



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HİPERGEOMETRİK MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARIN
BAZI ÖZELLİKLERİ**

HASAN GÖKSU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. NEJLA ÖZMEN**

DÜZCE, 2018



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HİPERGEOMETRİK MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARIN
BAZI ÖZELLİKLERİ**

HASAN GÖKSU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. NEJLA ÖZMEN**

DÜZCE, 2018

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERGEOMETRİK MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARIN
BAZI ÖZELLİKLERİ

Hasan Göksu tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Nejla ÖZMEN
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN
Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Nejla ÖZMEN
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 16/02/2018

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

16 Şubat 2018

Hasan GÖKSU

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Nejla ÖZMEN'e en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

16 Şubat 2018

Hasan GÖKSU

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
SİMGELER	IX
ÖZET	X
ABSTRACT	XI
1. GİRİŞ.....	1
2. TANIMLAR VE TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. GAMMA FONKSİYONU	3
2.2. POCHHAMMER SEMBOLÜ.....	4
2.3. HİPERGEOMETRİK SERİ VE HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR	6
2.4. ÖNEMLİ BAZI ÖZELLİKLER	7
2.5. DOĞURUCU FONKSİYON.....	8
3. MEIXNER POLİNOMLARI.....	10
3.1. MEIXNER POLİNOMUNUN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ.....	10
3.2. MEIXNER POLİNOMUNUN BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLARI	12
3.3. MEIXNER POLİNOMUNUN REKÜRANS BAĞINTISI VE İNTEGRAL GÖSTERİMİ	17
4. HİPERGEOMETRİK MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARI	20
4.1. MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMUNUN TANIMI	20
4.2. MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMUNUN DOĞURUCU FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ.....	23
5. MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARI İÇİN BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR.....	29

5.1. BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR-I.....	29
5.2. BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR-II.....	32
5.3. BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR-III.....	34
6. MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARI İÇİN REKÜRANS BAĞINTILARI	38
6.1. MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARI İÇİN TÜREV İÇERMEYEN REKÜRANS BAĞINTILARI.....	38
6.2. MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARI İÇİN TÜREV İÇEREN REKÜRANS BAĞINTILARI.....	40
6.3. MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARI İÇİN BAĞINTILAR	45
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	49
8. KAYNAKLAR.....	50
ÖZGEÇMİŞ	52

SİMGELER

$g_n^{(s)}(\lambda, x)$	Cesàro Polinomu
$\Gamma(x)$	Gamma Fonksiyonu
${}_2F_1(a, b; c; x)$	Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu
$H_n(x)$	Hermite Polinomları
$P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$	Jacobi Polinomu
$L_n^{(\alpha)}(x)$	Laguerre Polinomları
$P_n(x)$	Legendre Polinomu
$M_n(z; \beta, x)$	Meixner Polinomu
$P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$	Meixner-Pollaczek Polinomları
$(\alpha)_n$	Pochhammer Sembolü

ÖZET

HİPERGEOMETRİK MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Hasan GÖKSU
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nejla ÖZMEN
Şubat 2018, 51 sayfa

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde ön bilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar ve lemmalar verilmiştir. Üçüncü bölümde, Meixner polinomları ve bu polinomlar için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonları veren teoremler incelendi. Daha sonra bu polinomların bazı rekürans bağıntıları ve integral gösterimi incelendi. Dördüncü bölümde hipergeometrik Meixner-Pollaczek polinomu hakkında bilgi verildi ve bu polinomun bazı özellikleri verildi. Beşinci bölümde bu polinomun multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlarını veren teoremler elde edildi ve bu teoremlerin uygulamalarına yer verildi. Altıncı bölümde, dördüncü bölümde tanımlanan Meixner-Pollaczek polinomların bazı rekürans bağıntıları verildi ve integral gösterimi elde edildi. Son bölümde bu tez için sonuç ve önerilere yer verildi.

Anahtar sözcükler: Doğurucu fonksiyon, Meixner-Pollaczek polinomları, Multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar, Rekürans bağıntıları.

ABSTRACT

SOME PROPERTIES OF HYPERGEOMETRIC MEIXNER-POLLACZEK POLYNOMIALS

Hasan GÖKSU

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master's Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Nejla ÖZMEN

February 2018, 51 pages

This thesis consists of seven chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, preliminaries, some definitions and lemmas used in the other chapters are given. In the third chapter, Meixner polynomials and theorems for bilinear and bilateral generating functions for these polynomials were examined. Then some recurrence relations and examined the integral representation of these polynomials. In the fourth chapter, the information about the hypergeometric Meixner-Pollaczek polynomial is given and some properties of this polynomial are given. In the fifth chapter, the theorems giving the multilinear and multilateral generating functions of this polynomial are obtained and the applications of these theorems are given. In the sixth chapter, some recurrence relations of the Meixner-Pollaczek polynomials defined in the fourth section will be given and integral representation will be obtained. In the last part, conclusions and recommendations for this thesis will be given.

Keywords: Generating function, Meixner-Pollaczek polynomials, Multilinear and multilateral generating functions, Recurrence relations.

1. GİRİŞ

Bu tez, hipergeometrik Meixner-Pollaczek polinomları üzerine yapılan bir çalışmadır. Son yıllarda bu polinomlar üzerine yapılan çalışmalar önemli bir yer tutmaktadır. Uygun koşullar altında hipergeometrik ortogonal polinomların farklı tip özellikleri hâlen çalışılmaktadır. Tek değişkenli ortogonal polinomların ilk örnekleri A. M. Legendre, P. S. Laplace, J. L. Lagrange ve N. H. Abel tarafından ele alınmıştır. Daha sonraları, P. L. Chebychev klasik ortogonal polinomların bazı önemli özel ve genel durumlarını araştırmış, bu polinomların genel teorisini geliştirmiştir. Tek değişkenli ortogonal polinomlar teorisi üzerine yapılan en önemli çalışmalar C. Jacobi, C. Hermite, E. Laguerre ve T. Stieltjes tarafından verilmiştir. Ortogonal polinomlar teorisi üzerinde klasik sonuçlar 1939 yıllarında Szegö tarafından ele alınmıştır.

Meixner-Pollaczek ortogonal polinomları ilk 1934 yılında J. Meixner tarafından verilmiş, literatüre T. S. Chihara tarafından ikinci tip Meixner polinomları olarak girmiştir [1], [2]. 1950 yılında bu polinom F. Pollaczek tarafından çalışılmış ve Meixner-Pollaczek polinomu

$$P_n^{(\lambda)}(x; \phi) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\phi} {}_2F_1(-n, \lambda + ix; 2\lambda; 1 - e^{-2i\phi})$$

$$\lambda > 0, \quad 0 < \phi < \pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlanmıştır [3]. Burada,

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}$$

hipergeometrik fonksiyondur. Meixner-Pollaczek polinomlarının temel özelliklerini Askey and Wilson, Chihara, Erdélyi ve arkadaşları, Freilikher ve arkadaşları, Koekoek and Swarttouw, Rahman, Bender ve arkadaşları ve Koornwinder makalelerinde çalışmışlardır [2], [4], [6]-[11]. Bu polinomlar matematiğin birçok alanına yayılmıştır. Örneğin; kesikli operatörler teorisi, analitik fonksiyonlar, özel fonksiyonlar, elektrostatik, sayılar teorisi, matematiksel istatistik, kuantum mekaniği, yaklaşım teorisi gibi birçok alana uygulanabilir. Günümüzde daha hâlen Meixner-Pollaczek polinomuyla ilgili birçok

çalışma ve özelliklerini bulmak mümkündür [5], [21], [24]-[26].

Bu tezde ilk olarak Meixner polinomları incelendi. Meixner polinomlarının bazı özellikleri, bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonları, türev içeren ve türev içermeyen rekürans bağıntıları incelendi. Daha sonra, Meixner-Pollaczek polinomları incelenmiş olup, bu polinomlar için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonları veren teoremler elde edildi. Bu teoremler kullanılarak bazı doğurucu fonksiyon bağıntıları verildi. Ayrıca bu polinomların türev içeren ve türev içermeyen rekürans bağıntıları elde edildi ve son olarak, bu polinomların başka polinomlarla ilişkisi verildi. Ayrıca bu polinomların integral gösterimi gösterildi.

2. TANIMLAR VE TEMEL KAVRAMLAR

2.1. GAMMA FONKSİYONU

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Gamma fonksiyonuna bazen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denir. Şöyle ki,

$$F(u) = \int_0^{\infty} t^{-u} dt = \frac{1}{u} \quad (2.1)$$

integrali ile tanımlanan fonksiyonunu ele alalım. $c > 0$ olmak üzere bu integral her $c \leq u \leq d$ sonlu aralığında $\frac{1}{u}$ 'ya düzgün yakınsaktır. Denklem (2.1) eşitliğinden u 'ya göre türevler alarak devam ettiğimizde n . mertebeden türev için

$$(-1)^n F^n(u) = \int_0^{\infty} t^n e^{-ut} dt = \frac{n!}{u^{n+1}}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte $u = 1$ alınırsa,

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n! = \int_0^{\infty} t^{(n+1)-1} e^{-t} dt = \Gamma(n+1)$$

olur. Burada n değerleri pozitif tamsayılar olarak alınmıştır. Halbuki n 'nin $n > -1$ olan herhangi bir reel sayı olması halinde de bu genelleştirilmiş integral tanımlıdır. Yani yakınsaktır. O halde $x > -1$ olan herhangi bir reel sayı olmak üzere,

$$x! = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \Gamma(x+1)$$

yazılabilir. Buradan görülüyor ki, -1 'den büyük olan tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu bir reel sayı olarak tanımlamak mümkündür. Bundan dolayı Gamma

fonksiyonu genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak da adlandırılır. $x = 0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonunun değeri,

$$0! = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = -(0 - 1) = 1$$

dir. Elemanter matematikte n faktöriyel, $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2.1$ çarpımı ile verilir. Bu özellik, $n! = n(n-1)!$ eşitliğini içerdiğine göre, eğer $x = n$ bir tamsayı ise,

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-t^x e^{-t}) \Big|_0^b + x \int_0^b t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x) \end{aligned}$$

olduğundan $\Gamma(x)$ fonksiyonu

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (2.2)$$

eşitliğini tüm $x > 0$ değerleri için gerçekler. Bu özellik yardımıyla Gamma fonksiyonu için argümentin herhangi iki tamsayı arasındaki değerlerine karşılık gelen sonuçların bilinmesi halinde diğer aralıklardaki fonksiyon değerleri kolayca hesaplanabilir.

2.2. POCHHAMMER SEMBOLÜ

α reel ya da kompleks bir sayı, n sıfır veya pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1) \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanan $(\alpha)_n$ ifadesine Pochhammer sembolü denir ve $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha \neq 0)$ olarak tanımlanır.

Lemma 2.1. Pochhammer sembolünün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

a) α reel veya kompleks bir sayı n doğal sayı olmak üzere

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \quad (2.4)$$

dir.

b) α reel veya kompleks bir sayı n doğal sayı olmak üzere,

$$(\alpha)_n = (-1)^n \binom{-\alpha}{n} n! \quad (2.5)$$

dir.

c) α reel veya kompleks bir sayı n doğal sayı olmak üzere,

$$(\alpha)_{n+1} = \alpha(\alpha+1)_n \quad (2.6)$$

dir.

d) c reel veya kompleks bir sayı n ve k doğal sayı olmak üzere

$$\frac{(c)_{n+k}}{(c)_n} = (c+n)_k \quad (2.7)$$

dir.

e) n ve k doğal sayı olmak üzere

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(-n)_k}{(-1)_k} \quad (2.8)$$

dir.

f) λ reel veya kompleks bir sayı n doğal sayı olmak üzere

$$\frac{(-1)^n (-\lambda)_n}{n!} = \binom{\lambda}{n} \quad (2.9)$$

dir.

g) α reel ya da kompleks bir sayı, $|x| < 1$ için

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n \quad (2.10)$$

dir.

h) λ reel veya kompleks bir sayı n ve m doğal sayı olmak üzere

$$(\lambda)_{n+m} = (\lambda)_n (\lambda+n)_m \quad \lambda \neq 0, -1, \dots \quad (2.11)$$

dir.

2.3. HİPERGEOMETRİK SERİ VE HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

α , β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (2.12)$$

olarak ifade edilen seriye Gauss hipergeometrik serisi veya hipergeometrik seri denir. Denklem (2.12)'den görülmektedir ki γ değeri sıfır veya negatif bir tamsayı olmamalıdır.

Denklem (2.12) ifadesi $1 + x + x^2 + \dots$ geometrik serisinin bir genelleştirilmesi olduğundan bu adı alır. Denklem (2.12) hipergeometrik serisi $|x| < 1$ için yakınsak, $|x| > 1$ için ıraksaktır. $|x| = 1$ olduğu zaman $\gamma > \alpha + \beta$ ise seri mutlak yakınsaktır. $|x| = -1$ iken $\gamma > \alpha + \beta - 1$ ise seri yakınsaktır.

Denklem (2.3) gösterimi dikkate alınarak Denklem (2.12) hipergeometrik serisi

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (2.13)$$

şeklinde yazılır.

Denklem (2.13)'ten görülen F 'nin altındaki 2 ve 1 alt indisleri F 'nin yapısında biri α ve β diğeri γ olmak üzere iki tip parametre bulunduğunu ifade eder. Denklem (2.13)'ün genelleştirilmiş ifadesi

$${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \dots, \gamma_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \dots (\gamma_q)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (2.14)$$

dir.

Lemma 2.2. Hipergeometrik serilerin tanımında Denklem (2.13)'teki ifadesinde α , β , γ değerlerini bazı özel değerler alındığında aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [17]:

a) $(1 - z)^{-a} = {}_2F_1(a, b; b; z)$

b) $\ln(1 + z) = z {}_2F_1(1, 1; 2; -z)$ (2.15)

c) $\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2z {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right)$

2.4. ÖNEMLİ BAZI ÖZELLİKLER

Bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar konusunda sık sık kullanacağımız bazı seri özellikleri vereceğiz. Şimdi bahsi geçen serileri tanıyalım.

