1}^n a_k^s + \sum_{k=1}^n b_k^s, \quad 0 \leq s < 1 \quad (3.10)$$

eşitsizliğinin kullanılmasıyla istenilen sonuç doğrudan elde edilebilir. $\square$

Teorem 3.4. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2$ olsun. Kabul edilsin ki $q \geq 1$ için $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde $|f'|^q$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[(\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{\kappa_2-}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right. \\
& \quad \left. + (\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{\kappa_1+}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \Big| \quad (3.11) \\
& \leq \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left[(\varkappa - \kappa_1)^2 \left(\frac{\alpha}{2(\alpha+2)} |f'(\kappa_2)|^q + \left[\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)-2}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} \right] |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (\kappa_2 - \varkappa)^2 \left(\frac{\alpha}{2(\alpha+2)} |f'(\kappa_1)|^q + \left[\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)-2}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} \right] |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Lemma 3.1 ve power mean eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[(\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{\kappa_2-}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{\kappa_1+}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \right. \\
& \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 |1 - \xi^\alpha| |f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))| d\xi \\
& \quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 |\xi^\alpha - 1| |f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))| d\xi \\
& \leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\int_0^1 |1 - \xi^\alpha| d\xi \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 |1 - \xi^\alpha| |f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\int_0^1 |\xi^\alpha - 1| d\xi \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 |\xi^\alpha - 1| |f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

yazılabilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |1 - \xi^\alpha| |f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \\
& \leq \int_0^1 (1 - \xi^\alpha) [\xi |f'(\kappa_2)|^q + (1 - \xi) |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q] d\xi \\
& = \frac{\alpha}{2(\alpha+2)} |f'(\kappa_2)|^q + \left[\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)-2}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} \right] |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q
\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |\xi^\alpha - 1| |f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \\ & \leq \frac{\alpha}{2(\alpha + 2)} |f'(\kappa_1)|^q + \left[\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \right] |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q \end{aligned} \quad (3.14)$$

bulunur. Bu sonuç ispatı tamamlar. $\square$

Sonuç 3.5. Teorem 3.4'ün koşulları altında $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha + 1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{\kappa_2-}^\alpha f \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) + J_{\kappa_1+}^\alpha f \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - f \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left[\left(\frac{\alpha(3\alpha + 5)}{4(\alpha + 1)(\alpha + 2)} |f'(\kappa_2)|^q + \left[\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2}{4(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \right] |f'(\kappa_1)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\alpha(3\alpha + 5)}{4(\alpha + 1)(\alpha + 2)} |f'(\kappa_1)|^q + \left[\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2}{4(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \right] |f'(\kappa_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sonuç 3.6. Sonuç 3.5'de $q = 1$ alınırsa, bu durumda

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha + 1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{\kappa_2-}^\alpha f \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) + J_{\kappa_1+}^\alpha f \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - f \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{\alpha \kappa (2 - \kappa_1)}{4(\alpha + 1)} [|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)|] \end{aligned} \quad (3.16)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.7. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2$ olsun. Kabul edilsin ki $q > 1$ için $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde $|f'|^q$ konkv bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[(\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{\kappa_2-}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{\kappa_1+}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \right|$$

(3.17)

$$\begin{aligned}
& -f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)| \\
\leq & \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\frac{\alpha p}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left[(\varkappa - \kappa_1)^2 \left| f' \left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2 - \varkappa}{2} \right) \right| + (\kappa_2 - \varkappa)^2 \left| f' \left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa}{2} \right) \right| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ 'dir.

İspat. Lemma 3.1 ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[(\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{\kappa_2-}^{\alpha} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{\kappa_1+}^{\alpha} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
\leq & \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 |1 - \xi^{\alpha}| |f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))| d\xi \\
& + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 |\xi^{\alpha} - 1| |f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))| d\xi \\
\leq & \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\int_0^1 (1 - \xi^{\alpha})^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\int_0^1 (\xi^{\alpha})^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[\kappa_1, \kappa_2]$ üzerinde konkav fonksiyon olduğundan Jensen integral eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \\
& = \int_0^1 \xi^0 |f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \\
& \leq \left(\int_0^1 \xi^0 d\xi \right) \left| f' \left(\frac{1}{\int_0^1 \xi^0 d\xi} \int_0^1 \xi^0 (\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \right) \right|^q
\end{aligned}$$

$$= \left| f' \left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2 - \varkappa}{2} \right) \right|^q$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 |f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \leq \left| f' \left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa}{2} \right) \right|^q \quad (3.20)$$

dir. (3.18) eşitsizliğinde (3.19) ve (3.20) eşitsizlikleri yerine konulup,

$$\int_0^1 (1 - \xi^\alpha)^p d\xi \leq \int_0^1 (1 - \xi^{p\alpha}) d\xi = \frac{\alpha p}{\alpha p + 1} \quad (3.21)$$

eşitliği kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Sonuç 3.8. Teorem 3.7'nin koşulları altında $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ seçilirse bu durumda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{\kappa_2-}^\alpha f \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) + J_{\kappa_1+}^\alpha f \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) \right] - f \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) \right| \quad (3.22) \\ & \leq \left(\frac{\alpha p}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \right) \left[\left| f' \left(\frac{\kappa_1 + 3\kappa_2}{4} \right) \right| + \left| f' \left(\frac{3\kappa_1 + \kappa_2}{4} \right) \right| \right]. \end{aligned}$$

Teorem 3.9. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2$ olsun. Kabul edilsin ki $q > 1$ için $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde $|f'|^q$ konkav bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[(\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{\kappa_2-}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{\kappa_1+}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \right. \\ & \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \quad (3.23) \\ & \leq \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^{2 - \frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left[(\varkappa - \kappa_1)^2 \left| f' \left(\frac{2\alpha(\alpha+2)\kappa_2 + [(\alpha+1)(\alpha+2) - 2](\kappa_1 - \varkappa)}{2(\alpha+2)} \right) \right|^q \right. \end{aligned}$$

$$+ (\kappa_2 - \varkappa)^2 \left| f' \left(\frac{2\alpha(\alpha+2)\kappa_1 + [(\alpha+1)(\alpha+2)-2](\kappa_2 - \varkappa)}{2(\alpha+2)} \right) \right|^q \Bigg]$$

eşitsizliği vardır.

İspat. (3.12) eşitsizliğinden

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[(\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{\kappa_2-}^{\alpha} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{\kappa_1+}^{\alpha} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \right| \quad (3.24)$$

$$- f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \Big|$$

$$\leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\int_0^1 |1 - \xi^{\alpha}| d\xi \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |1 - \xi^{\alpha}| |f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\ + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\int_0^1 |\xi^{\alpha} - 1| d\xi \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |\xi^{\alpha} - 1| |f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. $|f'|^q$, $[\kappa_1, \kappa_2]$ üzerinde konkav fonksiyon olduğundan, Jensen integral eşitsizliği kullanılırsa,

$$\int_0^1 |1 - \xi^{\alpha}| |f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \quad (3.25) \\ \leq \left(\int_0^1 (1 - \xi^{\alpha}) d\xi \right) \\ \times f' \left(\frac{1}{\int_0^1 (1 - \xi^{\alpha}) d\xi} \int_0^1 (1 - \xi^{\alpha}) (\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \right) \\ = \frac{\alpha}{\alpha+1} \left| f' \left(\frac{2\alpha(\alpha+2)\kappa_2 + [(\alpha+1)(\alpha+2)-2](\kappa_1 - \varkappa)}{2(\alpha+2)} \right) \right|^q$$

dır. Benzer şekilde,

$$\int_0^1 |\xi^{\alpha} - 1| |f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \quad (3.26) \\ \leq \frac{\alpha}{\alpha+1} \left| f' \left(\frac{2\alpha(\alpha+2)\kappa_1 + [(\alpha+1)(\alpha+2)-2](\kappa_2 - \varkappa)}{2(\alpha+2)} \right) \right|^q$$

dir. Bu da ispatı tamamlar. □

Sonuç 3.10. Teorem 3.7'nin koşulları altında $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ alınırsa, bu durumda

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{\kappa_2-}^\alpha f \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) + J_{\kappa_1+}^\alpha f \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) \right] - f \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) \right| \quad (3.27) \\ & \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{2-\frac{1}{q}} \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \right) \left[\left| f' \left(\frac{\alpha(3\alpha+5)\kappa_2 + [(\alpha+1)(\alpha+2)-2]\kappa_1}{4(\alpha+2)} \right) \right|^q \right. \\ & \quad \left. + \left| f' \left(\frac{\alpha(3\alpha+5)\kappa_1 + [(\alpha+1)(\alpha+2)-2]\kappa_2}{4(\alpha+2)} \right) \right|^q \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

4. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇİN YENİ GENELLEŞTİRİLMİŞ ORTA NOKTA TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde Riemann-Liouville kesirli integralleri elde edilen yeni orta nokta tipli eşitsizlikler sunulacaktır. İlk olarak teoremlerin ispatında kullanılacak olan aşağıdaki lemma verilsin.

