T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK KATLI İNTEGRALLER İÇİN OSTROWSKİ TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

AYLİN AYGÜL MALLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA

DÜZCE, 2020

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK KATLI İNTEGRALLER İÇİN OSTROWSKİ TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Aylin Aygül MALLI tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi ____________________________

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi ____________________________

Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Kütahya Dumlupınar Üniversitesi ____________________________

Tez Savunma Tarihi: 20/08/2020

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

20 Ağustos 2020

Aylin Aygül MALLI

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanmasında süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA' ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca dualarını ve desteklerini esirgemeyen aileme ve sevgili eşime teşekkürü bir borç bilirim.

20 Ağustos 2020 **Aylin Aygül MALLI**

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER

$\bar{D}$	D kümesinin kapanışı
R	Reel Sayılar Kümesi
R^n	n boyutlu Öklit Uzayı
R^m	m boyutlu Öklit Uzayı
I	R nin içinde bir aralık
I^o	I nın içi
f'	f in birinci türevi
f''	f in ikinci türevi
$f_{x,y}$	f in x 'e göre türevinin y 'ye göre türevi
$\lvert f \rvert$	f in mutlak değeri
sup	En küçük üst sınır
esssup	Esas üst sınırlarının infimumu
$[.,.]$	Kapalı aralık
$(.,.)$	Açık aralık
$[.,.]\times[.,.]$	Kapalı aralıkların kartezyen çarpımı
$[.,.]^2$	Kapalı aralığın kartezyen çarpımı
$\lVert\cdot\rVert_\infty$	∞-norm
$\lVert\cdot\rVert_p$	p -norm
$\lVert\cdot\rVert_1$	1-norm

ÖZET

ÇOK KATLI İNTEGRALLER İÇİN OSTROWSKİ TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Aylin Aygül MALLI
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimler Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
20 Ağustos 2020, 83 sayfa

Bu tezde, iki değişkenli fonksiyonlar için ağırlıklı Montgomery özdeşliğini elde ederek, bu özdeşliğin uygulanması ile elementer analiz kullanılarak iki bağımsız değişkenli fonksiyonları içeren çok katlı integraller için Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri vermektir.

Anahtar Sözcükler: Hölder eşitsizliği, Montgomery özdeşliği, Ostrowski eşitsizliği.

ABSTRACT

OSTROWSKI TYPE INTEGRAL INEQUALITIES FOR MULTIPLE INTEGRALS

Aylin Aygül MALLI
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Science, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
20 August 2020, 83 pages

In this thesis, we obtain weighted Montgomery's identities for function of two variables and apply them to give new generalization Ostrowski type integral inequalities for multiple integrals involving functions of two independent variables by using fairly elementary analysis.

Keywords : Hölder’s inequality, Montgomery’s identity, Ostrowski inequality.

1. GİRİŞ

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Konveks fonksiyonların sistematik araştırmasına ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında rastlanmasına rağmen, 20. yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir alanı olarak görülmeye başlanmıştır. Konvekslik, geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılır ve sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi (lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar. Son yüzyılda gelişen disiplini ve artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak yerini almıştır.

[1]'de yazılan "Inequalities" adlı eser eşitsizlikler teorisi için temel başvuru kaynağıdır. Okuyucu bu eserde konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikleri, problemleri, ispat yöntemlerini ve sonuçlar bulabilir. Buna ek olarak [2] yazdığı "Inequalities" adlı eser ve [3]'de yazdığı "Analytic Inequalities" adlı eseri de söyleyebiliriz. Bu kaynaklar eşitsizlikler teorisini araştırmak isteyen okuyucu için el altında bulunması gereken kaynaklardır.

Analitik eşitsizlikler yaygın olarak matematik ve birçok uygulamalı matematiğin çeşitli dallarında gelişiminin arkasındaki temel itici güçlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Eşitsizlikler ile ilgili çalışmalar son on yıldan fazladır matematiğin birçok farklı alanlardaki uygulamalara nasıl büyük bir katkı sağlandığı açıkça ortadadır. Örneğin, Cebysev, Grüss, Yamuk, Ostrowski, Hadamard ve Jensen eşitsizlikler ile ilgili birçok uygulama literatürde çok önemli bir yere sahiptir.

Tezimizin temel taşlarını oluşturan Ostrowski tipli eşitsizlikler ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı da "Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration" isimli kitapta bir araya getirilmiştir [4].

Bu tezde amacımız çok katlı integraller için yeni Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri vererek yukarıda bahsedilen gelişmeler çerçevesinde literatürde bu eşitsizliklerin de yer bulmasını sağlamaktır.

2. KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezimiz için gerekli olan tanım ve teoremler verilmiş olup ayrıca gerekli görülen bazı önemli teoremlerin ispatlarına da yer verilmiştir.

Teorem 2.1.1 (Jensen Eşitsizliği). f fonksiyonu (a,b) aralığında konveks ve $x_i \in (a,b)$ olsun. Bu durumda $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \tag{2.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f fonksiyonu her $x_0 \in (a,b)$ için bir suport doğruya sahiptir. Yani her x_0 noktası için $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$ olacak şekilde x_0 a bağlı bir m noktası vardır. Bu eşitsizlikte özel olarak $i = 1,2,...,n$ için $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ seçilirse,

$$f(x_i) \geq f(x_0) + m(x_i - x_0)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler α_i ile çarpılır, daha sonra taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse Jensen Eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.1.2 (AO-GO Eşitsizliği). Eğer her $i = 1,2,...,n$ için $x_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \tag{2.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. En az bir i için $x_i = 0$ ise ispat aşikârdır. $x_i > 0$ durumunda, $y_i = \log x_i$ seçilirse,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)$$

olup $f(t) = e^t$ fonksiyonu R ’de konveks olduğundan Jensen Eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)\\ &\le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\end{aligned}$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur. Özel olarak $n = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{p}$, $\alpha_2 = \frac{1}{q}$, $x_1 = x^p$ ve $x_2 = y^q$ seçilirse Young Eşitsizliği olarak bilinen,

$$xy \le \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.1.3 (Hölder Eşitsizliği). $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n > 0$, $p, q > 1$ öyle ki $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.3}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir. Özel olarak $p = q = 2$ seçilirse yukarıdaki eşitsizlikten Cauchy-Buniakowsky-Schwartz eşitsizliği elde edilir.

İspat. Yukarıdaki eşitsizlikte x_i ve y_i lerden en az biri sıfırdan farklı olsun. O halde $u = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ve $v = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ her ikisi de pozitif olur. Young eşitsizliğinde $x = x_i / u$ ve $y = y_i / v$ seçilirse,

$$\frac{x_i}{u}\frac{y_i}{v} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{v}\right)^q$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{uv} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olur. Bu da Hölder eşitsizliğini verir.

Tanım 2.1.1 (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği). $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.4}$$

eşitsizliği vardır.

Tanım 2.1.2 (Üstten Yarı sürekli Fonksiyon). $f : K \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $x_0 \in K$ noktasının komşuluğunda her $x \in K$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon \tag{2.5}$$

veya

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0) \tag{2.6}$$

oluyorsa f 'e $x_0 \in K$ noktasında üstten yarı sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.1.3 (Alttan Yarı Sürekli Fonksiyon). $f : K \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $x_0 \in K$ noktasının komşuluğunda her $x \in K$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon \tag{2.7}$$

veya

$$\liminf_{x \to x_0} (x) \geq f(x_0) \tag{2.8}$$

oluyorsa f ye $x_0 \in K$ noktasında alttan yarı sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.1.4 (Kuvvet Ortalama Eşitsizliği). $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olsun. $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.9}$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 2.1.4 (Ostrowski Eşitsizliği). $a, b \in I,\ a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olacak şekilde $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı, I^0'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise $\forall x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| &\leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right] \\ &= M(b-a) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right] \end{aligned} \tag{2.10}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradaki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır. Daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştiremez [5].

İspat. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olduğundan $x \in (a,b)$ için

$$p(x,t) = \begin{cases} t-a, & a \leq t \leq x \\ t-b, & x \leq t \leq b \end{cases}$$

olmak üzere

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikten

$$f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt$$
$$=\frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)f'(t)dt+\int_x^b (t-b)f'(t)dt\right]$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın mutlak değeri alındığında

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|=\left|\frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)f'(t)dt+\int_x^b (t-b)f'(t)dt\right]\right|$$

olur. İntegralin mutlak değer özelliği kullanılarak,

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{1}{b-a}\left[\int_a^x |t-a|\left|f'^{(t)}\right|dt+\int_x^b |t-b|\left|f'^{(t)}\right|dt\right]$$

yazılır. $|f'(x)|\leq M$ olduğundan

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{M}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)dt+\int_x^b (t-b)dt\right]$$
$$=\frac{M}{b-a}\left[\left(\frac{t^2}{2}-ta\right)\Big|_a^x+\left(tb-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_x^b\right]$$
$$=\frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right]$$

elde edilir. Böylece

$$(x-a)^2+(b-x)^2=\left(x-\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}-a\right)^2+\left(b-\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}-x\right)^2$$
$$=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+2\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2$$

$$=2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$=2(b-a)^2\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

eşitliği kullanılarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.1.5 (Grüss Eşitsizliği). f ve g, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $m,n,M,N \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\right| \leq \frac{1}{4}(M-m)(N-n) \qquad (2.11)$$

dir. Bu eşitsizlik literatürde Grüss Eşitsizliği olarak bilinir.

Tanım 2.1.5 (Taylor Formülü). $f \in C^n[a,b]$, $f^{(n+1)}$ türevi $[a,b]$ aralığında mevcut ve $x_0 \in [a,b]$ olsun. Bu durumda,

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (2.12)$$

dır.

Teorem 2.1.6 (Ortalama Değer Teoremi). $f \in [a,b]$ ve f fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda (a,b) aralığı içinde

$$f^{'}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (2.13)$$

eşitliğini sağlayan bir c sayısı vardır.

Teorem 2.1.7 (Fubini Teoremi). f **,** $R=\{(x,y)|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ kümesi üzerinde sürekli ise,

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy \tag{2.14}$$

dir.

Tanım 2.1.6. $f : X \subseteq R \to R$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $f(x) \leq M$, ise M 'ye f 'nin bir üst sınırı denir. (Yani, $f^{-1}(\mu,\infty) = \{x \in X : f(x) > M\}$ kümesi boştur). Burada

$$U_f = \{M \in R : f^{-1}(\mu,\infty) = 0\} \tag{2.15}$$

kümesi f 'nin üst sınırlarının kümesi olsun. f 'nin supremumu, eğer U_f kümesi boştan farklı ise bu durumda,

$$\sup f = \inf U_f \tag{2.16}$$

olarak tanımlanır. Diğer durumda ise

$$\sup f = +\infty \tag{2.17}$$

dır. Ayrıca her $x \in X$ için $f(x) \leq M$ olacak şekilde $M \in R$ varsa bu durumda $\sup f \leq M$ dır.

$(X,\sum,\mu)$ ölçülebilir bir uzay ve f 'de ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda hemen hemen her $x \in X$ için $f(x) \leq M$ yada $f^{-1}(\mu,\infty)$ ölçülebilir kümesi sıfır ölçümlü ise M 'ye f 'nin esas üst sınırı denir.

$$U_f^{ess} = \{M \in R : \mu(f^{-1}(\mu,\infty)) = 0\} \tag{2.18}$$

esas üst sınırlarının kümesi olsun. Bu durumda, $U_f^{ess} \neq \phi$ ise yukardaki tanıma benzer olarak

$$ess\sup f = \inf U_f^{ess} \tag{2.19}$$

olarak tanımlanır. Aksi halde, yani $U_f^{ess} \neq \phi$ ise $ess\sup f = +\infty$ dır. Ayrıca, bu durumda hemen hemen her $x \in X$ için $f(x) \leq M$ olacak şekilde $M \in R$ varsa $ess\sup f \leq M$ dır.

Ayrıca esas infimum tanımı da esas alt sınırlarının supremumu olarak tanımlanır yani esas alt sınırlarının kümesi boştan farklı ise

$$ess\inf f = \sup\{k \in R : \mu(\{x : f(x) < k\}) = 0\} \tag{2.20}$$

olarak tanımlanır. Eğer esas alt sınırların kümesi boş ise bu durumda $ess\inf f = -\infty$ dır.

Eğer $\mu(X) > 0$ ise

$$\inf f \leq ess\inf f \leq ess\sup f \leq \sup f \tag{2.21}$$

bağıntısı vardır. Eğer $\mu(X) = 0$ ise bu durumda da $ess\sup f = +\infty$ ve $ess\inf f = -\infty$ dır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. GİRİŞ

A.M. Ostrowski'nin 1981 yılında ispatladığı eşitsizlik (Teorem 2.1.4), literatürde Ostrowski eşitsizliği olarak bilinmektedir. 1938'deki ispattan bu yana araştırma faaliyetleri bu (Teorem 2.1.4) eşitsizliği ve bu eşitsizliğin uygulamaları üzerine birçok çalışma yapılmaktadır. Referanslar önemli ölçüde Ostrowski eşitsizliği içermektedir.

Son 20 yılda Ostrowski eşitsizlikleri merkezli iddialara olan ilgiler hep yenilikler kazanılarak, çeşitli çalışmalar, genelleşmeler ve uzantıları, varyasyonlar ve uygulamaları literatürde kendine önemli bir ölçüde yer bulmuştur.

Bu bölümde biz Ostrowski eşitsizliği (Teorem 2.1.4) ile ilgili daha basit olan en son gelişmelere değineceğiz. Uygulamaların yararlılığını göstermek için bazı eşitsizlikler açıklayacağız.

3.2. OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde son zamanlarda bazı araştırmacılar tarafından kurulan bazı Ostrowski tipi eşitsizlikleri sunacağız. İlk olarak, Dragomir tarafından kurulan Lipschitzian dönüşümleri için Ostrowski eşitsizliklerinin genelleştirilmesi ile başlayalım:

Teorem 3.2.1. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde L-lipschitzian dönüşümü olsun. Her $x, y \in [a,b]$ ve $L \geq 0$ sabiti için

$$f(x) - f(y) \leq L|x-y|$$

sağlansın. Bu durumda her $x \in [a,b]$ için

$$\left|\int_a^b f(t)dt - f(x)(b-a)\right| \leq L(b-a)^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right] \tag{3.1}$$

dır. $\frac{1}{4}$ bu şartlar altındaki en iyi sabittir.

İspat. Riemann-Stieltjes integrali için kısmi integrasyon formülünü kullanılarak

$$\int_a^x (t-a)df(t) = f(x)(x-a) - \int_a^x f(t)dt$$

ve

$$\int_x^b (t-b)df(t) = f(x)(b-x) - \int_x^b f(t)dt$$

elde edilir. Üstteki eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$f(x)(b-a) - \int_a^b f(t)dt = \int_a^x (t-a)df(t) + \int_x^b (t-b)df(t) \tag{3.2}$$

olur. Şimdi varsayalım ki sırasıyla $\Delta_n : a = x_0{}^{(n)} < x_1{}^{(n)} < \cdots < x_{n-1}{}^{(n)} < x_n{}^{(n)} = b$ aralığında $v(\Delta_n) := max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right)$, $v(\Delta_n) \to 0$, $n \to \infty$ ve $\xi_i^{(n)} \in \left[x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}\right]$ olsun. Eğer $p: [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir anlamında ve $v: [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde L –Lispschitzian ise, o halde

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b p(x)dv(x) = \left|\lim_{v(\Delta_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} p\left(\xi_i^{(n)}\right)\left[v\left(x_{i+1}^{(n)}\right) - v\left(x_i^{(n)}\right)\right]\right|\right| \\
\le \lim_{v(\Delta_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \left|p\left(\xi_i^{(n)}\right)\right| \left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right) \left|\frac{v\left(x_{i+1}^{(n)}\right) - v\left(x_i^{(n)}\right)}{x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}}\right| \\
\le L \lim_{v(\Delta_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \left|p\left(\xi_i^{(n)}\right)\right| \left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right) \\
= L \int_a^b |p(x)|dx
\end{aligned} \tag{3.3}$$

dır. Ayrıca, $[a,x]$ ve $[x,b]$ aralığında (3.3) eşitsizliğini kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^x (t-a)df(t) + \int_x^b (t-b)df(t)\right| \\
&\leq \left|\int_a^x (t-a)df(t)\right| + \left|\int_x^b (t-b)df(t)\right| \\
&\leq L\left[\int_a^x |t-a|dt + \int_x^b |t-b|dt\right] \\
&= \frac{L}{2}[(x-a)^2 + (b-x)^2] \\
&= L(b-a)^2\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right] \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece (3.2) ve (3.4) yardımı ile (3.1) eşitsizliği elde edilir. Şimdi (3.1) eşitsizliğinde $C > 0$ sabitinin olduğunu varsayalım, o halde

$$
\left|\int_a^b f(t)dt - f(x)(b-a)\right| \leq L(b-a)^2\left[C + \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right] \qquad (3.5)
$$

yazılır. Böylece, her $x \in [a,b]$ için (3.5) eşitsizliğinde $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ dönüşümü uygulanırsa

$$
\left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \left[C + \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)
$$

olur. Ayrıca, $x = a$ için,

$$
\frac{b-a}{2} \leq \left[C + \frac{1}{4}\right](b-a)
$$

elde edilir. Burada $C \geq \frac{1}{4}$ olduğu anlaşılır ve ispat tamamlanır.

