T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONİK METRİK UZAYDA KUASİ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

NİHAN TURAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. EMRAH EVREN KARA

DÜZCE, 2018

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONİK METRİK UZAYDA KUASİ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Nihan TURAN tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Emrah Evren Kara

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Metin Başarır
Sakarya Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Emrah Evren Kara
Düzce Üniversitesi ______________________

Dr. Öğr. Üyesi Fuat Usta
Düzce Üniversitesi ______________________

Tez Savunma Tarihi: 18/07/2018

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

18 Temmuz 2018

Nihan Turan

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Emrah Evren Kara'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyen Dr. Merve İlkhan'a da şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

18 Temmuz 2018 **Nihan TURAN**

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

BEYAN IV

TEŞEKKÜR.. V

İÇİNDEKİLER.. VI

SİMGELER VII

ÖZET VIII

ABSTRACT IX

1. GİRİŞ.. 1

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.. 4

3. KONİK METRİK UZAYDA KUASİ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÜZERİNE.. 13

4. KONİK METRİK UZAYDA KUVVETLİ KUASİ-TOPLANABİLİRLİK.. 26

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 33

6. KAYNAKLAR.. 34

ÖZGEÇMİŞ 36

SİMGELER

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$2^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}$ nin tüm alt kümelerinin ailesi
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
N_q^s	Kuvvetli kuasi-toplanabilir dizilerin uzayı
S_q^s	Kuasi-istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi

ÖZET

KONİK METRİK UZAYDA KUASİ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Nihan TURAN
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. E. Evren KARA
18 Temmuz 2018, 35 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tez konusuyla ilgili literatürde yapılan çalışmalara yer verildi. İkinci bölümde bu çalışmada kullanılacak temel tanım ve teoremlerden bahsedildi. Üçüncü bölümde kuasi-istatistiksel yakınsaklık kavramı konik metrik uzayda tanımlandı ve bu kavramla ilgili bazı teoremler ispatlandı. Son bölümde $\mathbb{R}$ de ele alınan kuvvetli kuasi-toplanabilir dizi kavramı konik metrik uzayda tanımlandı.

Anahtar sözcükler: İstatistiksel yakınsaklık, Konik metrik uzay, Kuvvetli kuasi-toplanabilir dizi, Kuasi-istatistiksel yakınsaklık.

ABSTRACT

QUASİ-STATISTICAL CONVERGENCE IN CONE METRIC SPACE

Nihan TURAN
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master's Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. E. Evren KARA
18 July 2018, 35 pages

This study consists of four parts. In the first part, the studies related to thesis topic made in the literature are included. In the second part, the basic definitions and theorems to be used in this study are mentioned. In the third part, the concept of quasi-statistical convergence is defined in cone metric space and some theorems related to this concept are proved. In the last section, the concept of strong quasi-summable sequence discussed in $\mathbb{R}$ is defined in cone metric space.

Keywords: Cone metric space, Quasi-statistical convergence, Statistical convergence, Strong quasi-summable convergence.

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı üzerine günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bir dizinin yakınsak olabilmesi için sonlu sayıda terimi hariç diğer tüm terimlerinin bir elemanın komşuluğunda kalması gerekmektedir. Fast, [1] nolu çalışmada tanımdaki sonlu sayıda terim hariç kısmını sıfır yoğunluklu bir kısmı hariç olarak değiştirmiştir ve bu yeni tanıma istatistiksel yakınsaklık adını vermiştir. Ayrıca yakınsaklığın bir genellemesi olan istatistiksel yakınsaklık fikri ilk olarak [2] nolu çalışmada Zygmund tarafından verilmiş olup daha sonra bu kavram 1951 yılında Steinhaus [3] ve Fast [1] tarafından birbirinden bağımsız olarak tanıtılmıştır. Normal yakınsaklık ile istatistiksel olarak yakınsaklığın birbirine benzer yönleri olsa da bazı farklı yönleri de mevcuttur. Örneğin, reel sayılar kümesinde limit ve istatistiksel limit mevcut ise tektir. Diğer yandan yakınsak bir dizinin sınırlı olması gerekli iken istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Ayrıca yakınsak olan her dizi aynı noktaya istatistiksel olarak da yakınsaktır. Yakınsaklığın bir genellemesi olan bu kavram daha sonra genelleştirilerek yakınsaklıkla benzer ve farklı özellikleri incelenmiştir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı toplanabilme teorisinde de önemli bir yer tutmaktadır. İstatistiksel yakınsaklığın toplanabilme teorisi ile ilişkisi ise ilk olarak 1959 yılında Schoenberg [4] tarafından verilmiştir. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık ile Cesaro toplanabilme ve kuvvetli toplanabilme arasındaki ilişki Connor tarafından [5] ve [6] nolu çalışmalarda ele alınmıştır. 1985 yılında Fridy [7] nolu çalışmada $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde istatistiksel Cauchy dizisini tanımlamış ve bir dizinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşulun istatistiksel Cauchy dizisi olduğunu ispatlamıştır. Bazı istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfının topolojik özelliklerinin incelenmesi ise ilk olarak 1980 yılında Salat [8] tarafından yapılmıştır. Ayrıca istatistiksel yakınsaklık kavramı ölçü teorisi ve sayılar teorisi ile ilgili olduğu gibi istatistik ile de ilgilidir. Bu ilişkiler ise 1981 yılında Fredman ve Sember [9], 1995 yılında Miller [10], 2007 yılında ise Khan ve Orhan [11] tarafından çalışılmıştır. 2009 yılında Hüseyin Çakallı [12] nolu çalışmada topolojik gruplarda dizilerin istatistiksel yakınsaklığını incelemiştir. 2014 yılında [13] nolu çalışmada metrik değerli dizilerin istatistiksel yakınsaklığı üzerine ve 2015 yılında [14] nolu çalışmada ise bir konik metrik uzayda istatistiksel yakınsaklık üzerine çalışılmıştır. Öte yandan [15] nolu çalışmada Ganichev ve Kadets kuasi-istatistiksel filtre kavramını tanıtmışlardır. Onların bu tanımından hareket ederek Sakaoğlu ve Yurdakadim, [16] nolu çalışmada reel uzayda istatistiksel yakınsaklığın özel hali olan kuasi-istatistiksel yakınsaklık kavramını ve ayrıca kuvvetli kuasi-toplanabilme kavramını vermişlerdir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı üzerine günümüze kadar pek çok araştırmacı tarafından çalışılmış olup reel uzay, metrik uzay, topolojik uzay ve konik metrik uzay vb. uzaylar üzerinde farklı isimler altında hala çalışılmaya devam edilmektedir (bkz.[17], [18], [19], [20], [21],[22]). Diğer yandan bilindiği gibi analizin temel konuları limit ve sürekliliktir. Bu kavramların tanımına dikkat edilirse aslında iki reel (veya kompleks) sayının farkının mutlak değerine bağlı olduğu görülür. Bu hususta reel (veya kompleks) sayılar, reel sayı doğrusu üzerindeki (veya kompleks düzlemdeki) noktalar olarak düşünüldüğünde mutlak değer onlar arasındaki uzaklıktır. Ayrıca analizde olduğu gibi matematiğin birçok dalında da soyut bir kümenin elemanlarına, uygulanabilir bir mesafe kavramına ihtiyaç duyulmuştur. Böylece yıllar boyunca yapılan çalışmalar neticesinde $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinden (veya $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinden) daha genel olan keyfi bir X kümesinde bir mesafe fonksiyonu olarak tanımlanan metrik ve metrik uzay kavramları ortaya çıkmıştır. Bu kavramı ilk defa 1906 yılında Maurice Frechet [23] boştan farklı bir küme için kümenin farklı iki elmanı arasındaki uzaklığın pozitif bir reel sayı olması gerektiğini göstererek vermiştir. Bu durumda yukarıda bahsedilen somutlaştırma ihtiyacına karşılık matematiğin birçok dalında soyut olan bazı kavramlar metrik uzay teorisinde daha somut kavramlarla açıklanma imkânı bulmuştur. Daha sonra metrik uzayın genelleştirilmesi üzerine pek çok matematikçi çalışmıştır. Bu genelleştirmelerden bazıları; fuzzy metrik uzay, soyut metrik uzay, K-metrik uzay, dikdörtgensel konik metrik uzay gibi uzaylardır. Öte yandan 20. yüzyılda Huang ve Zhang [24] sabit noktayı incelemek için metrik uzayların yeterli olmadığını ve daha kapsamlı bir uzayın tanımlanabileceğini görmüşlerdir. Bunun üzerine bir sıralı Banach uzayı ile reel sayılar kümesini yer değiştirerek konik metrik uzay kavramını tanıtmışlardır. Daha sonra farklı isimler altında pek çok araştırmacı tarafından çalışılan bu kavram topoloji, bilgisayar bilimi, istatistik gibi bazı çalışma alanlarında da önemli bir yer almıştır (bkz.[25], [26], [27], [28], [29],