Lemma 4.1. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$ (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f' \in L^1[\kappa_1, \kappa_2]$ ise, bu durumda $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left((\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}^{\alpha} f(\kappa_1) \right. \\ & \quad \left. + (\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}^{\alpha} f(\kappa_2) \right) - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \\ &= \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 \xi^{\alpha} f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2) d\xi \\ & \quad - \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 \xi^{\alpha} f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1) d\xi \end{aligned} \quad (4.1)$$

eşitliği vardır.

İspat. Kısmi integrasyon kullanılarak,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \xi^{\alpha} f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1) d\xi \\ &= \frac{\xi^{\alpha}}{(\kappa_2 - \varkappa)} f(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1) \Big|_0^1 \\ & \quad - \frac{\alpha}{\kappa_2 - \varkappa} \int_0^1 \xi^{\alpha-1} f(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1) d\xi \end{aligned} \quad (4.2)$$

olur. Değişken değişimi yardımıyla,

$$I_1 = -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \varkappa)^{\alpha+1}} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}^{\alpha} f(\kappa_1) + \frac{1}{(\kappa_2 - \varkappa)} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \quad (4.3)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \xi^{\alpha} f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2) d\xi \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\varkappa - \kappa_1)^{\alpha+1}} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}^{\alpha} f(\kappa_2) - \frac{1}{(\varkappa - \kappa_1)} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \end{aligned} \quad (4.4)$$

dır. (4.3) ve (4.4) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} &\frac{-(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} I_1 + \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} I_2 \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left((\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}^{\alpha} f(\kappa_1) + (\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}^{\alpha} f(\kappa_2) \right) \\ &\quad - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.2. $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2$ olmak üzere $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$, (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L^1[\kappa_1, \kappa_2]$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konveks ise, bu durumda her $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ için kesirli integralleri içeren

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left((\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}^{\alpha} f(\kappa_1) + (\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}^{\alpha} f(\kappa_2) \right) \right. \\ &\quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\ &\leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\alpha+2)} \left[\frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2 |f'(\kappa_1)| + (\varkappa - \kappa_1)^2 |f'(\kappa_2)|}{\alpha+1} \right. \\ &\quad \left. + [(\varkappa - \kappa_1)^2 + (\kappa_2 - \varkappa)^2] |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)| \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Lemma 4.1’de mutlak değ er alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left((\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1+\kappa_2-\varkappa)-}^\alpha f(\kappa_1) + (\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1+\kappa_2-\varkappa)+}^\alpha f(\kappa_2) \right) \right. \\
& \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 \xi^\alpha \left| f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1-\xi)\kappa_2) \right| d\xi \\
& \quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 \xi^\alpha \left| f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1-\xi)\kappa_1) \right| d\xi
\end{aligned} \tag{4.7}$$

olur. $|f'|$ fonksiyonu konveks olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left((\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1+\kappa_2-\varkappa)-}^\alpha f(\kappa_1) + (\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1+\kappa_2-\varkappa)+}^\alpha f(\kappa_2) \right) \right. \\
& \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 \left[\xi^{\alpha+1} \left| f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| + \xi^\alpha (1-\xi) \left| f'(\kappa_2) \right| \right] d\xi \\
& \quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 \left[\xi^{\alpha+1} \left| f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| + \xi^\alpha (1-\xi) \left| f'(\kappa_1) \right| \right] d\xi \\
& = \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[\left| f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \int_0^1 \xi^{\alpha+1} d\xi + \left| f'(\kappa_2) \right| \int_0^1 \xi^\alpha (1-\xi) d\xi \right] \\
& \quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[\left| f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \int_0^1 \xi^{\alpha+1} d\xi + \left| f'(\kappa_1) \right| \int_0^1 \xi^\alpha (1-\xi) d\xi \right] \\
& = \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\alpha+2)} \left[\frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2 |f'(\kappa_1)| + (\varkappa - \kappa_1)^2 |f'(\kappa_2)|}{\alpha+1} \right. \\
& \quad \left. + [(\varkappa - \kappa_1)^2 + (\kappa_2 - \varkappa)^2] \left| f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \right]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

eėitsizliėi elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Sonuç 4.3. Teorem 4.2'in koşulları altında $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ alınırsa, bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha + 1)2^{\alpha-1}}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^-}^\alpha f(\kappa_1) + J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^+}^\alpha f(\kappa_2) \right] - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \quad (4.9) \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4(\alpha + 2)} \left[\frac{|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)|}{\alpha + 1} + 2 \left| f'\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \right] \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4(\alpha + 1)} [|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)|]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Aynı sonuç Sarıkaya ve Yıldırım tarafından elde edilmiştir.

Sonuç 4.4. Teorem 4.2'de $\alpha = 1$ seçilirse, bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(\xi) d\xi - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \quad (4.10) \\
& \leq \frac{1}{3(\kappa_2 - \kappa_1)} \left[\frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2 |f'(\kappa_1)| + (\varkappa - \kappa_1)^2 |f'(\kappa_2)|}{2} \right. \\
& \quad \left. + [(\varkappa - \kappa_1)^2 + (\kappa_2 - \varkappa)^2] |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.5. Sonuç 4.4'te $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ alınırsa, Sonuç 4.4 Kırmacı tarafından verilen Teorem 2.25'e dönüşür [6].

Teorem 4.6. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2$ olmak üzere (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L^1[\kappa_1, \kappa_2]$ olsun. $|f'|^q$, $q > 1$, $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konveks fonksiyon ise, bu takdirde $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[(\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)^-}^\alpha f(\kappa_1) + (\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)^+}^\alpha f(\kappa_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \quad (4.11) \\
& \leq \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\frac{1}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[(\varkappa - \kappa_1)^2 \left[\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_1)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \right.
\end{aligned}$$

$$+ (\kappa_2 - \varkappa)^2 \left[\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \Bigg]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 4.1'den,

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[(\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}^{\alpha} f(\kappa_1) \right. \right. \quad (4.12)$$

$$\left. + (\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}^{\alpha} f(\kappa_2) \right] - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \Big|$$

$$\leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 \xi^{\alpha} \left| f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2) \right| d\xi \\ + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 \xi^{\alpha} \left| f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1) \right| d\xi$$

yazılabilir. Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa,

$$\int_0^1 \xi^{\alpha} \left| f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2) \right| d\xi \quad (4.13) \\ \leq \left(\int_0^1 |\xi^{\alpha}|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2) \right|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq \left(\int_0^1 (\xi^{\alpha p}) d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 [\xi |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + (1 - \xi) |f'(\kappa_2)|^q] d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\ = \left(\frac{1}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde,

$$\int_0^1 \xi^{\alpha} \left| f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1) \right| d\xi \quad (4.14) \\ \leq \left(\frac{1}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_1)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. (4.13) ve (4.14) eşitsizlikleri (4.12) eşitsizliğinde yerine konulursa istenen sonuç elde edilir. $\square$

Sonuç 4.7. Teorem 4.6'nın şartları altında $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left(J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^-}^\alpha f(\kappa_1) + J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^+}^\alpha f(\kappa_2) \right) - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \quad (4.15) \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left(\frac{1}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{|f'(\kappa_1)|^q + 3|f'(\kappa_2)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|f'(\kappa_1)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left(\frac{4}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} [|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)|]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. (4.15)'teki ilk eşitsizliğin ispatı $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliğinden açıktır. İkinci eşitsizliğin ispatı için, $a_1 = 3|f'(\kappa_1)|^q$, $b_1 = 3|f'(\kappa_2)|^q$ ve $a_2 = 3|f'(\kappa_1)|^q$, $b_2 = |f'(\kappa_2)|^q$ olsun.