Hatırlatma 3.2.1. Eğer f dönüşümü (a,b) üzerinde diferensiyellenebilir ve f', (a,b) aralığında sınırlı ise, (3.1)'de L'nin yerine $\|f'\|_\infty$ alınırsa $\|f'\|_\infty = sup_{x\in(a,b)}|f'(t)| < \infty$ dır.

Teorem 3.2.2. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığı üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. f', $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ve her $x \in [a,b], \gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ için $\gamma \le f'(x) \le \Gamma$ olsun. Bu durumda her $x \in [a,b]$ için,

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma-\gamma) \qquad (3.6)$$

dır.

İspat. İlk olarak

$$p(x,t) = \begin{cases} t-a, & t \in [a,x] \\ t-b, & t \in (x,b] \end{cases} \qquad (3.7)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Kısmi integrasyon yardımıyla, her $x \in [a,b]$ için,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \qquad (3.8)$$

yazılır. Her $x \in [a,b]$ ve $t \in [a,b]$ için (3.7)'den,

$$x-b \le p(x,t) \le x-a$$

olduğu açıktır. $p(x,\cdot)$ ve $f'(c)$ dönüşümlerine Grüss eşitsizliği (Teorem 2.1.5) uygulanırsa

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt \le \frac{1}{4}(x-a-x+b)(\Gamma-\gamma) \qquad (3.9)$$

elde edilir. Basit bir hesaplamayla

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)dt + \int_x^b (t-b)dt\right] = x - \frac{a+b}{2}$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)dt = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

bulunur. (3.6) eşitsizliğinin ispatı (3.8) ve (3.9)'daki iki eşitsizlik ile tamamlanmış olur.

Hatırlatma 3.2.2. Eğer sırasıyla (3.6)'da, $x = \frac{a+b}{2}$ ve $x = b$ seçilirse,

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma-\gamma) \qquad (3.10)$$

ve

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\Bigg| \leq \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma-\gamma) \qquad (3.11)$$

elde edilir. (3.6)'ya benzer bir şekilde elde edilen teorem aşağıda belirtilmiştir [6].

Teorem 3.2.3. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyon ve $f' \in L_2[a,b]$ olsun. O halde her $x \in [a,b]$ için

$$\sigma(f') = (b-a)\left[\frac{1}{b-a}\|f'\|_2^2 - \frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b f'(t)dt\right)^2\right]$$

olmak üzere

$$\left|(b-a)f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)[f(b)-f(a)] - \int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{3}}\sqrt{\sigma(f')} \qquad (3.12)$$

dır. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır.

İspat. $p(x,t)$ dönüşümü (3.7)'deki gibi tanımlasın. Kısmi integrasyonla,

$$\int_a^b p(x,t)f'(t)dt = (b-a)f(x) - \int_a^b f(t)dt \tag{3.13}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\int_a^b p(x,t)dt = (b-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \tag{3.14}$$

ve

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) \tag{3.15}$$

dır. (3.13)–(3.15)'den

$$\begin{aligned}&\int_a^b \left[p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]\left[f'(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(s)ds\right]dt\\&= (b-a)f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)[f(b)-f(a)] - \int_a^b f(t)dt\end{aligned} \tag{3.16}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b \left[p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]\left[f'(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(s)ds\right]dt\right|\\&\le \left\|p(x,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right\|_2 \left\|f' - \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(s)ds\right\|_2\end{aligned} \tag{3.17}$$

dahası

$$\left\|p(x,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right\|_2^2 = \frac{(b-a)^3}{12} \tag{3.18}$$

$$\left\| f' - \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(s)ds \right\|_2^2 = \|f'\|_2^2 - \frac{\left(f(b)-f(a)\right)^2}{b-a} \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.16)–(3.19)’dan kolayca (3.12)’ye ulaşılır. Çünkü

$$\sqrt{\sigma(f')} = \left[\|f'\|_2^2 - \frac{\left(f(b)-f(a)\right)^2}{b-a}\right]^{\frac{1}{2}}$$

dır. Böylece (3.12)’nin ispatı tamamlanır. Bu amaçla, $x \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 \qquad , & t \in [0,x] \\ \frac{1}{2}t^2 - t + x, & t \in (x,1] \end{cases} \tag{3.20}$$

fonksiyonu tanımlasın. (3.20)’de verilen fonksiyon mutlak süreklidir; çünkü parçalı polinom fonksiyonudur. Şimdi (3.12)’de $C > 0$ sabitini varsayalım,

$$\left|(b-a)f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)[f(b)-f(a)] - \int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq C(b-a)^{\frac{3}{2}}\left[\|f'\|_2^2 - \frac{\left(f(b)-f(a)\right)^2}{b-a}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.21}$$

yukarıda $a = 0,\ b = 1$ ve f fonksiyonunu (3.20)’deki gibi seçilirse,

$$\int_0^1 f(t)dt = x - \frac{1}{3} - \frac{x^2}{2}, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = x - \frac{1}{2}, \quad f(x) = \frac{x^2}{2}$$

olur ve buradan da (3.21)’in sol tarafını $\frac{1}{12}$ olarak elde edilir. Ayrıca (3.21)’in sağ tarafı da $\frac{C}{2\sqrt{3}}$ olarak elde edilir ve dolayısıyla $C \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}$ bulunur. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ sabitinin (3.12)’deki en iyi sabit olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

[7] tarafından kurulan Ostrowski tipli eşitsizliklerde, daha iyi hata sınırı elde etmek için uygulamalar genişletilmiştir.

Teorem 3.2.4. $f: I \subset R \to R$, I^0 (I' nın içi)'da $a, b \in I^0$ ve $a < b$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ sabitleri var ve öyleki her $t \in [a,b]$ için $\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma$ ve f' $[a,b]$'de integrallenebilir ise,

$$S = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olmak üzere

$$\left| f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{b-a}{2}(S - \gamma) \tag{3.22}$$

ve

$$\left| f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{b-a}{2}(\Gamma - S) \tag{3.23}$$

dır.

İspat. $p(x,t)$, (3.27)'deki gibi tanımlanan bir dönüşüm olsun. Kısmi integrasyonla,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt = x - \frac{a+b}{2} \tag{3.25}$$

ve

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) \tag{3.26}$$

elde edilir. (3.24)–(3.26)'dan

$$f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f'(t)dt\int_a^b p(x,t)dt \tag{3.27}$$

$$R_n(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f'(t)dt\int_a^b p(x,t)dt \tag{3.28}$$

elde edilir. Eğer $C \in R$ keyfi bir sabit ise,

$$R_n(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f'(t)-C)\left[p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]dt \tag{3.29}$$

elde edilir. Çünkü,

$$\int_a^b \left[p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]dt = 0 \tag{3.30}$$

dır. İlk olarak (3.29)'da $C = \gamma$ seçilirse,

$$R_n(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f'(t)-\gamma)\left[p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]dt$$

ve

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{b-a}\max_{t\in[a,b]}\left|p(x,t) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right|\int_a^b |f'(t)-\gamma|dt \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.31)'de

$$\max_{t\in[a,b]}\left|p(x,t) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right| = \frac{b-a}{2} \tag{3.32}$$

ve

$$\int_a^b |f'(t)-\gamma|dt = f(b) - f(a) - \gamma(b-a) = (S-\gamma)(b-a)$$

olduğundan

$$|R_n(x)| \leq \frac{b-a}{2}(S-\gamma) \tag{3.33}$$

elde edilir ve (3.27), (3.28) ve (3.33)'den kolayca (3.22) elde edilir.

İkinci olarak (3.29) da $C = \Gamma$ seçilirse

$$R_n(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f'(t)-\Gamma)\left[p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]dt$$

ve

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{b-a}\max_{t\in[a,b]}\left|p(x,t) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right|\int_a^b |f'(t)-\Gamma|dt \tag{3.34}$$

elde edilir.

$$\int_a^b |f'(t)-\Gamma|dt = \Gamma(b-a) - f(b) + f(a) = (\Gamma - S)(b-a) \tag{3.35}$$

dır. (3.32), (3.34) ve (3.35)'den,

$$|R_n(x)| \leq \frac{b-a}{2}(\Gamma - S) \tag{3.36}$$

elde edilir. (3.27), (3.28) ve (3.36)'dan kolayca (3.23) elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.5. $I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon öyle ki her $t \in [a,b]$ için $\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma$, $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ olsun.

$S = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $a + \lambda\frac{b-a}{2} \leq x \leq b - \lambda\frac{b-a}{2}$ olmak üzere,

$$\left|(b-a)\left[\frac{\lambda}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+(1-\lambda)f(x)-\gamma(1-\lambda)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq (S-\gamma)max\left\{\lambda\frac{b-a}{2}, x-a-\lambda\frac{b-a}{2}, b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right\}(b-a) \qquad (3.37)$$

ve

$$\left|(b-a)\left[\frac{\lambda}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+(1-\lambda)f(x)-\Gamma(1-\lambda)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq (\Gamma-S)max\left\{\lambda\frac{b-a}{2}, x-a-\lambda\frac{b-a}{2}, b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right\}(b-a) \qquad (3.38)$$

dır.

İspat.

$$k(x,t)=\begin{cases} t-\left(a+\lambda\dfrac{b-a}{2}\right), t\in[a,x] \\ t-\left(b-\lambda\dfrac{b-a}{2}\right), t\in(x,b] \end{cases} \qquad (3.39)$$

dönüşümü tanımlansın. Kısmi integrasyonla

$$\int_a^b k(x,t)\,f'(t)dt$$
$$=\int_a^x\left[t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]f'(t)dt+\int_x^b\left[t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]f'(t)dt$$
$$=(b-a)\left[\tfrac{\lambda}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+(1-\lambda)f(x)\right]-\textstyle\int_a^b f(t)dt \quad (3.40)$$

elde edilir. Dahası

$$\int_a^b k(x,t)dt=\int_a^x\left[t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]dt+\int_x^b\left[t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]dt$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[(x-a)-\lambda\tfrac{b-a}{2}\right]^2-\tfrac{1}{2}\left[(x-b)+\lambda\tfrac{b-a}{2}\right]^2$$

$$= (1-\lambda)(b-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) \qquad (3.41)$$

elde edilir. $C \in R$ bir sabit olsun. (3.40) ve (3.41)'den

$$\int_a^b k(x,t)[f'(t)-C]\,dt = \int_a^b k(x,t)f'(t)\,dt - C\int_a^b k(x,t)dt$$

$$= (b-a)\left[\frac{\lambda}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+(1-\lambda)f(x)-C(1-\lambda)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)\,dt \qquad (3.42)$$

elde edilir. Eğer (3.42)'de $C = \gamma$ seçilirse,

$$(b-a)\left[\frac{\lambda}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+(1-\lambda)f(x)-\gamma(1-\lambda)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)\,dt$$
$$= \int_a^b k(x,t)[f'(t)-\gamma]\,dt \qquad (3.43)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\left|\int_a^b k(x,t)[f'(t)-\gamma]\,dt\right| \le \max_{t\in[a,b]}|k(x,t)|\int_a^b |f'(t)-\Gamma|dt \qquad (3.44)$$

elde edilir. Çünkü

$$\max_{t\in[a,b]}|k(x,t)| = max\left\{\lambda\frac{b-a}{2}, x-a-\lambda\frac{b-a}{2}, b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right\}) \qquad (3.45)$$

ve

$$\int_a^b |f'(t)-\Gamma|dt = f(b)-f(a)-\gamma(b-a) = (S-\gamma)(b-a) \qquad (3.46)$$

dır. (3.43)–(3.46)'dan (3.37) elde edilmiş olur. Eğer (3.42)'de $C = \Gamma$ seçilirse,

$$(b-a)\left[\frac{\lambda}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+(1-\lambda)f(x)-\Gamma(1-\lambda)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)\,dt$$
$$=\int_a^b k(x,t)[f'(t)-\gamma]\,dt \tag{3.47}$$

ve

$$\int_a^b |f'(t)-\Gamma|dt=\Gamma(b-a)-\big(f(b)-f(a)\big)=(\Gamma-S)(b-a) \tag{3.48}$$

elde edilir. (3.45), (3.47) ve (3.48)'den kolayca (3.38) elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1. Teorem 3.2.5'in varsayımı altında,

$$\left|f(x)(b-a)-\gamma(b-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq (S-\gamma)\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) \tag{3.49}$$
$$\left|f(x)(b-a)-\Gamma(b-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq (\Gamma-S)\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) \tag{3.50}$$

dır.

İspat. (3.37) ve (3.38)'de $\lambda = 0$ alınırsa

$$max\{x-a,b-x\}=\frac{1}{2}[b-a+|2x-a-b|]=\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right| \tag{3.51}$$

elde edilir. Yukarıdaki ispatta

$$max\{A,B\}=\frac{1}{2}[A+B+|A-B|],\quad a,b\in\mathbb{R}$$

eşitliği kullanıldı. (3.51)'deki eşitlikten, (3.49) ve (3.50)'nin geçerli olduğu kolayca görülür.

Sonuç 3.2.2. Teorem 3.2.5'in varsayımı altında,

$$\left|\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]-\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq (S-\gamma)\frac{(b-a)^2}{2} \tag{3.52}$$

$$\left|\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]-\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq (\Gamma-S)\frac{(b-a)^2}{2} \tag{3.53}$$

dır.

İspat. (3.37) ve (3.38)'de $\lambda = 1$ alınırsa, bu durumda

$$x = \frac{a+b}{2}$$

ve

$$max\left\{\lambda\frac{b-a}{2}, x-a-\lambda\frac{b-a}{2}, b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right\} = \frac{b-a}{2}$$

elde edilir. (3.52) ve (3.53) açıkça görülmüş olunur.

Sonuç 3.2.3. Teorem 3.2.5'in varsayımı altında,

$$\left|(b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{4}+\frac{1}{2}f(x)-\frac{\gamma}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq (S-\gamma)\left[\frac{b-a}{4}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) \tag{3.54}$$

$$\left|(b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{4}+\frac{1}{2}f(x)-\frac{\Gamma}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq (\Gamma-S)\left[\frac{b-a}{4}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) \tag{3.55}$$

dır.

İspat. (3.37) ve (3.38)'de $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa, o halde

$$
\begin{aligned}
& max\left\{\frac{b-a}{4}, x-\frac{3a+b}{4}, \frac{a+3b}{4}-x\right\} \\
&= max\left\{\frac{1}{2}\left(x-a+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right), \frac{1}{2}\left(b-x+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right)\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left[b-a+2\left|x-\frac{a+b}{2}\right|+|2x-(a+b)|\right] = \frac{b-a}{4}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.54) ve (3.55) açıkça görülmüş olur.

Sonuç 3.2.4. Teorem 3.2.5'in varsayımı altında,

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(x)+f(b)]-\frac{2\gamma}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
&\leq (S-\gamma)\left[\frac{b-a}{3}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(x)+f(b)]-\frac{2\Gamma}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
&\leq (\Gamma-S)\left[\frac{b-a}{3}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

dır.

İspat. (3.37) ve (3.38)'de $\lambda = \frac{1}{3}$ alınırsa, bu durumda

$$
\begin{aligned}
& max\left\{\lambda\frac{b-a}{2}, x-a-\lambda\frac{b-a}{2}, b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right\} \\
&= max\left\{\frac{b-a}{6}, x-\frac{5a+b}{6}, \frac{a+5b}{6}-x\right\} \\
&= max\left\{\frac{1}{2}\left(x-a+\left|x-\frac{2a+b}{3}\right|\right), \frac{1}{2}\left(b-x+\left|x-\frac{a+2b}{3}\right|\right)\right\} \\
&= \left\{\frac{b-a}{6}, \frac{b-a}{3}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{b-a}{6}+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right|\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{b-a}{3} + \left| x - \frac{a+b}{2} \right|$$

elde edilir. (3.56) ve (3.57) açıkça görülmüş olur.

Hatırlatma 3.2.3. Eğer (3.49) ve (3.50); (3.54) ve (3.55); (3.56) ve (3.57)'de $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa, x'e bağlı olmayan eşitsizlikler elde edilir.

3.3. DİĞER OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, n-li diferensiyellenebilir dönüşümlerle ilgili çeşitli araştırmacılar tarafından kurulan bazı Ostrowski tipli eşitsizlikler sırasıyla verilecek. Aşağıda, eşitsizlikler verilmiştir.

Teorem 3.3.1. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun öyleki $f^{(n-1)}, [a,b]$ de mutlak sürekli ve her $x \in [a,b]$ için $f^{(n)} \in L_\infty[a,b]$ için

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(b-x)^{k+1} + (-1)^k (x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \right] f^k(x) \right|$$
$$\leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!} [(x-a)^{n+1} + (b-x)^{n+1}]$$
$$\leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \tag{3.58}$$

$\|f^{(n)}\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n)}(t)| < \infty$ olduğunda (3.58) eşitsizliği elde edilir.

İspat. Hipotezden, aşağıdaki tanımlama yapılabilinir;

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(b-x)^{k+1} + (-1)^k (x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \right] f^k(x)$$
$$+(-1)^n \int_a^b E_n(x,t) f^{(n)}(t)\, dt. \tag{3.59}$$

Her $x \in [a,b]$ için $E_n(x,t)$ olmak üzere (3.59)'dan,

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^k(x)\right|$$

$$= \left|\int_a^b E_n(x,t)f^{(n)}(t)\,dt\right| \leq \left\|f^{(n)}\right\|_\infty \int_a^b |E_n(x,t)|dt$$

$$= \left\|f^{(n)}\right\|_\infty \left[\int_a^x \frac{(t-a)^n}{n!}dt + \int_x^b \frac{(b-t)^n}{n!}dt\right] = \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!}[(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}]$$

ifadesini elde edilir ve (3.58) eşitsizliği kanıtlanmış olur. (3.58)'deki ikinci eşitsizliğin ispatı $x \in [a,b]$ için

$$(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1} \leq (b-a)^{n+1}$$

eşitsizliğinden çıkar.