[30]).

Bu tez çalışmasında yukarıdaki çalışmaları göz önünde bulundurarak bir konik metrik uzay üzerinde kuasi-istatistiksel yakınsaklık, kuasi-istatistiksel Cauchy dizsi ve kuvvetli kuasi-toplanabilme tanımlarını vereceğiz. Ayrıca istatistiksel yakınsaklık için verilen bazı teoremlerin kuasi-istatistiksel yakınsaklık için de geçerli olduğunu ispatlayacağız. Yakınsak olan dizilerin istatistiksel anlamda da yakınsak olduğu bilinmektedir. Yakınsak olan dizilerin aynı zamanda kuasi-istatistiksel yakınsak olduğu gösterilecektir ve kuasi-istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı ile kuvvetli kuasi-toplanabilir dizilerin uzayı arasında bazı kapsama ilişkileri ve bunlara bağlı olarak sonuçlar verilecektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez çalışması için gerekli olan bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir. Gerekli görülen bazı tanım ve teoremler birer örnek ile açıklanacaktır. Bu çalışma boyunca , $\mathbb{N}$ ile tüm pozitif tamsayıların kümesi , $\mathbb{R}$ ile de tüm reel sayıların kümesi gösterilecektir. Ayrıca $\mathbb{N}$ nin bir K alt kümesi için, K kümesinin kardinalitesi $|K|$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1. [31] Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ise diziye rasyonel terimli dizi adı verilir.

Tanım 2.2. [31] (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3. [31] Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa (x_n) dizisine sınırlı dizi denir.

Tanım 2.4. [31] (x_n) bir reel terimli dizi olsun. (x_n) nin bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için eğer $m, n \geq n_0$ ise $|x_m - x_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısının var olmasıdır.

Tanım 2.5. [31] $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x(n) = x_n$ dizisi verilmiş olsun.

$k: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $k(n) = k_n$ fonksiyonu bir artan dizi olmak üzere $x \circ k: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bileşke fonksiyonuna x dizisinin bir alt dizisi denir.

Tanım 2.6. [31] (x_n) bir reel terimli dizi ve C de (x_n) dizisinin alt dizilerinin kümesi olsun. C, genişletilmiş reel sayılar kümesinin bir alt kümesidir. sup$C$ ve inf$C$ genişletilmiş reel sayılarına, sırasıyla, (x_n) dizisinin üst limiti ve alt limiti denir. Üst limit limsupx_n ile alt limit, liminfx_n ile gösterilir.

Teorem 2.7. [31] (x_{k_n}) dizisi (x_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. Eğer $x_n \to x$ ise $x_{k_n} \to x$ dir. Yani yakınsak bir dizinin her alt dizisi yakınsaktır.

Tanım 2.8. [1] $K \subset \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $K(n) = \{k \in K: k \leq n\}$ olsun. Bu durumda

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|K(n)|}{n} \quad \text{ve} \quad \overline{\delta}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|K(n)|}{n}$$

sayıları sırasıyla K kümesinin alt ve üst yoğunluğu olarak adlandırılmaktadır. Eğer

$$\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$$

ise bu durumda

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K|}{n}$$

değerine K kümesinin asimptotik (veya doğal) yoğunluğu denir. Bu üç yoğunluğun hepsi mevcutsa, bu yoğunluklar $[0,1]$ kapalı aralığında değer alır. Eğer $K \subset \mathbb{N}$ için $\delta(K) = 1$ ise K kümesine istatistiksel yoğun küme denir. Ayrıca $K \subset \mathbb{N}$ için $\delta(\mathbb{N} - K) = 1 - \delta(K)$ eşitliği sağlanır.

Tanım 2.9. [1] (x_k), $\mathbb{R}$ de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - x| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya buna denk olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - x| < \varepsilon\}| = 1$$

ise (x_k) dizisi $x \in \mathbb{R}$ noktasına istatistiksel olarak yakınsaktır denir ve $st - \lim_{k\to\infty} x_k = x$ ile gösterilir.

Örnek 2.10. [20] $m = 1, 2, ...$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (x_k) dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n: |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n: x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n} \frac{\sqrt{n}}{n}$$

elde edilir. O halde $st - \lim_{k\to\infty} x_k = 0$ dır.

Örnek 2.11. [20]

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2, \quad (m = 1,2,\ldots) \\ 2, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (x_k) dizisi için $st - \lim_{k\to\infty} x_k = 2$ dir.

Burada şu belirtilmelidir ki normal olarak yakınsak olan her dizi aynı zamanda istatistiksel olarak da yakınsaktır. Fakat yukarıdaki iki örnekten görüleceği gibi ıraksak bazı diziler de istatistiksel anlamda yakınsak olabilmektedir. Diğer bir değişle istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir. Öte yandan $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde bir dizi yakınsak ise sınırlı olduğu bilinmektedir. Fakat bu Örnek 2.10 dan görüldüğü gibi istatistiksel olarak yakınsak bir dizinin sınırlı olması gerekmez.

Tanım 2.12. [7] Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_k) dizisine bir istatistiksel Cauchy dizisi denir. Bu ifade, her $\varepsilon > 0$ ve hemen hemen her k için

$$|x_k - x_N| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı vardır şeklinde de yazılabilir.

Tanım 2.13. [16] $s = (s_n)$ dizisi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty \text{ ve } \limsup_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} < \infty \tag{2.1}$$

şartlarını sağlayan pozitif tamsayıların bir dizisi olsun. Bu durumda $s = (s_n)$ dizisine göre $K \subset \mathbb{N}$ alt kümesinin kuasi yoğunluğu,

$$\delta_s(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} |\{k \leq n: k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. O zaman (x_n) dizisi $\mathbb{R}$ de bir dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$K_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N}: |x_k - x| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin kuasi yoğunluğu sıfırsa (x_n) dizisi $x \in \mathbb{R}$ noktasına kuasi-istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_q - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir.