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^s \leq \sum_{k=1}^n a_k^s + \sum_{k=1}^n b_k^s, \quad 0 \leq s < 1 \quad (4.16)$$

eşitsizliğinin kullanılmasıyla istenen sonuç doğrudan elde edilir. $\square$

Sonuç 4.8. Teorem 4.6'da $\alpha = 1$ seçilirse, bu durumda Teorem 4.6 Qaisar ve Hussain tarafından elde edilen Teorem 2.36'ya dönüşür [13].

Teorem 4.9. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2$ için (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L^1[\kappa_1, \kappa_2]$ olsun. $|f'|^q$, $q \geq 1$, fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konveks fonksiyon ise, bu durumda $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[(\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)^-}^\alpha f(\kappa_1) + (\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)^+}^\alpha f(\kappa_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \quad (4.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left[(\varkappa - \kappa_1)^2 \left(\frac{1}{\alpha + 2} |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + \frac{1}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} |f'(\kappa_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + (\kappa_2 - \varkappa)^2 \left(\frac{1}{\alpha + 2} |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + \frac{1}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} |f'(\kappa_1)|^q \right)^{1 - \frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Lemma 4.1 ve power mean eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[(\kappa_2 - \varkappa)^{1 - \alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}^{\alpha} f(\kappa_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\varkappa - \kappa_1)^{1 - \alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}^{\alpha} f(\kappa_2) \right] - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \tag{4.18} \\
&\leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 \xi^{\alpha} |f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2)| d\xi \\
&\quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 \xi^{\alpha} |f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1)| d\xi \\
&\leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\int_0^1 \xi^{\alpha} d\xi \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \xi^{\alpha} |f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2)|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\int_0^1 \xi^{\alpha} d\xi \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \xi^{\alpha} |f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1)|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \xi^{\alpha} |f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2)|^q d\xi \tag{4.19} \\
&\leq \int_0^1 \xi^{\alpha} [\xi |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + (1 - \xi) |f'(\kappa_2)|^q] d\xi
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha+2} |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} |f'(\kappa_2)|^q$$

dır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \xi^\alpha |f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1-\xi)\kappa_1)|^q d\xi \\ & \leq \frac{1}{\alpha+2} |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} |f'(\kappa_1)|^q \end{aligned} \quad (4.20)$$

dır. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Sonuç 4.10. Teorem 4.9'un şartları altında $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)_-}^\alpha f(\kappa_1) + J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)_+}^\alpha f(\kappa_2) \right] - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \quad (4.21) \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left(\frac{1}{\alpha+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left[\left(\frac{1}{\alpha+2} \left| f'\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right|^q + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} |f'(\kappa_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{\alpha+2} \left| f'\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right|^q + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} |f'(\kappa_1)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left(\frac{1}{\alpha+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left[\left(\frac{1}{2(\alpha+2)} |f'(\kappa_1)|^q + \frac{\alpha+3}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} |f'(\kappa_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{2(\alpha+2)} |f'(\kappa_2)|^q + \frac{\alpha+3}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} |f'(\kappa_1)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.11. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2$ için (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L^1[\kappa_1, \kappa_2]$ olsun. $|f'|^q$, $q > 1$, $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konkav fonksiyon ise, bu durumda $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere Riemann-Liouville

kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[(\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1+\kappa_2-\varkappa)-}^{\alpha} f(\kappa_1) + (\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1+\kappa_2-\varkappa)+}^{\alpha} f(\kappa_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
& \leq \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\frac{1}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[(\varkappa - \kappa_1)^2 \left| f' \left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2 - \varkappa}{2} \right) \right| + (\kappa_2 - \varkappa)^2 \left| f' \left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa}{2} \right) \right| \right]
\end{aligned} \tag{4.22}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 4.1’de Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left((\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1+\kappa_2-\varkappa)-}^{\alpha} f(\kappa_1) \right. \\
& \quad \left. + (\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1+\kappa_2-\varkappa)+}^{\alpha} f(\kappa_2) \right) + f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \\
& \leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 \xi^{\alpha} \left| f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2) \right| d\xi \\
& \quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_0^1 \xi^{\alpha} \left| f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1) \right| d\xi \\
& \leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\int_0^1 (\xi^{\alpha})^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2)|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\int_0^1 (\xi^{\alpha})^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1)|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

bulunur. $|f'|^q$ fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konkav fonksiyon olduğundan, Jensen integral eşitsizliği kullanılarak,

$$\int_0^1 |f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2)|^q d\xi \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| f' \left(\int_0^1 (\xi (\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi) \kappa_2) d\xi \right) \right|^q \\
&= \left| f' \left(\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2 - \varkappa}{2} \right) \right|^q
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde,

$$\int_0^1 |f'(\xi (\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi) \kappa_1)|^q d\xi \leq \left| f' \left(\frac{2\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa}{2} \right) \right|^q \quad (4.25)$$

bulunur. (4.24) ve (4.25) eşitsizlikleri ve

$$\int_0^1 (\xi^\alpha)^p d\xi = \frac{1}{\alpha p + 1} \quad (4.26)$$

eşitliği (4.23)'te kullanılarak istenen sonuç elde edilir. $\square$

Sonuç 4.12. Teorem 4.11 in şartları altında, özel olarak $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)-}^\alpha f(\kappa_2) + J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)+}^\alpha f(\kappa_1) \right] - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \quad (4.27) \\
&\leq \left(\frac{1}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \right) \left[\left| f' \left(\frac{\kappa_1 + 3\kappa_2}{4} \right) \right| + \left| f' \left(\frac{3\kappa_1 + \kappa_2}{4} \right) \right| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.13. Teorem 4.11'in şartları altında $\alpha = 1$ seçilirse, bu durumda Teorem 4.11 Qaisar ve Hussain tarafından ispatlanan Teorem 2.39'a dönüşür [13].

Teorem 4.14. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2$ için (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L^1[\kappa_1, \kappa_2]$ olsun. $|f'|^q$, $q \geq 1$, $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konkav fonksiyon ise, bu takdirde $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left((\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}^\alpha f(\kappa_1) + (\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}^\alpha f(\kappa_2) \right) \right. \\
&\quad \left. + f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \quad (4.28)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right) \left[(\varkappa - \kappa_1)^2 \left| f' \left(\frac{(\alpha + 1)}{(\alpha + 2)} (\kappa_1 - \varkappa) + \kappa_2 \right) \right| \right. \\ \left. + (\kappa_2 - \varkappa)^2 \left| f' \left(\frac{(\alpha + 1)}{(\alpha + 2)} (\kappa_2 - \varkappa) + \kappa_1 \right) \right| \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. (4.18) eşitsizliğinden

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\kappa_2 - \kappa_1} \left((\kappa_2 - \varkappa)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}^{\alpha} f(\kappa_1) + (\varkappa - \kappa_1)^{1-\alpha} J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}^{\alpha} f(\kappa_2) \right) \right. \\ \left. + f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \quad (4.29)$$

$$\leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\int_0^1 \xi^{\alpha} d\xi \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \left(\int_0^1 |\xi^{\alpha}| \left| f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2) \right|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\ + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\int_0^1 \xi^{\alpha} d\xi \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \left(\int_0^1 |\xi^{\alpha}| \left| f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1) \right|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Jensen eşitsizliği kullanılarak,

$$\int_0^1 |\xi^{\alpha}| \left| f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2) \right|^q d\xi \quad (4.30) \\ \leq \left(\int_0^1 \xi^{\alpha} d\xi \right) f' \left| \left(\frac{1}{\int_0^1 \xi^{\alpha} d\xi} \int_0^1 \xi^{\alpha} (\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2) d\xi \right) \right|^q \\ = \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right) \left| f' \left(\frac{(\alpha + 1)}{(\alpha + 2)} (\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + \frac{1}{\alpha + 2} \kappa_2 \right) \right|^q \\ = \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right) \left| f' \left(\frac{(\alpha + 1)}{(\alpha + 2)} (\kappa_1 - \varkappa) + \kappa_2 \right) \right|^q$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |\xi^\alpha| |f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1)|^q d\xi \\ & \leq \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right) \left| f' \left(\frac{(\alpha + 1)}{(\alpha + 2)} (\kappa_2 - \varkappa) + \kappa_1 \right) \right|^q \end{aligned} \quad (4.31)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 4.15. Teorem 4.14'ün şartları altında $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ alınırsa, bu durumda