Hatırlatma 3.3.1 (3.1)'de $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa,

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1+(-1)^k}{(k+1)!}\right]\frac{(b-a)^{k+1}}{2^{k+1}}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{2^n(n+1)!}(b-a)^{n+1} \tag{3.60}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer (3.58)'de $n = 1$ seçilirse basit bir hesaplamayla, Ostrowski nin (Teorem 2.1.4)'deki eşitsizliği elde edilir. Diğer bir sonuç benzer olarak Teorem 3.5. [8]'in elde ettiği aşağıdaki teoremdir.

Teorem 3.3.2. $f: I \subseteq R \to R$ aralığında olsun. Varsayalım ki f in n-lisi I^0 (I nın içi) da diferensiyellenebilir ve $f^{(n)}$, $[a,b]$ üzerinde $a,b \in I^0$, $a < b$ integrallenebilir ve varsayalım ki her $x \in [a,b]$ için γ ve Γ reel sabitleri için $\gamma \leq f^{(n)} \leq \Gamma$ olsun. $x \in [a,b]$ için

$$R_n(x) = f(x) + \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^k(x)$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}+(-1)^n(x-a)^{n+1}}{(n+1)!\,(b-a)^2}\left[f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

tanımlanır. O halde, her $x\in[a,b]$ için,

$$|R_n(x)|$$

$$\leq\frac{\Gamma-\gamma}{2(n)!}\left[\frac{(x-a)^{2n+1}-(x-b)^{2n+1}}{(b-a)(2n+1)}-\left(\frac{(x-a)^{n+1}-(x-b)^{n+1}}{(b-a)(n+1)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.61}$$

dır.

İspat. Hipotezden (3.59) eşitliği kullanılır ve yeniden yazılırsa

$$\int_a^b f(t)dt=(b-a)f(x)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^k(x)$$
$$(-1)^n\int_a^b E_n(x,t)f^{(n)}(t)\,dt$$

olur. Ayrıca,

$$\frac{(-1)^{n+1}}{b-a}\int_a^b E_n(x,t)f^{(n)}(t)\,dt$$
$$=f(x)+\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^k(x)$$
$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt, \tag{3.62}$$

$$\int_a^b E_n(x,t)dt=\int_a^x\frac{(t-a)^n}{n!}dt+\int_x^b\frac{(t-b)^n}{n!}dt=\frac{(x-a)^{n+1}-(x-b)^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$=(-1)^{n+1}\frac{(b-x)^{n+1}+(-1)^n(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ve

$$\int_a^b f^{(n)}dt = f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(a)$$

dır. Böylelikle,

$$-\frac{(-1)^{n+1}}{(b-a)^2}\int_a^b E_n(x,t)dt\int_a^b f^{(n)}(t)dt$$

$$= \frac{(b-x)^{n+1} + (-1)^n(x-a)^{n+1}}{(n+1)!\,(b-a)^2}\left[f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(a)\right] \tag{3.63}$$

elde edilir. (3.62) ve (3.63) kullanılarak,

$$(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b E_n(x,t)f^{(n)}(t)dt - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b E_n(x,t)dt\int_a^b f^{(n)}(t)dt\right]$$

İfadesinin $R_n(x)$'e eşit olduğu görülür. Şimdi Teoremde $E_n(x,\cdot)$ ve $f^{(n)}(\cdot)$ olduğu yerde sırasıyla f ve g yi uygulanırsa,

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{2}(\Gamma - \gamma)\sqrt{T\big(E_n(x,\cdot), E_n(x,\cdot)\big)} \tag{3.64}$$

elde edilir. $T(\cdot,\cdot)$ fonksiyonu (3.59)'da verilmiştir ve zaten hesaplanmıştı.

$$\int_a^b E_n(x,t)dt = \frac{(x-a)^{n+1} - (x-b)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\int_a^b E_n^2(x,t)dt = \frac{(x-a)^{2n+1} - (x-b)^{2n+1}}{(n!)^2(2n+1)}$$

öyle ki

$$T\big(E_n(x,\cdot), E_n(x,\cdot)\big) = \frac{1}{b-a}\int_a^b E_n^2(x,t)dt - \frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b E_n(x,t)dt\right)^2$$

$$= \frac{1}{(n!)^2}\frac{(x-a)^{2n+1} - (x-b)^{2n+1}}{(b-a)(2n+1)} - \left(\frac{(x-a)^{n+1} - (x-b)^{n+1}}{(b-a)(n+1)}\right)^2 \tag{3.65}$$

dır. (3.64) ve (3.65) birleştirilirse, (3.61) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Aşağıda Pachpatten'in kurmuş olduğu yeni genelleme eşitsizliği, bir çift diferensiyellenebilir n-li dönüşüm ile ilgilidir [9].

Bu bölümde ayrıca [10]-[41] numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. DİĞER OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Teorem 4.1.1. $f:[a,b]\to R$, (a,b) üzerinde tanımlı ve diferansiyellenebilir, $f':(a,b)\to R$, (a,b)'de sınırlı, $\|f'\|_\infty := \sup_{t\in(a,b)}|f'(t)|<\infty$ olsun. Bu durumda her $x\in[a,b]$ için

$$\left| f(x)-\frac{1}{a-b}\int_a^b f(t)dt \right| \le \left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2} \right](b-a)\|f'\|_\infty \tag{4.1}$$

eşitsizliği vardır. Buradaki $\frac{1}{4}$ en iyi sabittir [42].

İspat. İlk olarak

$$P(x,t)=\begin{cases} t-a, & a\le t<x \\ t-b, & x\le t\le b \end{cases}$$

çekirdeği göz önüne alınsın. Buna göre kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_a^b P(x,t)f'(t)dt &= \int_a^x (t-a)f'(t)dt+\int_x^b (t-b)f'(t)dt \\
&= (t-a)f(t)\big|_a^x-\int_a^x f(t)dt+(t-b)f(t)\big|_x^b-\int_x^b f(t)dt \\
&= (x-a)f(x)-\int_a^x f(t)dt+(b-x)f(x)-\int_x^b f(t)dt \\
&= (b-a)f(x)-\int_a^b f(t)dt
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\frac{1}{b-a}\int_a^b P(x,t)f'(t)dt$$

elde edilir. Buradan,

$$f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\frac{1}{b-a}P(x,t)f'(t)dt$$

olur. Her iki tarafın mutlak değeri alınıp, işlemler yapılırsa,

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\le\frac{1}{b-a}\int_a^b |P(x,t)f'(t)|dt$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^x (t-a)|f'(t)|dt+\frac{1}{b-a}\int_x^b (b-a)|f'(t)|dt$$

$$\le\frac{\|f'\|_\infty}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)dt+\int_x^b (b-a)dt\right]$$

$$\frac{\|f'\|_\infty}{b-a}\left[\left.\frac{(t-a)^2}{2}\right|_a^x-\left.\frac{(b-t)^2}{2}\right|_x^b\right]$$

$$=\frac{\|f'\|_\infty}{2(b-a)}\left[(x-a)^2+(b-x)^2\right]$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\|f'\|_\infty(b-a)\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. $f:R^m\to R$**,** $\overline{D}$ üzerinde tanımlı ve diferansiyellenebilir ve D'de $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\le M_i\left(M_i>0; i=1,\dots,m\right)$ olsun. Bu durumda, her $X=\left(x_1,x_2,\dots,x_m\right)\in\overline{D}$ için

$$\left| f(X) - \frac{1}{\prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i)} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} f(y_1,\dots,y_m) dy_1,\dots,dy_m \right|$$

$$\leq \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x_i - \frac{a_i + b_i}{2} \right)^2}{(b_i - a_i)^2} \right] (b_i - a_i) M_i \tag{4.2}$$

İspat. $X = (x_1,\dots,x_m)$, $Y = (y_1,\dots,y_m)$ için $X, Y \in \overline{D}$ olsun. O halde Taylor Formülü yardımıyla,

$C = (y_1 + \theta(x_1 - y_1),\dots, y_m + \theta(x_m - y_m))$, $0 < \theta < 1$ olmak üzere,

$$f(X) - f(Y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(C)}{\partial x_i}(x_i - y_i) \tag{4.3}$$

yazılır. (4.3) eşitliğinin her iki tarafının Y 'ye göre integral alınırsa bu durumda

$$\int_D f(X) dY - \int_D f(Y) dY = \sum_{i=1}^{m} \int_D \frac{\partial f(C)}{\partial x_i}(x_i - y_i) dY .$$

$dY = dy_1 \dots dy_m$ ve $m(D) = \prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$ olmak üzere,

$$f(X) m(D) - \int_D \dots \int f(Y) dY = \sum_{i=1}^{m} \int_D \dots \int \frac{\partial f(C)}{\partial x_i}(x_i - y_i) dY \tag{4.4}$$

yazılır. Burada (4.4) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa,

$$\left| f(X) m(D) - \int_D \dots \int f(Y) dY \right| \leq \sum_{i=1}^{m} \int_D \dots \int \left| \frac{\partial f(C)}{\partial x_i} \right| |(x_i - y_i)| dY$$

olur. Her $X \in \overline{D}$ için $\left|\frac{\partial f(C)}{\partial x_i}\right| \le M_i \left(M_i > 0; i = 1,...,m\right)$ olduğundan

$$\left| f(X)m(D) - \int_D \ldots \int f(Y)dY \right| \le M_i \int_D \ldots \int |x_i - y_i| dY \tag{4.5}$$

dır. (4.5) eşitsizliğinin sağ tarafındaki bir integralini

$$\int_{a_i}^{b_i} |x_i - y_i| dy_i = \frac{1}{4}(b_i - a_i)^2 + \left(x_i - \frac{a_i + b_i}{2} \right)^2$$

şeklinde hesaplanırsa,

$$\int_D \ldots \int |x_i - y_i| dy_i = \frac{m(D)}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} |x_i - y_i| dy_i$$

$$= m(D)(b_i - a_i) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x_i - \frac{a_i - b_i}{2} \right)^2}{(b_i - a_i)^2} \right]$$

elde edilir. Son ifade (4.5) eşitsizliğinde yerine yazılır ve her iki taraf $m(D) > 0$ olduğu için $m(D)$'ye her iki taraf bölünürse ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.2'nin genelleştirilmiş hali aşağıdaki gibidir [42].

Teorem 4.1.3. $f : R^m \to R$, $\overline{D}$ üzerinde tanımlı, diferansiyellenebilir ve D'de $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \le M_i \left(M_i > 0; i = 1,...,m\right)$ olsun. Ayrıca, $X \to p(X)$ p fonksiyonu tanımlı, integrallenebilir ve her $X \in \overline{D}$ için $p(X) > 0$ olsun. Bu durumda her $X \in \overline{D}$ için

$$\left| f(X) - \frac{\int_D \ldots \int p(Y) f(Y) dY}{\int_D \ldots \int p(Y) dY} \right| \le \frac{\sum_{i=1}^{m} M_i \int_D \ldots \int p(Y) |x_i - y_i| dY}{\int_D \ldots \int p(Y) dY}$$

dır.

İspat. Teorem 4.1.2'deki ispatın benzeri olarak ispat açıktır. Taylor serisi yazılıp $p(Y)$ çarpılarak benzer şekilde ispat yapılır.

Teorem 4.1.4 için aşağıdaki formülü kullanılacaktır:

$$m,n \in N \quad i=(1,...,m);$$

$$0=a_{i0}<a_{i1}<...<a_{in_i}=1 \quad i=(1,...,m);$$

$$a_{ik_i}-1 \le x_{ik_i} \le a_{ik_i},\ \lambda_{ik_i}=a_{ik_i}-a_{ik_{i-1}} \quad (k_i=1,...,n_i;i=1,...,m)$$

$$k=(k_1,...,k_m),\ X=(x_1,...,x_m),\ X_k=(x_{1k_1},...,x_{mk_m});$$

$$D=\{X|0<x_i<1;i=1,...,m\};$$

$$D(k)=\{X_k|a_{ik_{i-1}}<x_{ik_i}<a_{ik_i}(k_i=1,...,n_i;i=1,...,m)\};$$

$$dX=dx_1,...,dx_m;$$

$$E(f;k)=f(X_k)-\frac{1}{\prod_{i=1}^{m}\lambda_{ik_i}}\int_{D_k}\!...\!\int f(X)dX$$

Teorem 4.1.4. $f:R^m \to R$, $\overline{D}$ üzerinde tanımlı, diferansiyellenebilir ve D'de $\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \le M_i \quad (M_i>0;i=1,...,m)$ olsun. Bu durumda $H(t;k_i)=(t-a_{ik_{i-1}})^2+(a_{ik_i}-t)^2$ olmak üzere,

$$\left|\int_D\!...\!\int f(X)dX-\sum_{k_1=1}^{n_i}...\sum_{k_m=1}^{n_m}\lambda_{1k_1}...\lambda_{mk_m}f(X_k)\right|$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}M_i\left(\sum_{k_1=1}^{n_i}H(x_{ik_i};k_i)\right). \tag{4.6}$$

İspat. Teorem 4.1.2 yardımıyla

$$E(f;k)=f(X_k)-\frac{1}{\prod_{i=1}^{m}\lambda_{ik_i}}\int_{D(k)}\!...\!\int f(X)dX$$

eşitliği

$$E(f;k) \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{M_i}{\lambda ik_i}H\left(x_{ik_i};k_i\right) \tag{4.7}$$

şeklinde yazılır. $\bigcup_{k_1=1}^{n_i}\ldots\bigcup_{k_m=1}^{n_m}\overline{D}(k)=\overline{D}$ olduğundan,

$$\left|\int\limits_D\ldots\int f(X)dX-\sum_{k_1=1}^{n_i}\ldots\sum_{k_m=1}^{n_m}\lambda_{1k_1}\ldots\lambda_{mk_m}f(X(k))\right|$$

$$=\left|\sum_{k_1=1}^{n_i}\ldots\sum_{k_m=1}^{n_m}\lambda_{1k_1}\ldots\lambda_{mk_m}E(f;k)\right|$$

dır. Buradan da (4.7) eşitsizliği yerine yazılırsa,

$$\left|\int\limits_D\ldots\int f(X)dX-\sum_{k_1=1}^{n_i}\ldots\sum_{k_m=1}^{n_m}\lambda_{1k_1}\ldots\lambda_{mk_m}f(X_k)\right|$$

$$\leq\frac{1}{2}\sum_{k_1=1}^{n_i}\ldots\sum_{k_m}^{n_m}\lambda_{1k_1}\ldots\lambda_{mk_m}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{M_i}{\lambda_{ik_i}}H\left(x_{ik_i};k_i\right)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}M_i\left(\sum_{k_1=1}^{n_i}H\left(x_{ik_i};k_i\right)\right)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.1. Eğer Teorem 4.1.4'de $x_{ik_i}=a_{ik_i}$ veya $x_{ik_i}=a_{ik_i-1}$ alınırsa, (4.4) eşitsizliği

$$\left|\int\limits_D\ldots\int f(X)dX-\sum_{k_1=1}^{n_i}\ldots\sum_{k_m=1}^{n_m}\lambda_{1k_1}\ldots\lambda_{mk_m}f(X_k)\right|\leq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}M_i\left(\sum_{k_1=1}^{n_i}\lambda_{ik_i}{}^2\right)$$

olur. Ayrıca, eğer $\lambda_{ik_i}=\frac{1}{n_i}$ alınırsa,

$$\left|\int\limits_D\ldots\int f(X)dX-\frac{1}{n_1\ldots n_m}\sum_{k_1=1}^{n_i}\ldots\sum_{k_m=1}^{n_m}f(X_k)\right|\leq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{M_i}{n_i}$$

olur.

Sonuç 4.1.2. Eğer Teorem 4.1.4'de $x_{ik_i} = \frac{1}{2}\left(a_{ik_i-1} + a_{ik_i}\right)$ alınırsa, (4.4) eşitsizliği

$$\left|\int_D \!\!\ldots\!\int f(X)dX - \frac{1}{n_1 \ldots n_m} \sum_{k_1=1}^{n_i} \ldots \sum_{k_m=1}^{n_m} f(X_k)\right| \le \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m} M_i \left(\sum_{k_1=1}^{n_i} \lambda_{ik_i}^{\;2}\right)$$

olur. Ayrıca, eğer $\lambda_{ik_i} = \frac{1}{n_i}$ alınırsa,

$$\left|\int_D \!\!\ldots\!\int f(X)dX - \frac{1}{n_1 \ldots n_m} \sum_{k_1=1}^{n_i} \ldots \sum_{k_m=1}^{n_m} f(X_k)\right| \le \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m} \frac{M_i}{n_i}$$

dır.

Teorem 4.1.5. $f : R^m \to R$, $D = \{(x_1,...,x_m) | a_i \le x_i \le b_i (i = 1,...,m)\}$ üzerinde tanımlı, diferansiyellenebilir ve D'de $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \le M_i$ $(M_i > 0; i = 1,...,m)$ olsun. Ayrıca, $x \to p(x)$ p fonksiyonu integrallenebilir ve her $x \in D$ için $p(x) > 0$ olsun. Bu durumda her $x \in D$ için

$$\left| f(x) - \frac{\int_D p(y) f(y) dy}{\int_D p(y) dy} \right| \le \frac{\sum_{i=1}^{m} M_i \int_D p(y) |x_i - y_i| dy}{\int_D p(y) dy} \tag{4.8}$$

dır [43].