Lemma 2.3. Aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} A(k, n - pk) \quad (2.16)$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n + pk) \quad (2.17)$$

İspat:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) t^{n+pk} \quad (2.18)$$

serisini düşünelim. $n + pk$ yerine m yazılacağından Denklem (2.18)'deki k ve n indisleri

$$k = j, \quad n = m - pj \quad (2.19)$$

olmak üzere yeni j ve m indisleri tanımlayalım. Denklem (2.18)'de $n \geq 0$ ve $k \geq 0$ olup Denklem (2.19) sebebiyle

$$m - pj \geq 0, \quad j \geq 0$$

veya

$$0 \leq pj \leq m, \quad m \geq 0$$

yazılır. Böylece $0 \leq j \leq \frac{m}{p}$

olup j , 0 'dan $\frac{m}{p}$ 'ye kadar değişen tamsayılardır. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) t^{n+pk} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[m/p]} A(j, m - pj) t^m \quad (2.20)$$

bağıntısına ulaşılır.

Böylece Denklem (2.20)'de $t=1$ ve sağ taraftaki j ve m indisleri yerine k ve n alınırsa Denklem (2.16) elde edilir.

b) Denklem (2.17) ifadesi Denklem (2.16) ifadesinin ispatına benzer şekilde gösterilir.

Lemma 2.4. Aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n-k) \quad (2.21)$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n+k) \quad (2.22)$$

İspat: Lemma 2.3'ün a) ve b) şıklarında $p=1$ alınır ispat tamamlanır.

Lemma 2.5. Aşağıdaki eşitlik geçerlidir [12]:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} A(k, l) = \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} A(k+pl, l). \quad (2.23)$$

2.5. DOĞURUCU FONKSİYON

$G(x_1, x_2, \dots, x_p; t)$ fonksiyonu,

$$G(x_1, x_2, \dots, x_p; t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x_1, x_2, \dots, x_p) t^n$$

şeklinde t^n nin kuvvetlerine göre açılabilirse $G(x_1, x_2, \dots, x_p; t)$ fonksiyonuna

$f_n(x_1, x_2, \dots, x_p)$ fonksiyonu için doğurucu fonksiyon denir.

Tanım: $G(x, y, t)$ fonksiyonu

$$G(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) f_n(y) t^n$$

şeklinde t^n nin kuvvetlerine göre açılabilirse $G(x, y, t)$ 'ye bilineer doğurucu fonksiyon

denir. Burada c_n , x ve y 'den bağımsızdır. Örneğin, Hermite polinomlarının bilineer doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) H_n(y) \frac{t^n}{n!} = (1-4t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{4xyt-4(x^2+y^2)t^2}{1-4t^2}\right)$$

şeklindedir [13].

Eğer $G(x_1, \dots, x_r, t)$, $r+1$ değişkenli fonksiyonu t 'nin kuvvetlerine göre

$$G(x_1, \dots, x_r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n f_n(x_1) f_n(x_2) \dots f_n(x_r) t^n$$

şeklinde bir seriye açılabilirse $G(x_1, \dots, x_r, t)$ fonksiyonuna $f_n(x_1), f_n(x_2), \dots, f_n(x_r)$ fonksiyonları için multilineer doğurucu fonksiyon denir.

Tanım: $H(x, y, t)$ fonksiyonu

$$H(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n f_n(x) g_n(y) t^n$$

şeklinde t^n nin kuvvetlerine göre açılabilirse $H(x, y, t)$ 'ye bilateral doğurucu fonksiyon denir. Burada h_n , x ve y 'den bağımsız, $f_n(x)$ ve $g_n(y)$ 'ler birbirinden farklı fonksiyonlardır. Bilateral doğurucu fonksiyonlar için

$$\begin{aligned} & (1-y)^{\beta-\gamma} (1+(x-1)y)^{-\beta} \exp\left\{-\frac{wy}{1-y}\right\} {}_1F_1\left[\beta; \gamma; \frac{xyw}{(1-y)(1-y+xy)}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_2F_1[-n, \beta; \gamma; x] L_n^{(\gamma-1)}(w) y^n \\ & (|y| < 1, |(x-1)y| < 1) \end{aligned}$$

bağıntısı örnek olarak verilebilir [17].

Eğer $H(x_1, \dots, x_r, t)$, $r+1$ değişkenli fonksiyonu t 'nin kuvvetlerine göre

$$H(x_1, \dots, x_r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n f_{1,n}(x_1) f_{2,n}(x_2) \dots f_{r,n}(x_r) t^n$$

şeklindeki bir seriye açılabilirse $H(x_1, \dots, x_r, t)$ fonksiyonuna $f_{1,n}(x_1), f_{2,n}(x_2), \dots, f_{r,n}(x_r)$ fonksiyonları için multilateral doğurucu fonksiyon denir.

3. MEIXNER POLİNOMLARI

Bu bölümde ilk olarak Meixner polinomunun tanımı ve doğurucu fonksiyonu verilecektir. Daha sonra Meixner polinomunun bazı özellikleri verilecektir. Bu bilgiler kullanılarak bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonları içeren bazı teoremler verilip bu teoremlerin uygulamaları yapılacaktır. Daha sonra Meixner polinomunun türev içeren ve içermeyen rekürans bağıntıları, Meixner polinomunun Jacobi polinomuyla bağlantısı ve Meixner polinomunun integralle olan ilişkisi verilecektir.

3.1. MEIXNER POLİNOMUNUN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

Meixner polinomu $M_n(z; \beta, x)$ ile gösterilir ve

$$M_n(z; \beta, x) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{z}{k} \binom{-z-\beta}{n-k} x^{-k} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır [17].

Ayrıca Meixner polinomunu başka bir ifadeyle

$$M_n(z; \beta, x) = (\beta)_n {}_2F_1(-n, -z; \beta; 1-x^{-1}) \quad (3.2)$$

şeklinde verilir [15].

Teorem 3.1. Meixner polinomu, aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [17]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n(z; \beta, x) \frac{t^n}{n!} = (1-t)^{-\beta-z} \left(1-\frac{t}{x}\right)^z, \quad n \geq 0. \quad (3.3)$$

İspat: Denklem (3.1) ifadesi Denklem (3.3)'ün sol tarafın da yerine yazılırsa ve lemma 2.1(f), Denklem (2.22) ile Denklem (2.10) ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} M_n(z; \beta, x) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{z}{k} \binom{-z-\beta}{n-k} x^{-k} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (-z)_k}{k!} \frac{(-1)^{n-k} (z+\beta)_{n-k}}{(n-k)!} x^{-k} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} (n+k)! \frac{(-1)^k (-z)_k}{k!} \frac{(-1)^n (z+\beta)_n}{n!} x^{-k} \frac{t^n t^k}{(n+k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)_k}{k!} \frac{(z+\beta)_n}{n!} x^{-k} t^n t^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (z+\beta)_n \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)_k}{k!} \left(\frac{t}{x}\right)^k \\
&= (1-t)^{-z-\beta} \left(1-\frac{t}{x}\right)^z
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2. Meixner polinomları aşağıdaki toplam ifadesine sahiptir [14]:

$$M_n(z_1 + z_2; \beta_1 + \beta_2, x) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} M_{n-m}(z_1; \beta_1, x) M_m(z_2; \beta_2, x). \quad (3.4)$$

İspat: Denklem (3.3) ifadesindeki doğurucu fonksiyonda $z \rightarrow z_1 + z_2$ ve $\beta \rightarrow \beta_1 + \beta_2$ dönüşümü yapılır ve Denklem (2.21) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} M_n(z_1 + z_2; \beta_1 + \beta_2, x) \frac{t^n}{n!} &= (1-t)^{-\beta_1 - \beta_2 - z_1 - z_2} \left(1-\frac{t}{x}\right)^{z_1 + z_2} \\
&= [(1-t)^{-\beta_1 - z_1} \left(1-\frac{t}{x}\right)^{z_1}] [(1-t)^{-\beta_2 - z_2} \left(1-\frac{t}{x}\right)^{z_2}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} M_n(z_1; \beta_1, x) \frac{t^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} M_m(z_2; \beta_2, x) \frac{t^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} M_n(z_1; \beta_1, x) M_m(z_2; \beta_2, x) \frac{t^{n+m}}{n!m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} M_{n-m}(z_1; \beta_1, x) M_m(z_2; \beta_2, x) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenirse ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.3. Meixner polinomu için başka bir doğurucu fonksiyon aşağıdaki gibidir [17]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+m}(z; \beta, x) \frac{t^n}{n!} = (1-t)^{-\beta - z - m} \left(1-\frac{t}{x}\right)^z M_m(z; \beta, \frac{x-t}{1-t}). \quad (3.5)$$

İspat: Denklem (3.3) eşitliğinin her iki tarafına $t \rightarrow t + u$ dönüşümü yapılır ve bulunan ifadenin sol tarafına Denklem (2.22) eşitliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} M_{n+m}(z; \beta, x) \frac{t^n u^m}{n! m!} &= (1-t-u)^{-\beta-z} \left(1 - \frac{t+u}{x}\right)^z \\
&= (1-t)^{-\beta-z} \left(1 - \frac{u}{1-t}\right)^{-\beta-z} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^z \left(1 - \frac{\frac{u}{1-t}}{1 - \frac{t}{x}}\right)^z \\
&= (1-t)^{-\beta-z} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^z \left[\left(1 - \frac{u}{1-t}\right)^{-\beta-z} \left(1 - \frac{u}{x-t}\right)^z\right] \\
&= (1-t)^{-\beta-z} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^z \left(1 - \frac{u}{1-t}\right)^{-\beta-z} \left(1 - \frac{\frac{u}{1-t}}{1 - \frac{t}{x}}\right)^z \\
&= (1-t)^{-\beta-z} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^z \sum_{m=0}^{\infty} M_m\left(z; \beta, \frac{x-t}{1-t}\right) \frac{\left(\frac{u}{1-t}\right)^m}{m!} \\
&= (1-t)^{-\beta-z} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^z \sum_{m=0}^{\infty} M_m\left(z; \beta, \frac{x-t}{1-t}\right) \frac{u^m}{m!} \frac{1}{(1-t)^m} \\
&= \left(1 - \frac{t}{x}\right)^z (1-t)^{-\beta-z} \sum_{m=0}^{\infty} (1-t)^{-m} M_m\left(z; \beta, \frac{x-t}{1-t}\right) \frac{u^m}{m!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında $\frac{u^m}{m!}$ in katsayıları eşitlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+m}(z; \beta, x) \frac{t^n}{n!} = (1-t)^{-\beta-z-m} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^z M_m\left(z; \beta, \frac{x-t}{1-t}\right)$$

ifadesi bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

3.2. MEIXNER POLİNOMUNUN BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLARI

Bu kısımda Meixner polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonların birkaç ailesi verildi. Burada kullanılan yöntem ve uygulamaları [18], [22], [23] ve [27] numaralı çalışmalarda bulmak mümkündür.

Teorem 3.4. μ -üncü basamaktan s kompleks değişkenli sifıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(s_1, \dots, s_k)$ ($k \in \mathbb{N}$) fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\eta, \psi}(s_1, \dots, s_k; \tau) := \sum_{r=0}^{\infty} a_r \Omega_{\eta+\psi r}(s_1, \dots, s_k) \tau^r$$

$$(a_r \neq 0, \quad \eta, \psi \in \mathbb{C})$$

ve $p, n \in \mathbb{N}$

$$\theta_{n, p}^{\eta, \psi}(z; \beta, x; s_1, \dots, s_k; \xi) := \sum_{r=0}^{\lfloor n/p \rfloor} a_r M_{n-pr}(z; \beta, x) \Omega_{\eta+\psi r}(s_1, \dots, s_k) \frac{\xi^r}{(n-pr)!} \quad (3.6)$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_{n, p}^{\eta, \psi} \left(z; \beta, x; s_1, \dots, s_k; \frac{\mu}{u^p} \right) u^n = (1-u)^{-\beta-z} \left(1 - \frac{u}{x} \right)^z \Lambda_{\eta, \psi}(s_1, \dots, s_k; \mu) \quad (3.7)$$

ifadesi gerçekleşir.

İspat: Denklem (3.7) ifadesinin sol tarafına T diyelim. Denklem (3.6) ifadesi Denklem (3.7)'de yerine yazılır ve Denklem (2.17) eşitliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\lfloor n/p \rfloor} a_r M_{n-pr}(z; \beta, x) \Omega_{\eta+\psi r}(s_1, \dots, s_k) \frac{\mu^r}{u^{pr} (n-pr)!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\lfloor n/p \rfloor} a_r M_{n-pr}(z; \beta, x) \Omega_{\eta+\psi r}(s_1, \dots, s_k) \mu^r \frac{u^{n-pr}}{(n-pr)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} a_r M_n(z; \beta, x) \Omega_{\eta+\psi r}(s_1, \dots, s_k) \mu^r \frac{u^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} M_n(z; \beta, x) \frac{u^n}{n!} \sum_{r=0}^{\infty} a_r \Omega_{\eta+\psi r}(s_1, \dots, s_k) \mu^r \\ &= (1-u)^{-\beta-z} \left(1 - \frac{u}{x} \right)^z \Lambda_{\eta, \psi}(s_1, \dots, s_k; \mu) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. ■

Sonuç 3.1. Teorem 3.4'te $r \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k=1$, $s_1 = y$ ve

$$\Omega_{\eta+\psi r}(y) = g_{\eta+\psi r}^{(s)}(\lambda, y)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{[n/p]} a_r M_{n-pr}(z; \beta, x) g_{\eta+\psi r}^{(s)}(\lambda, y) \frac{\mu^r}{u^{pr}(n-pr)!} u^n \\ & = (1-u)^{-\beta-z} \left(1 - \frac{u}{x}\right)^z \Lambda_{\eta, \psi}(\lambda, y; \mu) \end{aligned}$$

olur. Burada kullanılan $g_n^{(s)}(\lambda, y)$ genelleştirilmiş Cesàro polinomudur. Bu polinom

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(s)}(\lambda, y) t^n = (1-t)^{-s-1} (1-yt)^{-\lambda} \quad (3.8)$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir [16].