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha + 1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^-}^\alpha f(\kappa_1) + J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^+}^\alpha f(\kappa_2) \right] - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \quad (4.32) \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right)^{2 - \frac{1}{q}} \left[\left| f' \left(\frac{(\alpha + 3)\kappa_2 + (\alpha + 1)\kappa_1}{2(\alpha + 2)} \right) \right| \right. \\ & \quad \left. + \left| f' \left(\frac{(\alpha + 3)\kappa_1 + (\alpha + 1)\kappa_2}{2(\alpha + 2)} \right) \right| \right] \quad (4.33) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.16. Teorem 4.14'te $\alpha = 1$ seçilirse, bu takdirde Teorem 4.14 Qaisar ve Hussain tarafından ispatlanan Teorem 2.40'a dönüşür [13].

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN ORTA NOKTA TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde genelleştirilmiş kesirli integraller için birçok orta nokta tipli eşitsizlik elde edilecektir. Daha sonra elde edilen sonuçların özel durumu olarak bazı kesirli integraller için yeni eşitsizlikler verilecektir. İlk olarak ana sonuçların ispatında kullanılacak olan aşağıdaki iki özdeşlik verilecektir.

Lemma 5.1. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $\kappa_1 < \kappa_2$ için (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f' \in L[\kappa_1, \kappa_2]$ ise, $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere genelleştirilmiş kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left[{}_{\kappa_2-}J_{\varphi} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + {}_{\kappa_1+}J_{\varphi} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \\ & - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \\ & = \frac{(\varkappa - \kappa_1)}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \int_0^1 \Lambda(\xi) f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \\ & - \frac{(\kappa_2 - \varkappa)}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \int_0^1 \Delta(\xi) f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \end{aligned} \quad (5.1)$$

eşitliği elde edilir. Burada Λ ve Δ fonksiyonları

$$\begin{aligned} \Lambda(\xi) &= \int_{\xi}^1 \frac{\varphi((\varkappa - \kappa_1)u)}{u} du \\ \Delta(\xi) &= \int_{\xi}^1 \frac{\varphi((\kappa_2 - \varkappa)u)}{u} du \end{aligned} \quad (5.2)$$

ile tanımlanır.

İspat. Kısmi integrasyon kullanılarak,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \Lambda(\xi) f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \\
&= \left[\Lambda(\xi) \frac{f(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))}{\varkappa - \kappa_1} \right]_0^1 \\
&\quad + \int_0^1 \frac{f(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))}{\varkappa - \kappa_1} \frac{\varphi((\varkappa - \kappa_1)\xi)}{\xi} d\xi
\end{aligned} \tag{5.3}$$

bulunur. $\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) = y$ değişken değişimi kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\Lambda(0) \frac{f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)}{\varkappa - \kappa_1} + \frac{1}{\varkappa - \kappa_1} \int_{\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa}^{\kappa_2} f(y) \frac{\varphi(y - (\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))}{y - (\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)} dy \\
&= -\Lambda(0) \frac{f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)}{\varkappa - \kappa_1} + \frac{1}{\varkappa - \kappa_1} \kappa_2^- J_\varphi f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \Delta(\xi) f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \\
&= \Delta(0) \frac{f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)}{\kappa_2 - \varkappa} - \frac{1}{\kappa_2 - \varkappa} \kappa_1^+ J_\varphi f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

bulunabilir. I_1 ve I_2 ifadeleri sırasıyla $\frac{\varkappa - \kappa_1}{\Lambda(0) + \Delta(0)}$ ve $-\frac{\kappa_2 - \varkappa}{\Lambda(0) + \Delta(0)}$ ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned}
&\frac{\varkappa - \kappa_1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} I_1 - \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\Lambda(0) + \Delta(0)} I_2 \\
&= \frac{1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left[\kappa_2^- J_\varphi f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + \kappa_1^+ J_\varphi f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \\
&\quad - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. □

Lemma 5.2. Lemma 5.1'in koşulları geęerli olsun. Bu durumda $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere genelleştirilmiş kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left[{}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}J_{\varphi} f(\kappa_2) + {}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}J_{\varphi} f(\kappa_1) \right] \\
& - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \\
& = \frac{(\varkappa - \kappa_1)}{\Psi(1) + \Theta(1)} \int_0^1 \Psi(\xi) f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2) d\xi \\
& + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)}{\Psi(1) + \Theta(1)} \int_0^1 \Theta(\xi) f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1) d\xi
\end{aligned} \tag{5.7}$$

eşitliği vardır. Burada Ψ ve Θ fonksiyonları

$$\begin{aligned}
\Psi(\xi) &= \int_0^{\xi} \frac{\varphi((\varkappa - \kappa_1)u)}{u} du \\
\Theta(\xi) &= \int_0^{\xi} \frac{\varphi((\kappa_2 - \varkappa)u)}{u} du
\end{aligned} \tag{5.8}$$

ile tanımlanır.

İspat. Kısmi integrasyon kullanılarak,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^1 \Psi(\xi) f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2) d\xi \\
&= \Psi(\xi) \frac{f(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2)}{\kappa_1 - \varkappa} \Big|_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 \frac{f(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2)}{\kappa_1 - \varkappa} \frac{\varphi((\varkappa - \kappa_1)\xi)}{\xi} d\xi
\end{aligned} \tag{5.9}$$

elde edilir. $\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2 = z$ değişken değişimi yardımıyla,

$$I_3 = -\Psi(1) \frac{f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)}{\varkappa - \kappa_1} + \frac{1}{\varkappa - \kappa_1} \int_{\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa}^{\kappa_2} f(z) \frac{\varphi(\kappa_2 - z)}{\kappa_2 - z} dz \tag{5.10}$$

$$= -\Psi(1) \frac{f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)}{\varkappa - \kappa_1} + \frac{1}{\varkappa - \kappa_1} {}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)^+} J_{\varphi} f(\kappa_2)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 \Theta(\xi) f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1) d\xi \\ &= \Theta(1) \frac{f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)}{\kappa_2 - \varkappa} - \frac{1}{\kappa_2 - \varkappa} {}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)^-} J_{\varphi} f(\kappa_1) \end{aligned} \quad (5.11)$$

elde edilir. I_3 ve I_4 ifadeleri sırasıyla $\frac{\varkappa - \kappa_1}{\Psi(1) + \Theta(1)}$ ve $-\frac{\kappa_2 - \varkappa}{\Psi(1) + \Theta(1)}$ ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned} &\frac{\varkappa - \kappa_1}{\Psi(1) + \Theta(1)} I_3 - \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\Psi(1) + \Theta(1)} I_4 \\ &= \frac{1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left[{}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)^-} J_{\varphi} f(\kappa_2) + {}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)^+} J_{\varphi} f(\kappa_1) \right] \\ &\quad - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \end{aligned} \quad (5.12)$$

eşitliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 5.3. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2$ için (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konveks fonksiyon ise, bu durumda $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere genelleştirilmiş kesirli integraller için

$$\left| \frac{1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left[{}_{\kappa_2^-} J_{\varphi} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + {}_{\kappa_1^+} J_{\varphi} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \right. \quad (5.13)$$

$$\left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left\{ (\varkappa - \kappa_1) \left| f'(\kappa_2) \right| \int_0^1 \Lambda(\xi) \xi d\xi + (\kappa_2 - \varkappa) \left| f'(\kappa_1) \right| \int_0^1 \Delta(\xi) \xi d\xi \right. \\ &\quad \left. + \left| f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \int_0^1 (1 - \xi) [(\varkappa - \kappa_1) \Lambda(\xi) + (\kappa_2 - \varkappa) \Delta(\xi)] d\xi \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Λ ve Δ fonksiyonları (5.2)'deki gibi tanımlanmıştır.