4.2. İKİ KATLI İNTEGRALLERDE OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

4.2.1. $\|\cdot\|_\infty$ - Norma Ait Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler

İki değişkenli fonksiyonlar için aşağıdaki Ostrowski tipli eşitsizliği vardır [44],[45].

Teorem 4.2.1.1. $f:[a,b]\times[c,d]\to R$ fonksiyonu sürekli olsun. Eğer $f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $[a,b]\times[c,d]$ üzerinde ve $f_{xy}\in L_\infty([a,b]\times[c,d])$, yani, $\|f_{st}\|_\infty := \underset{(x,y)\in(a,b)\times(c,d)}{ess\sup}\left|\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|<\infty$ ise her $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ için

$$\left|\int_a^b\int_c^d f(s,t)dtds-\left[(b-a)\int_c^d f(x,t)dt-(d-c)\int_a^b f(s,y)ds-(d-c)(b-a)f(x,y)\right]\right|$$

$$\leq\left[\frac{1}{4}(b-a)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left[\frac{1}{4}(d-c)^2+\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2\right]\left\|f''_{s,t}\right\|_\infty \tag{4.9}$$

dır.

İspat. $p:[a,b]^2\to R$, $q:[c,d]^2\to R$ olmak üzere,

$$p(x,s):=\begin{cases}s-a, & s\in[a,x]\\ s-b, & s\in(x,b]\end{cases}\quad\text{ve}\quad q(y,t):=\begin{cases}t-c, & t\in[c,y]\\ t-d, & t\in(y,d]\end{cases}$$

çekirdekleri tanımlansın. Her $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ için

$$\int_a^b\int_c^d p(x,s)q(y,t)f_{st}(s,t)dtds$$

$$=\int_a^x\int_c^y(s-a)(t-c)f_{st}(s,t)dtds+\int_a^x\int_y^d(s-a)(t-d)f_{st}(s,t)dtds$$

$$+\int_x^b\int_c^y(s-b)(t-c)f_{st}(s,t)dtds+\int_x^b\int_y^d(s-b)(t-d)f_{st}(s,t)dtds$$

yazılır.

$$\int_a^x\int_c^y(s-a)(t-c)f_{st}(s,t)dtds$$

$$=\int_a^x(s-a)\left[f_s(s,y)(y-c)-\int_c^y f_s(s,t)dt\right]ds$$

$$=(y-c)\int_a^x(s-a)f_s(s,y)ds-\int_c^y\left(\int_a^x(s-a)f_s(s,t)ds\right)dt$$

$$= (y-c)\left[(x-a)f(x,y) - \int_a^x f(s,y)ds\right]$$

$$- \int_c^y \left[(x-a)f(x,t) - \int_a^x f(s,t)ds\right]dt$$

$$= (y-c)(x-a)f(x,y) - (y-c)\int_a^x f(s,y)ds$$

$$- (x-a)\int_c^y f(x,t)dt + \int_a^x \int_c^y f(s,t)dtds \tag{4.10}$$

eşitliği yazılır. Benzer şekilde,

$$\int_a^x \int_y^d (s-a)(t-d) f_{st}(s,t)dtds$$

$$= \int_a^x (s-a)\left[(d-y)f_s(s,y) - \int_y^d f_s(s,t)dt\right]ds$$

$$= (d-y)\int_a^x (s-a)f_s(s,y)ds - \int_y^d \left(\int_a^x (s-a)f_s(s,t)ds\right)dt$$

$$= (d-y)\left[(x-a)f(x,y) - \int_a^x f(s,y)ds\right]$$

$$- \int_y^d \left[(x-a)f(x,t) - \int_a^x f(s,t)ds\right]dt$$

$$= (x-a)(d-y)f(x,y) - (d-y)\int_a^x f(s,y)ds$$

$$- (x-a)\int_y^d f(x,t)dt + \int_a^x \int_c^y f(s,t)dtds \tag{4.11}$$

yazılır. Diğer yandan,

$$\int_x^b \int_c^y (s-b)(t-c) f_{st}(s,t)dtds$$

$$= \int_x^b (s-b)\left[(y-c)f_s(s,y) - \int_c^y f_s(s,t)dt\right]ds$$

$$= (y-c)\int_x^b (s-b)f_s(s,y)ds - \int_c^y \left(\int_x^b (s-b)f_s(s,t)ds\right)dt$$

$$= (y-c)\left[(b-x)f(x,y) - \int_x^b f(s,y)ds\right]$$

$$- \int_c^y \left[(b-x)f(x,t) - \int_x^b f(s,t)ds\right]dt$$

$$=(y-c)(b-x)f(x,y)-(y-c)\int_x^b f(s,y)ds$$

$$-(b-x)\int_c^y f(x,t)dt+\int_x^b\int_c^y f(s,t)dtds \tag{4.12}$$

ve

$$\int_x^b\int_y^d (s-b)(t-d)f_{st}(s,t)dtds$$

$$=\int_x^b (s-b)\left[(d-y)f_s(s,y)-\int_y^d f_s(s,t)dt\right]ds$$

$$=(d-y)\int_x^b (s-b)f_s(s,y)ds-\int_y^d\left(\int_x^b (s-b)f_s(s,t)ds\right)dt$$

$$=(d-y)\left[(b-x)f(x,y)-\int_x^b f(s,y)ds\right]$$

$$-\int_y^d\left[(b-x)f(x,t)-\int_x^b f(s,t)ds\right]dt$$

$$=(d-y)(b-x)f(x,y)-(d-y)\int_x^b f(s,y)ds$$

$$-(b-x)\int_y^d f(x,t)dt+\int_x^b\int_y^d f(s,t)dtds \tag{4.13}$$

dır. (4.11)-(4.13) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$[(y-c)(x-a)+(x-a)(d-y)+(d-y)(b-x)+(y-c)(b-x)]f(x,y)$$

$$-(d-c)\int_a^x f(s,y)ds-(d-c)\int_x^b f(s,y)ds-(b-a)\int_c^y f(x,t)dt$$

$$-(b-a)\int_y^d f(x,t)dt+\int_a^x\int_c^y f(s,t)dtds+\int_a^x\int_y^d f(s,t)dtds$$

$$+\int_x^b\int_y^d f(s,t)dtds+\int_x^b\int_c^y f(s,t)dtds$$

$$=(d-c)(b-a)f(x,y)-(d-c)\int_a^b f(s,y)ds$$

$$-(b-a)\int_c^b f(x,t)dt+\int_a^b\int_c^d f(s,t)dtds$$

ifadesi elde edilir. Son ifade yerine yazılırsa, her $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ için

$$\int_a^b \int_c^d p(x,s)q(y,t)f_{st}(s,t)dtds$$
$$= (d-c)(b-a)f(x,y) - (d-c)\int_a^b f(x,y)ds$$
$$-(b-a)\int_c^d f(x,t)dt + \int_a^b \int_c^d f(s,t)dtds \tag{4.14}$$

olur. (4.14) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa,

$$\left| \int_a^b \int_c^d f(s,t)dtds - \left[(b-a)\int_c^d f(x,t)dt \right.\right.$$
$$\left.\left. + (d-c)\int_a^b f(x,y)ds - (d-c)(b-a)f(x,y) \right] \right|$$
$$\leq \int_a^b \int_c^d |p(x,s)||q(y,t)||f_{st}(s,t)|dtds$$
$$\leq \left\| f_{s,t}'' \right\|_\infty \left(\int_a^b |p(x,s)|ds \right) \left(\int_c^d |q(y,t)|dt \right) \tag{4.15}$$

olur. (4.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integraller hesaplanırsa

$$\int_a^b |p(x,s)|ds = \int_a^x (s-a)ds \int_x^b (b-s)ds$$
$$= \frac{(x-a)^2(b-x)^2}{2} = \frac{1}{4}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2$$

ve

$$\int_c^d |q(y,t)|dt = \frac{1}{4}(d-c)^2 + \left(y - \frac{a+b}{2} \right)^2$$

olur. Son olarak, bu integraller (4.15) eşitsizliğinde yerine yazılırsa istenilen (4.9) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.1.1. Teorem 4.2.1.1'in şartları altında $x = \dfrac{a+b}{2}$, $y = \dfrac{c+d}{2}$ alınırsa,

$$\left|\int_a^b\int_c^d f(s,t)dtds - \left[(b-a)\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},t\right)dt\right.\right.$$

$$\left.\left. + (d-c)\int_a^b f\left(s,\frac{c+d}{2}\right)ds - (d-c)(b-a)f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]\right|$$

$$\le \frac{1}{16}(b-a)^2(d-c)^2\left\|f_{s,t}^{''}\right\|_\infty \tag{4.16}$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 4.2.1.1. Teorem 4.2.1.1'deki $\frac{1}{4}$ en iyi sabittir. Gerçekten, $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ için f fonksiyonu Teorem 4.2.1.1'deki şartları sağlamak üzere,

$$\left|\int_a^b\int_c^d f(s,t)dtds - \left[(b-a)\int_c^d f(x,t)dt\right.\right.$$

$$\left.\left. + (d-c)\int_a^b f(s,y)ds - (d-c)(b-a)f(x,y)\right]\right|$$

$$\le\left[c_1(b-a)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left[c_2(d-c)^2+\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2\right]\left\|f_{st}\right\|_\infty \tag{4.17}$$

olacak şekilde $c_1,c_2\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ olsun. Bu durumda, $x=a$, $y=c$ ve $f(s,t)=st$ fonksiyonu için

$$\int_a^b\int_c^d f(s,t)dtds=\frac{(b^2-a^2)(d^2-c^2)}{4},$$

$$\int_c^d f(x,t)dt=\frac{a(d^2-c^2)}{2},$$

$$\int_a^b f(s,y)ds=\frac{c(b^2-a^2)}{2},$$

$$\left\|f_{st}\right\|_\infty=1$$

bulunur. Böylece bu değerler (4.17)'de yerine yazılırsa,

$$\left|\frac{(b^2-a^2)(d^2-c^2)}{4}-(b-a)\frac{a(d^2-c^2)}{2}\right.$$

$$-(d-c)\frac{c\left(b^2-a^2\right)}{2}+(d-c)(b-a)ac\Bigg|$$

$$\leq (b-a)^2\left(c_1+\frac{1}{4}\right)(d-c)^2\left(c_2+\frac{1}{4}\right)$$

yani

$$\frac{\left(b^2-a^2\right)\left(d^2-a^2\right)}{4}\leq (b-a)^2(d-c)^2\left(c_1+\frac{1}{4}\right)\left(c_2+\frac{1}{4}\right)$$

dır. Buradan,

$$\frac{1}{4}\leq\left(c_1+\frac{1}{4}\right)\left(c_2+\frac{1}{4}\right) \tag{4.18}$$

sonucu ortaya çıkar. $c_1, c_2 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ olduğundan dolayı

$$c_1+\frac{1}{4}<\frac{1}{2},\ c_2+\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$$

dır. Bu durumda

$$\left(c_1+\frac{1}{4}\right)\left(c_2+\frac{1}{4}\right)<\frac{1}{4}$$

olur. Bu da (4.18) eşitsizliğiyle çelişir.

Uyarı 4.2.1.2. Teorem 4.2.1.1'de $x=y$ için $f(s,t)=h(s)h(t)$, $h:[a,b]\to R$ ve $\left\|h'\right\|_\infty<\infty$ alınırsa (4.9) eşitsizliği

$$\left|\int_a^b h(s)ds\int_a^b h(s)ds-h(x)(b-a)\int_a^b h(s)ds\right.$$

$$\left.-h(x)(b-a)^2\int_a^b h(s)ds+(b-a)^2h^2(x)\right|$$

$$\leq \left[\frac{1}{4}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right]^2 \|h\|_\infty^2$$

yani,

$$\left[\int_a^b h(s)ds - h(x)(b-a) \right]^2 \leq \left[\frac{1}{4}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right]^2 \|h\|_\infty^2$$

olur. Bu Ostrowski eşitsizliğidir. Sonuç olarak (4.9) eşitsizliği iki katlı integraller için klasik Ostrowski eşitsizliğinin bir genelleşmesidir.

4.2.2. Hacim Formülü İçin Uygulamalar

$I_n : a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, $J_m : c = y_0 < y_1 < ... < y_{m-1} < y_m = b$ ve $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0,...,n-1)$, $\eta_j \in [y_i, y_{i+1}]$ $(j = 0,...,m-1)$ keyfi parçalanmalar olsun. Burada,

$$D := \int_a^b \int_c^d f(s,t)dsdt$$

integralini hesaplamak için

$$h_i := x_{i+1} - x_i \ (i = 0,...,n-1), \ l_j := y_{j+1} - y_j \ (j = 0,...,m-1)$$

olmak üzere,

$$C(f, I_n, J_m, \xi, \eta) := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} h_i \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, t)dt$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} l_j \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \eta_j)ds - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} h_i l_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (4.19)$$

toplamı ele alındığında, aşağıdaki hacim formülü verilir.

Teorem 4.2.2.1. $f : [a,b] \times [c,d] \to R$ Teorem 4.2.1.1'deki gibi ve I_n, J_m, ξ, η yukarıdaki gibi olsun. O halde

$$\int_a^b \int_c^d f(s,t)dtds = C(f, I_n, J_m, \xi, \eta) + R(f, I_n, J_m, \xi, \eta) \tag{4.20}$$

dır. Kalan kısım $R(f, I_n, J_m, \xi, \eta)$ için

$$\begin{aligned}
&\left| R(f, I_n, J_m, \xi, \eta) \right| \\
&\leq \left\| f_{s,t}'' \right\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\frac{1}{4} h_i^2 + \left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{4} l_j^2 \left(\eta_j - \frac{y_j + y_{j+1}}{2} \right)^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{4} \left\| f_{st} \right\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2 \sum_{j=0}^{m-1} l_j^2
\end{aligned} \tag{4.21}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ $(i = 0,...,n-1;\ j = 0,...,m-1)$ aralığı üzerinde Teorem 4.2.2.1'i uygulanırsa, her $i = 0,...,n-1;$ $j = 0,...,m-1$ için

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(s,t)dtds - \left[h_i \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, t)dt \right. \right. \\
&\left. \left. + l_j \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \eta_j)ds - h_i l_j f(\xi_i, \eta_j) \right] \right| \\
&\leq \left[\frac{1}{4} h_i^2 + \left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{4} l_j^2 + \left(\eta_j - \frac{y_j + y_{j+1}}{2} \right)^2 \right] \left\| f_{st} \right\|_\infty
\end{aligned}$$

olur. Buradan i'yi 0'dan $n-1$'e ve j'yi 0'dan $m-1$'e kadar toplar ve genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği kullanılırsa (4.21)'deki ilk eşitsizlik elde edilir. İkinci kısım için her i, j için

$$\left| \xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right| \leq \frac{1}{2} h_i \text{ ve } \left| \eta_j - \frac{y_j + y_{j+1}}{2} \right| \leq \frac{1}{2} l_j$$

ifadeleri kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Uyarı 4.2.2.1. $\nu(h) = \max\{h_i : i = 0,...,n-1\}$ ve $\mu(l) = \max\{l_j : j = 0,...,m-1\}$ olmak üzere,

$$\sum_{i=0}^{n-1} h_i^2 \leq \nu(h)\sum_{i=0}^{n-1} h_i = (b-a)\nu(h)$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} l_j^2 \leq \mu(l)\sum_{j=0}^{m-1} l_j = (d-c)\mu(l)$$

için (4.21)'in sağ tarafı

$$\frac{1}{4}\left\| f_{s,t}^{"} \right\|_\infty (b-a)(d-c)\nu(h)\mu(l)$$

ile sınırlı olur. Ayrıca,

$$C_M\left(f, I_n, J_m\right)$$

$$:= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} h_i \int_{y_j}^{y_{j+1}} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, t\right)dt + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} l_j \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(s, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right)ds$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} h_i l_j f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right)$$

ifadesinden, (4.20) formu hacim formülünün en iyi halidir.

Sonuç 4.2.2.1. Yukarıdaki varsayımlar altında, kalan kısım $R(f, I_n, J_m)$

$$\left|R(f, I_n J_m)\right| \leq \frac{\left\| f_{s,t}^{"} \right\|_\infty}{16} \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2 \sum_{j=0}^{m-1} l_j^2$$

bulunur. Buradan

$$\int_a^b \int_c^d f(s,t)dtds = C_M\left(f, I_n, J_m\right) + R\left(f, I_n, J_m\right) \tag{4.22}$$

olur.

4.2.3. $\|\cdot\|_p$ - Norma Ait Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler

İki değişkenli fonksiyonlar için aşağıdaki Ostrowski tipli eşitsizlik vardır [46].