Uyarı 3.1. Sonuç 3.1’de $a_r = 1$, $\eta = 0$, $\psi = 1$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n(z; \beta, x) \frac{u^n}{n!} \sum_{r=0}^{\infty} g_r^{(s)}(\lambda, y) \mu^r = (1-u)^{-\beta-z} \left(1 - \frac{u}{x}\right)^z (1-\mu)^{-s-1} (1-y\mu)^{-\lambda}$$

elde edilir.

Teorem 3.5. μ -üncü basamaktan s kompleks değişkenli sifıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_r)$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\mu, \psi}^{n, p}(z_1 + z_2; \beta_1 + \beta_2, x; y_1, \dots, y_r; \tau) \\ & =: \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k M_{n-pk}(z_1 + z_2; \beta_1 + \beta_2, x) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \tau^k \end{aligned} \quad (3.9)$$

$a_k \neq 0$, $\mu, \psi \in \mathbb{C}$ ve $n, p \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l \binom{n-pl}{k-pl} M_{n-k}(z_1; \beta_1, x) M_{k-pl}(z_2; \beta_2, x) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) \xi^l \\ & = \Lambda_{\mu, \psi}^{n, p}(z_1 + z_2; \beta_1 + \beta_2, x; y_1, \dots, y_r; \xi) \end{aligned} \quad (3.10)$$

ifadesi gerçekleşir.

İspat: Denklem (3.10) ifadesinin sol tarafına T dersek ve Denklem (2.23), Denklem (3.4) ve Denklem (3.9) eşitliklerini kullanırsak,

$$T = \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} a_l \binom{n-pl}{k} M_{n-k-pl}(z_1; \beta_1, x) M_k(z_2; \beta_2, x) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) \xi^l$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{\lfloor n/p \rfloor} a_l \left(\sum_{k=0}^{n-pl} \binom{n-pl}{k} M_{n-k-pl}(z_1; \beta_1, x) M_k(z_2; \beta_2, x) \right) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) \xi^l \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor n/p \rfloor} a_l M_{n-pl}(z_1 + z_2; \beta_1 + \beta_2, x) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) \xi^l \\
&= \Lambda_{\mu, \psi}^{n, p}(z_1 + z_2; \beta_1 + \beta_2, x; y_1, \dots, y_r; \xi)
\end{aligned}$$

olup, ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.2. Teorem 3.5'te $r=1$, $y_1 = z_3$ ve

$$\Omega_{\mu+\psi k}(z_3) = M_{\mu+\psi k}(z_3; \beta_3, y)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{\lfloor k/p \rfloor} a_l \binom{n-pl}{k-pl} M_{n-k}(z_1; \beta_1, x) M_{k-pl}(z_2; \beta_2, x) M_{\mu+\psi l}(z_3; \beta_3, y) \xi^l \\
&= \Lambda_{\mu, \psi}^{n, p}(z_1 + z_2; \beta_1 + \beta_2, x; z_3; \beta_3, y; \xi)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı 3.2. Sonuç 3.2'de $a_l = \binom{n}{l}$, $\mu=0$, $\psi=1$, $y=x$, $p=1$ ve $\xi=1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l} M_{n-k}(z_1; \beta_1, x) M_{k-l}(z_2; \beta_2, x) M_l(z_3; \beta_3, x) \\
&= M_n(z_1 + z_2 + z_3; \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.6. μ -üncü basamaktan s kompleks değişkenli sifıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_r)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu, p, q}(z; \beta, x; y_1, \dots, y_r; t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_{m+qn}(z; \beta, x) \Omega_{\mu+pn}(y_1, \dots, y_r) \frac{t^n}{(nq)!}$$

$$(a_n \neq 0 \quad \mu \in \mathbb{C} \quad n, m, p \in \mathbb{N})$$

ve

$$\theta_{n,p,q}(y_1, \dots, y_r; \tau) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/q \rfloor} \binom{n}{n-qk} a_k \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) \tau^k \quad (3.11)$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} M_{n+m}(z; \beta, x) \theta_{n,p,q}(y_1, \dots, y_r; \tau) \frac{t^n}{n!} \\ &= (1-t)^{-\beta-z-m} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^z \Lambda_{\mu,p,q}\left(z; \beta, \frac{x-t}{1-t}; y_1, \dots, y_r; \tau \left(\frac{t}{1-t}\right)^q\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

ifadesi gerçekleşir.

İspat: Denklem (3.12) ifadesinin sol tarafına T diyelim. Denklem (3.11) ifadesi Denklem (3.12)'de yerine yazılır ve Denklem (3.5) ile Denklem (2.17) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=0}^{\infty} M_{n+m}(z; \beta, x) \sum_{k=0}^{\lfloor n/q \rfloor} \binom{n}{n-qk} a_k \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) \tau^k \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+qk}{n} M_{n+m+qk}(z; \beta, x) a_k \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) \tau^k \frac{t^{n+qk}}{(n+qk)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+qk)!}{(qk)!n!} M_{n+m+qk}(z; \beta, x) a_k \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) \tau^k \frac{t^{n+qk}}{(n+qk)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+m+qk}(z; \beta, x) \frac{t^n}{n!} \right) \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) \frac{(\tau t^q)^k}{(qk)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[(1-t)^{-\beta-z-m-qk} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^z M_{m+qk}\left(z; \beta, \frac{x-t}{1-t}\right) \right] \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) \frac{(\tau t^q)^k}{(qk)!} \\ &= (1-t)^{-\beta-z-m} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^z \sum_{k=0}^{\infty} a_k M_{m+qk}\left(z; \beta, \frac{x-t}{1-t}\right) \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) \frac{\left(\tau \left(\frac{t}{1-t}\right)^q\right)^k}{(qk)!} \\ &= (1-t)^{-\beta-z-m} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^z \Lambda_{\mu,p,q}\left(z; \beta, \frac{x-t}{1-t}; y_1, \dots, y_r; \tau \left(\frac{t}{1-t}\right)^q\right) \end{aligned}$$

ifadesi gerçekleşir. ■

Sonuç 3.3. Teorem 3.6'da $r = 1$, $y_1 = y$ ve

$$\Omega_{\mu+pk}(y) = P_{\mu+pk}(y)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} M_{n+m}(z; \beta, x) \theta_{n,p,q}(y; \tau) \frac{t^n}{n!} \\ &= (1-t)^{-\beta-z-m} \left(1-\frac{t}{x}\right)^z \Lambda_{\mu,p,q}\left(z; \beta, \frac{x-t}{1-t}; y; \tau\left(\frac{t}{1-t}\right)^q\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada kullanılan $P_n(x)$ polinomu Legendre polinomudur. Bu polinom aşağıdaki doğurucu fonksiyona sahiptir [17]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}.$$

3.3. MEIXNER POLİNOMUNUN REKÜRANS BAĞINTISI VE İNTEGRAL GÖSTERİMİ

Bu bölümde Meixner polinomu için türev içeren ve türev içermeyen rekürans bağıntıları verilecektir. Denklem (3.3)'ün her iki tarafı x 'e göre türevi alınır ve Denklem (2.10) ile Denklem (2.21) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} M_n(z; \beta, x) \frac{t^n}{n!} &= (1-t)^{-\beta-z} z(1-tx^{-1})^{z-1} (tx^{-2}) \\ &= (1-t)^{-\beta-z} (1-tx^{-1})^z z(1-tx^{-1})^{-1} (tx^{-2}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} M_n(z; \beta, x) \frac{t^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1)_m \left(\frac{t}{x}\right)^m}{m!} \frac{zt}{x^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n M_{n-m}(z; \beta, x) \frac{z}{x^{m+2}(n-m)!} t^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} M_{n-m-1}(z; \beta, x) \frac{z}{x^{m+2}(n-m-1)!} t^n \\ &= \frac{z}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} M_{n-m-1}(z; \beta, x) \frac{1}{x^m(n-m-1)!} t^n \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında t^n nin katsayıları birbirine eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial x} M_n(z; \beta, x) = \frac{z}{x^2} \sum_{m=0}^{n-1} M_{n-m-1}(z; \beta, x) \frac{n!}{x^m(n-m-1)!}$$

elde edilir. Bulunan eşitliğin sağ tarafına Denklem (2.3) ifadesi uygulanırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa Meixner polinomu için türev içeren rekürans bağıntısı

$$\frac{\partial}{\partial x} M_n(z; \beta, x) = \frac{z}{x^2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{M_{n-m-1}(z; \beta, x)}{x^m} (n-m)_{m+1}$$

elde edilir.

Şimdi Denklem (3.3) ifadesindeki doğurucu fonksiyonu kullanarak eşitliğin her iki tarafı t 'ye göre türevi alınır ve Denklem (2.21) ifadesinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n M_n(z; \beta, x) \frac{t^{n-1}}{n!} \\ &= (-\beta - z)(1-t)^{-\beta-z-1} (-1) \left(1 - \frac{t}{x}\right)^z + z \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{z-1} \left(-\frac{1}{x}\right) (1-t)^{-\beta-z} \\ &= (\beta + z)(1-t)^{-\beta-z} (1-t)^{-1} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^z - \frac{z}{x} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^z \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{-1} (1-t)^{-\beta-z} \\ &= (\beta + z) \sum_{n=0}^{\infty} M_n(z; \beta, x) \frac{t^n}{n!} (1-t)^{-1} - \frac{z}{x} \sum_{n=0}^{\infty} M_n(z; \beta, x) \frac{t^n}{n!} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{-1} \\ &= (\beta + z) \sum_{n=0}^{\infty} M_n(z; \beta, x) \frac{t^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} (1)_m \frac{(t)^m}{m!} - \frac{z}{x} \sum_{n=0}^{\infty} M_n(z; \beta, x) \frac{t^n}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} (1)_p \frac{\left(\frac{t}{x}\right)^p}{p!} \\ &= (\beta + z) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} M_n(z; \beta, x) \frac{t^{n+m}}{n!} - \frac{z}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} M_n(z; \beta, x) \frac{t^{n+p}}{n! x^p} \\ &= (\beta + z) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n M_{n-m}(z; \beta, x) \frac{t^n}{n!} - \frac{z}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n M_{n-p}(z; \beta, x) \frac{t^n}{x^p n!} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $\frac{t^n}{n!}$ nin katsayıları birbirine eşitlenirse

$$M_{n+1}(z; \beta, x) = (\beta + z) \sum_{m=0}^n M_{n-m}(z; \beta, x) - \frac{z}{x} \sum_{p=0}^n x^{-p} M_{n-p}(z; \beta, x)$$

şeklinde türev içermeyen rekürans bağıntısı elde edilmiş olur.

Teorem 3.7. Meixner polinomu ile Jacobi polinomu arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir [17]:

$$M_n(z; \beta, x) = n! P_n^{(\beta-1, -\beta-n-z)}\left(\frac{2}{x} - 1\right). \quad (3.13)$$

İspat: Klasik Jacobi polinomu

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \binom{\alpha+n}{n} {}_2F_1\left(-n, \alpha + \beta + n + 1; \alpha + 1; \frac{1-z}{2}\right) \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanmıştır [17]. İspatı kolaylaştırmak için Denklem (3.13)'ün sağ tarafından başlanırsa,

$$\begin{aligned} n! P_n^{(\beta-1, -\beta-n-z)}\left(\frac{2}{x}-1\right) &= n! \binom{\beta-1+n}{n} {}_2F_1\left(-n, \beta-1-\beta-n-z+n+1; \beta-1+1; \frac{1-\left(\frac{2}{x}-1\right)}{2}\right) \\ &= n! \frac{(\beta+n-1)!}{(\beta-1)n!} {}_2F_1\left(-n, -z; \beta; \frac{x-1}{x}\right) \\ &= \beta(\beta+1)\dots(\beta+n-2)(\beta+n-1) {}_2F_1\left(-n, -z; \beta; \frac{x-1}{x}\right) \\ &= (\beta)_n {}_2F_1\left(-n, -z; \beta; 1-x^{-1}\right) \\ &= M_n(z, \beta; x) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.8. Meixner polinomu için integral gösterimi aşağıdaki gibidir [14]:

$$M_n(z, \beta, x) = \frac{1}{\Gamma(z+\beta)\Gamma(-z)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u_1+u_2)} \left(u_1 + \frac{u_2}{x}\right)^n u_1^{z+\beta-1} u_2^{-z-1} du_1 du_2. \quad (3.15)$$

İspat: Bu ispatı yaparken Denklem (3.3) ifadesinin sağ tarafının integralle gösterimi için

$$a^{-v} = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^\infty e^{-at} t^{v-1} dt \quad \text{Re}(v) > 0$$

özdeşliğinden faydalanılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^\infty M_n(z, \beta, x) \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{\Gamma(z+\beta)} \int_0^\infty e^{-(1-t)u_1} u_1^{z+\beta-1} du_1 \frac{1}{\Gamma(-z)} \int_0^\infty e^{-(1-\frac{t}{x})u_2} u_2^{-z-1} du_2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(z+\beta)} \frac{1}{\Gamma(-z)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u_1+u_2)} e^{\left(u_1 + \frac{u_2}{x}\right)t} u_1^{z+\beta-1} u_2^{-z-1} du_1 du_2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(z+\beta)} \frac{1}{\Gamma(-z)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u_1+u_2)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\left(u_1 + \frac{u_2}{x}\right)^n}{n!} t^n u_1^{z+\beta-1} u_2^{-z-1} du_1 du_2 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları birbirine eşitlenirse, ispat tamamlanır. ■

4. HİPERGEOMETRİK MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARI

Bu bölümde ilk olarak Meixner-Pollaczek polinomunun tanımı daha sonra doğurucu fonksiyonları verilecektir. Bu polinom yardımıyla n 'nin farklı değerlerine karşılık gelen ifadeler ele alınacaktır.