Çalışma boyunca $s = (s_n)$ ve $t = (t_n)$ dizileri (2.1) şartını sağlayan pozitif reel sayıların dizileri olduğu kabul edilecektir.

Tanım 2.14. [16] (x_n) dizisi $\mathbb{R}$ de bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - x| = 0$$

ise (x_n) dizisi x noktasına kuvvetli kuasi-toplanabilirdir denir.

Tanım 2.15. ([32],[33]) X boş olmayan bir küme olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

1) $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Simetri özelliği)

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik (veya uzaklık fonksiyonu) ve (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.16. [26] E bir reel Banach uzayı olsun. E nin bir P alt kümesi

1. $P \neq \emptyset$, P kapalı ve $P \neq \{0\}$
2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$ ve $x, y \in P$ ise $ax + by \in P$
3. $x \in P$ ve $-x \in P$ ise $x = 0$

şartlarını sağlıyorsa bu durumda P ye bir konik denir. P üzerinde kısmi sıralama bağıntısı "$\preccurlyeq$", $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow y - x \in P$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca E^+, P nin içini göstermek üzere, yani $E^+ = \{c \in E : \theta \prec\prec c\}$ olmak üzere $x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y$ ve $x \neq y$, $x \prec\prec y \Leftrightarrow y - x \in E^+$ şeklinde ifade edilir. Eğer her $x, y \in E$ için $\theta \preccurlyeq x \preccurlyeq y$ iken $\|x\| \leq K\|y\|$ olacak şekilde $K > 0$ sayısı varsa P ye normal konik denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük pozitif sayıya ise P nin normal sabiti denir.

Çalışma boyunca E nin bir Banach uzayı, P, $E^+ \neq \emptyset$ ile E de bir konik ve "$\preccurlyeq$" bağıntısının P ye göre bir kısmi sıralama bağıntısı olduğu kabul edilecektir.

Tanım 2.17. [24] X boştan farklı bir küme olsun. $d: X \times X \to E$ dönüşümü

1) Her $x, y \in X$ için $0 \preccurlyeq d(x,y)$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2) Her $x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$,

3) Her $x, y, z \in X$ için $d(x,y) \preccurlyeq d(x,z) + d(z,y)$

şartlarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir konik metrik, (X,d) ikilisine de bir konik metrik uzay denir.

Tanım 2.18. [24] Eğer bir (X,d) konik metrik uzayında her $c \in E^+$ ve her $n > N$ için $d(x_n, x) \prec\prec c$ olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir.

Tanım 2.19. [24] (x_n) dizisi (X,d) konik metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer her $c \in E^+$ ve her $n, m > N$ için $d(x_n, x_m) \prec\prec c$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine X de bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.20. [14] (X, d) konik metrik uzay olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(x_k, \alpha) \preccurlyeq c\}| = 1$$

olacak şekilde $\alpha \in X$ ve $c \in E^+$ varsa (x_k) dizisine istatistiksel olarak sınırlıdır denir.

Tanım 2.21. [14] (x_k) dizisi (X, d) konik metrik uzayında bir dizi olsun. Her $c \in E^+$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(x_k, x) \prec\prec c\}| = 1$$

veya buna denk olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: c \preccurlyeq d(x_k, x)\}| = 0$$

ise (x_k) dizisi $x \in X$ noktasına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim_{k\to\infty} x_k = x$ ile gösterilir.

Bir konik metrik uzayda dizilerin istatistiksel yakınsaklığı yakınsaklığın doğal bir genellemesidir. (x_n) dizisi (X, d) konik metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaksa o zaman her $c \in E^+$ ve her $n > n_0$ için $d(x_n, x) \prec\prec c$ dir. Böylece her $n > n_0$ için

$$|K(n)| = |\{k \leq n: d(x_k, x) \prec\prec c\}| \geq n - n_0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|K(n)|}{n} = 1$$

elde edilir. Buradan $st - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ dir. Dolayısıyla bir konik metrik uzayda her yakınsak dizi istatistiksel olarak da yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 2.22. ([24]) $X = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x,y) \in E: x,y \geq 0\}$ ve $\alpha > 0$ sabit olmak üzere $d: X \times X \to E$ dönüşümü $d(x,y) = (|x-y|, \alpha|x-y|)$ ile tanımlanan bir konik metrik olsun. O zaman (X,d) ikilisi bir konik metrik uzaydır.

X uzayında $m \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \begin{cases} 1/n, & n \neq m^2 \\ n, & n = m^2 \end{cases}$$

ile tanımlanan (x_n) dizisi alınsın. Buradan $x = 0$ noktası için, eğer $n \neq m^2$ ise $d(x_n, 0) = (1\backslash n, \alpha\backslash n)$, eğer $n = m^2$ ise $d(x_n, 0) = (n, \alpha n)$ elde edilir. Her $c \in E^+$ ve bazı $n_c \in \mathbb{N}$ için

$$K(n) = \{k \leq n: d(x_k, 0) \preccurlyeq c\} \supset \{k \leq n: k > n_c, k \neq m^2, m \in \mathbb{N}\}$$

kapsaması sağlanır. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(x_k, 0) \preccurlyeq c\}| \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: k > n_c, k \neq m^2, m \in \mathbb{N}\}| = 1$$

eşitsizliği bulunur. Burada sağ taraf bir olduğundan sol taraf bir olacaktır. Sonuç olarak $st - \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olur, fakat (x_n) dizisi yakınsak değildir.

Yukarıdaki örnekten hareketle reel uzaydaki yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkinin konik metrik uzayda da geçerli olduğu söylenebilir.

Tanım 2.23. [14] (x_k) dizisi (X, d) konik metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer her $c \in E^+$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n: d\left(x_k, x_{n_0}\right) \preccurlyeq c\right\}\right| = 1$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa o zaman (x_k) dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Lemma 2.24. ([24], [25]) (X, d) bir konik metrik uzay olsun. Her bir $c \in E^+$ olacak şekilde verilsin. Bu durumda $\|x\| < \delta$ olduğunda $c - x \in E^+$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır yani $x \prec\prec c$ dir.

İspat. $\theta \prec\prec c$ ve $c \in E$ olduğundan $c \in E^+$ dir. $\{x \in E: \|x - c\| < \delta\} \subset E^+$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulabiliriz. Şimdi $\|x\| < \delta$ ise $\|c - x - c\| = \|-x\| = \|x\| < \delta$ olur. Buradan $\|(c - x) - c\| < \delta$ olur. Bu ise $c - x \in E^+$ olduğunu verir.

Lemma 2.25. ([14]) (x_n) ve (y_n) bir (X, d) konik metrik uzayında iki dizi olsun.

1) Eğer $st - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $st - \lim_{n\to\infty} x_n = x_1$ ise $x = x_1$ dir.
2) $st - \lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow st - \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ dır.
3) Eğer $st - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $st - \lim_{n\to\infty} y_n = y$ ise o zaman $st - \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$ dir.

Lemma 2.26. ([24]) (x_n), (X, d) konik metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi x noktasına yakınsaksa o zaman (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir.

İspat. $\theta \prec\prec c$ olacak şekilde herhangi bir $c \in E$ alalım. O zaman her $n, m > \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) \prec\prec \frac{c}{2}$ ve $d(x_m, x) \prec\prec \frac{c}{2}$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$d(x_n, x_m) \preccurlyeq d(x_n, x) + d(x_m, x) \prec\prec c$$

elde edilir. Bu durumda (x_n) bir Cauchy dizisidir.