İspat. Lemma 5.1'den,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left[{}_{\kappa_2^-} J_{\varphi} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + {}_{\kappa_1^+} J_{\varphi} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \right. \\
& \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left| \int_0^1 \Lambda(\xi) f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \right| \\
& \quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left| \int_0^1 \Delta(\xi) f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)) d\xi \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \int_0^1 |\Lambda(\xi) f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))| d\xi \\
& \quad + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \int_0^1 |\Delta(\xi) f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))| d\xi
\end{aligned} \tag{5.14}$$

yazılabilir. $|f'|$ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left[{}_{\kappa_2^-} J_{\varphi} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + {}_{\kappa_1^+} J_{\varphi} f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \right. \\
& \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left\{ \int_0^1 \Lambda(\xi) [\xi |f'(\kappa_2)| + (1 - \xi) |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|] d\xi \right. \\
& \quad \left. + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \int_0^1 \Delta(\xi) [\xi |f'(\kappa_1)| + (1 - \xi) |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|] d\xi \right\} \\
& = \frac{1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left\{ (\varkappa - \kappa_1) |f'(\kappa_2)| \int_0^1 \Lambda(\xi) \xi d\xi + (\kappa_2 - \varkappa) |f'(\kappa_1)| \int_0^1 \Delta(\xi) \xi d\xi \right. \\
& \quad \left. + |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)| \int_0^1 (1 - \xi) [(\varkappa - \kappa_1) \Lambda(\xi) + (\kappa_2 - \varkappa) \Delta(\xi)] d\xi \right\}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ispatı tamamlar. $\square$

Sonuç 5.4. Teorem 5.3'ün şartları altında $\varphi(\xi) = \xi$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(\xi) d\xi - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\ & \leq \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \left\{ \frac{1}{6} \left[(\varkappa - \kappa_1)^2 \left| f'(\kappa_2) \right| + (\kappa_2 - \varkappa)^2 \left| f'(\kappa_1) \right| \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{3} \left| f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| [(\varkappa - \kappa_1)^2 + (\kappa_2 - \varkappa)^2] \right\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.5. Sonuç 5.4'de $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ seçilirse, bu durumda Sonuç 5.4 Kırmacı tarafından ispatlanan Teorem 2.25'e dönüşür [6].

Sonuç 5.6. Teorem 5.3'ün şartları altında $\varphi(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(\kappa_2 - \varkappa)^\alpha + (\varkappa - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{\kappa_2^-}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + J_{\kappa_1^+}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \right. \\ & \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\ & \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \varkappa)^\alpha + (\varkappa - \kappa_1)^\alpha} \frac{\alpha}{2(\alpha + 2)} \\ & \quad \times \left\{ (\varkappa - \kappa_1)^{\alpha+1} \left| f'(\kappa_2) \right| + (\kappa_2 - \varkappa)^{\alpha+1} \left| f'(\kappa_1) \right| \right. \\ & \quad \left. + \left| f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \frac{\alpha + 3}{2(\alpha + 1)} [(\kappa_2 - \varkappa)^{\alpha+1} + (\varkappa - \kappa_1)^{\alpha+1}] \right\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.7. Sonuç 5.6'da $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ seçilirse, Sonuç 5.6 Budak ve Agarwal tarafından verilen Sonuç 3.6'ya dönüşür [16].

Sonuç 5.8. Teorem 5.3'ün şartları altında özel olarak $\varphi(\xi) = \frac{\xi^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(\kappa_2 - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}} + (\varkappa - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[J_{\kappa_2-,k}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + J_{\kappa_1+,k}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \right. \\
& \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
& \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \varkappa)^{\alpha/k} + (\varkappa - \kappa_1)^{\alpha/k}} \\
& \quad \times \left\{ (\varkappa - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}+1} \frac{\alpha}{2(\alpha+2k)} |f'(\kappa_2)| + (\kappa_2 - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}+1} \frac{\alpha}{2(\alpha+2k)} |f'(\kappa_1)| \right. \\
& \quad \left. + |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)| \frac{\alpha(\alpha+3k)}{2(\alpha+k)(\alpha+2k)} \left[(\kappa_2 - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}+1} + (\varkappa - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}+1} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.9. Sonuç 5.8'in şartları altında $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1} \Gamma_k(\alpha+k)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[J_{\kappa_2-,k}^\alpha f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + J_{\kappa_1+,k}^\alpha f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right] \right. \\
& \quad \left. - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)\alpha}{4(\alpha+k)} [|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)|]
\end{aligned} \tag{5.19}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5.10. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2$ için (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|^q$, $q > 1$, fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konveks fonksiyon ise, bu durumda $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere genelleştirilmiş kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left[{}_{\kappa_2-}J_\varphi f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + {}_{\kappa_1+}J_\varphi f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \right. \\
& \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right|
\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\varkappa - \kappa_1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left(\int_0^1 \Lambda(\xi)^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left(\int_0^1 \Delta(\xi)^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_1)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Λ ve Δ fonksiyonları (5.2)'deki gibi tanımlanmıştır.

İspat. Lemma 5.1'den,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left[{}_{\kappa_2-}J_{\varphi}f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + {}_{\kappa_1+}J_{\varphi}f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \right. \\
&\quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
&\leq \frac{\varkappa - \kappa_1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \int_0^1 \Lambda(\xi) |f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))| d\xi \\
&\quad + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \int_0^1 \Delta(\xi) |f'(\xi \kappa_1 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))| d\xi
\end{aligned} \tag{5.21}$$

yazılabilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left[{}_{\kappa_2-}J_{\varphi}f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + {}_{\kappa_1+}J_{\varphi}f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \right. \\
&\quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
&\leq \frac{\varkappa - \kappa_1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left(\int_0^1 (\Lambda(\xi))^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 |f'(\xi \kappa_2 + (1 - \xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left(\int_0^1 (\Delta(\xi))^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 |f'(\xi \kappa_1 + (1-\xi)(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa))|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{\varkappa - \kappa_1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left(\int_0^1 (\Lambda(\xi))^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 [\xi |f'(\kappa_2)|^q + (1-\xi) |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q] d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left(\int_0^1 (\Delta(\xi))^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 [\xi |f'(\kappa_1)|^q + (1-\xi) |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q] d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{\varkappa - \kappa_1}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left(\int_0^1 (\Lambda(\xi))^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\Lambda(0) + \Delta(0)} \left(\int_0^1 (\Delta(\xi))^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_1)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 5.11. Teorem 5.10'un şartları altında $\varphi(\xi) = \xi$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(\xi) d\xi - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
& \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ (\varkappa - \kappa_1)^2 \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (\kappa_2 - \varkappa)^2 \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_1)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (5.23)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.12. Sonuç 5.11'in şartları altında $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(\xi) d\xi - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left(\frac{|f'(\kappa_1)|^q + 3|f'(\kappa_2)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(\kappa_2)|^q + 3|f'(\kappa_1)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left(\frac{4}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} [|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)|]
\end{aligned} \tag{5.24}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.13. Teorem 5.10'un şartları altında $\varphi(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \varkappa)^\alpha + (\varkappa - \kappa_1)^\alpha} [J_{\kappa_2-}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + J_{\kappa_1+}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)] \right. \\
& \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right|
\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \varkappa)^\alpha + (\varkappa - \kappa_1)^\alpha} \left(\frac{\alpha p}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left\{ (\varkappa - \kappa_1)^{\alpha+1} \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (\kappa_2 - \varkappa)^{\alpha+1} \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_1)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.14. Sonuç 5.13'ün şartları altında $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{\kappa_2-}^\alpha f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + J_{\kappa_1+}^\alpha f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right] \right. \\
& \quad \left. - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right|
\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)}{4} \left(\frac{\alpha p}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left[\left(\frac{|f'(\kappa_1)|^q + 3|f'(\kappa_2)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(\kappa_2)|^q + 3|f'(\kappa_1)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)}{4} \left(\frac{4\alpha p}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} [|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)|]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.15. Teorem 5.10'un koşulları altında $\varphi(\xi) = \frac{\xi^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{(\kappa_2 - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}} + (\varkappa - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[J_{\kappa_2-,k}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + J_{\kappa_1+,k}^\alpha f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right] \right. \\
&\quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \tag{5.27} \\
&\leq \frac{1}{(\kappa_2 - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}} + (\varkappa - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}}} \left(\frac{\alpha p}{\alpha p + k} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left\{ (\varkappa - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}+1} \left[\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + (\kappa_2 - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}+1} \left[\frac{|f'(\kappa_1)|^q + |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.16. Sonuç 5.15'in şartları altında $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1} \Gamma_k(\alpha + k)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[J_{\kappa_2-,k}^\alpha f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + J_{\kappa_1+,k}^\alpha f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \tag{5.28} \\
&\leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)}{4} \left(\frac{4\alpha p}{\alpha p + k} \right)^{\frac{1}{p}} [|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)|]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5.17. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2$ için (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konveks fonksiyon ise, bu durumda $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ olmak üzere genelleştirilmiş kesirli integraller için