4.1. MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMUNUN TANIMI

Meixner-Pollaczek polinomu $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ ile gösterilir ve

$$P_n^{(\lambda)}(x; \phi) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\phi} {}_2F_1\left(-n, \lambda + ix; 2\lambda; 1 - e^{-2i\phi}\right) \quad (4.1)$$

$$(\lambda > 0, \quad 0 < \phi < \pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

olarak tanımlanır [3].

Denklem (4.1) ifadesini kullanarak bazı değerlerini bulalım. Denklem (2.13) ile verilen hipergeometrik fonksiyonun tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) &= \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\phi} {}_2F_1\left(-n, \lambda + ix; 2\lambda; 1 - e^{-2i\phi}\right) \\ &= \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\phi} \sum_{p=0}^n \frac{(-n)_p (\lambda + ix)_p}{(2\lambda)_p} \frac{(1 - e^{-2i\phi})^p}{p!} \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilmiş olur. Denklem (4.2)'de $n = 0$ alınırsa $P_0^{(\lambda)}(x; \phi) = 1$ olduğu aşikardır.

Denklem (4.2)'de $n = 1$ alınır ve Denklem (2.8) eşitliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} P_1^{(\lambda)}(x; \phi) &= 2\lambda e^{i\phi} \sum_{p=0}^1 \frac{(-1)_p (\lambda + ix)_p}{(2\lambda)_p} \frac{(1 - e^{-2i\phi})^p}{p!} \\ &= 2\lambda e^{i\phi} \left[1 + \frac{(-1)(\lambda + ix)}{2\lambda} (1 - e^{-2i\phi}) \right] \\ &= 2\lambda e^{i\phi} - 2\lambda e^{i\phi} \frac{(\lambda + ix)}{2\lambda} (1 - e^{-2i\phi}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\lambda e^{i\phi} - e^{i\phi}(\lambda + ix)(1 - e^{-2i\phi}) \\
&= 2\lambda e^{i\phi} - (\lambda + ix)(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \\
&= 2\lambda e^{i\phi} - \lambda(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) - ix \frac{(e^{i\phi} - e^{-i\phi})}{2i} 2i \\
&= 2\lambda e^{i\phi} - \lambda e^{i\phi} + \lambda e^{-i\phi} + 2x \sin \phi \\
&= \lambda e^{i\phi} + \lambda e^{-i\phi} + 2x \sin \phi \\
&= \lambda \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} 2 + 2x \sin \phi \\
&= 2\lambda \cos \phi + 2x \sin \phi \\
&= 2(\lambda \cos \phi + x \sin \phi)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Denklem (4.2)'de $n = 2$ alınır ve Denklem (2.8) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&P_2^{(\lambda)}(x; \phi) \\
&= \frac{(2\lambda)_2}{2!} e^{2i\phi} {}_2F_1(-2, \lambda + ix; 2\lambda; 1 - e^{-2i\phi}) \\
&= \frac{(2\lambda)(2\lambda + 1)}{2} e^{2i\phi} \sum_{p=0}^2 \frac{(-2)_p (\lambda + ix)_p}{(2\lambda)_p p!} (1 - e^{-2i\phi})^p \\
&= \lambda(2\lambda + 1) e^{2i\phi} \left[1 + \frac{(-2)(\lambda + ix)(1 - e^{-2i\phi})}{2\lambda \cdot 1} + \frac{(-2)(-1)(\lambda + ix)(\lambda + ix + 1)(1 - e^{-2i\phi})^2}{2\lambda(2\lambda + 1) \cdot 2} \right] \\
&= \lambda(2\lambda + 1) e^{2i\phi} - (2\lambda + 1) e^{2i\phi} (\lambda + ix)(1 - e^{-2i\phi}) + e^{2i\phi} (\lambda + ix)(\lambda + ix + 1) \frac{(1 - e^{-2i\phi})^2}{2} \\
&= \lambda(2\lambda + 1) e^{2i\phi} + (2\lambda + 1)(\lambda + ix)(1 - e^{2i\phi}) + e^{2i\phi} (\lambda + ix)(\lambda + ix + 1) \frac{(1 - e^{-2i\phi})^2}{2} \\
&= 2\lambda^2 e^{2i\phi} + \lambda e^{2i\phi} + (2\lambda^2 + 2\lambda ix + \lambda + ix)(1 - e^{2i\phi}) \\
&\quad + e^{2i\phi} (\lambda^2 + \lambda ix + \lambda + \lambda ix - x^2 + ix) \left(\frac{1 - 2e^{-2i\phi} + e^{-4i\phi}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\lambda^2 e^{2i\phi} + \lambda e^{2i\phi} + 2\lambda^2 + 2\lambda ix + \lambda + ix - 2\lambda^2 e^{-2i\phi} - 2\lambda ix e^{-2i\phi} - \lambda e^{-2i\phi} - ix e^{-2i\phi} \\
&\quad + \left(\lambda^2 + 2\lambda ix + \lambda - x^2 + ix \right) \left(\frac{e^{2i\phi} - 2 + e^{-2i\phi}}{2} \right) \\
&= 2\lambda^2 + 2\lambda ix + \lambda + ix - 2\lambda ix e^{2i\phi} - ix e^{2i\phi} + \frac{\lambda^2 e^{2i\phi}}{2} - \lambda^2 + \frac{\lambda^2 e^{-2i\phi}}{2} \\
&\quad + \lambda ix e^{2i\phi} - 2\lambda ix + \lambda ix e^{-2i\phi} + \frac{\lambda e^{2i\phi}}{2} - \lambda + \frac{\lambda e^{-2i\phi}}{2} \\
&\quad - \frac{x^2 e^{2i\phi}}{2} + x^2 - \frac{x^2 e^{-2i\phi}}{2} + \frac{ix e^{2i\phi}}{2} - ix + \frac{ix e^{-2i\phi}}{2} \\
&= x^2 + \lambda^2 - \lambda ix e^{2i\phi} + \lambda ix e^{-2i\phi} - ix e^{2i\phi} + \frac{ix e^{2i\phi}}{2} + \frac{ix e^{-2i\phi}}{2} \\
&= x^2 + \lambda^2 - \lambda ix 2i \frac{e^{2i\phi} - e^{-2i\phi}}{2i} - \frac{i ix e^{2i\phi} + i ix e^{-2i\phi}}{2i} \\
&= x^2 + \lambda^2 + 2\lambda x(\sin 2\phi) + \frac{x e^{2i\phi} - x e^{-2i\phi}}{2i} \\
&= x^2 + \lambda^2 + 2\lambda x(\sin 2\phi) + x(\sin 2\phi) \\
&= x^2 + \lambda^2 + (1 + 2\lambda)x \sin 2\phi
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
(n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x; \phi) - 2[x \sin \phi + (n+\lambda) \cos \phi] P_n^{(\lambda)}(x; \phi) \\
+ (n+2\lambda-1)P_{n-1}^{(\lambda)}(x; \phi) = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

türev içermeyen rekürans bağıntısı vardır [24]. Bu bağıntıda, $n = 0$ yazılırsa,

$$P_1^{(\lambda)}(x; \phi) - 2(x \sin \phi + \lambda \cos \phi) P_0^{(\lambda)}(x; \phi) + (2\lambda - 1) P_{-1}^{(\lambda)}(x; \phi) = 0$$

$$P_0^{(\lambda)}(x; \phi) = 1 \text{ ve } P_{-1}^{(\lambda)}(x; \phi) = 0$$

olduğundan dolayı

$$P_1^{(\lambda)}(x; \phi) = 2(x \sin \phi + \lambda \cos \phi)$$

elde edilir. Denklem (4.3)'te $n = 1$ yazılırsa,

$$2P_2^{(\lambda)}(x; \phi) - 2(x \sin \phi + (1 + \lambda) \cos \phi) P_1^{(\lambda)}(x; \phi) + (2\lambda) P_0^{(\lambda)}(x; \phi) = 0$$

$$2P_2^{(\lambda)}(x; \phi) - 2[(x \sin \phi + (1 + \lambda) \cos \phi)][2(x \sin \phi + \lambda \cos \phi)] + 2\lambda = 0$$

$$\begin{aligned} P_2^{(\lambda)}(x; \phi) &= [x \sin \phi + (1 + \lambda) \cos \phi][2(x \sin \phi + \lambda \cos \phi)] - \lambda \\ &= [x \sin \phi + \cos \phi + \lambda \cos \phi][2x \sin \phi + 2\lambda \cos \phi] - \lambda \\ &= 2\lambda x \sin \phi \cos \phi + 2x^2 \sin^2 \phi + 2\lambda^2 \cos^2 \phi \\ &\quad + 2\lambda x \cos \phi \sin \phi + 2\lambda \cos^2 \phi + 2x \sin \phi \cos \phi - \lambda \\ &= (1 + 2\lambda)x \sin 2\phi + 2x^2 \left(\frac{1 - \cos 2\phi}{2} \right) + 2\lambda^2 \left(\frac{1 + \cos 2\phi}{2} \right) + 2\lambda \frac{(1 + \cos 2\phi)}{2} - \lambda \\ &= (1 + 2\lambda)x \sin 2\phi + x^2 - x^2 \cos 2\phi + \lambda^2 + \lambda^2 \cos 2\phi + \lambda + \lambda \cos 2\phi - \lambda \\ &= x^2 + \lambda^2 + (\lambda^2 + \lambda - x^2) \cos 2\phi + (1 + 2\lambda)x \sin 2\phi \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

4.2. MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMUNUN DOĞURUCU FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Meixner-Pollaczek polinomlarının literatürde bilinen bazı doğurucu fonksiyonların ifadeleri verilecektir.

Teorem 4.1. Meixner-Pollaczek $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomu aşağıdaki doğurucu fonksiyona sahiptir [8]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n = (1 - te^{i\phi})^{-\lambda + ix} (1 - te^{-i\phi})^{-\lambda - ix}. \quad (4.4)$$

İspat: Denklem (4.4) ifadesinde Denklem (4.1)'deki $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomunun değeri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\phi} {}_2F_1(-n, \lambda + ix; 2\lambda; 1 - e^{-2i\phi}) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\phi} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (\lambda + ix)_k}{(2\lambda)_k k!} (1 - e^{-2i\phi})^k t^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\phi} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n! (\lambda + ix)_k}{(n-k)! (2\lambda)_k} \frac{(1 - e^{-2i\phi})^k}{k!} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2\lambda)_n}{(2\lambda)_k} e^{in\phi} \frac{(-1)^k n! (\lambda + ix)_k}{(n-k)! n!} \frac{(1 - e^{-2i\phi})^k}{k!} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (2\lambda + k)_{n-k} e^{in\phi} \frac{(-1)^k n! (\lambda + ix)_k}{(n-k)! n!} \frac{(1 - e^{-2i\phi})^k}{k!} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (2\lambda + k)_n e^{i(n+k)\phi} \frac{(-1)^k (\lambda + ix)_k}{n!} \frac{(1 - e^{-2i\phi})^k}{k!} t^n t^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (2\lambda + k)_n e^{in\phi} e^{ik\phi} \frac{(-1)^k (\lambda + ix)_k}{n!} \frac{(1 - e^{-2i\phi})^k}{k!} t^n t^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda + k)_n e^{in\phi} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + ix)_k (-1)^k e^{ik\phi} \frac{(1 - e^{-2i\phi})^k}{k!} t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + ix)_k \frac{(-te^{i\phi}(1 - e^{-2i\phi}))^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda + k)_n \frac{(e^{i\phi}t)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + ix)_k \frac{(-te^{i\phi}(1 - e^{-2i\phi}))^k}{k!} (1 - e^{i\phi}t)^{-2\lambda - k} \\
&= (1 - e^{i\phi}t)^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + ix)_k \left(\frac{-te^{i\phi}(1 - e^{-2i\phi})}{1 - te^{i\phi}} \right)^k \frac{1}{k!} \\
&= (1 - e^{i\phi}t)^{-2\lambda} \left(1 + \frac{te^{i\phi}(1 - e^{-2i\phi})}{1 - te^{i\phi}} \right)^{-\lambda - ix} \\
&= (1 - te^{i\phi})^{-\lambda + ix} (1 - te^{-i\phi})^{-\lambda - ix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2. Meixner-Pollaczek $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomu aşağıdaki doğurucu fonksiyona sahiptir [8]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_n e^{in\phi}} t^n = e^t {}_1F_1\left(\lambda + ix; 2\lambda; \left(e^{-2i\phi} - 1\right)t\right). \quad (4.5)$$

İspat: Denklem (4.5) ifadesinde Denklem (4.1)'deki $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomunun değeri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_n e^{in\phi}} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)_n}{n!} \frac{e^{in\phi}}{(2\lambda)_n e^{in\phi}} {}_2F_1(-n, \lambda + ix; 2\lambda; 1 - e^{-2i\phi}) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} {}_2F_1(-n, \lambda + ix; 2\lambda; 1 - e^{-2i\phi}) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (\lambda + ix)_k (1 - e^{-2i\phi})^k}{(2\lambda)_k k!} \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n! (\lambda + ix)_k (1 - e^{-2i\phi})^k}{(n-k)! (2\lambda)_k k!} \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda + ix)_k (1 - e^{-2i\phi})^k}{n! (2\lambda)_k k!} t^n t^k \\
&= e^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda + ix)_k (te^{-2i\phi} - t)^k}{(2\lambda)_k k!} \\
&= e^t {}_1F_1(\lambda + ix; 2\lambda; (e^{-2i\phi} - 1)t)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.3. Meixner-Pollaczek $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomu aşağıdaki doğurucu fonksiyona sahiptir [8]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z)_n P_n^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_n e^{in\phi}} t^n = (1-t)^{-z} {}_2F_1\left(z, \lambda + ix; 2\lambda; \frac{(1 - e^{-2i\phi})t}{t-1}\right). \quad (4.6)$$