3. KONİK METRİK UZAYDA KUASİ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Bu bölümde ilk olarak konik metrik uzayda bir dizinin kuasi-istatistiksel yakınsaklığı kavramı verilecektir. Daha sonra bu kavram ile ilgili bazı teoremler ispatlanıp gerekli görülenler örneklerle açıklanacaktır ve bunlara ilişkin sonuçlar verilecektir.

Tanım 3.1. (x_n), (X, d) konik metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer her $c \in E^+$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} |\{k \leq n: d(x_k, x) \prec\prec c\}| = 1$$

veya buna denk olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} |\{k \leq n: c \preccurlyeq d(x_k, x)\}| = 0$$

oluyorsa (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına kuasi-istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_q - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir. Burada eğer özel olarak $(s_n) = (n)$ alınırsa (x_n) dizisinin istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

Teorem 3.2. (x_n), (X, d) konik metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi yakınsaksa bu durumda kuasi-istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olsun. Bu durumda her $c \in E^+$ için $n > n_0$ olduğunda $d(x_n, x) \prec\prec c$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Buradan

$$\frac{1}{s_n} |\{k \leq n: c \preccurlyeq d(x_k, x)\}| \leq \frac{1}{s_n} n_0$$

eşitsizliği yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının $n \to \infty$ iken limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} |\{k \leq n : c \preccurlyeq d(x_k, x)\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} n_0$$

eşitsizliği elde edilir. Sağ tarafın limiti sıfır olacağından sol tarafında limiti sıfır olur. Dolayısıyla $st_q - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ dir.

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Bunun için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 3.3. $E = \mathbb{R}$, $P = [0, +\infty)$, $X = \mathbb{R}$, ve $d: X \times X \to E$ dönüşümü $d(x, y) = |x - y|$ ile tanımlanan bir konik metriktir. $(s_n) = \left(n^{3\backslash 4}\right)$ ve

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \neq m^2 \\ n, & n = m^2 \end{cases}$$

ile tanımlanan (x_n) dizisini ele alalım. (x_n) dizisinin $x = 0$ noktasına yakınsak olmadığı açıktır. O halde biz $x = 0$ için (x_n) dizisinin her $c \in E^+$ için kuasi-istatistiksel yakınsaklığını gösterelim. Kabul edelim ki $k \in \mathbb{N}$ ve $k \leq n$ için $k \neq m^2$ olsun. Bu durumda (x_k) dizisinin tanımından $x_k = 0$ dır. O zaman her $c \in E^+$ için $d(x_k, 0) = |0 - 0| = 0 \prec\prec c$ bulunur. Buradan

$$\{n : c \preccurlyeq d(x_n, 0)\} \subset \{n : n = m^2, m \in \mathbb{N}\}$$

kapsaması sağlanır ve buradan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} |\{k \leq n : c \preccurlyeq d(x_k, 0)\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} |\{k \leq n : k = m^2, m \in \mathbb{N}\}| = 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ise (x_n) dizisinin $x = 0$ noktasına kuasi-istatistiksel yakınsak olduğunu kanıtlar.

Teorem 3.4. (x_n), (X, d) konik metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına kuasi-istatistiksel yakınsaksa o zaman $x \in X$ noktasına istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $st_q - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ve $M = \sup\limits_{n} \frac{s_n}{n}$ olsun. O zaman her $c \in E^+$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} |\{k \leq n : c \preccurlyeq d(x_k, x)\}| = 0$$

dır. Ayrıca $M = \sup\limits_{n} \frac{s_n}{n}$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : c \preccurlyeq d(x_k, x)\}| \leq \frac{M}{s_n} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} |\{k \leq n : c \preccurlyeq d(x_k, x)\}|$$

eşitsizliği yazılabilir. Sağ taraf sıfır olduğundan sol tarafta sıfır olur. Dolayısıyla (x_n) dizisi x noktasına istatistiksel yakınsaktır.

Bu teoremin tersinin doğru olmadığını göstermek için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 3.5. $X = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x, y) \in E : x, y \geq 0\}$ ve $\alpha > 0$ sabit olmak üzere $d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|)$ şeklinde tanımlanan $d: X \times X \to E$ dönüşümü bir konik metriktir. (s_n) dizisi $\lim\limits_{n} \frac{\sqrt{n}}{s_n} = \infty$ şartını sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda her $p \in \mathbb{N}$ için $s_{n_p} > 1$ olacak şekilde bir $\left(s_{n_p}\right)$ alt dizisi seçilebilir. Her bir n için

$$x_n = \begin{cases} s_n, & n = m^2 \text{ ve } s_n \in \left\{s_{n_p} : p \in \mathbb{N}\right\} \\ 1, & n = m^2 \text{ ve } s_n \notin \left\{s_{n_p} : p \in \mathbb{N}\right\} \\ 0, & n \neq m^2 \end{cases}$$

$(m \in \mathbb{N})$ ile tanımlanan diziyi ele alalım. Bu durumda $y = 0$ için,

$$d(x_n, 0) = \begin{cases} (s_n, \alpha s_n), & n = m^2 \text{ ve } s_n \in \left\{s_{n_p} : p \in \mathbb{N}\right\} \\ (1, \alpha), & n = m^2 \text{ ve } s_n \notin \left\{s_{n_p} : p \in \mathbb{N}\right\} \\ (0,0), & n \neq m^2 \end{cases}$$

elde edilir. Burada, (x_n) dizisinin sıfıra istatistiksel yakınsak olduğunu göstermek kolaydır. Şimdi (x_n) dizisinin sıfıra kuasi-istatistiksel olarak yakınsak olmadığı gösterilecektir. Her bir n doğal sayısı için

$$|\{k \leq n : c \preccurlyeq d(x_k, 0)\}| \subset |\{k \leq n : k = m^2, m \in \mathbb{N}\}|$$

ve $0 \leq r_n < 1$ için

$$\frac{1}{s_n} |\{k \leq n : c \preccurlyeq d(x_k, 0)\}| = \frac{1}{s_n} \left(\sqrt{n} - r_n\right) \tag{3.1}$$

olduğundan (3.1) eşitliğinin her iki tarafı $n \to \infty$ iken limiti alınırsa (x_n) dizisinin sıfıra kuasi-istatistiksel yakınsak olmadığı görülür.

Sonuç 3.6. (x_n) dizisi, (X, d) konik metrik uzayında bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisi için

yakınsak $\Longrightarrow$ kuasi-istatistiksel yakınsak $\Longrightarrow$ istatistiksel yakınsak

ilişkisi geçerlidir.

Teorem 3.7.

$$h = \inf_n \frac{s_n}{n} > 0 \tag{3.2}$$

olsun. Bu durumda (X, d) konik metrik uzayında bir (x_k) dizisi $x \in X$ noktasına istatistiksel yakınsaksa, o halde x noktasına kuasi-istatistiksel yakınsaktır.

İspat. (x_k) dizisi $x \in \mathbb{R}$ noktasına istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n: c \preccurlyeq d(x_k, x)\}| = 0$ dır. Ayrıca $h = \inf_n \frac{s_n}{n} \leq \frac{s_n}{n}$ olduğundan

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n: c \preccurlyeq d(x_k, x)\}| \geq h\frac{1}{s_n}|\{k \leq n: c \preccurlyeq d(x_k, x)\}|$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $n \to \infty$ iken limiti alınırsa sol taraf sıfır olup istenilen elde edilir.