$$\left| \frac{1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left[{}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}J_{\varphi} f(\kappa_2) + {}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}J_{\varphi} f(\kappa_1) \right] - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \quad (5.29)$$

$$\leq \frac{1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \times \left\{ (\varkappa - \kappa_1) \left| f'(\kappa_2) \right| \int_0^1 (1 - \xi) \Psi(\xi) d\xi + (\kappa_2 - \varkappa) \left| f'(\kappa_1) \right| \int_0^1 (1 - \xi) \Theta(\xi) d\xi \right. \\ \left. + \left| f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \int_0^1 \xi [(\varkappa - \kappa_1) \Psi(\xi) + (\kappa_2 - \varkappa) \Theta(\xi)] d\xi \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Ψ ve Θ fonksiyonları (5.8)'deki gibi tanımlanmıştır.

İspat. Lemma 5.2'den,

$$\left| \frac{1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left[{}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}J_{\varphi} f(\kappa_2) + {}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}J_{\varphi} f(\kappa_1) \right] - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \quad (5.30) \\ \leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left| \int_0^1 \Psi(\xi) f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2) d\xi \right| \\ + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left| \int_0^1 \Theta(\xi) f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1) d\xi \right| \\ \leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)}{\Psi(1) + \Theta(1)} \int_0^1 |\Psi(\xi) f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2)| d\xi \\ + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)}{\Psi(1) + \Theta(1)} \int_0^1 |\Theta(\xi) f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1)| d\xi$$

yazılabilir. $|f'|$ fonksiyonunun konveksliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left[{}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}J_{\varphi} f(\kappa_2) + {}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}J_{\varphi} f(\kappa_1) \right] - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
& \leq \frac{(\varkappa - \kappa_1)}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left\{ \int_0^1 \Psi(\xi) [\xi |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)| + (1 - \xi) |f'(\kappa_2)|] d\xi \right. \\
& \quad \left. + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)}{\Psi(1) + \Theta(1)} \int_0^1 \Theta(\xi) [\xi |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)| + (1 - \xi) |f'(\kappa_1)|] d\xi \right\} \\
& = \frac{1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \\
& \quad \times \left\{ (\varkappa - \kappa_1) |f'(\kappa_2)| \int_0^1 (1 - \xi) \Psi(\xi) d\xi + (\kappa_2 - \varkappa) |f'(\kappa_1)| \int_0^1 (1 - \xi) \Theta(\xi) d\xi \right. \\
& \quad \left. + |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)| \int_0^1 \xi [(\varkappa - \kappa_1) \Psi(\xi) + (\kappa_2 - \varkappa) \Theta(\xi)] d\xi \right\}
\end{aligned} \tag{5.31}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Sonuç 5.18. Teorem 5.17’de $\varphi(\xi) = \xi$ seçilirse, bu durumda (5.29) eşitsizliği (5.16) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 5.19. Teorem 5.17’nin şartları altında $\varphi(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(\kappa_2 - \varkappa)^\alpha + (\varkappa - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}^\alpha f(\kappa_2) + J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}^\alpha f(\kappa_1) \right] \right. \\
& \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
& \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \varkappa)^\alpha + (\varkappa - \kappa_1)^\alpha} \frac{1}{(\alpha + 2)} \frac{1}{(\alpha + 1)} \\
& \quad \times \left\{ [(\varkappa - \kappa_1)^{\alpha+1} |f'(\kappa_2)| + (\kappa_2 - \varkappa)^{\alpha+1} |f'(\kappa_1)|] \right. \\
& \quad \left. + |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)| [(\kappa_2 - \varkappa)^{\alpha+1} + (\varkappa - \kappa_1)^{\alpha+1}] \right\}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.20. Sonuç 5.19’de $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ seçilirse, bu durumda Sonuç 5.19 Sarıkaya ve Yıldırım tarafından verilen

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^-}^\alpha f(\kappa_2) + J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^+}^\alpha f(\kappa_1) \right] \right. \\ & \quad \left. - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)}{4(\alpha+1)} [|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)|] \end{aligned} \quad (5.33)$$

eşitsizliğine dönüşür [17].

Sonuç 5.21. Teorem 5.17’nin şartları altında $\varphi(\xi) = \frac{\xi^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(\kappa_2 - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}} + (\varkappa - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)^-, k}^\alpha f(\kappa_2) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)^+, k}^\alpha f(\kappa_1) \right] - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\ & \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \varkappa)^{\alpha/k} + (\varkappa - \kappa_1)^{\alpha/k}} \frac{k}{(\alpha+2k)} \\ & \quad \times \left\{ \frac{k}{(\alpha+k)} \left[(\varkappa - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}+1} |f'(\kappa_2)| + (\kappa_2 - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}+1} |f'(\kappa_1)| \right] \right. \\ & \quad \left. + |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)| \left[(\kappa_2 - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}+1} + (\varkappa - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}+1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.34)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.22. Sonuç 5.21’de $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ seçilirse, bu durumda Sonuç 5.21 Farid ve ark. tarafından verilen

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1} \Gamma_k(\alpha+k)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^-, k}^\alpha f(\kappa_2) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^+, k}^\alpha f(\kappa_1) \right] - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)k}{4(\alpha+k)} [|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)|] \end{aligned} \quad (5.35)$$

eşitsizliği elde edilir [18].

Teorem 5.23. $f : [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2$ için (κ_1, κ_2) aralığı üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|^q$, $q > 1$, fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ aralığı üzerinde konveks fonksiyon ise, bu durumda $\varkappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere genelleştirilmiş kesirli integraller için

$$\left| \frac{1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left[{}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}J_{\varphi} f(\kappa_2) + {}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}J_{\varphi} f(\kappa_1) \right] \right. \quad (5.36)$$

$$\left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\varkappa - \kappa_1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left(\int_0^1 \Psi(\xi)^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left(\int_0^1 \Theta(\xi)^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_1)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Ψ ve Θ fonksiyonları (5.8)'deki gibi tanımlanmıştır.