İspat: Denklem (4.6) ifadesinde Denklem (4.1)'deki $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomunun değeri yerine yazılır, Lemma 2.1(h) özelliği kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z)_n P_n^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_n e^{in\phi}} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z)_n}{(2\lambda)_n e^{in\phi}} \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\phi} {}_2F_1(-n, \lambda + ix; 2\lambda; 1 - e^{-2i\phi}) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (\lambda + ix)_k (1 - e^{-2i\phi})^k}{(2\lambda)_k k!} t^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n! (\lambda + ix)_k}{(n-k)! (2\lambda)_k} \frac{(1 - e^{-2i\phi})^k}{k!} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z)_{n+k}}{n!} \frac{(-1)^k n! (\lambda + ix)_k}{(2\lambda)_k} \frac{(1 - e^{-2i\phi})^k}{k!} t^n t^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (z)_k (z+k)_n \frac{(-1)^k (\lambda + ix)_k}{n! (2\lambda)_k} \frac{(1 - e^{-2i\phi})^k}{k!} t^n t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z)_k (\lambda + ix)_k (1 - e^{-2i\phi})^k}{(2\lambda)_k} \frac{(-t)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+k)_n t^n}{n!} \\
&= (1-t)^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z)_k (\lambda + ix)_k}{(2\lambda)_k} \left(\frac{t(1 - e^{-2i\phi})}{t-1} \right)^k \frac{1}{k!} \\
&= (1-t)^{-z} {}_2F_1 \left(z, \lambda + ix; \frac{(1 - e^{-2i\phi})t}{t-1} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.4. Meixner-Pollaczek $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomu aşağıdaki doğurucu fonksiyona sahiptir [21]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n = (1-t)^{-\lambda+ix} (1-te^{-2i\phi})^{-\lambda-ix}. \quad (4.7)$$

İspat: Denklem (4.7) ifadesinde Denklem (4.1)'deki $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomunun değeri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\phi} {}_2F_1(-n, \lambda + ix; 2\lambda; 1 - e^{-2i\phi}) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)_n}{n!} \sum_{p=0}^n \frac{(-n)_p (\lambda + ix)_p}{(2\lambda)_p} \frac{(1 - e^{-2i\phi})^p}{p!} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)_n}{n!} \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p n! (\lambda + ix)_p}{(n-p)! (2\lambda)_p p!} (1 - e^{-2i\phi})^p t^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (2\lambda)_{n+p} \frac{(-1)^p (\lambda + ix)_p}{(n!) (2\lambda)_p p!} (1 - e^{-2i\phi})^p t^n t^p \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda + p)_n \frac{t^n}{n!} \right) (\lambda + ix)_p \frac{(-1 + e^{-2i\phi})^p}{p!} t^p \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} (1-t)^{-2\lambda-p} (\lambda + ix)_p \frac{(te^{-2i\phi} - t)^p}{p!} \\
&= (1-t)^{-2\lambda} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\lambda + ix)_p}{p!} \frac{(te^{-2i\phi} - t)^p}{(1-t)^p} \\
&= (1-t)^{-2\lambda} \left(1 - \frac{te^{-2i\phi} - t}{1-t} \right)^{-\lambda-ix} \\
&= (1-t)^{-2\lambda} \left(\frac{1-t-te^{-2i\phi}+t}{1-t} \right)^{-\lambda-ix} \\
&= (1-t)^{-2\lambda} \left(\frac{1-te^{-2i\phi}}{1-t} \right)^{-\lambda-ix} \\
&= (1-t)^{-\lambda+ix} (1-te^{-2i\phi})^{-\lambda-ix}
\end{aligned}$$

böylece, ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.5. Meixner-Pollaczek polinomu aşağıdaki toplam ifadesine sahiptir [21]:

$$P_n^{(\lambda_1+\lambda_2)}(x_1+x_2; \phi) = \sum_{m=0}^n P_{n-m}^{(\lambda_1)}(x_1; \phi) P_m^{(\lambda_2)}(x_2; \phi). \quad (4.8)$$

İspat: Bu teoremin ispatını iki farklı yoldan gösterebiliriz.

I. Yol: Denklem (4.4) ifadesinde $\lambda \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2$ ve $x \rightarrow x_1 + x_2$ alınır ve Denklem (4.4) ile Denklem (2.21) ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda_1+\lambda_2)}(x_1+x_2; \phi) t^n &= (1-te^{i\phi})^{-\lambda_1-\lambda_2+ix_1+ix_2} (1-te^{-i\phi})^{-\lambda_1-\lambda_2-ix_1-ix_2} \\
&= (1-te^{i\phi})^{-\lambda_1+ix_1} (1-te^{i\phi})^{-\lambda_2+ix_2} (1-te^{-i\phi})^{-\lambda_1-ix_1} (1-te^{-i\phi})^{-\lambda_2-ix_2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda_1)}(x_1; \phi) t^n \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{(\lambda_2)}(x_2; \phi) t^m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_n^{(\lambda_1)}(x_1; \phi) P_m^{(\lambda_2)}(x_2; \phi) t^{n+m} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{n-m}^{(\lambda_1)}(x_1; \phi) P_m^{(\lambda_2)}(x_2; \phi) t^n.
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin iki tarafındaki t^n nin katsayıları birbirine eşitlenirse,

$$P_n^{(\lambda_1+\lambda_2)}(x_1+x_2; \phi) = \sum_{m=0}^n P_{n-m}^{(\lambda_1)}(x_1; \phi) P_m^{(\lambda_2)}(x_2; \phi)$$

toplam ifadesi elde edilir. ■

II. Yol: Denklem (4.7) ifadesinde $\lambda \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2$ ve $x \rightarrow x_1 + x_2$ alınır ve Denklem (4.7) ile Denklem (2.21) eşitliklerinden faydalanılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda_1+\lambda_2)}(x_1+x_2; \phi) t^n &= (1-t)^{-\lambda_1-\lambda_2+ix_1+ix_2} (1-te^{-2i\phi})^{-\lambda_1-\lambda_2-ix_1-ix_2} \\
&= (1-t)^{-\lambda_1+ix_1} (1-t)^{-\lambda_2+ix_2} (1-te^{-2i\phi})^{-\lambda_1-ix_1} (1-te^{-2i\phi})^{-\lambda_2-ix_2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda_1)}(x_1; \phi) t^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{e^{im\phi}} P_m^{(\lambda_2)}(x_2; \phi) t^m \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{e^{i(n+m)\phi}} P_n^{(\lambda_1)}(x_1; \phi) P_m^{(\lambda_2)}(x_2; \phi) t^{n+m} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{e^{in\phi}} P_{n-m}^{(\lambda_1)}(x_1; \phi) P_m^{(\lambda_2)}(x_2; \phi) t^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin iki tarafındaki t^n nin katsayıları birbirine eşitlenirse

$$P_n^{(\lambda_1+\lambda_2)}(x_1+x_2; \phi) = \sum_{m=0}^n P_{n-m}^{(\lambda_1)}(x_1; \phi) P_m^{(\lambda_2)}(x_2; \phi)$$

toplam ifadesi elde edilir. ■

5. MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARI İÇİN BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Bu bölümde Meixner-Pollaczek polinomlarının bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlarını veren bazı teoremler elde edilecek ve bu teoremlerin bazı uygulamaları verilecektir.

5.1. BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR-I

Teorem 5.1. μ -üncü basamaktan s kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_s)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_s; \tau) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \tau^k \quad (a_k \neq 0)$$

ve

$$\theta_{n, p}^{\mu, \psi}(x; \phi; y_1, \dots, y_s; \xi) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \xi^k \quad (5.1)$$

$n, p \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{n, p}^{\mu, \psi} \left(x; \phi; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n \\ &= (1 - te^{i\phi})^{-\lambda+ix} (1 - te^{-i\phi})^{-\lambda-ix} \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_s; \eta) \end{aligned} \quad (5.2)$$

bağıntısı gerçekleşir.

İspat: Denklem (5.2)'nin sol tarafına S diyelim. Denklem (5.1) ifadesi Denklem (5.2) eşitliğinde yerine yazılır ve Denklem (2.17) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_n^{(\lambda)}(x; \phi) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n t^{pk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k \\
&= (1 - te^{i\phi})^{-\lambda+ix} (1 - te^{-i\phi})^{-\lambda-ix} \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_s; \eta)
\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır. ■

Sonuç 5.1. Teorem 5.1’de $s=1$, $y_1 = x_1$ ve

$$\Omega_{\mu+\psi k}(x_1) = P_{\mu+\psi k}^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1)$$

alınır,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi) P_{\mu+\psi k}^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n = (1 - te^{i\phi})^{-\lambda+ix} (1 - te^{-i\phi})^{-\lambda-ix} \Lambda_{\mu, \psi}(x_1; \phi_1; \eta)$$

şeklinde $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomları için bilineer doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

Uyarı 5.1. Sonuç 5.1’de $\mu = 0$, $\psi = 1$ ve $a_k = 1$ alınır,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi) P_k^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\
&= (1 - te^{i\phi})^{-\lambda+ix} (1 - te^{-i\phi})^{-\lambda-ix} (1 - \eta e^{i\phi_1})^{-\lambda_1+ix_1} (1 - \eta e^{-i\phi_1})^{-\lambda_1-ix_1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı 5.2. Sonuç 5.1’de $\mu = 0$, $\psi = 1$ ve $a_k = \frac{1}{(2\lambda_1)_k e^{ik\phi_1}}$ alınır,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{1}{(2\lambda_1)_k e^{ik\phi_1}} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi) P_k^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\
&= (1 - te^{i\phi})^{-\lambda+ix} (1 - te^{-i\phi})^{-\lambda-ix} e^{\eta} {}_1F_1\left(\begin{matrix} \lambda_1 + ix_1 \\ 2\lambda_1 \end{matrix}; (e^{-2i\phi_1} - 1)\eta\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 5.2. μ - üncü basamaktan s kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_s)$ fonksiyonu için $a_k \neq 0$, $n, p \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \Lambda_{\mu, \psi, \lambda_1, \lambda_2}^{n, p} (x_1 + x_2; \phi; y_1, \dots, y_s; z) \\
& := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k P_{n-pk}^{(\lambda_1 + \lambda_2)} (x_1 + x_2; \phi) \Omega_{\mu + \psi k} (y_1, \dots, y_s) z^k
\end{aligned} \tag{5.3}$$

olsun. Böylece,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l P_{n-k}^{(\lambda_1)} (x_1; \phi) P_{k-pl}^{(\lambda_2)} (x_2; \phi) \Omega_{\mu + \psi l} (y_1, \dots, y_s) z^l \\
& = \Lambda_{\mu, \psi, \lambda_1, \lambda_2}^{n, p} (x_1 + x_2; \phi; y_1, \dots, y_s; z)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

bağıntısı gerçekleşir.

İspat: Denklem (5.4) ifadesinin sol tarafına S diyelim ve Denklem (2.23), Denklem (4.8) ile Denklem (5.3) ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} a_l P_{n-k-pl}^{(\lambda_1)} (x_1; \phi) P_k^{(\lambda_2)} (x_2; \phi) \Omega_{\mu + \psi l} (y_1, \dots, y_s) z^l \\
&= \sum_{l=0}^{[n/p]} \left(a_l \left(\sum_{k=0}^{n-pl} P_{n-k-pl}^{(\lambda_1)} (x_1; \phi) P_k^{(\lambda_2)} (x_2; \phi) \right) \Omega_{\mu + \psi l} (y_1, \dots, y_s) z^l \right) \\
&= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l P_{n-pl}^{(\lambda_1 + \lambda_2)} (x_1 + x_2; \phi) \Omega_{\mu + \psi l} (y_1, \dots, y_s) z^l \\
&= \Lambda_{\mu, \psi, \lambda_1, \lambda_2}^{n, p} (x_1 + x_2; \phi; y_1, \dots, y_s; z)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 5.2. Teorem 5.2’de $s = 1$, $y_1 = x_3$ ve

$$\Omega_{\mu + \psi k} (x_3) = P_{\mu + \psi k}^{(\lambda_3)} (x_3; \phi)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l P_{n-k}^{(\lambda_1)} (x_1; \phi) P_{k-pl}^{(\lambda_2)} (x_2; \phi) P_{\mu + \psi l}^{(\lambda_3)} (x_3; \phi_3) z^l \\
&= \sum_{l=0}^{[n/p]} \left(a_l \left(\sum_{k=0}^{n-pl} P_{n-k-pl}^{(\lambda_1)} (x_1; \phi) P_k^{(\lambda_2)} (x_2; \phi) \right) P_{\mu + \psi l}^{(\lambda_3)} (x_3; \phi_3) z^l \right) \\
&= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l P_{n-pl}^{(\lambda_1 + \lambda_2)} (x_1 + x_2; \phi) P_{\mu + \psi l}^{(\lambda_3)} (x_3; \phi_3) z^l
\end{aligned}$$

$$= \Lambda_{\mu, \psi, \lambda_1, \lambda_2}^{n, p} (x_1 + x_2; \phi; x_3; \phi_3; z)$$

elde edilir. Böylece, $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomları için başka bir toplam ifadesi elde edilir.

Uyarı 5.3. Sonuç 5.2'de $p = 1, a_l = 1, z = 1, \mu = 0, \psi = 1$ ve $\phi_3 = \phi$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \left(P_{n-k}^{(\lambda_1)}(x_1; \phi) \sum_{l=0}^k \left(P_{k-l}^{(\lambda_2)}(x_2; \phi) P_l^{(\lambda_3)}(x_3; \phi) \right) \right) \\ &= P_n^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}(x_1 + x_2 + x_3; \phi) \end{aligned}$$

bulunur.