Teorem 4.2.3.1. $f:[a,b]\times[c,d]\to R$, $[a,b]\times[c,d]$ üzerinde sürekli, $[a,b]\times[c,d]$ üzerinde $f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ var ve $f_{xy}\in L_p([a,b]\times[c,d])$ içindedir, yani,

$$\|f_{st}\|_p := \left(\int_a^b\int_c^d \left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,\ p>1$$

olsun. Bu durumda her $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b\int_c^d f(s,t)dtds-\left[(b-a)\int_c^d f(x,t)dt\right.\right.\\&\left.\left.+(d-c)\int_a^b f(s,y)ds-(d-c)(b-a)f(x,y)\right]\right|\\&\leq\left[\frac{(x-a)^{q+1}+(b-x)^{q+1}}{q+1}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(y-c)^{q+1}(d-y)^{q+1}}{q+1}\right]^{\frac{1}{q}}\|f_{st}\|_p\end{aligned}\tag{4.23}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. $p:[a,b]^2\to R$, $q:[c,d]^2\to R$,

$$p(x,s):=\begin{cases}s-a, & s\in[a,x]\\ s-b, & s\in(x,b]\end{cases}\ \text{ve}\ q(y,t):=\begin{cases}t-c, & t\in[c,y]\\ t-d, & t\in(y,d]\end{cases}$$

fonksiyonları tanımlansın. Her $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ için

$$\begin{aligned}&\int_a^b\int_c^d p(x,s)q(y,t)f_{st}(s,t)dsdt\\&=(d-c)(b-a)f(x,y)-(d-c)\int_a^b f(s,y)ds\\&-(b-a)\int_c^d f(x,t)dt+\int_a^b\int_c^d f(s,t)dsdt\end{aligned}\tag{4.24}$$

dır. (4.24) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\int_a^b\int_c^d f(s,t)dsdt-\left[(b-a)\int_c^d f(x,t)dt\right.\right.$$

$$\left.\left.+(d-c)\int_a^b f(s,y)ds-(d-c)(b-a)f(x,y)\right]\right|$$

$$\leq\int_a^b\int_c^d |p(x,s)q(y,t)||f_{st}(s,t)|dsdt$$

eşitsizliği elde edilir. İki katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\int_a^b\int_c^d |p(x,s)q(y,t)||f_{st}(s,t)|dtds$$

$$\leq\left(\int_a^b\int_c^d |p(x,s)q(y,t)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b\int_c^d |f_{st}(s,t)|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_a^b |p(x,s)|^q ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_c^d |q(y,t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\|f_{st}\|_p$$

$$=\left[\frac{(x-a)^{q+1}+(b-x)^{q+1}}{q+1}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(y-c)^{q+1}+(d-y)^{q+1}}{q+1}\right]^{\frac{1}{q}}\|f_{st}\|_p$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.3.1. Teorem 4.2.3.1 varsayım altında,

$$\left|\int_a^b\int_c^d f(s,t)dtds-\left[(b-a)\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},t\right)dt\right.\right.$$

$$\left.\left.+(d-c)\int_a^b f\left(s,\frac{c+d}{2}\right)ds-(d-c)(b-a)f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^{1+\frac{1}{q}}(d-c)^{1+\frac{1}{q}}}{4(q+1)^{\frac{2}{q}}}\|f_{st}\|_p \tag{4.25}$$

eşitsizliği vardır.

Uyarı 4.2.3.1. $g:[\alpha,\beta]\to R$, $g(t)=(t-\alpha)^m+(\beta-t)^m$, $(m\geq 1)$ alınsın. Ayrıca

$$\inf_{t\in[\alpha,\beta]} g(t)=g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{(\beta-\alpha)^m}{2^{m-1}}$$

ve

$$\sup_{t\in[\alpha,\beta]} g(t)=g(\alpha)=g(\beta)=(\beta-\alpha)^m$$

özellikleri dikkate alınırsa, (4.25)'in (4.21)'ten elde edilebilecek en iyi eşitsizlik olduğu görülür.

Uyarı 4.2.3.2. Eğer $f(s,t)=h(s)h(t)$, $h:[a,b]\to R$, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $\left\|h'\right\|_p<\infty$ ise (4.23)'ten ($x=y$ için)

$$\begin{aligned}&\Big|\int_a^b h(s)ds\int_a^b h(s)ds-h(x)(b-a)\int_a^b h(s)ds\\&-h(x)(b-a)\int_a^b (s)ds+(b-a)^2h^2(x)\Big|\\&\leq\left[\frac{(x-a)^{q+1}+(b-x)^{q+1}}{q+1}\right]^{\frac{2}{p}}\left\|h'\right\|_p\end{aligned}$$

yani,

$$\left[\int_a^b h(s)ds-h(x)(b-a)\right]^2\leq\left[\frac{(x-a)^{q+1}+(b-x)^{q+1}}{q+1}\right]^{\frac{2}{p}}\left\|h'\right\|_p$$

yazılır. Bu da açıkça p -normlar için elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir [46].

4.2.4. Hacim Formülü İçin Uygulamalar

$I_n : a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, $J_m : c = y_0 < y_1 < ... < y_{m-1} < y_m = d$ ve $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0,...,n-1)$, $\eta_j \in [y_j, y_{j+1}]$ $(j = 0,...,m-1)$ keyfi parçalanmaları ele alalım. Burada,

$$D := \int_a^b \int_c^d f(s,t)dsdt$$

integralini hesaplamak için

$$h_i := x_{i+1} - x_i \ (i = 0,...,n-1),\ l_j := y_{j+1} - y_j \ (j = 0,...,m-1)$$

olmak üzere,

$$C(f, I_n, J_m, \xi, \eta) := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} h_i \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, t)dt$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} l_j \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \eta_j)ds - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} h_i l_j f(\xi_i, \eta_j)$$

alalım. Bu varsayımla, aşağıdaki hacim formülünü verebiliriz.

Teorem 4.2.4.1. $f : [a,b] \times [c,d] \to R$ Teorem 4.2.3.1'deki gibi ve I_n, J_m, ξ, η yukarıdaki gibi olsun. Her ξ ve η için

$$\int_a^b \int_c^d f(s,t)dtds = C(f, I_n, J_m, \xi, \eta) + R(f, I_n, J_m, \xi, \eta)$$

olmak üzere, $R(f, I_n, J_m, \xi, \eta)$ kalan kısmın tahmini

$$|R(f, I_n, J_m, \xi, \eta)|$$
$$\leq \| f_{st} \|_p \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{(x_{i+1} - \xi_i)^{q+1} + (\xi_i - x_i)^{q+1}}{q+1} \right) \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{(y_{j+1}-\eta_j)^{q+1}+(\eta_j-y_j)^{q+1}}{q+1}\right)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{\|f_{st}\|_p}{(q+1)^{\frac{2}{p}}}\sum_{i=0}^{n-1}h_i^{1+\frac{1}{q}}\sum_{j=0}^{m-1}l_j^{1+\frac{1}{q}} \tag{4.26}$$

dır.

İspat. Teorem 4.2.3.1'e $[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]\ (i=0,...,n-1;\ j=0,...,m-1)$ aralığı için uygulandığında, her $i=0,...,n-1;\ j=0,...,m-1$ için

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(s,t)dtds-\left[h_i\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i,t)dt\right.\right.$$
$$\left.\left.+l_j\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s,\eta_j)ds-h_i l_j f(\xi_i,\eta_j)\right]\right|$$
$$\leq\left[\left(\frac{(x_{i+1}-\xi_i)^{q+1}+(\xi_i-x_i)^{q+1}}{q+1}\right)\left(\frac{(y_{j+1}-\eta_j)^{q+1}+(\eta_j-y_j)^{q+1}}{q+1}\right)\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}|f(s,t)|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}$$

sonucu ortaya çıkar. Buradan eşitsizliğin her iki tarafı için i, 0'dan $n-1$'e ; j, 0'dan $m-1$'e iki katlı toplam alınır ve genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği, Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$|R(f,I_n,J_m,\xi,\eta)|$$
$$\leq\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\left(\frac{(x_{i+1}-\xi_i)^{q+1}+(\xi_i-x_i)^{q+1}}{q+1}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{(y_{j+1}-\eta_j)^{q+1}+(\eta_j-y_j)^{q+1}}{q+1}\right)\right]^{\frac{1}{q}}\times\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}|f(s,t)|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(x_{i+1}-\xi_i)^{q+1}+(\xi_i-x_i)^{q+1}}{q+1}\right)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{(y_{j+1}-\eta_j)^{q+1}+(\eta_j-y_j)^{q+1}}{q+1}\right)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}|f(s,t)|^p\,dtds\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(x_{i+1}-\xi_i)^{q+1}+(\xi_i-x_i)^{q+1}}{q+1}\right)\right.$$

$$\left.\sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{(y_{j+1}-\eta_j)^{q+1}+(\eta_j-y_j)^{q+1}}{q+1}\right)\right]^{\frac{1}{q}}\times\left\|f''_{s,t}\right\|_p$$

sonucu çıkar. İkinci kısmın ispatı ise her i, j ve ξ_i, η_j orta noktaları için

$$(x_{i+1}-\xi_i)^{q+1}+(\xi_i-x_i)^{q+1}\leq(x_{i+1}-x_i)^{q+1}$$

ve

$$(y_{j+1}-\eta_j)^{q+1}+(\eta_j-y_j)^{q+1}\leq(y_{j+1}-y_j)^{q+1}$$

eşitsizlikleri kullanılarak tamamlanır.

Uyarı 4.2.4.1. $\nu(h)=\max\{h_i : i=0,\dots,n-1\}$**,** $\mu(l)=\max\{l_j : j=0,\dots,m-1\}$ olmak üzere,

$$\sum_{i=0}^{n-1}h_i^{1+\frac{1}{q}}\leq[\nu(h)]^{\frac{1}{q}}\sum_{i=0}^{m-1}h_i=(b-a)[\nu(h)]^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}l_j^{1+\frac{1}{q}}\leq[\mu(l)]^{\frac{1}{q}}\sum_{j=0}^{m-1}l_j=(d-c)[\mu(l)]^{\frac{1}{q}}$$

için (4.26)'nın sağ tarafı

$$\frac{1}{(q+1)^{\frac{2}{q}}}\left\|f_{st}\right\|_p(b-a)(d-c)[\nu(h)\mu(l)]^{\frac{1}{q}}$$

ile sınırlıdır. Ayrıca,

$$C_M\left(f,I_nJ_m\right):=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}h_i\int_{y_j}^{y_{j+1}}f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2},t\right)dt$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}l_j\int_{x_i}^{x_{i+1}}f\left(s,\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right)ds$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}h_il_j\,f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2},\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right)$$

toplamı yardımıyla Teorem 4.2.4.1’den mümkün olan en iyi hacim formülü elde edilir.

Sonuç 4.2.4.1. Yukarıdaki varsayımlar altında,

$$\int_a^b\int_c^d f(s,t)dsdt=C_M\left(f,\mathrm{I}_n,J_m\right)+R\left(f,\mathrm{I}_n,J_m\right)$$

olmak üzere, $R\left(f,I_n,J_m\right)$ kalan kısmın tahmini

$$\left|R\left(f,I_n,J_m\right)\right|\le\frac{1}{4(q+1)^{\frac{2}{q}}}\left\|f_{st}\right\|_p\sum_{i=0}^{n-1}h_i^{1+\frac{1}{q}}\sum_{j=0}^{m-1}l_j^{1+\frac{1}{q}}$$

elde edilir.

4.2.5. $\|\cdot\|_1$ - Norma Ait Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler

İki değişkenli fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlik aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.2.5.1. $f:[a,b]\times[c,d]\to R$, $[a,b]$ üzerinde sürekli, $[a,b]\times[c,d]$’de $f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ vardır ve $f_{xy}\in L_1([a,b]\times[c,d])$ içindedir, yani,

$$\left\|f_{st}\right\|_1:=\int_a^b\int_c^d\left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|dxdy<\infty$$

olsun. Bu durumda her $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ için

$$\left|\int_a^b\int_c^d f(s,t)dtds-\left[(b-a)\int_c^d f(x,t)dt\right.\right.$$

$$\left.\left.+(d-c)\int_a^b f(s,y)ds-(d-c)(b-a)f(x,y)\right]\right|$$

$$\le\left[\frac{1}{2}+\frac{\left|x-\frac{a+b}{2}\right|}{b-a}\right]\left[\frac{1}{2}+\frac{\left|y-\frac{c+d}{2}\right|}{d-c}\right](b-a)(d-c)\|f_{st}\|_1 \tag{4.27}$$

eşitsizliği yazılır.

İspat. Teorem 4.2.3.1'nin ispatına benzer şekilde,

$$\left|\int_a^b\int_c^d f(s,t)dtds-\left[(b-a)\int_c^d f(x,t)dt\right.\right.$$

$$\left.\left.+(d-c)\int_a^b f(s,y)ds-(d-c)(b-a)f(x,y)\right]\right|$$

$$\le\int_a^b\int_c^d|p(x,s)q(y,t)||f_{st}(s,t)|dtds \tag{4.28}$$

eşitsizliği kullanılsın. Bununla birlikte (4.28) yardımıyla

$$\int_a^b\int_c^d|p(x,s)q(y,t)||f_{st}(s,t)|dtds$$

$$=\sup_{s\in[a,b]}|p(x,s)|\cdot\sup_{t\in[c,d]}|q(y,t)|\|f_{st}\|_1$$

$$=\max\{x-a,b-x\}\cdot\max\{d-y,y-c\}\|f_{st}\|_1$$

$$=\left[\frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]\left[\frac{1}{2}(d-c)+\left|y-\frac{c+d}{2}\right|\right]\|f_{st}\|_1$$

olduğu kolayca hesaplanır ki bu da (4.27)'nin ispatını verir.

Teorem 4.2.5.1'den alabileceğimiz en iyi eşitsizlik aşağıdaki sonuçta verilmiştir.

Sonuç 4.2.5.1. Yukarıdaki varsayımlarla,

$$\Bigg|\int_a^b\int_c^d f(s,t)dtds-\left[(b-a)\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},t\right)dt\right.$$

$$\left.+(d-c)\int_a^b f\left(s,\frac{c+d}{2}\right)ds-(d-c)(b-a)f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]\Bigg|$$

$$\leq\frac{1}{4}(b-a)(d-c)\|f_{st}\|_1 \tag{4.29}$$

yazılır.

Uyarı 4.2.5.1. $f(s,t)=h(s)h(t)$ öyle ki $h:[a,b]\to R$, $[a,b]$ üzerinde sınırlı ve $h' \in L_1[a,b]$ olsun. ($x=y$ için) (4.27)'den

$$\Bigg|\int_a^b h(s)ds\int_a^b h(s)ds-h(x)(b-a)\int_a^b h(s)ds$$

$$-h(x)(b-a)\int_a^b h(s)ds+(b-a)^2h^2(x)\Bigg|$$

$$\leq\left[\frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]^2\|h'\|_1^2$$

yani,

$$\left[\int_a^b h(s)ds-h(x)(b-a)\right]^2\leq\left[\frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]^2\|h'\|_1^2$$

olur. Bu da 1-normlar için Ostrowski eşitsizliğidir [47].

4.3. DİĞER OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

4.3.1. Bazı Özdeşlikler

Aşağıdaki teorem verilir [48].

Teorem 4.3.1.1. $f:[a,b]\times[c,d]\to R$ tanımlı ve kısmi türevleri $\dfrac{\partial f(t,s)}{\partial t},\dfrac{\partial f(t,s)}{\partial s},\dfrac{\partial f(t,s)}{\partial t\partial s}$ var ve $[a,b]\times[c,d]$ üzerinde sınırlı olsun. O halde, her $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ için

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt \\ &+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d p(x,t)\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}dsdt \\ &+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d q(y,s)\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}dsdt \\ &+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d p(x,t)q(y,s)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt \end{aligned} \tag{4.30}$$

dır. Burada, $p:[a,b]\to R$, $q:[c,d]\to R$ fonksiyonları

$$p(x,t):=\begin{cases} t-a, & t\in[a,x] \\ t-b, & t\in(x,b] \end{cases} \tag{4.31}$$

ve

$$q(y,s):=\begin{cases} s-c, & s\in[c,y] \\ s-d, & s\in(y,d] \end{cases} \tag{4.32}$$

dır.

İspat. $k:[\alpha,\beta]^2\to R$,

$$k(u,z):=\begin{cases} z-\alpha, & z\in[\alpha,u] \\ z-\beta, & z\in(u,\beta] \end{cases}$$

olmak üzere kısmi integrasyon yardımıyla,

$$g(u)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}g(z)dz+\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}k(u,z)g^{'}(z)dz \tag{4.33}$$

bulunur ve g, $[\alpha,\beta]$ üzerinde mutlak süreklidir. Gerçekten, kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\int_{a}^{u}(z-\alpha)g^{'}(z)dz=(u-\alpha)g(u)-\int_{\alpha}^{u}g(z)dz$$

ve

$$\int_{u}^{\beta}(z-\beta)g^{'}(z)dz=(\beta-u)g(u)-\int_{u}^{\beta}g(z)dz$$

dır ve bu ifadeler taraf tarafa toplanılırsa, (4.33) özdeşliği bulunur. O halde, $f(\cdot,y),\ y\in[c,d]$ için (4.33) tanım yardımıyla, her $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ için

$$f(x,y)=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(t,y)dt+\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}p(x,t)\frac{\partial f(t,y)}{\partial t}dt \tag{4.34}$$

yazılabilir. Benzer şekilde, her $(t,y)\in[a,b]\times[c,d]$ için

$$f(t,y)=\frac{1}{d-c}\int_{c}^{d}f(t,s)ds+\frac{1}{d-c}\int_{c}^{d}q(y,s)\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}ds \tag{4.35}$$

yazılır. (4.35) formülü $\frac{\partial f(\cdot,y)}{\partial t}$ için de her $(t,y)\in[a,b]\times[c,d]$ için

$$\frac{\partial f(t,y)}{\partial t}=\frac{1}{d-c}\int_{c}^{d}\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}ds+\frac{1}{d-c}\int_{c}^{d}q(y,s)\frac{\partial f(t,s)}{\partial t\partial s}ds \tag{4.36}$$

yazılır. Böylece, (4.34)'te (4.35) ve (4.36) yerine yazılır ve Fubini teoremi kullanılırsa,

$$f(x,y)=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d f(t,s)ds+\frac{1}{d-c}\int_c^d q(y,s)\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}ds\right]dt$$

$$+\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}ds\right.$$

$$\left.+\frac{1}{d-ct}\int_c^d q(y,s)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}ds\right]dt$$

$$=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\left[\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt+\int_a^b\int_c^d q(y,s)\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}dsdt\right.$$

$$\left.+\int_a^b\int_c^d p(x,t)\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}dsdt+\int_a^b\int_c^d p(x,t)q(y,s)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt\right]$$

elde edilir ki bu da (4.30) özdeşliği olur.