Sonuç 3.8. (s_n) dizisi, (X, d) konik metrik uzayında (3.2) şartını sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisinin x noktasına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul x noktasına kuasi-istatistiksel yakınsak olmasıdır.

Teorem 3.9. Eğer (x_n) dizisi (X, d) konik metrik uzayında x noktasına kuasi-istatistiksel yakınsak ise bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = y_n + z_n$ olacak şekilde x noktasına yakınsayan bir (y_n) dizisi ve sıfıra kuasi-istatistiksel olarak yakınsayan bir (z_n) dizisi vardır.

İspat. $st_q - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ olsun. Eğer (x_n) dizisinin terimleri belli bir yerden sonra sabitse bu durumda ispat açıktır. O halde (x_n) dizisinin terimleri belli bir yerden sonra sabit olmasın. Keyfi bir $c \in E^+$ verilsin. O zaman her $n > N_j$ $(j = 1,2, \dots)$ için

$$\frac{1}{s_n}\left|\left\{k \leq n: \frac{e}{j} \preccurlyeq d(x_k, x)\right\}\right| < \frac{1}{j}$$

ve $N_0 = 0$ olacak şekilde (N_j) pozitif tamsayılarının artan bir dizisi bulunabilir. Şimdi (y_k) ve (z_k) dizileri

$$y_k = \begin{cases} x_k, & N_0 < k < N_1 \\ x_k, & N_j < k < N_{j+1}\ ve\ d(x_k, x) \prec\prec \frac{e}{j} \\ x, & N_j < k < N_{j+1}\ ve\ \frac{e}{j} \preccurlyeq d(x_k, x) \end{cases}$$

$$z_k = \begin{cases} 0, & N_0 < k < N_1 \\ 0, & N_j < k < N_{j+1}\ ve\ d(x_k, x) \prec\prec \frac{e}{j} \\ x_k - x, & N_j < k < N_{j+1}\ ve\ \frac{e}{j} \preccurlyeq d(x_k, x) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = y_k + z_k$ olur. İlk olarak (y_k) dizisinin x noktasına yakınsak olduğu gösterilecektir. Herhangi bir $c \in E^+$ için $\frac{e}{j} \prec\prec c$ olacak şekilde $j \in \mathbb{N}$ seçilsin.

Eğer $k > N_j$ için $\frac{e}{j} \preccurlyeq d(x_k, x)$ ise bu durumda $d(y_k, x) = d(x, x) = 0$ dır.

Eğer $k > N_j$ için $d(x_k, x) \prec\prec \frac{e}{j}$ ise bu durumda $d(y_k, x) = d(x_k, x) \prec\prec \frac{e}{j} \prec\prec c$ dir. Böylece $\lim_{k\to\infty} y_k = x$ elde edilir.

(z_k) dizisinin sıfıra kuasi-istatistiksel yakınsak olduğunu göstermek için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n}|\{k \leq n: z_k \neq 0\}| = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $c \in E^{+}$ için

$$\{k \leq n: c \preccurlyeq d(z_k, 0)\} \subseteq \{k \leq n: z_k \neq 0\}$$

kapsaması sağlanır. Böylece

$$|\{k \leq n: c \preccurlyeq d(z_k, 0)\}| \leq |\{k \leq n: z_k \neq 0\}|$$

eşitsizliği elde edilir. Verilen herhangi bir $\delta > 0$ için $\frac{1}{j} < \delta$ olacak şekilde bir $j \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $N_j < k \leq N_{j+1}$ ise bu durumda

$$|\{k \leq n: z_k \neq 0\}| = \left|\left\{k \leq n: \frac{e}{j} \preccurlyeq\ d(x_k, x)\right\}\right|$$

olur. Buradan $v > j$ ve $N_v < k \leq N_{v+1}$ için

$$\frac{1}{s_n}|\{k \leq n: z_k \neq 0\}| \leq \frac{1}{s_n}\left|\left\{k \leq n: \frac{e}{v} \preccurlyeq\ d(x_k, x)\right\}\right| < \frac{1}{v} < \frac{1}{j} < \delta$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Bu teoremin bir sonucu aşağıdaki gibi verilebilir.

Sonuç 3.10. (X, d) konik metrik uzayında bir (x_n) dizisi x noktasına kuasi-istatistiksel yakınsaksa, (x_n) dizisinin x noktasına yakınsak olan bir (y_n) alt dizisi vardır.

Tanım 3.11. (X, d) konik metrik uzayında bir (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}|\{k\le n: c \preccurlyeq d(x_k,\alpha)\}| = 0$$

olacak şekilde $\alpha \in X$ ve $c \in E^+$ varsa o zaman (x_n) dizisi kuasi-istatistiksel sınırlıdır denir.

Teorem 3.12. (X,d) konik metrik uzayında bir (x_n) dizisi kuasi istatistiksel sınırlı bir dizi ise aynı zamanda istatistiksel sınırlıdır.

İspat. $\alpha \in X$, $H = \sup_n \frac{s_n}{n}$ ve (x_n) dizisi kuasi istatistiksel sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}|\{k\le n: c \preccurlyeq d(x_k,\alpha)\}| &= \frac{1}{s_n}\frac{s_n}{n}|\{k\le n: c \preccurlyeq d(x_k,\alpha)\}| \\ &\le \frac{H}{s_n}|\{k\le n: c \preccurlyeq d(x_k,\alpha)\}|\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (x_n) dizisi kuasi istatistiksel sınırlı olduğundan her iki tarafın limiti alındığında sağ tarafın limiti sıfır olacağından sol tarafın limiti de sıfır olacaktır. Böylece (x_n) dizisinin istatistiksel sınırlı olduğu ispatlanmış olur.

Lemma 3.13. P, K normal sabiti ile bir normal konik olsun. O zaman (X,d) konik metrik uzayında (x_n) ve (y_n) dizileri için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1) $st_q - \lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow st_q - \lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$.

2) Eğer $st_q - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $st_q - \lim_{n\to\infty} y_n = y$ ise $st_q - \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$.

İspat.

1) $st_q - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ olsun. Bu durumda her $c \in E^+$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}|\{k\le n: d(x_k,x) \prec\prec c\}| = 1$$

olur. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $K\|c\| < \varepsilon$ olacak şekilde $c \in E^+$ vardır. $k \in \mathbb{N}$ için $d(x_k,x) \prec\prec c$ olsun. P, K normal sabiti ile bir normal konik olduğu için

$$\|d(x_k,x)\| \le K\|c\| < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla

$$\frac{1}{s_n}|\{k\le n: d(x_k,x) \prec\prec c\}| \le \frac{1}{s_n}|\{k\le n: \|d(x_k,x)\| < \varepsilon\}|$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}|\{k\le n: \|d(x_k,x)\| < \varepsilon\}| = 1$$

bulunur. O halde $st_q - \lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ dır.