5.2. BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR-II

Teorem 5.3. μ -üncü basamaktan s kompleks değişkenli sifıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_s)$ fonksiyonu için $a_k \neq 0, n, p \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_s; \tau) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu + \psi k}(y_1, \dots, y_s) \tau^k$$

ve

$$\theta_{n, p}^{\mu, \psi}(x; \phi; y_1, \dots, y_s; \xi) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \frac{1}{e^{i(n-pk)\phi}} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi) \Omega_{\mu + \psi k}(y_1, \dots, y_s) \xi^k \quad (5.5)$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_{n, p}^{\mu, \psi} \left(x; \phi; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n = (1-t)^{-\lambda + ix} (1 - te^{-2i\phi})^{-\lambda - ix} \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_s; \eta) \quad (5.6)$$

ifadesi gerçekleşir.

İspat: Denklem (5.6) ifadesinin sol tarafına S diyelim. Denklem (5.5) ifadesi Denklem (5.6) eşitliğinde yerine yazılır ve Denklem (2.17) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \frac{1}{e^{i(n-pk)\phi}} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi) \Omega_{\mu + \psi k}(y_1, \dots, y_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) \Omega_{\mu + \psi k}(y_1, \dots, y_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n t^{pk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k \\
&= (1-t)^{-\lambda+ix} \left(1-te^{-2i\phi}\right)^{-\lambda-ix} \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_s; \eta)
\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır. ■

Sonuç 5.3. Teorem 5.3'te $s = 1$, $y_1 = x_1$ ve

$$\Omega_{\mu+\psi k}(x_1) = P_{\mu+\psi k}^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} a_k \frac{1}{e^{i(n-pk)\phi}} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi) P_{\mu+\psi k}^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\
&= (1-t)^{-\lambda+ix} \left(1-te^{-2i\phi}\right)^{-\lambda-ix} \Lambda_{\mu, \psi}(x_1; \phi_1; \eta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomları için bilineer doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

Uyarı 5.4. Sonuç 5.3'te $\mu = 0$, $\psi = 1$ ve $a_k = \frac{1}{e^{ik\phi_1}}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} \frac{1}{e^{ik\phi_1}} \frac{1}{e^{i(n-pk)\phi}} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi) P_k^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\
&= (1-t)^{-\lambda+ix} \left(1-te^{-2i\phi}\right)^{-\lambda-ix} (1-\eta)^{-\lambda_1+ix_1} \left(1-\eta e^{-2i\phi_1}\right)^{-\lambda_1-ix_1}
\end{aligned}$$

bulunur ve başka bir şekilde $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomları için bilineer doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

Uyarı 5.5. Sonuç 5.3'te $\mu = 0$, $\psi = 1$ ve $a_k = \frac{(z)_k}{(2\lambda)_k e^{ik\phi}}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} \frac{(z)_k}{(2\lambda)_k e^{ik\phi}} \frac{1}{e^{i(n-pk)\phi}} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi) P_k^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\
&= (1-t)^{-\lambda+ix} \left(1-te^{-2i\phi}\right)^{-\lambda-ix} (1-\eta)^{-z} {}_2F_1\left(z, \lambda_1 + x_1; \frac{(1-e^{-2i\phi_1})\eta}{\eta-1}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

5.3. BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR-III

Teorem 5.4. μ -üncü basamaktan s kompleks değişkenli sifıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_s)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_s; \tau) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \tau^k \quad a_k \neq 0$$

ve

$$\theta_{n, p}^{\mu, \psi}(x; \phi; y_1, \dots, y_s; \xi) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \frac{P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_{n-pk} e^{i(n-pk)\phi}} \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \xi^k \quad (5.7)$$

$n, p \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_{n, p}^{\mu, \psi}\left(x; \phi; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n = e^t {}_1F_1\left(\lambda + ix; \left(e^{-2i\phi} - 1\right)t\right) \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_s; \eta) \quad (5.8)$$

ifadesi gerçekleşir.

İspat: Denklem (5.8) ifadesinin sol tarafına S diyelim. Denklem (5.7) ifadesi Denklem (5.8)'de yerine yazılır ve Denklem (2.17) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \frac{P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_{n-pk} e^{i(n-pk)\phi}} \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{P_n^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_n e^{in\phi}} \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n t^{pk} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_n e^{in\phi}} t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k \\ &= e^t {}_1F_1\left(\lambda + ix; \left(e^{-2i\phi} - 1\right)t\right) \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_s; \eta) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 5.4. Teorem 5.4'te $s=1$, $y_1 = x_1$ ve

$$\Omega_{\mu+\psi k}(x_1) = P_{\mu+\psi k}^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \frac{P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_{n-pk} e^{i(n-pk)\phi}} P_{\mu+\psi k}^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\ & = e^t {}_1F_1\left(\begin{matrix} \lambda + ix \\ 2\lambda \end{matrix}; (e^{-2i\phi} - 1)t\right) \Lambda_{\mu, \psi}(x_1; \phi_1; \eta) \end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı 5.6. Sonuç 5.4'te $\mu = 0$, $\psi = 1$ ve $a_k = \frac{1}{(2\lambda_1)_k e^{ik\phi_1}}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{1}{(2\lambda_1)_k e^{ik\phi_1}} \frac{P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_{n-pk} e^{i(n-pk)\phi}} P_k^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\ & = e^t {}_1F_1\left(\begin{matrix} \lambda + ix \\ 2\lambda \end{matrix}; (e^{-2i\phi} - 1)t\right) e^{\eta} {}_1F_1\left(\begin{matrix} \lambda_1 + ix_1 \\ 2\lambda_1 \end{matrix}; (e^{-2i\phi_1} - 1)\eta\right) \end{aligned}$$

bulunur ve böylece $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomları için bilineer doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

Teorem 5.5. μ -üncü basamaktan s kompleks değişkenli sifıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_s)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_s; \tau) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \tau^k$$

$a_k \neq 0$ ve

$$\theta_{n,p}^{\mu, \psi}(x; \phi; y_1, \dots, y_s; \xi) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \frac{(z)_{n-pk} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_{n-pk} e^{i(n-pk)\phi}} \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \xi^k \quad (5.9)$$

$n, p \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{n,p}^{\mu, \psi}\left(x; \phi; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n \\ & = (1-t)^{-z} {}_2F_1\left(\begin{matrix} z, \lambda + ix \\ 2\lambda \end{matrix}; \frac{(1-e^{-2i\phi})t}{t-1}\right) \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_s; \eta) \end{aligned} \quad (5.10)$$

ifadesi gerçekleşir.

İspat: Denklem (5.10) ifadesinin sol tarafına S diyelim. Denklem (5.9) ifadesi Denklem (5.10)'da yerine yazılır ve Denklem (2.17) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \frac{(z)_{n-pk} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_{n-pk} e^{i(n-pk)\phi}} \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z)_n P_n^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_n e^{in\phi}} \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n t^{pk} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z)_n P_n^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_n e^{in\phi}} t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k \\
&= (1-t)^{-z} {}_2F_1\left(z, \lambda + ix; \frac{(1-e^{-2i\phi})t}{t-1}\right) \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_s; \eta)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 5.5. Teorem 5.5'te $s=1$, $y_1 = x_1$ ve

$$\Omega_{\mu+\psi k}(x_1) = P_{\mu+\psi k}^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \frac{(z)_{n-pk} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_{n-pk} e^{i(n-pk)\phi}} P_{\mu+\psi k}^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\
&= (1-t)^{-z} {}_2F_1\left(z, \lambda + ix; \frac{(1-e^{-2i\phi})t}{t-1}\right) \Lambda_{\mu, \psi}(x_1; \phi_1; \eta)
\end{aligned}$$

bulunur ve böylece $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomları için bilinear doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

Uyarı 5.7. Sonuç 5.5'te $\mu = 0$, $\psi = 1$ ve $a_k = \frac{(z)_k}{(2\lambda_1)_k e^{ik\phi_1}}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{(z)_k}{(2\lambda_1)_k e^{ik\phi_1}} \frac{(z)_{n-pk} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_{n-pk} e^{i(n-pk)\phi}} P_k^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\
&= (1-t)^{-z} {}_2F_1\left(z, \lambda + ix; \frac{(1-e^{-2i\phi})t}{t-1}\right) (1-\eta)^{-z} {}_2F_1\left(z, \lambda_1 + ix_1; \frac{(1-e^{-2i\phi_1})\eta}{\eta-1}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Uyarı 5.8. Sonuç 5.5'te $\mu = 0$, $\psi = 1$ ve $a_k = \frac{1}{(2\lambda_1)_k e^{ik\phi_1}}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{1}{(2\lambda_1)_k e^{ik\phi_1}} \frac{(z)_{n-pk} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_{n-pk} e^{i(n-pk)\phi}} P_k^{(\lambda_1)}(x_1; \phi_1) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\ &= (1-t)^{-z} {}_2F_1 \left(z, \lambda + ix; \frac{(1-e^{-2i\phi})t}{t-1}; e^\eta {}_1F_1 \left(\lambda_1 + ix_1; (e^{-2i\phi_1} - 1)\eta \right) \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 5.6. Teorem 5.5'te $s=1$, $y_1 = z$ ve

$$\Omega_{\mu+\psi k}(z) = M_{\mu+\psi k}(z; \beta, x)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \frac{(z)_{n-pk} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_{n-pk} e^{i(n-pk)\phi}} M_{\mu+\psi k}(z; \beta, x) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \\ &= (1-t)^{-z} {}_2F_1 \left(z, \lambda + ix; \frac{(1-e^{-2i\phi})t}{t-1}; \Lambda_{\mu, \psi}(z; \beta, x; \eta) \right) \end{aligned}$$

bulunur ve böylece $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ polinomları için bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

Uyarı 5.9. Sonuç 5.6'da $\mu = 0$, $\psi = 1$ ve $a_k = \frac{1}{k!}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{(z)_{n-pk} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x; \phi)}{(2\lambda)_{n-pk} e^{i(n-pk)\phi}} M_{\mu+\psi k}(z; \beta, x) \frac{\eta^k}{t^{pk} k!} t^n \\ &= (1-t)^{-z} {}_2F_1 \left(z, \lambda + ix; \frac{(1-e^{-2i\phi})t}{t-1}; (1-\eta)^{-\beta-z} \left(1 - \frac{\eta}{x} \right)^z \right) \end{aligned}$$

bulunur ve yine Meixner-Pollaczek polinomları için bilateral doğurucu fonksiyonu elde edilmiş olur.

6. MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARI İÇİN REKÜRANS BAĞINTILARI

6.1. MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARI İÇİN TÜREV İÇERMİYEN REKÜRANS BAĞINTILARI

Bu bölümde hipergeometrik Meixner-Pollaczek polinomlarının bazı doğurucu fonksiyonları yardımıyla türev içermeyen rekürans bağıntıları bulunacaktır.

I. Denklem (4.7) doğurucu fonksiyon bağıntısının her iki tarafı t 'ye göre türevi alınır ve Denklem (2.10) ile Denklem (2.21) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^{n-1} \\
 &= (-\lambda + ix)(-1)(1-t)^{-\lambda+ix-1} (1-te^{-2i\phi})^{-\lambda-ix} + (-\lambda - ix)(-e^{-2i\phi})(1-te^{-2i\phi})^{-\lambda-ix-1} (1-t)^{-\lambda+ix} \\
 &= (\lambda - ix)(1-t)^{-\lambda+ix} (1-t)^{-1} (1-te^{-2i\phi})^{-\lambda-ix} + (\lambda + ix)e^{-2i\phi} (1-te^{-2i\phi})^{-\lambda-ix} (1-te^{-2i\phi})^{-1} (1-t)^{-\lambda+ix} \\
 &= (\lambda - ix)(1-t)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n + (\lambda + ix)e^{-2i\phi} (1-te^{-2i\phi})^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
 &= (\lambda - ix) \sum_{m=0}^{\infty} (1)_m \frac{t^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n + (\lambda + ix)e^{-2i\phi} \sum_{p=0}^{\infty} (1)_p \frac{(te^{-2i\phi})^p}{p!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
 &= (\lambda - ix) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^{n+m} + (\lambda + ix) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (e^{-2i\phi})^{p+1} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^{n+p} \\
 &= (\lambda - ix) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{e^{i(n-m)\phi}} P_{n-m}^{(\lambda)}(x; \phi) t^n + (\lambda + ix) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n (e^{-2i\phi})^{p+1} \frac{1}{e^{i(n-p)\phi}} P_{n-p}^{(\lambda)}(x; \phi) t^n
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafında t^n nin katsayıları birbirine eşitlenirse,

$$(n+1) \frac{1}{e^{i(n+1)\phi}} P_{n+1}^{(\lambda)}(x; \phi) = \sum_{p=0}^n \frac{1}{e^{i(n-p)\phi}} P_{n-p}^{(\lambda)}(x; \phi) \left((\lambda - ix) + (\lambda + ix)(e^{-2i\phi})^{p+1} \right)$$

şeklinde türev içermeyen rekürans bağıntısı elde edilir.