Sonuç 4.3.1.1. Teorem 4.3.1.1'deki gibi, $p_0:[a,b]\to R$, $q_0:[c,d]\to R$ için

$$p_0(t):=\begin{cases} t-a, & t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right] \\ t-b, & t\in\left(\frac{a+b}{2},b\right] \end{cases} \quad \text{ve} \quad q_0(s):=\begin{cases} s-c, & s\in\left[c,\frac{c+d}{2}\right] \\ s-d, & s\in\left(\frac{c+d}{2},d\right] \end{cases}$$

olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\left[\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt+\int_a^b\int_c^d p_0(t)\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}dsdt\right.$$

$$\left.+\int_a^b\int_c^d q_0(s)\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}dsdt+\int_a^b\int_c^d p_0(t)q_0(s)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt\right] \tag{4.37}$$

dır.

Sonuç 4.3.1.2. f **,** Teorem 4.3.1.1'deki şartları sağlasın. O halde,

$$\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}$$

$$= \frac{1}{(b-a)(d-c)}\left[\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt + \int_a^b\int_c^d \left(t-\frac{a+b}{2}\right)\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}dsdt\right.$$

$$+\int_a^b\int_c^d \left(s-\frac{c+d}{2}\right)\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}dsdt$$

$$\left.+\int_a^b\int_c^d \left(t-\frac{a+b}{2}\right)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt\right] \qquad (4.38)$$

dır.

İspat. (4.30)'da $(x,y)=(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)$ alındığında

$$f(a,c)=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\left[\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt+\int_a^b\int_c^d (t-b)\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}dsdt\right.$$

$$\left.+\int_a^b\int_c^d (s-d)\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}dsdt+\int_a^b\int_c^d (t-b)(s-d)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s\partial t}dsdt\right],$$

$$f(a,d)=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\left[\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt+\int_a^b\int_c^d (t-b)\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}dsdt\right.$$

$$\left.+\int_a^b\int_c^d (s-c)\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}dsdt+\int_a^b\int_c^d (t-b)(s-c)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s\partial t}dsdt\right],$$

$$f(b,c)=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\left[\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt+\int_a^b\int_c^d (t-a)\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}dsdt\right.$$

$$\left.+\int_a^b\int_c^d (s-d)\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}dsdt+\int_a^b\int_c^d (t-a)(s-d)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s\partial t}dsdt\right],$$

$$f(b,d)=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\left[\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt+\int_a^b\int_c^d (t-a)\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}dsdt\right.$$

$$\left.+\int_a^b\int_c^d (s-c)\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}dsdt+\int_a^b\int_c^d (t-a)(s-c)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s\partial t}dsdt\right]$$

sonuçları elde edilir. Elde edilen yukarıdaki eşitlikler taraf tarafa toplanır ve 4'e bölünürse istenilen (4.38) sonuç elde edilir.

4.3.2. Bazı Sınırlar

Teorem 4.3.2.1. $f:[a,b]\times[c,d]\to R$ Teorem 4.3.1.1'deki gibi bir dönüşüm olsun. O halde, her $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$, $\|\cdot\|_p$ $(1\le p\le\infty)$ klasik p-normlar $[a,b]\times[c,d]$'de için

$$M_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\left[\frac{1}{4}(b-a)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]}{b-a}\left\|\dfrac{\partial f}{\partial t}\right\|_\infty, & \dfrac{\partial f(t,s)}{\partial t}\in L_\infty([a,b]\times[c,d]);\\[2ex] \dfrac{\left[\frac{(b-x)^{q_1+1}+(x-a)^{q_1+1}}{q_1+1}\right]^{\frac{1}{q_1}}}{(b-a)[(d-c)]^{\frac{1}{p_1}}}\left\|\dfrac{\partial f}{\partial t}\right\|_{p_1}, & \dfrac{\partial f(t,s)}{\partial t}\in L_{p_1}([a,b]\times[c,d]),\\ & p_1>1, \dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{q_1}=1;\\[2ex] \dfrac{\left[\frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]}{(b-a)(d-c)}\left\|\dfrac{\partial f}{\partial t}\right\|_1, & \dfrac{\partial f(t,s)}{\partial t}\in L_1([a,b]\times[c,d]).\end{cases}$$

$$M_2(y)=\begin{cases}\dfrac{\left[\frac{1}{4}(d-c)^2+\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2\right]}{d-c}\left\|\dfrac{\partial f}{\partial s}\right\|_\infty, & \dfrac{\partial f(t,s)}{\partial s}\in L_\infty([a,b]\times[c,d]);\\[2ex] \dfrac{\left[\frac{(d-y)^{q_2+1}+(y-c)^{q_2+1}}{q_2+1}\right]^{\frac{1}{q_2}}}{[(b-a)]^{\frac{1}{p_2}}(d-c)}\left\|\dfrac{\partial f}{\partial s}\right\|_{p_2}, & \dfrac{\partial f(t,s)}{\partial s}\in L_{p_2}([a,b]\times[c,d]),\\ & p_2>1, \dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{q_2}=1;\\[2ex] \dfrac{\left[\frac{1}{2}(d-c)+\left|y-\frac{c+d}{2}\right|\right]}{(b-a)(d-c)}\left\|\dfrac{\partial f}{\partial s}\right\|_1, & \dfrac{\partial f(t,s)}{\partial s}\in L_1([a,b]\times[c,d]).\end{cases}$$

$$M_3(x,y)$$

$$=\begin{cases} \dfrac{\left[\frac{1}{4}(b-a)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left[\frac{1}{4}(d-c)^2+\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2\right]}{(b-a)(d-c)}\left\|\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_\infty, \\ \dfrac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\in L_\infty([a,b]\times[c,d]); \\ \dfrac{\left[\frac{(b-x)^{q_3+1}+(x-a)^{q_3+1}}{q_3+1}\right]^{\frac{1}{q_3}}\left[\frac{(d-y)^{q_3+1}+(y-c)^{q_3+1}}{q_3+1}\right]^{\frac{1}{q_3}}}{(b-a)(d-c)}\left\|\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_{p_3}, \\ \dfrac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\in L_{p_3}([a,b]\times[c,d]),\ p_3>1,\ \dfrac{1}{p_3}+\dfrac{1}{q_3}=1; \\ \dfrac{\left[\frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]\left[\frac{1}{2}(d-c)+\left|y-\frac{c+d}{2}\right|\right]}{(b-a)(d-c)}\left\|\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_1, \\ \dfrac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\in L_1([a,b]\times[c,d]). \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\left|f(x,y)-\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq M_1(x)+M_2(y)+M_3(x,y) \qquad (4.39)$$

eşitsizliği vardır.

İspat. (4.30) tanımını kullanılarak,

$$\left|f(x,y)-\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq\left|\frac{1}{(b-a)(d-c)}\left[\int_a^b\int_c^d p(x,t)\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}dsdt\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_a^b\int_c^d q(y,s)\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}dsdt+\int_a^b\int_c^d p(x,t)q(y,s)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt\right]\right|$$
$$\leq\frac{1}{(b-a)(d-c)}\left[\int_a^b\int_c^d|p(x,t)|\left|\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\right|dsdt\right.$$

$$+\int_a^b\int_c^d |q(y,s)|\left|\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}\right|dsdt+\int_a^b\int_c^d |p(x,t)||q(y,s)|\left|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\right|dsdt\Bigg] \qquad (4.40)$$

yazılır. Buradan

$$\int_a^b\int_c^d |p(t,s)|\left|\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\right|dsdt$$

$$\leq\begin{cases}\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_\infty \int_a^b\int_c^d |p(x,t)|dsdt, & \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\in L_\infty([a,b]\times[c,d]);\\ \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_{p_1}\left(\int_a^b\int_c^d |p(x,t)|^{q_1}dsdt\right)^{\frac{1}{q_1}}, & \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\in L_{p_1}([a,b]\times[c,d]),\\ & p_1>1, \frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1;\\ \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_1 \sup_{t\in[a,b]}|p(x,t)|, & \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\in L_1([a,b]\times[c,d]).\end{cases} \qquad (4.41)$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned}&\int_a^b\int_c^d |p(x,t)|dsdt\\ &=\int_c^d\left(\int_a^b |p(x,t)|dt\right)ds\\ &=(d-c)\left[\int_a^x |p(x,t)|dt+\int_x^b |p(x,t)|dt\right]\\ &=(d-c)\left[\int_a^x (t-a)dt+\int_x^b (b-t)dt\right]\\ &=(d-c)\left[\frac{1}{4}(b-a)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left[\int_a^b\int_c^d |p(x,t)|^{q_1}dsdt\right]^{\frac{1}{q_1}}\\ &=\left[\int_c^d\left(\int_a^b |p(x,t)|^{q_1}dt\right)ds\right]^{\frac{1}{q_1}}\\ &=(d-c)^{\frac{1}{q_1}}\left[\int_a^x |p(x,t)|^{q_1}dt+\int_x^b |p(x,t)|^{q_1}dt\right]^{\frac{1}{q_1}}\end{aligned}$$

$$= (d-c)^{\frac{1}{q_1}} \left[\int_a^x (t-a)^{q_1} dt + \int_x^b (b-t)^{q_1} dt \right]^{\frac{1}{q_1}}$$

$$= (d-c)^{\frac{1}{q_1}} \left[\frac{(b-x)^{q_1+1} + (x-a)^{q_1+1}}{q_1+1} \right]^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\sup_{t\in[a,b]} |p(x,t)| = \max\{x-a, b-x\} = \frac{b-a}{2} + \left| x - \frac{a+b}{2} \right|$$

ve sonra (4.41) yardımıyla,

$$\int_a^b \int_c^d |p(x,t)| \left| \frac{\partial f(t,s)}{\partial t} \right| dsdt, \tag{4.42}$$

$$\leq \begin{cases} (d-c)\left[\frac{1}{4}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right] \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_\infty, & \frac{\partial f(t,s)}{\partial t} \in L_\infty([a,b]\times[c,d]); \\ (d-c)^{\frac{1}{q_1}} \left[\frac{(b-x)^{q_1+1} + (x-a)^{q_1+1}}{q_1+1} \right]^{\frac{1}{q_1}} \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{p_1}, & \frac{\partial f(t,s)}{\partial t} \in L_{p_1}([a,b]\times[c,d]), \\ & p_1 > 1, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1; \\ \left[\frac{1}{2}(b-a) + \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \right] \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_1, & \frac{\partial f(t,s)}{\partial t} \in L_1([a,b]\times[c,d]). \end{cases} \tag{4.43}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\int_a^b \int_c^d |q(y,s)| \left| \frac{\partial f(t,s)}{\partial s} \right| dsdt, \tag{4.44}$$

$$\leq \begin{cases} (b-a)\left[\frac{1}{4}(d-c)^2 + \left(y - \frac{c+d}{2} \right)^2 \right] \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_\infty, & \frac{\partial f(t,s)}{\partial s} \in L_\infty([a,b]\times[c,d]); \\ (b-a)^{\frac{1}{q_2}} \left[\frac{(d-y)^{q_2+1} + (y-c)^{q_2+1}}{q_2+1} \right]^{\frac{1}{q_2}} \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{p_2}, & \frac{\partial f(t,s)}{\partial s} \in L_{p_2}([a,b]\times[c,d]), \\ & p_2 > 1, \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 1; \\ \left[\frac{1}{2}(d-c) + \left| y - \frac{c+d}{2} \right| \right] \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_1, & \frac{\partial f(t,s)}{\partial s} \in L_1([a,b]\times[c,d]), \end{cases} \tag{4.45}$$

yazılır. Ek olarak,

$$\int_a^b \int_c^d |p(x,t)||q(y,s)|\left|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}\right| dsdt, \tag{4.46}$$

$$\leq \begin{cases} \left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}\right\|_\infty \int_a^b |p(x,t)|dt \int_c^d q(y,s)ds, \\ \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s} \in L_\infty([a,b]\times[c,d]); \\ \left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}\right\|_{p_3} \left(\int_a^b |p(x,t)|^{q_3} dt\right)^{\frac{1}{q_3}} \left(\int_c^d |q(y,s)|^{q_3} ds\right)^{\frac{1}{q_3}}, \\ \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s} \in L_{p_3}([a,b]\times[c,d]),\ p_3 > 1, \frac{1}{p_3} + \frac{1}{q_3} = 1; \\ \left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}\right\|_1 \sup_{t\in[a,b]} |p(x,t)| \sup_{s\in[c,d]} |q(y,s)|, \\ \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s} \in L_1([a,b]\times[c,d]). \end{cases} \tag{4.47}$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{1}{4}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left[\frac{1}{4}(d-c)^2 + \left(y - \frac{c+d}{2}\right)^2\right]\left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}\right\|_\infty, \\ \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s} \in L_\infty([a,b]\times[c,d]); \\ \left[\frac{(b-x)^{q_3+1} + (x-a)^{q_3+1}}{q_3+1}\right]^{\frac{1}{q_3}}\left[\frac{(d-y)^{q_3+1} + (y-c)^{q_3+1}}{q_3+1}\right]^{\frac{1}{q_3}}\left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}\right\|_{p_3}, \\ \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s} \in L_{p_3}([a,b]\times[c,d]),\ p_3 > 1, \frac{1}{p_3} + \frac{1}{q_3} = 1; \\ \left[\frac{1}{2}(b-a) + \left|x - \frac{a+b}{2}\right|\right]\left[\frac{1}{2}(d-c) + \left|y - \frac{c+d}{2}\right|\right]\left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}\right\|_1, \\ \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s} \in L_1([a,b]\times[c,d]). \end{cases}$$

bulunur ki bu da teoremi ispatlar.

Aşağıdaki sonuç, $x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{c+d}{2}$ alınarak bulunur.

Sonuç 4.3.2.1. Teorem 4.3.1.1'deki varsayımlar altında,

$$\tilde{M}_1 := \begin{cases} \frac{1}{4}(b-a)\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_\infty, & \frac{\partial f}{\partial t} \in L_\infty([a,b]\times[c,d]); \\ \frac{1}{2}\left[\frac{(b-a)^{\frac{1}{q_1}}}{(q_1+1)^{\frac{1}{q_1}}(d-c)^{\frac{1}{p_1}}}\right]\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_{p_1}, & \frac{\partial f}{\partial t} \in L_{p_1}([a,b]\times[c,d]), \\ & p_1>1, \frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1; \\ \frac{1}{2(d-c)}\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_1, & \frac{\partial f}{\partial t} \in L_1([a,b]\times[c,d]). \end{cases}$$

$$\tilde{M}_2 := \begin{cases} \frac{1}{4}(d-c)\left\|\frac{\partial f}{\partial s}\right\|_\infty, & \frac{\partial f}{\partial s} \in L_\infty([a,b]\times[c,d]); \\ \frac{1}{2}\left[\frac{(d-c)^{\frac{1}{q_2}}}{(q_2+1)^{\frac{1}{q_2}}(b-a)^{\frac{1}{p_2}}}\right]\left\|\frac{\partial f}{\partial s}\right\|_{p_2}, & \frac{\partial f}{\partial s} \in L_{p_2}([a,b]\times[c,d]), \\ & p_2>1, \frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=1; \\ \frac{1}{2(b-a)}\left\|\frac{\partial f}{\partial s}\right\|_1, & \frac{\partial f}{\partial s} \in L_1([a,b]\times[c,d]). \end{cases}$$

$$\tilde{M}_3 := \begin{cases} \frac{1}{16}(b-a)(d-c)\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_\infty, & \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s} \in L_\infty([a,b]\times[c,d]); \\ \frac{1}{4}\frac{(b-a)^{\frac{1}{q_3}}(d-c)^{\frac{1}{q_3}}}{(q_3+1)^{\frac{2}{q_3}}}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_{p_3}, & \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s} \in L_{p_3}([a,b]\times[c,d]), \\ & p_3>1, \frac{1}{p_3}+\frac{1}{q_3}=1; \\ \frac{1}{4}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_1, & \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s} \in L_1([a,b]\times[c,d]). \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) - \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt \right|$$

$$\leq \tilde{M}_1 + \tilde{M}_2 + \tilde{M}_3 \tag{4.48}$$

eşitsizliği yazılır.

Sonuç 4.3.1.2'de (4.38) eşitsizliği kullanılır ve Teorem 4.3.2.1'de benzer argümanlar kullanırsa aşağıdaki yamuk tipli eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.3.2.2. Teorem 4.3.1.1'deki varsayımlar altında, $\tilde{M}_i \; (i=1,2,3)$, Sonuç 4.3.2.1'deki gibi verilmiş olsun. O halde,

$$\left|\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}-\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|$$

$$\leq \tilde{M}_1+\tilde{M}_2+\tilde{M}_3 \tag{4.49}$$

eşitsizliği yazılır.