Tersine $st_q - \lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}|\{k\le n: \|d(x_k,x)\| < \varepsilon\}| = 1$$

dir. Verilen herhangi bir $c \in E^+$ için $\|a\| < \varepsilon$ olmak üzere her $a \in E$ için $c - a \in E^+$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı bulunur. Dolayısıyla $\|d(x_k,x)\| < \varepsilon$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$

seçersek $d(x_k, x) \prec\prec c$ elde edilir. Böylece

$$\{k \leq n: \|d(x_k, x)\| < \varepsilon\} \subset \{k \leq n: d(x_k, x) \prec\prec c\}$$

kapsaması sağlanır. Buradan

$$\frac{1}{s_n}\{k \leq n: \|d(x_k, x)\| < \varepsilon\} \leq \frac{1}{s_n}\{k \leq n: d(x_k, x) \prec\prec c\}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n}\{k \leq n: d(x_k, x) \prec\prec c\} = 1$$

elde edilir. Bu ise $st_q - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ olduğunu gösterir.

2) $st_q - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $st_q - \lim_{n\to\infty} y_n = y$ olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\|c\| < \frac{\varepsilon}{4K+2}$ olacak şekilde bir $c \in E^+$ vardır. $d(x_k, x) \prec\prec c$ ve $d(y_k, y) \prec\prec c$ olan $k \in \mathbb{N}$ için [24] nolu çalışmadaki Lemma 5 in ispatından $\|d(x_k, y_k) - d(x, y)\| < \varepsilon$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\{k: \|d(x_k, y_k) - d(x, y) \geq \varepsilon\|\} \subset \{k: c \preccurlyeq\ d(x_k, x)\} \cup \{k: c \preccurlyeq\ d(y_k, y)\}$$

kapsaması sağlanır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}|\{k\le n: \|d(x_k,y_k)-d(x,y)\ge\varepsilon\|\}|=0$$

bulunur. Bu ise $st_q-\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=d(x,y)$ olduğunu gösterir.

Not 3.14. Yukarıdaki Lemma'nın (1) şıkkındaki yeter koşulu kanıtlamak için P bir normal konik olmak zorunda değildir. Yani bir (X,d) konik metrik uzayında $st_q-\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$ ise o zaman $st_q-\lim_{n\to\infty} x_n=x$ dir.

Teorem 3.15. (X,d) konik metrik uzayında (x_n) ve (y_n) iki dizi ve $x\in X$ olsun. Eğer $st_q-\lim_{n\to\infty} y_n=x$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $d(x_n,x)\preccurlyeq d(y_n,x)$ ise o zaman $st_q-\lim_{n\to\infty} x_n=x$ dir.

İspat. $st_q-\lim_{n\to\infty} y_n=x$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $d(x_n,x)\preccurlyeq d(y_n,x)$ olsun. Bu durumda

$$\{k\le n: d(y_k,x)\prec\prec \mathrm{c}\}\subseteq\{k\le n: d(x_k,x)\prec\prec \mathrm{c}\}$$

kapsaması elde edilir. O halde bu kapsamadan

$$\frac{1}{s_n}|\{k\le n: d(y_k,x)\prec\prec \mathrm{c}\}|\le\frac{1}{s_n}|\{k\le n: d(x_k,x)\prec\prec \mathrm{c}\}|$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlikte her iki tarafın $n\to\infty$ iken limiti alınırsa sol tarafın limiti bir olacağından sağ tarafın limiti de bir olur ve ispat tamamlanır.

Tanım 3.16. (X,d) konik metrik uzay olsun. Eğer her $c\in E^+$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}\left|\left\{k\le n: d\left(x_k,x_{n_0}\right)\prec\prec c\right\}\right|=1$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa o zaman (x_k) dizisine kuasi-istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.17. (X, d) konik metrik uzayında bir (x_n) dizisi Cauchy dizisi ise o zaman kuasi-istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat. Kabul edelim ki (x_n) dizisi bir Cauchy dizisi ve $c \in E^+$ olsun. Bu durumda $n, m > n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) \prec\prec c$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $k \leq n_0$ için $d(x_k, x_n) \succcurlyeq c$ olur. Bu durumda

$$\frac{1}{s_n}|\{k \leq n: c \preccurlyeq d(x_k, x_n)\}| \leq \frac{n_0}{s_n}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada her iki tarafın $n \to \infty$ iken limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}|\{k \leq n: c \preccurlyeq d(x_k, x_n)\}| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}n_0 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (x_n) dizisi kuasi-istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 3.18. (X, d) konik metrik uzay olsun. Eğer (x_n) dizisi kuasi-istatistiksel Cauchy dizisi ise, o zaman istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat. Kabul edelim ki (x_k) dizisi kuasi-istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $c \in E^+$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}\left|\left\{k \leq n: c \preccurlyeq d\left(x_k, x_{n_0}\right)\right\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Diğer taraftan $\left(\frac{s_n}{n}\right)$ dizisi üstten sınırlı olduğundan

$\sup_n \frac{s_n}{n} = K$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : c \preccurlyeq d\left(x_k, x_{n_0}\right)\right\}\right| = \frac{s_n}{n}\frac{1}{s_n}\left|\left\{k \leq n : c \preccurlyeq d\left(x_k, x_{n_0}\right)\right\}\right|$$

$$\leq \frac{K}{s_n}\left|\left\{k \leq n : c \preccurlyeq d\left(x_k, x_{n_0}\right)\right\}\right|$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikte her iki tarafın $n \to \infty$ iken limiti alınırsa sağ tarafın limiti sıfır olacağından sol tarafın da limiti sıfır olur. Böylece ispat tamamlanır.

Ayrıca aşağıdaki sonuç önceki iki teoremin bir sonucu olarak verilebilir.

Sonuç 3.19. (x_n) dizisi (X, d) konik metrik uzayında bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisi için

Cauchy ⟹ kuasi-istatistiksel Cauchy ⟹ istatistiksel Cauchy

ilişkisi geçerlidir.

4. KONİK METRİK UZAYDA KUVVETLİ KUASİ-TOPLANABİLİRLİK

Bu bölümde reel sayılar üzerinde ki kuvvetli kuasi-toplanabilme kavramını konik metrik uzaya taşıyacağız. Daha sonra kuvvetli kuasi-toplanabilir dizilerin uzayı ve tüm kuasi-istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı ile ilgili bazı teoremler ve kapsama ilişkileri örneklerle verilecektir ve bunlara ilişkin bazı sonuçlar sunulacaktır.

Tanım 4.1. (X, d) konik metrik uzayında bir (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} \|d(x_k, x)\| = 0$$

oluyorsa (x_n) dizisi x noktasına kuvvetli kuasi-toplanabilirdir denir. Tüm kuvvetli kuasi-toplanabilir ve tüm kuasi-istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi için sırasıyla N_q^s ve S_q^s gösterimleri kullanılacaktır. Yani

$$N_q^s = \left\{(x_n) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} \|d(x_k, x)\| = 0, \exists\, x \in X\right\}$$

ve

$$S_q^s = \left\{(x_n) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} |\{k \leq n : c \preccurlyeq d(x_k, x)\}| = 0,\ \exists\, x \in X, \qquad \forall\, c \in E^+\right\}$$

dır.

Eğer $s = (s_n)$ dizisinin yerine $t = (t_n)$ dizisi alınacak olursa N_q^s ve S_q^s gösterimleri yerine sırasıyla N_q^t ve S_q^t gösterimleri kullanılacaktır.