II. Denklem (4.4) ifadesindeki doğurucu fonksiyonun her iki tarafı t 'ye göre türevi alınır ve Denklem (2.10) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} n P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^{n-1} \\
&= -e^{i\phi}(-\lambda + ix) (1 - te^{i\phi})^{-\lambda+ix-1} (1 - te^{-i\phi})^{-\lambda-ix} \\
&\quad - e^{-i\phi}(-\lambda - ix) (1 - te^{-i\phi})^{-\lambda-ix-1} (1 - te^{i\phi})^{-\lambda+ix} \\
&= -e^{i\phi}(-\lambda + ix) (1 - te^{i\phi})^{-\lambda+ix} (1 - te^{i\phi})^{-1} (1 - te^{-i\phi})^{-\lambda-ix} \\
&\quad - e^{-i\phi}(-\lambda - ix) (1 - te^{-i\phi})^{-\lambda-ix} (1 - te^{-i\phi})^{-1} (1 - te^{i\phi})^{-\lambda+ix} \\
&= -e^{i\phi}(-\lambda + ix) (1 - te^{i\phi})^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n - e^{-i\phi}(-\lambda - ix) (1 - te^{-i\phi})^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
&= -e^{i\phi}(-\lambda + ix) \sum_{m=0}^{\infty} (1)_m \frac{(te^{i\phi})^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
&\quad - e^{-i\phi}(-\lambda - ix) \sum_{p=0}^{\infty} (1)_p \frac{(te^{-i\phi})^p}{p!} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
&= -e^{i\phi}(-\lambda + ix) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) (e^{i\phi})^m t^{m+n} \\
&\quad - e^{-i\phi}(-\lambda - ix) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) (e^{-i\phi})^p t^{n+p}
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklem (2.21) kullanılarak $n \rightarrow n - m$ ve $n \rightarrow n - p$ dönüşümleri yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
&= -e^{i\phi}(-\lambda + ix) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{n-m}^{(\lambda)}(x; \phi) (e^{i\phi})^m t^n - e^{-i\phi}(-\lambda - ix) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n P_{n-p}^{(\lambda)}(x; \phi) (e^{-i\phi})^p t^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında t^n nin katsayıları birbirine eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
& (n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x; \phi) \\
&= -e^{i\phi}(-\lambda+ix) \sum_{m=0}^n P_{n-m}^{(\lambda)}(x; \phi) (e^{i\phi})^m - e^{-i\phi}(-\lambda-ix) \sum_{p=0}^n P_{n-p}^{(\lambda)}(x; \phi) (e^{-i\phi})^p
\end{aligned}$$

şeklinde türev içermeyen rekürans bağıntısı elde edilir.

Sonuç 6.1. Denklem (4.4) ve Denklem (4.7) doğurucu fonksiyonlarını kullanarak elde ettiğimiz türev içermeyen rekürans bağıntılarımız aynıdır. Yani, doğurucu fonksiyonların değişmiş olması t 'ye göre türevi alındığında türev içermeyen rekürans bağıntısı değişmemektedir.

6.2. MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARI İÇİN TÜREV İÇEREN REKÜRANS BAĞINTILARI

I. Denklem (4.7) ifadesindeki doğurucu fonksiyonun her iki tarafı x 'e göre türevi alınır ve Denklem (2.13) ile Denklem (2.21) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
&= i(1-t)^{-\lambda+ix} \ln(1-t) (1-te^{-2i\phi})^{-\lambda-ix} + (-i)(1-te^{-2i\phi})^{-\lambda-ix} \ln(1-te^{-2i\phi}) (1-t)^{-\lambda+ix} \\
&= i \ln(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n - i \ln(1-te^{-2i\phi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.1(b) bağıntısı yardımıyla eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
&= i(-t) {}_2F_1(1, 1; 2; t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n - i(-te^{-2i\phi}) {}_2F_1(1, 1; 2; te^{-2i\phi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
&= -it \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1)_m (1)_m}{(2)_m} \frac{(t)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n + ite^{-2i\phi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(1)_p (1)_p}{(2)_p} \frac{(te^{-2i\phi})^p}{p!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
&= -it \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{2.3 \dots (2+m-1)} t^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ite^{-2i\phi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!}{2.3...(2+p-1)} t^p (e^{-2i\phi})^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
& = -i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^{n+m+1} + i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p+1} (e^{-2i\phi})^{p+1} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^{n+p+1} \\
& = -i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{m+1} \frac{1}{e^{i(n-m)\phi}} P_{n-m}^{(\lambda)}(x; \phi) t^{n+1} + i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n \frac{1}{p+1} (e^{-2i\phi})^{p+1} \frac{1}{e^{i(n-p)\phi}} P_{n-p}^{(\lambda)}(x; \phi) t^{n+1} \\
& = -i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m+1} \frac{1}{e^{i(n-m-1)\phi}} P_{n-m-1}^{(\lambda)}(x; \phi) t^n + i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+1} (e^{-2i\phi})^{p+1} \frac{1}{e^{i(n-p-1)\phi}} P_{n-p-1}^{(\lambda)}(x; \phi) t^n
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} P_0^{(\lambda)}(x; \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
& = -i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m+1} \frac{1}{e^{i(n-m-1)\phi}} P_{n-m-1}^{(\lambda)}(x; \phi) t^n + i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+1} (e^{-2i\phi})^{p+1} \frac{1}{e^{i(n-p-1)\phi}} P_{n-p-1}^{(\lambda)}(x; \phi) t^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Meixner-Pollaczek polinomunun tanımı gereği $P_0^{(\lambda)}(x; \phi) = 1$ olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial x} P_0^{(\lambda)}(x; \phi) = 0 \text{ olup,}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
& = -i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m+1} \frac{1}{e^{i(n-m-1)\phi}} P_{n-m-1}^{(\lambda)}(x; \phi) t^n + i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+1} (e^{-2i\phi})^{p+1} \frac{1}{e^{i(n-p-1)\phi}} P_{n-p-1}^{(\lambda)}(x; \phi) t^n
\end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafında t^n nin katsayıları birbirine eşitlendiğinde,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) \\
& = -i \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m+1} \frac{1}{e^{i(n-m-1)\phi}} P_{n-m-1}^{(\lambda)}(x; \phi) + i \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+1} (e^{-2i\phi})^{p+1} \frac{1}{e^{i(n-p-1)\phi}} P_{n-p-1}^{(\lambda)}(x; \phi)
\end{aligned}$$

şeklinde türev içeren rekürans bağıntısı elde edilir.

II. Denklem (4.7) ifadesindeki doğurucu fonksiyonun her iki tarafı ϕ 'ye göre türevi alınır ve Denklem (2.21) eşitliğinden yararlanılırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} -ine^{-in\phi} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) \right) e^{-in\phi} t^n$$

$$\begin{aligned}
&= (1-t)^{-\lambda+ix} (-\lambda-ix) (1-te^{-2i\phi})^{-\lambda-ix-1} 2ite^{-2i\phi} \\
&= (1-t)^{-\lambda+ix} (1-te^{-2i\phi})^{-\lambda-ix} (1-te^{-2i\phi})^{-1} (-\lambda-ix) 2ite^{-2i\phi} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \sum_{m=0}^{\infty} (1)_m \frac{(te^{-2i\phi})^m}{m!} (-\lambda-ix) 2ite^{-2i\phi} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} \frac{1}{e^{2im\phi}} (-\lambda-ix) 2it^n t^m e^{-2im\phi} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{e^{i(n+2m)\phi}} (-\lambda-ix) 2it^{n+m+1} \frac{1}{e^{2im\phi}} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-\lambda-ix) 2i P_n^{(\lambda)}(x; \phi) \frac{1}{e^{i(n+2+2m)\phi}} t^{n+m+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-\lambda-ix) 2i P_{n-m}^{(\lambda)}(x; \phi) \frac{1}{e^{i(n+m+2)\phi}} t^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} (-\lambda-ix) 2i P_{n-m-1}^{(\lambda)}(x; \phi) \frac{1}{e^{i(n+m+1)\phi}} t^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafı düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=1}^{\infty} -ine^{-in\phi} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} P_0^{(\lambda)}(x; \phi) e^0 t^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) \right) e^{-in\phi} t^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} (-\lambda-ix) 2i P_{n-m-1}^{(\lambda)}(x; \phi) \frac{1}{e^{i(n+m+1)\phi}} t^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Meixner-Pollaczek polinomunun tanımı gereği $P_0^{(\lambda)}(x; \phi) = 1$ olduğu için $\frac{\partial}{\partial \phi} P_0^{(\lambda)}(x; \phi) = 0$ dır. Son olarak, eşitliğin her iki tarafında t^n nin katsayıları eşitlenir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial \phi} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) = in P_n^{(\lambda)}(x; \phi) + 2i(-\lambda-ix) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{e^{i(m+1)\phi}} P_{n-m-1}^{(\lambda)}(x; \phi)$$

şeklinde türev içeren rekürans bağıntısı elde edilir.

III. Denklem (4.4) ifadesindeki doğurucu fonksiyonun her iki tarafı x 'e göre türevi alınır ve lemma 2.1(b) bağıntısı, Denklem (2.13) ve Denklem (2.21) ifadelerinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
&= i(1-te^{i\phi})^{-\lambda+ix} \ln(1-te^{i\phi}) (1-te^{-i\phi})^{-\lambda-ix} - i(1-te^{-i\phi})^{-\lambda-ix} \ln(1-te^{-i\phi}) (1-te^{i\phi})^{-\lambda+ix} \\
&= i \ln(1-te^{i\phi}) \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n - i \ln(1-te^{-i\phi}) \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
&= i(-te^{i\phi}) {}_2F_1(1, 1; 2; te^{i\phi}) \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n - i(-te^{-i\phi}) {}_2F_1(1, 1; 2; te^{-i\phi}) \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
&= -ite^{i\phi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1)_m (1)_m}{(2)_m} \frac{(te^{i\phi})^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n + ite^{-i\phi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(1)_p (1)_p}{(2)_p} \frac{(te^{-i\phi})^p}{p!} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
&= -ie^{i\phi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!m!}{(m+1)!} \frac{(e^{i\phi})^m}{m!} t^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n + ie^{-i\phi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!p!}{(p+1)!} \frac{(e^{-i\phi})^p}{p!} t^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
&= -ie^{i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} (e^{i\phi})^m P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^{m+n+1} + ie^{-i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p+1} (e^{-i\phi})^p P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^{p+n+1} \\
&= -ie^{i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{m+1} (e^{i\phi})^m P_{n-m}^{(\lambda)}(x; \phi) t^{n+1} + ie^{-i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n \frac{1}{p+1} (e^{-i\phi})^p P_{n-p}^{(\lambda)}(x; \phi) t^{n+1} \\
&= -ie^{i\phi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m+1} (e^{i\phi})^m P_{n-m-1}^{(\lambda)}(x; \phi) t^n + ie^{-i\phi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+1} (e^{-i\phi})^p P_{n-p-1}^{(\lambda)}(x; \phi) t^n
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadenin her iki tarafındaki t^n nin katsayıları eşitlenirse,

$$\frac{\partial}{\partial x} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) = -ie^{i\phi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m+1} (e^{i\phi})^m P_{n-m-1}^{(\lambda)}(x; \phi) + ie^{-i\phi} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+1} (e^{-i\phi})^p P_{n-p-1}^{(\lambda)}(x; \phi)$$

şeklinde türev içeren rekürans bağıntısı elde edilir.

IV. Denklem (4.4) ifadesindeki doğurucu fonksiyonun her iki tarafı ϕ 'ye göre türevi alınır ve Denklem (2.21) ifadesinden faydalanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \phi} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n$$

$$\begin{aligned}
&= (-\lambda + ix)(1 - te^{i\phi})^{-\lambda+ix-1} (ite^{i\phi}) (1 - te^{i\phi})^{-\lambda-ix} \\
&\quad + (-\lambda - ix)(1 - te^{-i\phi})^{-\lambda-ix-1} (-tie^{-i\phi}) (1 - te^{i\phi})^{-\lambda+ix} \\
&= (-\lambda + ix)(1 - te^{i\phi})^{-\lambda+ix} (1 - te^{i\phi})^{-1} (ite^{i\phi}) (1 - te^{i\phi})^{-\lambda-ix} \\
&\quad + (-\lambda - ix)(1 - te^{-i\phi})^{-\lambda-ix} (1 - te^{-i\phi})^{-1} (-tie^{-i\phi}) (1 - te^{i\phi})^{-\lambda+ix} \\
&= (-\lambda + ix)(ite^{i\phi}) \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \sum_{m=0}^{\infty} (1)_m \frac{(te^{i\phi})^m}{m!} \\
&\quad + (-\lambda - ix)(-tie^{-i\phi}) \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \sum_{p=0}^{\infty} (1)_p \frac{(te^{-i\phi})^p}{p!} \\
&= (-\lambda + ix)(ie^{i\phi}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) (e^{i\phi})^m t^{m+n+1} \\
&\quad + (\lambda + ix)(ie^{-i\phi}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) (e^{-i\phi})^p t^{n+p+1} \\
&= (-\lambda + ix)(ie^{i\phi}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{n-m}^{(\lambda)}(x; \phi) (e^{i\phi})^m t^{n+1} \\
&\quad + (\lambda + ix)(ie^{-i\phi}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n P_{n-p}^{(\lambda)}(x; \phi) (e^{-i\phi})^p t^{n+1} \\
&= (-\lambda + ix)(ie^{i\phi}) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} P_{n-m-1}^{(\lambda)}(x; \phi) (e^{i\phi})^m t^n \\
&\quad + (\lambda + ix)(ie^{-i\phi}) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} P_{n-p-1}^{(\lambda)}(x; \phi) (e^{-i\phi})^p t^n
\end{aligned}$$

olup, eşitliğin her iki tarafında t^n nin katsayıları birbirine eşitlenirse,

$$\frac{\partial}{\partial \phi} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) = \sum_{m=0}^{n-1} (-\lambda + ix)(i)(e^{i\phi})^{m+1} P_{n-m-1}^{(\lambda)}(x; \phi) + \sum_{p=0}^{n-1} (\lambda + ix)(i)(e^{-i\phi})^{p+1} P_{n-p-1}^{(\lambda)}(x; \phi)$$

şeklinde türev içeren rekürans bağıntısı elde edilir.

Sonuç 6.2. Denklem (4.4) ve Denklem (4.7) doğurucu fonksiyonlarını kullanarak elde ettiğimiz I ve III numaralı türev içeren rekürans bağıntılarımız aynıdır. Yani, doğurucu

fonksiyonların değişmiş olması x 'e göre türevi alındığında türev içeren rekürans bağıntısı değişmemektedir.

6.3. MEIXNER-POLLACZEK POLİNOMLARI İÇİN BAğINTILAR

Bu kısımda Meixner-Pollaczek polinomu ile Laguerre polinomu arasındaki ilişki limit bağıntısı yardımıyla gösterilecektir ve Meixner-Pollaczek polinomunun integrale olan ilişkisi verilecektir.