İspat. Lemma 5.2'den,

$$\left| \frac{1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left[{}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}J_{\varphi} f(\kappa_2) \right. \right. \quad (5.37)$$

$$\left. + {}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}J_{\varphi} f(\kappa_1) \right] - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\varkappa - \kappa_1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \int_0^1 \Psi(\xi) |f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2)| d\xi \\ &\quad + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\Psi(1) + \Theta(1)} \int_0^1 \Theta(\xi) |f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1)| d\xi \end{aligned}$$

yazılır. $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left[{}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}J_{\varphi} f(\kappa_2) + {}_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}J_{\varphi} f(\kappa_1) \right] \right. \\
& \quad \left. - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
& \leq \frac{\varkappa - \kappa_1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left(\int_0^1 (\Psi(\xi))^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 |f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_2)|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left(\int_0^1 (\Theta(\xi))^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 |f'(\xi(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) + (1 - \xi)\kappa_1)|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{\varkappa - \kappa_1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left(\int_0^1 (\Psi(\xi))^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 [(1 - \xi)|f'(\kappa_2)|^q + \xi|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q] d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left(\int_0^1 (\Theta(\xi))^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 [(1 - \xi)|f'(\kappa_1)|^q + \xi|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q] d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{\varkappa - \kappa_1}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left(\int_0^1 (\Psi(\xi))^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\Psi(1) + \Theta(1)} \left(\int_0^1 (\Theta(\xi))^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\times \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_1)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Sonuç 5.24. Teorem 5.23'te $\varphi(\xi) = \xi$ seçilirse, bu durumda (5.36) eşitsizliği (5.23) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 5.25. Teorem 5.23'ün şartları altında $\varphi(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(\kappa_2 - \varkappa)^\alpha + (\varkappa - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)-}^\alpha f(\kappa_2) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)+}^\alpha f(\kappa_1) \right] - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\ & \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \varkappa)^\alpha + (\varkappa - \kappa_1)^\alpha} \left(\frac{1}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left\{ (\varkappa - \kappa_1)^{\alpha+1} \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + (\kappa_2 - \varkappa)^{\alpha+1} \left(\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_1)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned} \quad (5.39)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.26. Sonuç 5.25'de $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ seçilirse, bu durumda Sonuç 5.25 Sarıkaya ve Yıldırım tarafından ispatlanmış olan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha + 1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)-}^\alpha f(\kappa_2) + J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)+}^\alpha f(\kappa_1) \right] \right. \\ & \quad \left. - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left(\frac{1}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left\{ \left(\frac{|f'(\kappa_1)|^q + 3|f'(\kappa_2)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|f'(\kappa_1)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ & \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left(\frac{4}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} [|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)|] \end{aligned} \quad (5.40)$$

eşitsizliğine dönüşür [17].

Sonuç 5.27. Teorem 5.23'ün şartları altında $\varphi(\xi) = \frac{\xi^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ alınırsa, bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{(\kappa_2 - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}} + (\varkappa - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)^-, k}^\alpha f(\kappa_2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + J_{(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)^+, k}^\alpha f(\kappa_1) \right] - f(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa) \right| \\
& \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k}} + (\varkappa - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}}} \left(\frac{k}{\alpha p + k} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left\{ (\varkappa - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k} + 1} \left[\frac{|f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (\kappa_2 - \varkappa)^{\frac{\alpha}{k} + 1} \left[\frac{|f'(\kappa_1)|^q + |f'(\kappa_1 + \kappa_2 - \varkappa)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.28. Sonuç 5.27'de $\varkappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ seçilirse, bu durumda Sonuç 5.27 Farid ve ark. tarafından verilen

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\frac{\alpha}{k} - 1} \Gamma_k(\alpha + k)}{(\kappa_2 - \kappa_1)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^-, k}^\alpha f(\kappa_2) + J_{\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^+, k}^\alpha f(\kappa_1) \right] \right. \\
& \quad \left. - f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left(\frac{k}{\alpha p + k} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left\{ \left(\frac{|f'(\kappa_1)|^q + 3|f'(\kappa_2)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|f'(\kappa_1)|^q + |f'(\kappa_2)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& \leq \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4} \left(\frac{4k}{\alpha p + k} \right)^{\frac{1}{p}} [|f'(\kappa_1)| + |f'(\kappa_2)|]
\end{aligned} \tag{5.42}$$

eşitsizliğine dönüşür [18].

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Giriş, Temel Kavramlar, Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri için Orta Nokta Tipli Eşitsizlikler, Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri için Yeni Genelleştirilmiş Orta Nokta Tipli Eşitsizlikler ve Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller için Orta Nokta Tipli Eşitsizlikler bölümleri olmak üzere altı bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde tezin konusuyla ilgili literatürdeki temel çalışmalardan bahsedilmiştir. Temel kavramlar bölümü ise beş alt bölümden oluşmuştur. Birinci alt bölümde çeşitli konveks fonksiyon tanımları sunulmuştur. İkinci alt bölümde ise birçok kesirli integral tanımları verilmiştir. Üçüncü alt bölümde tezde kullanılan bazı eşitsizliklere yer verilmiştir. Dördüncü ve beşinci alt bölümde ise tezde kullanılan genelleştirilmiş integral operatörleri ve genelleştirilmiş orta nokta eşitsizliklerinden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde Budak ve Agarwal tarafından elde edilen bu teze öncülük eden ve bazı Orta-Nokta tipli eşitsizlikler sunulmuştur. Dördüncü bölümde Riemann-Liouville kesirli integralleri için yeni orta nokta tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise genelleştirilmiş kesirli integraller için orta nokta tipli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Sonraki çalışmalarda dördüncü ve beşinci bölümlerde ispatlanan eşitlikler kullanılarak, farklı türden konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde edilebilir. Ayrıca iki değişkenli kısmi türevlenebilir fonksiyonlar için benzer eşitsizlikler elde edilerek, koordinatlara göre konveks fonksiyonlar için benzer sonuçlar ispatlanabilir.

7. KAYNAKLAR

- [1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Polya, *Inequalities*, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1952, ss. 226-259.
- [2] E. F. Beckenbach ve R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Deutschland: Springer-Verlag, 1961, ss. 164-184.
- [3] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Berlin, Deutschland: Springer Verlag, 1970, ss. 27-180.
- [4] S. S. Dragomir ve C. E. M. Pearce, "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications", *Mathematics Preprint Archive*, c. 2003, sayı 3, ss. 463-817, 2003.
- [5] S. S. Dragomir ve R. P. Agarwal, "Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula," *Applied Mathematics Letters*, c. 11, sayı 5, ss. 91–95, 1998.
- [6] U. S. Kirmaci, "Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers to midpoint formula," *Applied Mathematics Computation*, c. 147, sayı 5, ss. 137–146, 2004.
- [7] M. Alomari, M. Darus ve U. S. Kirmaci, "Refinements of Hadamard-type inequalities for quasi-convex functions with applications to trapezoidal formula and to special means," *Computers & Mathematics with Applications*, c. 59, sayı 1, ss. 225-232, 2010.
- [8] G. A. Anastassiou, "General fractional Hermite-Hadamard inequalities using m -convexity and (s,m) -convexity," *Frontiers in Time Scales and Inequalities*, c. 237, ss. 255, 2016.
- [9] İ. İşcan, "Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions," *Hacettepe Journal of Mathematics and statistics*, c. 43, sayı 6, ss. 935-942, 2014.
- [10] M. E. Özdemir, M. Avcı ve E. Set, "On some inequalities of Hermite–Hadamard-type via m -convexity," *Applied Mathematics Letters*, c. 23, sayı 9, ss. 1065–1070, 2010.
- [11] M. E. Özdemir, M. Avcı ve H. Kavurmacı, "Hermite–Hadamard-type inequalities via (α, m) -convexity," *Computers & Mathematics with Applications*, c. 6, sayı 9, ss. 2614–2620, 2011.
- [12] A. Sağlam, M. Z. Sarikaya ve H. Yildirim, "Some new inequalities of Hermite-Hadamard's type", *Kyungpook Mathematical Journal*, c. 50 sayı 2010, ss. 399-410, 2010.