Teorem 4.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq t_n$ olsun. Eğer (X, d) konik metrik uzayında bir (x_n) dizisi $s = (s_n)$ dizisine göre x noktasına kuasi-istatistiksel yakınsak ise bu durumda (x_n) dizisi $t = (t_n)$ dizisine göre de x noktasına kuasi-istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Her $c \in E^+$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} |\{k \leq n : c \preccurlyeq d(x_k, x)\}| = 0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq t_n$ olduğundan

$$\frac{1}{s_n} |\{k \leq n : c \preccurlyeq d(x_k, x)\}| \geq \frac{1}{t_n} |\{k \leq n : c \preccurlyeq d(x_k, x)\}|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ iken her iki tarafın limiti alınırsa (x_n) dizisinin $t = (t_n)$ dizisine göre x noktasına kuasi-istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

Örnek 4.3. (X, d) Örnek 3.5 de verilen konik metrik uzay olsun. Bu uzayda

$$x_n = \begin{cases} s_n, & n = m^2 \text{ ve } s_n \in \left\{s_{n_p} : p \in \mathbb{N}\right\} \\ 1, & n = m^2 \text{ ve } s_n \notin \left\{s_{n_p} : p \in \mathbb{N}\right\} \\ 0, & n \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (x_n) dizisi alınsın. Eğer $(t_n) = (n)$ dizisi ve $(s_n) = \left(n^{1\backslash 4}\right)$ seçilirse bu durumda (x_n) dizisi $t = (t_n)$ dizisine göre sıfıra kuasi-istatistiksel yakınsaktır. O halde (x_n) dizisinin $s = (s_n)$ dizisine göre sıfıra kuasi-istatistiksel yakınsak olmadığı gösterilecektir. Bu durumda her bir n doğal sayısı için

$$|\{k \leq n : c \preccurlyeq d(x_k, 0)\}| = |\{k \leq n : k = m^2, m \in \mathbb{N}\}|$$

eşitliği yazılabilir ve $0 \leq r_n < 1$ için

$$\frac{1}{s_n}|\{k \leq n: c \preccurlyeq d(x_k, 0)\}| = \frac{1}{s_n}\left(\sqrt{n} - r_n\right)$$

elde edilir. O zaman yukarıdaki ifadenin $n \to \infty$ iken her iki tarafının limiti alınırsa $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{1\backslash 4}} = \infty$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n}|\{k \leq n: c \preccurlyeq d(x_k, 0)\}| \neq 0$$

olur. Dolayısıyla (x_n) dizisi $s = (s_n)$ dizisine göre sıfıra kuasi-istatistiksel yakınsak değildir.

O halde aşağıdaki sonuç bu teoremin bir sonucu olarak verilebilir.

Sonuç 4.4. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq t_n$ olsun. O zaman $S_q^s \subset S_q^t$ kapsaması kesin olarak sağlanır.

Teorem 4.5. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq t_n$ olsun. Eğer bir (X, d) konik metrik uzayında bir (x_n) dizisi $s = (s_n)$ dizisine göre x noktasına kuvvetli-kuasi toplanabilir ise, o zaman (x_n) dizisi $t = (t_n)$ dizisine göre x noktasına kuasi-istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Kabul edelim ki $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} \|d(x_k, x)\| = 0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \|d(x_k, x)\| = \sum_{\substack{k=1 \\ \|d(x_k,x)\| \geq \varepsilon}}^{n} \|d(x_k, x)\| + \sum_{\substack{k=1 \\ \|d(x_k,x)\| < \varepsilon}}^{n} \|d(x_k, x)\|$$

$$\geq \varepsilon|\{k \leq n: \varepsilon \leq \|d(x_k, x)\|\}|$$

ve $s_n \leq t_n$ olduğundan

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^{n}\|d(x_k,x)\| \geq \frac{1}{t_n}|\{k \leq n: \varepsilon \leq \|d(x_k,x)\|\}|$$

elde edilir. Eşitsizliğin sol tarafındaki ifadenin $n \to \infty$ iken limiti sıfıra eşit olduğundan sağ taraftaki ifadenin de $n \to \infty$ iken limiti sıfıra eşit olur. Dolayısıyla $t = (t_n)$ dizisine göre $st_q - \lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ bulunur. Not 3.14 ten $st_q - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ olduğu görülür.

Fakat bu teoremin tersi daima doğru değildir.

Örnek 4.6. $X = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x,y) \in E: x,y \geq 0\}$ ve $d(x,y) = (|x-y|,|x-y|)$ ile tanımlanan $d: X \times X \to E$ dönüşümü bir metrik uzaydır. Bu uzayda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \neq m^2 \\ 1, & n = m^2 \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanan (x_n) dizisi ele alınsın. $(s_n) = \left(n^{1\backslash 4}\right)$ ve $(t_n) = (n)$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n,0) = \begin{cases} (1,1), & n = m^2 \\ (0,0), & n \neq m^2 \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{N})$$

olur. Verilen herhangi bir $c \in E^+$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{t_n}|\{k \leq n: d(x_k,0) \prec\prec c\}| \geq \frac{1}{t_n}|\{k \leq n: n \neq m^2\}|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin $n \to \infty$ iken limiti bir olduğundan (x_n) dizisi $t = (t_n)$ dizisine göre sıfıra kuasi-istatistiksel yakınsak olur. Şimdi (x_n) dizisinin $s = (s_n)$ dizisine göre sıfıra kuvvetli kuasi-toplanabilir olmadığı gösterilecektir. Burada,

$$\|d(x_k, 0)\| = \begin{cases} \sqrt{2}, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{N})$$

olduğu açıktır. O zaman

$$\sum_{k=1}^{n} \|d(x_k, 0)\| = 0. |\{k \leq n: \text{tüm } m \in \mathbb{N} \; için \; k \neq m^2\}| +$$

$$\sqrt{2}. |\{k \leq n: \text{bazı } m \in \mathbb{N} \; için \; k = m^2\}| = 0 + \sqrt{2}. [\![\sqrt{n}]\!]$$

eşitsizliği bulunur.

Böylece bu eşitsizliğin her iki tarafının $n \to \infty$ iken limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} \|d(x_k, 0)\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \sqrt{2} \left([\![\sqrt{n}]\!]\right) = \infty$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} \|d(x_k, 0)\| \neq 0$$

olur ki bu durum (x_n) dizisinin $s = (s_n)$ dizisine göre sıfıra kuvvetli kuasi-toplanabilir olmadığını gösterir.

Bu teoreme göre aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.7. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq t_n$ olsun. O zaman $N_q^s \subset S_q^t$ kapsaması kesin bir şekilde sağlanır.

Teorem 4.8. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq t_n$ olsun. Eğer bir (X, d) konik metrik uzayında bir (x_n) dizisi $s = (s_n)$ dizisine göre x noktasına kuvvetli-kuasi toplanabilir ise, o zaman (x_n) dizisi $t = (t_n)$ dizisine göre x noktasına kuvvetli-kuasi toplanabilirdir.

İspat. (x_k) dizisi $s = (s_n)$ dizisine göre x noktasına kuvvetli kuasi-toplanabilir olsun. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} \|d(x_k, x)\| = 0$$

dır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq t_n$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} \|d(x_k, x)\| \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \sum_{k=1}^{n} \|d(x_k, x)\|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \sum_{k=1}^{n} \|d(x_k, x)\| = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Bu teoremin tersi daima doğru değildir.