Teorem 6.1. Aşağıdaki bağıntının doğruluğu geçerlidir [20]:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} P_n^{(\lambda)}\left(\frac{x}{2}; \frac{\pi}{2}\right) = \frac{(i)^n}{n!} \sum_{m=1}^n (-n)_m \left(i \frac{x}{2}\right)_m (m)_{n-m} \frac{2^m}{m!}.$$

İspat: Denklem (4.1) ile verilen Meixner-Pollaczek polinomunun tanımında x yerine $\frac{x}{2}$, ϕ yerine $\frac{\pi}{2}$ yazılır, $\lambda \rightarrow 0^+$ iken limiti alınır ve Denklem (2.7)'deki eşitlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} P_n^{(\lambda)}\left(\frac{x}{2}; \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\frac{\pi}{2}} \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m \left(\lambda + i \frac{x}{2}\right)_m}{(2\lambda)_m m!} \left(1 - e^{-2i\frac{\pi}{2}}\right)^m \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{(i)^n}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m \left(\lambda + i \frac{x}{2}\right)_m}{(2\lambda)_m m!} (2\lambda)_n 2^m \\ &= \frac{(i)^n}{n!} \sum_{m=0}^n (-n)_m \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\frac{\left(\lambda + i \frac{x}{2}\right)_m (2\lambda)_n}{(2\lambda)_m} \right) \frac{2^m}{m!} \\ &= \frac{(i)^n}{n!} \sum_{m=0}^n (-n)_m \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\left(\lambda + i \frac{x}{2}\right)_m (2\lambda + m)_{n-m} \right) \frac{2^m}{m!} \\ &= \frac{(i)^n}{n!} \sum_{m=0}^n (-n)_m \left(\left(0 + i \frac{x}{2}\right)_m (2.0 + m)_{n-m} \right) \frac{2^m}{m!} \\ &= \frac{(i)^n}{n!} \sum_{m=0}^n (-n)_m \left(i \frac{x}{2}\right)_m (m)_{n-m} \frac{2^m}{m!} \\ &= \frac{(i)^n}{n!} \sum_{m=1}^n (-n)_m \left(i \frac{x}{2}\right)_m (m)_{n-m} \frac{2^m}{m!} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 6.2. Laguerre polinomu ile Meixner-Pollaczek polinomlarının arasında

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} P_n^{(\frac{\alpha+1}{2})} \left(-\frac{x}{2\phi}; \phi \right) = L_n^{(\alpha)}(x)$$

şeklinde bir ilişki vardır [8].

İspat: Denklem (4.1) tanımında x yerine $-\frac{x}{2\phi}$, λ yerine $\frac{\alpha+1}{2}$ yazılır, $\phi \rightarrow 0$ iken limiti alınır ve Laguerre polinomunun

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x)$$

özellği kullanılırsa [19],

$$\begin{aligned} \lim_{\phi \rightarrow 0} P_n^{(\frac{\alpha+1}{2})} \left(-\frac{x}{2\phi}; \phi \right) &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{(\alpha+1)_n}{n!} e^{in\phi} {}_2F_1 \left(-n; \frac{\alpha+1}{2} - \frac{ix}{2\phi}; \alpha+1; 1 - e^{-2i\phi} \right) \\ &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{(\alpha+1)_n}{n!} e^{in\phi} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j \left(\frac{\alpha+1}{2} - \frac{ix}{2\phi} \right)_j}{(\alpha+1)_j j!} (1 - e^{-2i\phi})^j \end{aligned}$$

bulunur. $\left(\frac{\alpha+1}{2} - \frac{ix}{2\phi} \right)_j$ ve $(\alpha+1)_n$ ifadeleri Denklem (2.3) eşitliğindeki Pochhammer sembolünden faydalanarak açılırsa,

$$\begin{aligned} &\lim_{\phi \rightarrow 0} P_n^{(\frac{\alpha+1}{2})} \left(-\frac{x}{2\phi}; \phi \right) \\ &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\alpha! (\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!} e^{in\phi} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j}{(\alpha+1)_j j!} \left(\frac{\alpha+1}{2} - \frac{ix}{2\phi} \right) \left(\frac{\alpha+1}{2} - \frac{ix}{2\phi} + 1 \right) \dots \left(\frac{\alpha+1}{2} - \frac{ix}{2\phi} + j - 1 \right) (1 - e^{-2i\phi})^j \\ &= \frac{(\alpha+n)!}{\alpha! n!} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j}{(\alpha+1)_j j!} \lim_{\phi \rightarrow 0} e^{in\phi} \left(\frac{\alpha+1}{2} - \frac{ix}{2\phi} \right) \left(\frac{\alpha+1}{2} - \frac{ix}{2\phi} + 1 \right) \dots \left(\frac{\alpha+1}{2} - \frac{ix}{2\phi} + j - 1 \right) (1 - e^{-2i\phi})^j \\ &= \binom{n+\alpha}{n} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j}{(\alpha+1)_j j!} \lim_{\phi \rightarrow 0} e^{in\phi} (-1)^j \left(\frac{ix}{2\phi} \right)^j (1 - e^{-2i\phi})^j \\ &= \binom{n+\alpha}{n} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j}{(\alpha+1)_j j!} \lim_{\phi \rightarrow 0} \left[e^{\frac{in\phi}{j}} (-1)^j \frac{2ixie^{-2i\phi}}{2} \right]^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n+\alpha}{n} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j}{(\alpha+1)_j j!} x^j \\
&= \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x) \\
&= L_n^{(\alpha)}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 6.3. Meixner-Pollaczek polinomları

$$P_n^{(\lambda)}(x; \phi) = \frac{1}{\Gamma(\lambda-ix)\Gamma(\lambda+ix)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u_1-u_2} \frac{(u_1 e^{i\phi} + u_2 e^{-i\phi})^n}{n!} u_1^{\lambda-ix-1} u_2^{\lambda+ix-1} du_1 du_2$$

($\text{Re}(\lambda+ix) > 0$ ve $\text{Re}(\lambda-ix) > 0$)

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir [21].

İspat: Denklem (4.4) ile verilen Meixner-Pollaczek polinomunun doğurucu fonksiyonunun sağ tarafının integralle bağlantısını kurmak için,

$$a^{-v} = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^\infty e^{-at} t^{v-1} dt \quad (\text{Re}(v) > 0)$$

özdeşliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^\infty P_n^{(\lambda)}(x; \phi) t^n \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda-ix)} \int_0^\infty e^{(te^{i\phi}-1)u_1} u_1^{\lambda-ix-1} du_1 \frac{1}{\Gamma(\lambda+ix)} \int_0^\infty e^{(te^{-i\phi}-1)u_2} u_2^{\lambda+ix-1} du_2 \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda-ix)} \frac{1}{\Gamma(\lambda+ix)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{u_1 te^{i\phi} - u_1} u_1^{\lambda-ix-1} e^{u_2 te^{-i\phi} - u_2} u_2^{\lambda+ix-1} du_1 du_2 \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda-ix)} \frac{1}{\Gamma(\lambda+ix)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u_1-u_2} e^{t(u_1 e^{i\phi} + u_2 e^{-i\phi})} u_1^{\lambda-ix-1} u_2^{\lambda+ix-1} du_1 du_2 \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda-ix)} \frac{1}{\Gamma(\lambda+ix)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u_1-u_2} \sum_{n=0}^\infty t^n \frac{(u_1 e^{i\phi} + u_2 e^{-i\phi})^n}{n!} u_1^{\lambda-ix-1} u_2^{\lambda+ix-1} du_1 du_2.
\end{aligned}$$

olup, eşitliğin iki tarafında t^n nin katsayıları eşitlenirse,

$$P_n^{(\lambda)}(x; \phi) = \frac{1}{\Gamma(\lambda - ix)\Gamma(\lambda + ix)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u_1 - u_2} \frac{(u_1 e^{i\phi} + u_2 e^{-i\phi})^n}{n!} u_1^{\lambda - ix - 1} u_2^{\lambda + ix - 1} du_1 du_2$$

elde edilir. Böylece Meixner-Pollaczek polinomu için bir integral gösterimi elde edilmiş olur.



7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada hipergeometrik Meixner-Pollaczek polinomları ve bazı uygulamaları incelenmiştir. Polinomlar arasında genel bir sınıf olan Meixner-Pollaczek polinomlarının bazı özellikleri verildikten sonra bu polinomlar için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyon bağıntılarını veren teoremler elde edilmiştir. Ayrıca bu teoremlerin özel durumları incelendikten sonra bu polinomlar için yeni rekürans bağıntıları elde edildi ve özel tipten bazı polinomların Meixner-Pollaczek polinomları ile ilişkileri limitler yardımıyla verildi.

Bu tezde çalışılan konuların ışığı altında gelecekte farklı polinomların doğurucu fonksiyon, rekürans bağıntısı gibi farklı özellikleri de elde edilebilir.

8. KAYNAKLAR

- [1] J. Meixner, "Orthogonale polynomials systeme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden funktion," *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 9, pp. 6-13, 1934.
- [2] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, New York, USA: Gordon and Breach, Science Publisher, 1978.
- [3] F. Pollaczek, "Sur une famille de polynomes orthogonaux qui contient les polynomes d'Hermite et de Laguerre comme cas limites," *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, vol. 230, pp. 1563-1565, 1950.
- [4] R. Askey and J. Wilson, "Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials," *Memoirs of the American Mathematical Society*, vol. 54, no. 319, pp. 30-31 and 46-49, 1985.
- [5] N. M. Atakishiyev and S. K. Suslov, "The Hahn and Meixner polynomials of an imaginary argument and some of their applications," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 18, 1985.
- [6] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. H. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, vol. 2, New York, USA: Bateman Manuscript Project, 1953.
- [7] V. Freilikher, E. Kanziiper and I. Yurkevich, "Unitary random matrix ensemble with governable level confinement," *Physical Review E-Physical Review Journals-APS physics*, vol. 53, pp. 2200-2209, 1996.
- [8] R. Koekoek, P. L. Lesky and R. F. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues*, New York, USA: Springer-Verlag, 2010.
- [9] M. Rahman, "A generalization of Gasper's kernel for Hahn polynomials: application to Pollaczek polynomials," *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 30, no. 1, pp. 133-146, 1978.
- [10] C. M. Bender, L. R. Mead and S. Pinsky, "Continuous Hahn polynomials and the Heisenberg algebra," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 28, no. 3, pp. 509-513, 1987.
- [11] T. H. Koornwinder, "Meixner Pollaczek polynomials and the Heisenberg algebra," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 30, no. 4, pp. 767-769, 1989.
- [12] E. D. Rainville, *Special Functions*, New York, USA: The Macmillan Company, 1960.
- [13] E. Uzel, "Hermite polinomları," Yüksek lisans tezi, Matematik Bölümü, Sakarya Üniversitesi, Sakarya, Türkiye, 2008.
- [14] N. Özmen, "Some new properties of the Meixner polynomials," *Sakarya University Journal of Science*, vol. 21, no. 6, pp. 1454-1462, 2017.
- [15] Anonim, (2018, 12 Ocak). [Online]. Erişim: <http://mathworld.wolfram.com/MeixnerPolynomialoftheFirstKind.html>.

- [16] N. Özmen and E. Erkuş-Duman, “Some families of generating functions for the generalized Cesàro polynomials,” *Journal Computational Analysis and Applications*, vol. 25, no. 4, pp. 670-683, 2018.
- [17] H. M. Srivastava and H. L. Monacha, *A Treatise on Generating Functions*, New York, USA: Ellis Horwood Limited, 1984.
- [18] N. Özmen and Y. Cin, “On the Konhauser polynomials,” *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, vol. 7, no. 2, pp. 48-55, 2017.
- [19] R. Aktaş and E. Erkuş-Duman, “The Laguerre polynomials in several variables,” *Mathematica Slovaca*, vol. 63, no. 3, pp. 531-544, 2013.
- [20] T. K. Araaya, “The symmetric Meixner-Pollaczek polynomials,” PhD dissertation, Department of Mathematics, Uppsala University, Uppsala, Sweden, 2003.
- [21] N. Özmen and H. Göksu, “Some properties of hypergeometric Meixner-Pollaczek polynomials,” *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, vol. 7, no. 2, pp. 21-31, 2017.
- [22] E. Erkuş and H. M. Srivastava, “A unified presentation of some families of multivariable polynomials,” *Integral Transform Special Functions*, vol. 17, pp. 267-273, 2006.
- [23] N. Özmen and E. Erkuş-Duman, “Some results for a family of multivariable polynomials,” *American Institute of Physics Conference Proceedings*, vol. 1558, pp. 1124-1127, 2013.
- [24] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, “The Askey-Scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-Analogue,” Delft, Netherlands: Technische Universiteit Delft, Faculty of Technical Mathematics and Informatics Rep. 98-17, pp. 37-38, 1998.
- [25] X. Li and R. Wong, “On the asymptotics of the Meixner-Pollaczek polynomials and their zeros,” *Constructive Approximation*, vol. 17, pp. 59–90, 2001.
- [26] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, vol. 23, Rhode Island, USA: American Mathematical Society, 1975.
- [27] N. Özmen and E. Erkuş-Duman, “On the Poisson-Charlier polynomials,” *Serdica Mathematical Journal*, vol. 41, pp. 457–470, 2015.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hasan GÖKSU
Doğum Tarihi ve Yeri : 19/02/1991 ANKARA/ÇANKAYA
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : hkn987gks@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2018
Lisans	Matematik	GOP Üniversitesi	2013
Lise		12 Haziran Lisesi	2009

Bildiri

N. Özmen and H. Göksu, "Some properties of hypergeometric Meixner-Pollaczek polynomials," *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME)*, Şanlıurfa, Turkey, 2017, pp. 810.

Yayın

N. Özmen and H. Göksu, "Some properties of hypergeometric Meixner-Pollaczek polynomials," *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, vol. 7, no. 2, pp. 21-31, 2017.