- [13] S. Qaisar ve S. Hussain, "On Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose first derivative absolute values are convex and concave," *Fasciculi Mathematici*, c. 58, sayı 1, ss. 155–166, 2017.
- [14] M. Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz ve N. Basak, "Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities," *Mathematical and Computer Modelling*, c. 57, sayı 9, ss. 2403–2407, 2013.
- [15] M. Iqbal, M. I. Bhatti ve K. Nazeer, "Generalization of inequalities analogous to Hermite-Hadamard inequality in fractional integrals," *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, c. 52, sayı 3, ss. 707–716, 2015.
- [16] H. Budak ve P. Agarwal, "New generalized midpoint type inequalities for fractional integral," *Miskolc Mathematical Notes*, c. 20, sayı 2, ss. 781–793, 2019.
- [17] M. Z. Sarikaya ve H. Yildirim, "On Hermite-Hadamard type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals," *Miskolc Mathematical Notes*, c. 7, sayı 2, ss. 1049-1059, 2016.
- [18] G. Farid, A. U. Rehman ve M. Zahra, "On Hadamard type inequalities for k -fractional integrals," *Konuralp Journal of Mathematics*, c. 4, sayı 2, ss. 79–86, 2016.
- [19] H. Chen ve U. N. Katugampola, "Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for generalized fractional integrals," *Journal of Mathematical Analysis Applications*, c. 446, sayı 2, 1274–1291, 2017.
- [20] M. Iqbal, S. Qaisar ve M. Muddassar, "A short note on integral inequality of type Hermite-Hadamard through convexity," *Journal of Computational analysis and applications*, c. 21, sayı 5, ss. 946-953, 2016.
- [21] İ. İşcan ve S. Wu, "Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals," *Applied Mathematics Computation*, c. 238, sayı 1, ss. 237-244, 2014.
- [22] İ. İşcan, "On generalization of different type integral inequalities for s -convex functions via fractional integrals," *Applicable Analysis*, c. 93, sayı 9, ss. 1846-1862, 2014.
- [23] M. Jleli ve B. Samet, "On Hermite-Hadamard type inequalities via fractional integrals of a function with respect to another function," *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, c. 9, sayı 3, ss. 1252-1260, 2016.
- [24] M. A. Noor ve M. U. Awan, "Some integral inequalities for two kinds of convexities via fractional integrals," *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics*, c. 5, sayı 2, ss. 129-136, 2013.
- [25] M. E. Özdemir, M. Avcı-Ardıç ve H. Kavurmacı-Önalın, "Hermite-Hadamard type inequalities for s -convex and s -concave functions via fractional integrals," *Turkish Journal of Science*, c. 1, sayı 1, ss. 28-40, 2016.
- [26] M. Z. Sarıkaya ve H. Budak, "Generalized Hermite-Hadamard type integral inequalities for fractional integrals," *Filomat*, c. 30, sayı 5, ss. 1315-1326, 2016.

- [27] M. Z. Sarikaya, A. Akkurt , H. Budak, M. E. Yildirim ve H. Yildirim, "Hermite-hadamard's inequalities for conformable fractional integrals," *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, c. 9, sayı 1, ss. 49-59, 2019.
- [28] E. Set, M. Z. Sarikaya, M. E. Ozdemir and H. Yildirim, "The Hermite-Hadamard's inequality for some convex functions via fractional integrals and related results," *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, c. 10, sayı 2, ss. 69-83, 2014.
- [29] J. Wang, X. Li, M. Fečkan ve Y. Zhou, "Hermite-Hadamard-type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals via two kinds of convexity," *Applicable Analysis*, c. 92, sayı 11 ,ss. 2241–2253, 2012.
- [30] J. Wang, X. Li ve C. Zhu, "Refinements of Hermite-Hadamard type inequalities involving fractional integrals," *Bulletin Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, c. 20, sayı 4, 655–666, 2013.
- [31] Y. Zhang ve J. Wang, "On some new Hermite-Hadamard inequalities involving RiemannLiouville fractional integrals," *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2013, sayı 1, ss. 1-27, 2013.
- [32] J. E. Pečarić, F. Proschan ve Y. L. Tong, "Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications," *Mathematics in science and engineering*, c. 187, sayı 1, ss. 467, 1992.
- [33] S. Varosanec, "On h-convexity," *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, c. 326, sayı 1, ss. 303-311, 2007.
- [34] S. S. Dragomir ve C. E. M. Pearce, "Quasi-convex functions and Hadamard's inequality," *Bulletin Australian Mathematical Society*, c. 57, sayı 3, ss. 377–385, 1998.
- [35] C. E. M. Pearce, J. E. Pecaric ve V. Simić, "Stolarsky means and Hadamard's inequality," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 220, sayı 1, ss. 99-109, 1998.
- [36] W. Orlicz ve W. Matuszewska, "A note on modular spaces," *Bulletin de Academie Polonaise des Sciences-Serie des Sciences Mathematiques Astronomiques et Physiques*, c. 16, sayı 10, ss. 801-808, 1968.
- [37] M. Tunç, "Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları," Doktora Tezi, Matematik, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye, 2011.
- [38] P. Kannapan, *Functional Equations and Inequalities with Applications*, Berlin/Heidelberg, Deutschland: Springer Science & Business Media, 2009, ss. 537-560.
- [39] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava ve J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, c. 204, Amsterdam, Holland: Elsevier Science Limited, 2006, ss. 69-132.

- [40] S. Mubeen ve G. M Habibullah, " k -Fractional integrals and application," *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, c. 7, sayı 2, 2012, ss. 89 - 94, 2012.
- [41] U. N. Katugampola, "New approach to a generalized fractional integral," *Applied Mathematics and Computation*, c. 218, sayı 3, ss. 860-865, 2011.
- [42] T. Abdeljawad, "On conformable fractional calculus," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 279, sayı1, ss. 57-66, 2015.
- [43] R. Gorenflo ve F. Mainardi, *Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order*, Wien, Australia: Springer Verlag, 1997, ss. 223-276.
- [44] K. S. Miller ve B. Ross, *An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, c. 2, New York, USA: John Wiley & Sons, 1993, ss. 44-255.
- [45] I. Podlubni, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, San Diego, ABD: Elsevier, 1998, ss. 1-117.
- [46] D. S. Mitrinović ve J. E. Pečarić, ve A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, c. 61, London, UK: Springer Science & Business Media, 2013, ss. 99-191.
- [47] B. G. Pachpatte, *Mathematical Inequalities*, c. 67, Amsterdam, Holland: Elsevier Science, 2005, ss. 11-45.
- [48] M. Z. Sarikaya ve F. Ertuğral, "On the generalized Hermite-Hadamard inequalities," *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, c. 47, sayı 1, ss. 193-213, 2020.
- [49] M. A. Ali, H. Budak ve I. B. Sial, "Generalized fractional integral inequalities for product of two convex functions," *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, c. 45, sayı 1, ss. 689-698, 2021.
- [50] H. Budak, F. Ertuğral ve E. Pehlivan, "Hermite-Hadamard type inequalities for twice differentiable functions via generalized fractional integrals," *Filomat*, c. 33, sayı 15, ss. 4967-4979, 2019.
- [51] H. Budak, E. Pehlivan ve P. Kösem, "On new extensions of Hermite-Hadamard inequalities for generalized fractional integrals," *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, c. 18, sayı 1, ss. 73-88, 2021.
- [52] M.Z. Sarikaya ve F. Ertuğral, "Simpson type integral inequalities for generalized fractional integral," *Revista de la Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, Serie Mathematicas*, c. 113, sayı 4, ss. 3115-3124, 2019.
- [53] J. Han, P. O. Mohammed ve H. Zeng, "Generalized fractional integral inequalities of Hermite-Hadamard-type for a convex function," *Open Mathematics*, c. 18, sayı 1, ss. 794-806, 2020.
- [54] F. Qi, P. O. Mohammed J.-C. Yao ve Y.-H. Yao, "Generalized fractional integral inequalities of Hermite-Hadamard type for (α, m) -convex functions," *Journal of Inequalities Applications*, c. 135 sayı 1, ss. 1-17, 2019.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Rabia KAPUCU

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2021
Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2019
Lise		Kadıköy Anadolu İmam Hatip Lisesi	2015

YAYINLAR

1. H. Budak ve R. Kapucu, “New generalization of midpoint type inequalities for fractional integral,” *Annals of the “Alexandru Ioan Cuza” University of Iaşi (New Series). Mathematics*, c. LXVII, sayı 1, ss. 113-128 , 2021.
2. H. Budak, H.Kara ve R. Kapucu, “New midpoint type inequalities for generalized fractional integral,” *Computational Methods for Differential Equations*, in press.