4.3.3. Hacim Formülü İçin Uygulamalar

$I_n := a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b, J_m := c = y_0 < y_1 < ... < y_{m-1} < y_m = d$ keyfi parçalanmalar, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i=0,...,n-1)$, $\eta_j \in \lfloor y_j + y_{j+1} \rfloor$ $(j=0,...,m-1)$ ara noktalar olsun.

$h_i := x_{i+1} - x_i, l_j := y_{j+1} - y_j$, $i=0,...,n-1$, $j=0,...,m-1$ olmak üzere,

$$R(f, I_n, J_m, \xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} h_i l_j f(\xi_i, \eta_j) \tag{4.50}$$

Riemann toplamını ele alalım.

$$\left|f(x,y)-\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|, \; (x,y)\in[a,b]\times[c,d] \tag{4.51}$$

Teorem 4.3.2.1 kullanarak yirmi yedi farklı eşitsizliğin sınır değerleri verilir. Her $[x,y]\in[a,b]\times[c,d]$ için

$$\left|f(x,y)-\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{4}(b-a)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_\infty$$

$$+\frac{1}{d-c}\left[\frac{1}{4}(d-c)^2+\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2\right]\left\|\frac{\partial f}{\partial s}\right\|_\infty$$

$$+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\left[\frac{1}{4}(b-a)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{4}(d-c)^2+\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2\right]\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_\infty \tag{4.52}$$

yazılır. Bu eşitsizliği kullanılarak, aşağıdaki teorem verilebilinir.

Teorem 4.3.3.1. $f:[a,b]\times[c,d]\to R$**,** Teorem 4.3.1.1'deki gibi olsun. O halde,

$$\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt=R(f,I_n,J_m,\xi,\eta)+W(f,I_n,J_m,\xi,\eta) \tag{4.53}$$

yazılır. Burada, $R(f,I_n,J_m,\xi,\eta)$ (4.50)'de verilen Riemann toplamı tanımlandı ve $W(f,I_n,J_m,\xi,\eta)$ kalan kısım yaklaşık olarak

$$\nu(h):=\max\{h_i, i=0,...,n-1\}, \nu(l):=\max\{l_j, j=0,...,m-1\}$$

olmak üzere, her ξ,η orta noktaları için

$$|W(f,I_n,J_m,\xi,\eta)|$$

$$\leq(d-c)\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_\infty\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{4}h_i^2+\left(\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)^2\right]$$

$$+(b-a)\left\|\frac{\partial f}{\partial s}\right\|_\infty\sum_{j=0}^{m-1}\left[\frac{1}{4}l_j^2+\left(\eta_j-\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right)^2\right]$$

$$+\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_\infty\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{4}h_i^2+\left(\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)^2\right]$$

$$\times\sum_{j=0}^{m-1}\left[\frac{1}{4}l_j^2+\left(\eta_j-\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right)^2\right]$$

$$\leq\frac{1}{2}(d-c)\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_\infty\sum_{i=0}^{n-1}h_i^2+\frac{1}{2}(b-a)\left\|\frac{\partial f}{\partial s}\right\|_\infty\sum_{j=0}^{m-1}l_j^2$$

$$+\frac{1}{4}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2 \sum_{j=0}^{m-1} l_j^2$$

$$\leq \frac{1}{2}(d-c)(b-a)\left[\nu(h)\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_\infty + \nu(l)\left\|\frac{\partial f}{\partial s}\right\|_\infty + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_\infty \nu(h)\nu(l)\right] \tag{4.54}$$

dır.

İspat. (4.52) eşitsizliği $[x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}]$ aralıkları için uygulanırsa, her $i=0,...,n-1$, $j=0,...,m-1$ için

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(t,s)dsdt - h_i l_j f(\xi_i,\eta_j)\right|$$

$$\leq \left[\frac{1}{4}h_i^2 + \left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)^2\right] l_j \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_\infty$$

$$+\left[\frac{1}{4}l_j^2 + \left(\eta_j - \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right)^2\right] h_i \left\|\frac{\partial f}{\partial s}\right\|_\infty$$

$$+\left[\frac{1}{4}h_i^2 + \left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)^2\right]\left[\frac{1}{4}l_j^2 + \left(\eta_j - \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right)^2\right]\left\|\frac{\partial f}{\partial t\partial s}\right\|_\infty$$

dır. Buradan i, 0'dan $n-1$'e ve j, 0'dan $m-1$'e taraf tarafa toplanırsa (4.54) bulunur. Şimdi,

$$M(f, I_n, J_m) := \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} h_i l_j f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right) \tag{4.55}$$

orta-nokta ele alındığında aşağıdaki sonuçla en iyi karesel formülü içeren (4.54) eşitsizliği elde edilebilinir.

Sonuç 4.3.3.1. f, Teorem 4.3.1.1'deki gibi olmak üzere,

$$\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt = M(f, I_n, J_m) + L(f, I_n, J_m) \tag{4.56}$$

yazılır. Burada, $M(f, I_n, J_m)$, (4.55)'de ifade edilen orta-nokta formülü $L(f, I_n, J_m)$ kalan kısmın tahmini

$$\left|L(f, I_n, J_m)\right| \tag{4.57}$$

$$\leq \frac{1}{4}(d-c)\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2 + \frac{1}{4}(b-a)\left\|\frac{\partial f}{\partial s}\right\|_\infty \sum_{j=0}^{m-1} l_j^2 + \frac{1}{16}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\right\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2 \sum_{j=0}^{m-1} l_j^2$$

$$:= M_1(f, I_n, J_m)$$

$$\leq \frac{1}{4}(d-c)(b-a)\left[\nu(h)\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_\infty + \nu(l)\left\|\frac{\partial f}{\partial s}\right\|_\infty + \frac{1}{4}\nu(h)\nu(l)\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\right\|_\infty\right]$$

$$:= M_2(f, I_n, J_m)$$

bulunur.

$$T(f, I_n, J_m)$$

$$:= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} h_i l_j \cdot \frac{f(x_i, y_j) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_{i+1}, y_j) + f(x_{i+1}, y_{j+1})}{4} \tag{4.58}$$

yamuk formülü ele alınsın. O halde, Sonuç 4.3.2.2 ve Teorem 4.3.3.1'in ispatındaki benzer argümanlar kullanılırsa, aşağıdaki ifade edilir.

Sonuç 4.3.3.2. f, Teorem 4.3.1.1'deki gibi olsun. O halde,

$$\int_a^b \int_c^d f(t,s)\,ds\,dt = T(f, I_n, J_m) + P(f, I_n, J_m) \tag{4.59}$$

yazılır. $T(f, I_n, J_m)$, (4.58)'de verilen yamuk formülü ve $P(f, I_n, J_m)$ kalan kısmın tahmini, M_1 ve M_2 Sonuç 4.3.3.1'de tanımlandığı gibi olmak üzere,

$$\left|P(f, I_n, J_m)\right| \leq M_1(f, I_n, J_m) \leq M_2(f, I_n, J_m)$$

(4.60)

dır.

4.4. HÖLDER TİPLİ FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKİ EŞİTSİZLİĞİ

Hölder, Lipshitzian tanımlar. Aşağıda r -Hölder tipli fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlik verilmiştir.

Teorem 4.4.1. $f:[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]\to R$ dönüşümü $r_i\in[0,1]$, $i=1,\ldots,n$ olmak üzere, her $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_n),\bar{y}=(y_1,\ldots,y_n)\in[\bar{a},\bar{b}]:=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ için

$$\left|f(\bar{x})-f(\bar{y})\right|\le\sum_{i=0}^{n}L_i|x_i-y_i|^{r_i}\ \left(L_i\ge 0, i=1,\ldots,n\right)$$

şartını sağlıyor olsun. O halde,

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}}f(\bar{t})d\bar{t}=\int_a^b\ldots\int_a^b f(t_1,\ldots,t_n)dt_n\ldots dt_1$$

olmak üzere, her $\bar{x}\in[\bar{a},\bar{b}]$ için

$$\left|f(\bar{x})-\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)}\int_{\bar{a}}^{\bar{b}}f(\bar{t})d\bar{t}\right|$$

$$\le\sum_{i=0}^{n}\frac{L_i}{r_i+1}\left[\left(\frac{x_i-a_i}{b_i-a_i}\right)^{r_i+1}+\left(\frac{b_i-x_i}{b_i-a_i}\right)^{r_i+1}\right](b_i-a_i)^{r_i}$$

$$\le\sum_{i=0}^{n}\frac{L_i(b_i-a_i)^{r_i}}{r_i+1} \tag{4.61}$$

vardır.

İspat. Her $\bar{x},\bar{t}\in[\bar{a},\bar{b}]$ için

$$\left|f(\bar{x})-f(\bar{t})\right|\le\sum_{i=0}^{n}L_i|x_i-t_i|^{r_i}$$

yazılır. Buradan da, $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ aralığı üzerinden t üzerinden integral alınıp ve modül özellikleri kullanılırsa,

$$\left|f\left(\bar{x}\right)\int_{\bar{a}}^{\bar{b}}d\bar{t}-\int_{\bar{a}}^{\bar{b}}f\left(\bar{t}\right)d\bar{t}\right|\le\int_{\bar{a}}^{\bar{b}}\left|f\left(\bar{x}\right)-f\left(\bar{t}\right)\right|d\bar{t}$$

$$\le\sum_{i=0}^{n}L_i\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_n}^{b_n}\left|x_i-t_i\right|dt_n\ldots dt_1 \tag{4.62}$$

olur. Buradan,

$$\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_n}^{b_n}dt_n\ldots dt_1=\prod_{i=1}^{n}\left(b_i-a_i\right)$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_n}^{b_n}\left|x_i-t_i\right|^{r_i}dt_n\ldots dt_1$$

$$=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(b_j-a_j\right)\int_{a_i}^{b_i}\left|x_i-t_i\right|^{r_i}dt_i$$

$$=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(b_j-a_j\right)\left[\frac{\left(b_i-x_i\right)^{r_i+1}+\left(x_i-a_i\right)^{r_i+1}}{r_i+1}\right]$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\left(b_j-a_j\right)\frac{1}{r_i+1}\left[\left(\frac{b_i-x_i}{b_i-a_i}\right)^{r_i+1}+\left(\frac{x_i-a_i}{b_i-a_i}\right)^{r_i+1}\right]\left(b_i-a_i\right)^{r_i}$$

olduğu için (4.62) $\prod_{j=1}^{n}\left(b_j-a_j\right)$ bölünürse (4.61)'in birinci kısmı elde edilmiş olur.

Her $\alpha\le y\le\beta$ ve $p>0$ için

$$\left(y-\alpha\right)^{p+1}+\left(\beta-y\right)^{p+1}\le\left(\beta-\alpha\right)^{p+1}$$

temel eşitsizliği kullanırsa,

$$\left(\frac{b_i-x_i}{b_i-a_i}\right)^{r_i+1}+\left(\frac{x_i-a_i}{b_i-a_i}\right)^{r_i+1}\le 1,\ i=1,\ldots,n$$

elde edilir ve (4.61)'in son kısmı ispatlanmış olur.

Sonuç 4.4.1. Teorem 4.4.1'in varsayımları altında,

$$\left| f\left(\frac{a_1+b_1}{2},...,\frac{a_n+b_n}{2}\right) - \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)} \int_{a_1}^{b_1}...\int_{a_n}^{b_n} f(t_1,...,t_n)\,dt_n...dt_1 \right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i (b_i-a_i)^{r_i}}{2^{r_i}(r_i+1)} \tag{4.63}$$

orta-nokta eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik, (4.61)'in en iyi eşitsizliği olarak yazılabilir.

İspat. $h_p : [\alpha,\beta] \to R$, $h_p(y) = (y-\alpha)^{p+1} + (\beta - y)^{p+1}$ $(p>0)$ dönüşümünün $y_0 = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ noktasında en büyük değeri var ve

$$\inf_{y\in[\alpha,\beta]} h_p(y) = \frac{(\beta-\alpha)^{p+1}}{2^p}$$

dır. Sonuç olarak, $x = \dfrac{a_i+b_i}{2}$ alınarak istenilen (4.63) eşitsizliği (4.61)'in en iyi eşitsizliği alınabilir.

Aşağıdaki yamuk tipli eşitsizlik yazılır.

Sonuç 4.4.2. Yukarıdaki varsayımlar altında,

$$\left| \frac{f(a_1,...,a_n) + f(b_1,...,b_n)}{2} - \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)} \int_{a_1}^{b_1}...\int_{a_n}^{b_n} f(t_1,...,t_n)\,dt_n...dt_1 \right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i (b_i-a_i)^{r_i}}{r_i+1} \tag{4.64}$$

yazılır.

İspat. (4.61)'de $\bar{x}=\bar{a}$ ve $\bar{x}=\bar{b}$ alındığında elde edilen eşitsizlikler toplanır ve üçgen eşitsizliği kullanılarak (4.64) elde edilir.

Özel durum için f Lipschitzian dönüşümü alınırsa, yani, her $\bar{x},\bar{y}\in[\bar{a},\bar{b}]$ için

$$|f(x_1,...,x_n)-f(y_1,...,y_n)|\leq\sum_{i=1}^{n}L_i|x_i-y_i| \tag{4.65}$$

bu durumda, aşağıdaki sonuç yazılır.

Sonuç 4.4.3. f , L_i sabitli Lipschitzian dönüşümü olsun. Bu durumda her $\bar{x}\in[\bar{a},\bar{b}]$ için

$$\left|f(\bar{x})-\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)}\int_{\bar{a}}^{\bar{b}}f(\bar{t})d\bar{t}\right|\leq\sum_{i=1}^{n}L_i\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{x_i-\frac{a_i+b_i}{2}}{b_i-a_i}\right)^2\right](b_i-a_i) \tag{4.66}$$

dır. Burada $\frac{1}{4}$ en iyi sabittir.

İspat. (4.61)'de $r_i=1\ (i=1,...,n)$ seçilirse,

$$\left|f(x_1,...,x_n)-\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)}\int_{a_1}^{b_1}...\int_{a_n}^{b_n}f(t_1,...,t_n)dt_n...dt_1\right|$$
$$\leq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}L_i\left[\left(\frac{x_i-a_i}{b_i-a_i}\right)^2+\left(\frac{b_i-x_i}{b_i-a_i}\right)^2\right](b_i-a_i)$$

olur. Basit hesaplama ile, eşitsizliğin sağ tarafındaki ifade

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_i-a_i}{b_i-a_i}\right)^2+\left(\frac{b_i-x_i}{b_i-a_i}\right)^2\right]=\frac{1}{4}+\left(\frac{x_i-\frac{a_i+b_i}{2}}{b_i-a_i}\right)^2,\ i=1,...,n$$

olur. Bu ifade (4.66)'da yerine yazılırsa, istenilen sonuç elde edilmiş olunur.

$\frac{1}{4}$ sabitinin net ispatı, (4.66) eşitsizliğinde bazı pozitif sabitler $c_i > 0$ için verir, yani, her $\bar{x} \in [\bar{a}, \bar{b}]$ için

$$\left| f(\bar{x}) - \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} f(\bar{t}) d\bar{t} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} L_i \left[c_i + \left(\frac{x_i - \frac{a_i + b_i}{2}}{b_i - a_i} \right)^2 \right] (b_i - a_i) \tag{4.67}$$

dır. (4.67)'de $f(x_1,\dots,x_n) = x_i \ (i = 1,\dots,n)$ seçilirse, her $x_i \in [a_i, b_i]$ için

$$\left| x_i - \frac{a_i + b_i}{2} \right| \leq \left[c_i + \frac{\left(x_i - \frac{a_i + b_i}{2} \right)^2}{(b_i - a_i)^2} \right] (b_i - a_i)$$

bulunur. $x_i = a_i$ yazılırsa,

$$\frac{b_i - a_i}{2} \leq \left(c_i + \frac{1}{4} \right) (b_i - a_i)$$

olur. Buradan, $c_i \geq \frac{1}{4}$ olur. Burada $\frac{1}{4}$'ün en iyi sabit olduğu söylenir.

Sonuç 4.4.4. f , Sonuç 4.4.2'deki gibi ise,

a) Orta-nokta formülü

$$\left| f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2} \right) - \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(t_1,\dots,t_n) dt_n \dots dt_1 \right|$$

$$\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} L_i (b_i - a_i) \tag{4.68}$$

dır.

b) Yamuk formülü

$$\left| \frac{f(a_1,...,a_n)+f(b_1,...,b_n)}{2} - \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)} \int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_n}^{b_n} f(t_1,...,t_n)dt_n...dt_1 \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i(b_i-a_i)$$

dır.

Uyarı 4.4.1. Pratik uygulamalarda, $f:[\bar{a},\bar{b}]\to R$, $[\bar{a},\bar{b}]$ üzerinde $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ kısmi türevleri var ve sınırlı, yani,

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} := \sup_{\bar{x}\in(\bar{a},\bar{b})} \left| \frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} \right| < \infty$$

olsun. O halde,

$$\left| f(\bar{x}) - \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} f(\bar{t})d\bar{t} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{x_i - \frac{a_i+b_i}{2}}{b_i-a_i} \right)^2 \right] (b_i-a_i)$$

Ostrowski tipli eşitsizlik vardır. Burada, $\frac{1}{4}$ en iyi sabittir.

4.4.1. Ağırlıklı Durum

Aşağıdaki Teorem 4.4.1'in genelleştirilmiş halidir [49].