Örnek 4.9. $X = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x,y) \in E: x, y \geq 0\}$ ve $d(x,y) = (|x-y|, |x-y|)$ ile tanımlanan $d: X \times X \to E$ dönüşümü bir metrik uzaydır. Örnek 4.6 de tanımlanan

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \neq m^2 \\ 1, & n = m^2 \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{N})$$

dizisi, $(t_n) = (n)$ ve $(s_n) = \left(n^{1\backslash 4}\right)$ dizileri ele alınsın. Bu durumda $x = 0$ noktası için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \sum_{k=1}^{n} \|d(x_k, 0)\| = 0$$

olur. Bu durumda $(x_n) \in N_q^t$ elde edilir.

Örnek 4.6 da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} \|d(x_k, 0)\| \neq 0$$

olduğundan $(x_n) \notin N_q^s$ dir. O halde aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.10. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq t_n$ olsun. Bu durumda $N_q^s \subset N_q^t$ kapsaması kesin bir şekilde sağlanır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Konik metrik uzay kavramı metrik uzay kavramından daha genel olduğu için konik metrik uzayda verilen sonuçlar metrik uzaylara dönüştürülebilir. Çünkü konik metrik uzay tanımında ki E Banach uzayı $\mathbb{R}$ ve P koniği de $[0, +\infty)$ olarak alınırsa metrik uzay tanımı elde edilir ki bu durum her metrik uzayın aynı zamanda bir konik metrik uzay olduğunu gösterir. Dolayısıyla bu çalışmada verilen kuasi-istatistiksel yakınsaklık kavramı özel durumda Sakaoğlu ve Yurdakadim (2012) tarafından $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde verilen kuasi-istatistiksel yakınsaklık kavramına dönüşür.

6. KAYNAKLAR

[1] H. Fast, “Sur la convergence statistique,” *Colloquium Mathematicum*, vol. 2, pp. 241–244, 1951.

[2] A. Zygmund, *Trigonometric Series*. United Kingtom: Cambridge University Press, 1979.

[3] H. Steinhaus, “Sur la convergence ordinarie et la convergence asimptotique,” *Colloquium Mathematicum*, vol. 2, pp. 73–74, 1951.

[4] A. I. J. Schoenberg, “The integrability of certain functions and related summability methods,” *American Mathematical Montly*, vol. 66, no. 5, pp. 361–375, 1959.

[5] J. S. Connor, “The statistical and strong p-cesaro convergence Of sequences,” *Analysis*, vol. 8, pp. 47–63, 1988.

[6] J. Connor, “On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence,” *Canadian Mathematical Bulletin*, vol. 32, no. 2, 1989.

[7] J. A. Fridy, “On statistical convergence,” *Analysis*, vol. 5, pp. 301–313, 1985.

[8] T. Šalát, “On statistically convergent sequences of real numbers,” *Mathematica Slovaca*, vol. 30, no. 2, pp. 139–150, 1980.

[9] A. R. Freedman and J. J. Sember, “Densities and summability,” *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 95, no. 2, 1981.

[10] H. I. Miller, “A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 347, no. 5, pp. 1811–1819, 1995.

[11] M. K. Khan and C. Orhan, “Matrix characterization of A-statistical convergence,” *Journal Mathematical Analysis and Application*, vol. 335, pp. 406–417, 2007.

[12] H. Çakalli, “A study on statistical convergence,” *Functtional Analysis Approxmation Computation*, vol. 1, no. 2, pp. 19–24, 2009.

[13] M. Küçükaslan, U. Değer, and O. Dovgoshey, “On statistical convergence of metric valued sequences,” *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 66, no. 5, pp. 796–805, 2014.

[14] K. Li, S. Lin, and Y. Ge, “On statistical convergence in cone metric spaces,” *Topology and Applications*, vol. 196, pp. 641–651, 2015.

[15] M. Ganichev and V. Kadets, “Filter convergence in Banach spaces and generalized bases,” in *General Topology in Banach Spaces*, USA: Nova Science, 2001, pp. 61–69.

[16] İ. Sakaoğlu Özgüç and T. Yurdakadim, “On quasi-statistical convergence,” *Communications Faculty Sciences University Ankara Series. A1*, vol. 61, no. 1, pp. 11–17, 2012.

[17] J. A. Fridy, “Statistical limit points,” *Proceedings American Mathematical Society*, vol. 118, no. 4, pp. 1187–1187, 1993.

[18] K. İclal, “Metrik uzaylarda A-güçlü istatistiksel yakınsaklık,” Yüksek lisans tezi, Matematik Bölümü, Bitlis Eren Üniversitesi, Bitlis, Türkiye, 2017.

[19] P. Kostyrko, M. Macaj, T. Šalát, and O. Strauch, “On statistical limit points,” *Proceedings American Mathematical Society*, vol. 129, no. 9, pp. 2647–2654, 2000.

[20] D. Kamil, “İstatistiksel yakınsaklık,” Yüksekl Lisans Tezi, Matematik Bölümü, Ankara Üniversitesi, Ankara, Türkiye, 1992.

[21] G. Di Maio and L. D. R. Kočinac, “Statistical convergence in topology,” *Topology and its Applications*, vol. 156, pp. 28–45, 2008.

[22] T. Yurdakadim, “İstatistiksel yakınsak alt diziler,” Yüksek lisans tezi, Matematik Bölümü, Ankara Üniversitesi, Ankara, Türkiye, 2010.

[23] M. M. Fréchet, “Memorie e comunicazioni,” *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 13, no. 1, pp. 1–27, 1906.

[24] H. Long-Guang and Z. Xian, “Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings,” *Journal of Mathematical Analysis Applications*, vol. 332, pp. 1468–1476, 2007.

[25] K. Abdulkadir, “Konik metrik uzayların temel özellikleri,” Yüksek lisans tezi, Matematik Bölümü, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Nevşehir, Türkiye, 2014.

[26] C. D. Alliprantice and R. Tourky, *Cones and Duality*, Graduate Studies, vol. 84. USA: American Mathematical Society, 2007.

[27] K. P. Chi and T. Van An, “Dugundji’s theorem for cone metric spaces,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 24, no. 3, pp. 387–390, 2011.

[28] S. Rezapour and R. Hamlbarani, “Some notes on the paper ‘Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings,’” *Journal Mathematical Analysis Applications*, vol. 345, no. 2, pp. 719–724, 2008.

[29] K. Deimling, “Fixed Point Theory,” in *Nonlinear Functional Analysis*, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1985, pp. 186–216.

[30] D. Turkoglu and M. Abuloha, “Cone metric spaces and fixed point theorems in diametrically contractive mappings,” *Acta Mathematica Sinica English Series*, vol. 26, no. 3, pp. 489–496, 2010.

[31] B. Mustafa, *Matematik Analiz 1*, Ankara. Türkiye: Palme Yayıncılık, 2016.

[32] B. Rzepecki, “On fixed point theorems of maia type,” *Publications De L’ Institut Mathematique*, vol. 42, pp. 179–186, 1980.

[33] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*. Türkiye: Gazi Kitabevi, 2006.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:Nihan Turan
Doğum Tarihi ve Yeri	:13.12.1991 Malatya
Yabancı Dili	:İngilizce
E-posta	:nhn_trn08@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Matematik Bölümü	Sakarya Üniversitesi	2015
Lise	Fen Bilimleri	H. Zehra Akkoç Kız Lisesi	2009

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler:

N. Turan, E.E. Kara, M. İlkhan, Quasi statistical convergence in cone metric spaces, *Facta Universitatis Series: Mathematics and Informatics* (Kabul edildi).

B. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler:

N. Turan, E.E. Kara (2017) On quasi statistical convergence in cone metric spaces International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAM-2017).