Teorem 4.4.1.1. f, $w:[\bar{a},\bar{b}]\to R$ olsun. f, r-Hölder tipli ve L_i sabitlerle ve $r_i\in[0,1]$ $(i=1,...,n)$ olsun. w, $[\bar{a},\bar{b}]$ üzerinde integrallenebilir, bu aralık üzerinde negatif olmayan ve

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{x})d\bar{x} := \int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_n}^{b_n} w(x_1,...,x_n)dx_n...dx_1 > 0$$

olsun. O halde, her $\bar{x} \in [\bar{a}, \bar{b}]$ için

$$\left| f(\bar{x}) - \frac{1}{\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y}} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) f(\bar{y}) d\bar{y} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} L_i \frac{\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} |x_i - y_i|^{r_i} w(\bar{y}) d\bar{y}}{\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y}} \tag{4.69}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Teorem 4.4.1'in ispatına benzer şekilde, f, r-Hölder tipli L_i sabitleriyle ve r_i $(i = 1, \ldots, n)$ olmak üzere, her $\bar{x}, \bar{y} \in [\bar{a}, \bar{b}]$ için

$$\left| f(\bar{x}) - f(\bar{y}) \right| < \sum_{i=1}^{n} L_i |x_i - y_i|^{r_i}$$

yazılabilir. $w(\bar{y}) \geq 0$ çarpılır ve $[\bar{a}, \bar{b}]$ üzerinde y'ye göre integral alınırsa

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left| f(\bar{x}) - f(\bar{y}) \right| w(\bar{y}) d\bar{y} \leq \sum_{i=1}^{n} L_i \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} |x_i - y_i|^{r_i} w(y_1, \ldots, y_n) dy_n \ldots dy_1 \tag{4.70}$$

olur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} &\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left| f(\bar{x}) - f(\bar{y}) \right| w(\bar{y}) d\bar{y} \\ &\geq \left| \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left(f(\bar{x}) - f(\bar{y}) \right) w(\bar{y}) d\bar{y} \right| \\ &= \left| f(\bar{x}) \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y} - \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} f(\bar{y}) w(\bar{y}) d\bar{y} \right| \end{aligned} \tag{4.71}$$

yazılır. (4.70) ve (4.71) birleştirilir ve $\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y} > 0$ bölünürse, istenilen (4.69) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Uyarı 4.4.1.1. f , bir dönüşüm L_i sabitleriyle,

$$\left| f(\bar{x}) - \frac{1}{\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y}} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) f(\bar{y}) d\bar{y} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} L_i \frac{\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} |x_i - y_i|^{r_i} w(\bar{y}) d\bar{y}}{\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y}}$$

bulunur [50].

Sonuç 4.4.1.1. Teorem 4.4.1.1'deki varsayımlar altında, her $\bar{x} \in [\bar{a}, \bar{b}]$ için

$$\left| f(\bar{x}) - \frac{1}{\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y}} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) f(\bar{y}) d\bar{y} \right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} L_i \left[\frac{b_i - a_i}{2} + \left| x_i - \frac{a_i + b_i}{2} \right| \right] \tag{4.72}$$

yazılır.

İspat.

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} |x_i - y_i|^{r_i} w(\bar{y}) d\bar{y}$$
$$\leq \sup_{\bar{y} \in [\bar{a}, \bar{b}]} |x_i - y_i|^{r_i} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y}$$
$$= \max\{|x_i - a_i|, |x_i - b_i|\} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y}$$
$$= \max\{x_i - a_i, b_i - x_i\} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y}$$
$$= \left[\frac{b_i - a_i}{2} + \left| x_i - \frac{a_i + b_i}{2} \right| \right] \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y}$$

yazılır. Buradan,

$$\sum_{i=1}^{n} L_i \frac{\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} |x_i - y_i|^{r_i} w(\bar{y}) d\bar{y}}{\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y}} \leq \sum_{i=1}^{n} L_i \left[\frac{b_i - a_i}{2} + \left| x_i - \frac{a_i + b_i}{2} \right| \right]$$

dır. (4.69) yardımıyla, istenen (4.72) eşitsizlik bulunur.

Diğer bir eşitsizlik aşağıdaki gibidir.

Sonuç 4.4.1.2. Teorem 4.4.1.1'deki varsayımları altında, her $\bar{x} \in [\bar{a}, \bar{b}]$ için

$$\left| f(\bar{x}) - \frac{1}{\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y}} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) f(\bar{y}) d\bar{y} \right|$$

$$\leq \frac{1}{\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y}} \cdot \sup_{\bar{y} \in [\bar{a}, \bar{b}]} w(\bar{y}) \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} L_i \left[\frac{(b_i - x_i)^{r_i+1} + (x_i - a_i)^{r_i+1}}{(r_i + 1)(b_i - a_i)} \right] \tag{4.73}$$

yazılır.

İspat.

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} |x_i - y_i|^{r_i} w(\bar{y}) d\bar{y}$$

$$\leq \sup_{\bar{y} \in [\bar{a}, \bar{b}]} w(\bar{y}) \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} |x_i - y_i|^{r_i} d\bar{y}$$

$$= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (b_j - a_j) \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} |x_i - y_i|^{r_i} dy_i$$

$$= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (b_j - a_j) \left[\frac{(b_i - x_i)^{r_i+1} + (x_i - a_i)^{r_i+1}}{r_i + 1} \right]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \left[\frac{(b_i - x_i)^{r_i+1} + (x_i - a_i)^{r_i+1}}{(r_i + 1)(b_i - a_i)} \right]$$

bulunur. Şimdi, (4.69) yardımıyla (4.73) elde edilir.

Son olarak, Hölder eşitsizliğiyle aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 4.4.1.3. Teorem 4.4.1.1'deki varsayımlarla, her $\bar{x} \in [\bar{a}, \bar{b}]$ için

$$\left| f(\bar{x}) - \frac{1}{\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y}} \right|$$

$$\leq \frac{\left(\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left[w(\bar{y})\right]^q d\bar{y}\right)^{\frac{1}{q}}}{\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w(\bar{y}) d\bar{y}} \prod_{j=1}^{n} \left(b_j - a_j\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{n} L_i \left[\frac{\left(b_i - x_i\right)^{pr_i+1} + \left(x_i - a_i\right)^{pr_i+1}}{\left(pr_i + 1\right)\left(b_i - a_i\right)} \right]. \tag{4.74}$$

İspat. Çok katlı integraller için Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa,

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left|x_i - y_i\right|^{r_i} w(\bar{y}) d\bar{y} \leq \left(\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left[w(\bar{y})\right]^q d\bar{y}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left|x_i - y_i\right|^{pr_i} d\bar{y}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.75}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} &\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left|x_i - y_i\right|^{pr_i} d\bar{y} \\ &= \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(b_j - a_j\right) \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left|x_i - y_i\right|^{r_i} dy_i \\ &= \prod_{j=1}^{n} \left(b_j - a_j\right) \left[\frac{\left(b_j - x_i\right)^{pr_i+1} + \left(x_i - a_i\right)^{pr_i+1}}{\left(pr_i + 1\right)\left(b_i - a_i\right)} \right] \end{aligned}$$

dır. (4.75) yardımıyla,

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left|x_i - y_i\right|^{pr_i} d\bar{y} \leq \prod_{j=1}^{n} \left(b_j - a_j\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left[w(\bar{y})\right]^q d\bar{y}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\frac{\left(b_i - x_i\right)^{pr_i+1} + \left(x_i - a_i\right)^{pr_i+1}}{\left(pr_i + 1\right)\left(b_i - a_i\right)} \right]^{\frac{1}{p}}$$

yazılır. (4.69) kullanılarak, istenilen (4.74) eşitsizliği bulunur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, temel analiz bilgisiyle çok değişkenli fonksiyonlar ve ağırlıklı Montgomery özdeşliğini elde ederek bu özdeşlik yardımıyla yeni çok katlı integraller için Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edildi. Özellikle Peano çekirdeğinin seçimine bağlı olarak yeni özdeşlikler ve bu özdeşlikler yardımıyla yeni birçok integral eşitsizlikleri elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

[1] G.H. Hardy, J.E. Littlewood ve G. Polya, *Inequalities*, Cambridge, İngiltere: Cambridge Universty Press, 1934.

[2] E.F. Beckenbach ve R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Almanya: Springer-Verlag, 1965.

[3] D.S. Mitrinovic, *Analytic Inequalities*, Berlin, Almanya: Springer-Verlag, 1970.

[4] S.S. Dragomir ve T. M. Rassias, *Ostrowski type inequalities and Applications in numerical integration*, Dordrecht, Hollanda: Kluwer Academic, 2002, böl. 1, ss. 1-63.

[5] A.M. Ostrowski, "Über die Absolutabweichung einerdiiferentiebaren Funktion van ihrem Integralmittewert," *Commentarii Mathematici Helvetici*, ss. 226-227, 1938.

[6] N. Ujevic, "Sharp inequalities of Simpson type and Ostrowski type," *Computers & Mathematics with Applications*, c. 48, ss. 145–151, 2004.

[7] N. Ujevic, "Perturbations of an Ostrowski type inequality and applications," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, c. 32 s. 8, ss. 491–500, 2002.

[8] G.V. Milovanovic ve J.E. Pecaric, "On generalization of the inequality of A. Ostrowski and some related applications," *Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i fizika*, ss. 155–158, 1976.

[9] B.G. Pachpatte, *Mathematical Inequalities*, North-Holland, Hollanda: Elsevier, 2005.

[10] S.S. Dragomir ve S. Wang, "An inequality of Ostrowski-Grüss type and its applications to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules" *Computers & Mathematics with Applications*, c. 33 s. 11, ss.15-20, 1997.

[11] S.S. Dragomir, P. Cerone and J. Roumeliotis, "A new generalization of Ostrowski integral inequality for mappings whose derivatives are bounded and applications in numerical integration and for special means," *Applied Mathematics Letters*, c. 13, s. 1, ss. 19–25, 2000.

[12] M. Matic, J.E. Pecaric and N. Ujevic, "Improvement and further generalization of inequalities of Ostrowski-Grüss type," *Computers & Mathematics with Applications*, c. 39, ss. 161–175, 2000.

[13] P.L. Cebysev, "Sur les expressions approximatives des integrales definies par les aures prises entre les memes limites," *Proc. Math. Soc. Charkov*, c. 2, ss. 93–98, 1982.

[14] B.G. Pachpatte, "A note on Ostrowski like inequalities," *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, c. 6 s. 4, 2005.

[15] P. Cerone, S.S. Dragomir ve J. Roumelotis, "Some Ostrowski-type inequalities for n-time differentiable mappings and applications," *Demonstratio*

Mathematica, c. 32, s. 4, ss. 697–712, 1999.

[16] P. Cerone, S.S. Dragomir ve J. Roumelotis, "An inequality of Ostrowski-Grüss type for twice differentiable mappings and applications in numerical integration," *Kyungpook Mathematical Journal.*, c. 39, ss. 333–341, 1999.

[17] P. Cerone, S.S. Dragomir ve J. Roumelotis, "An inequality of Ostrowski type for mappings whose second derivatives are bounded and applications," *East Asian Journal on Applied Mathematics*, c. 15, s. 1, ss. 1–9, 1999.

[18] S.S. Dragomir ve R.P. Agarwal, "Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and trapezoidal formula," *Applied Mathematics Letters*, c. 11, s. 5, ss. 91-95, 1998.

[19] S.S. Dragomir ve N.S. Barnett, "An Ostrowski type inequality for mappings whose second derivatives are bounded and applications," *RGMIA Res. Rep. Coll.*, c. 1, sayı 2, ss. 69–77, 1998.

[20] S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce, "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications," *Mathematics Preprint Archive*, c. 2003, s. 3, ss. 463-817, 2003.

[21] S.S. Dragomir ve S. Wang, "A new inequality of Ostrowski's type in Lp-norm," *Indian Journal of Mathematics*, c. 40, s. 3, ss. 299–304, 1998.

[22] S.S. Dragomir, "On the Ostrowski integral inequality for Lipschitzian mappings and applications," *Computers & Mathematics with Applications*, c. 38, s. 11-12, ss. 33–37,1999.

[23] G. Grüss, "Über das Maximum des absoluten Betrages von," *Mathematische Zeitschrift*, c. 39, s. 1, ss. 215–226, 1935.

[24] D.S. Mitrinovic, J.E. Pecaric ve A.M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Dordrecht, Hollanda: Kluwer Academic, 1993.

[25] B.G. Pachpatte, "A note on integral inequalities involving product of two functions," *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, c. 7, s. 2, 2006.

[26] B.G. Pachpatte, "A note on Ostrowski type inequalities," *Demonstratio Mathematica*, c. 35, ss. 27–30, 2002.

[27] B.G. Pachpatte, "New inequalities of Ostrowski type for twice differentiable mappings," *Tamkang Journal of Mathematics*, c. 35, s. 3, ss. 219–226, 2004.

[28] B.G. Pachpatte, "New inequalities of Ostrowski-Grüss type," *Fasc. Math*, c. 38, ss. 97–104, 2007.

[29] B.G. Pachpatte, "New integral inequalities for differentiable functions," *Tamkang Journal of Mathematics*, c. 34, s. 3, ss. 249–253, 2003.

[30] B.G. Pachpatte, "New Ostrowski type inequalities involving the product of two functions," *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, c. 7, s. 3, 2006.

[31] B.G. Pachpatte, "On a new generalization of Ostrowski type inequality," *Tamkang Journal of Mathematics*, c. 38, s. 4, ss. 335–339, 2007.

[32] B.G. Pachpatte, "On a new generalization of Ostrowski's inequality," *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, c. 5, s. 2, 2004.

[33] B.G. Pachpatte, “On a new generalization of Ostrowski’s inequality,” *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, c. 5, s. 2, ss. 36, 2004.

[34] C.E.M. Pearce ve J. Pečarić, “Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae,” *Applied Mathematics Letters*, c. 13, s. 2, ss. 51-55, 2000.

[35] A. Saglam, M.Z. Sarikaya ve H. Yildirim, “Some new inequalities of Hermite-Hadamard's type,” *Kyungpook Mathematical Journal*, c. 50, ss. 399-410, 2010.

[36] M.Z. Sarikaya ve N. Aktan, “On the generalization some integral inequalities and their applications,” *Mathematical and Computer Modelling*, c. 54, s. 9-10, ss. 2175-2182, 2011.

[37] M.Z. Sarikaya, M. Avci ve H. Kavurmaci, “On some inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions,” *AIP Conference Proceedings*, c. 1309, s. 1, ss. 852-860, 2010.

[38] M.Z. Sarikaya, A. Saglam ve H. Yildirim, “New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex,” *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics*, c. 5, s. 3, 2012.

[39] M.Z. Sarikaya, A. Saglam ve H. Yildirim, “On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions,” *Journal of Mathematical Inequalities*, c. 2, s. 3, ss. 335-341, 2008.

[40] M.Z. Sarikaya, E. Set ve M.E. Ozdemir, “On some new inequalities of Hadamard type involving h-convex functions,” *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, c. 79, s. 2, ss. 265-272, 2010.

[41] N. Ujevic, “New bounds for the first inequality of Ostrowski-Grüss type and applications,” *Computers & Mathematics with Applications*, c. 46, ss. 421–427, 2003.

[42] D.S. Mitrinovic, J.E. Pecari ve A.M. Fink, *Inequatilies Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*, Dordrecht, Hollanda: Kluwer Academic, 1994.

[43] N.S. Barnett ve S.S. Dragomir, “An Ostrowski type inequality for double integrals and applications for cubature formulae,” *Soochow Journal of Mathematics*, c. 27, s. 1, ss. 1-10, 2001.

[44] N.S. Barnett ve S.S. Dragomir, “A note on bounds for the estimation error variance of acontinuous stream with stationary variogram,” *J. KSIAM*, c. 2 s. 2, ss. 49-56, 1998.

[45] S.S. Dragomir ve S. Wang, “A new inequality of Ostrowski’s type in L_p-norm,” *Indian Journal of Mathematics*, c. 40 s. 3, ss. 299-304,1998.

[46] N.S. Barnett, S.S. Dragomir ve P. Cerone, “An Ostrowski type inequality for double integrals in terms of n-norms and applications in numerical integration,” *Anal. Num. Theor. Approx.*, c. 2, s. 2, ss. 169-180, 1999.

[47] SS. Dragomir ve S. Wang, “A new inequality of Ostrowski's typ in L_1-norm and applications to some special means and to some numerical quadrature rules,” *Tamkang Journal of Mathematics*, c. 28, ss. 239-244, 1997.

[48] S.S. Dragomir, P. Cerone, N.S. Barnett ve J. Roumeliotis, “An inequality of the

Ostrowski’s type for double integrals and applications to cubature formulae,” *Tamkang Oxford J. Math. Sci.*, c. 16 s. 1, ss 1-16, 2000.

[49] N.S. Barnett, S.S. Dragomir ve P. Cerone, “An n-dimensional version of Ostrowski’s inequality for mappings of the Hölder’s type,” *Kyungpook Mathematical Journal*, c. 40 s. 1, ss. 65-75, 2000.

[50] G.V. Milovanic, “On some integral inequalities,” *Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i fizika*, ss. 119-124, 1975.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Aylin Aygül MALLI
Doğum Tarihi ve Yeri	: 01.03.1993
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: aylinnturkyilmaz@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2020
Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2016
Lise	Fen Bilimleri	Güner Akın Lisesi	2011

YAYINLAR

Y. ÖZDEMİR and A.A. TÜRKYILMAZ (2018). On numerical solution of the Schrödinger-parabolic equation, *AIP Conference Procecdings,*1997(1):020057