



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ESNEK VE BULANIK ESNEK KÜMELERİN DÜZGÜN VE YAKINLIK
UZAYLARINA UYGULANMASI**

DOKTORA TEZİ

İZZETTİN DEMİR

OCAK 2016

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

İzzettin DEMİR tarafından hazırlanan “Esnek ve Bulanık Esnek Kümelerin Düzgün ve Yakınlık Uzaylarına Uygulanması” isimli doktora tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 28.12.2015 tarih ve 2015/1132 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Düzce Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. Halis AYGÜN
Kocaeli Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
Uludağ Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. İlhami AMİRALİ
Düzce Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 07.01.2016

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu İzzettin DEMİR’in Matematik Anabilim Dalı’nda Doktora derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

07 Ocak 2016

İzzettin DEMİR



Çok Değerli Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ve doktora öğrenimim süresince bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, yönlendiriciliğini ve desteğini hiç esirgemeyen, tez çalışmamın ortaya çıkmasında büyük emek sarfeden, akademik alanda yeni girişimlere açık yaklaşımı ile örnek olan ve beni akademisyenliğe teşvik eden çok değerli hocam Prof. Dr. Oya Bedre ÖZBAKIR'a en derin sevgi ve saygıyla teşekkür ederim.

Bilgi ve tecrübeleri ile bu tez çalışmasında emeği olan, geniş bir çalışma imkanı sağlayan ve her konuda yardımcı olan kıymetli hocam Prof. Dr. İsmet YILDIZ'a, tüm tez izlemelerim boyunca yapmış olduğu yapıcı eleştiriler ve vermiş olduğu öneriler ile çalışmama katkıda bulunan saygı değer hocam Prof. Dr. Halis AYGÜN'e çok teşekkür ederim.

Tez çalışması süresince manevi desteklerini benden esirgemeyen başta çok değerli ve güzel kalpli arkadaşım Arş. Gör. Tuba TUNÇ olmak üzere tüm çalışma arkadaşlarıma ve hocalarıma en kalbi duygularla teşekkür ederim.

Her türlü sıkıntı ve mutluluklarımda yanımda olan ve bugünlere gelmemde çok büyük emekleri olan hayatımın en önemli varlıkları annem Muazzez DEMİR, babam Seyfettin DEMİR ve kardeşlerim Orhan ve Barışcan DEMİR'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca beni çocukları gibi seven Levent DERNEK ve ailesine en içten dileklerle teşekkür ederim.

Son olarak doktora çalışmalarım süresince, 2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkürü bir borç bilirim.

07 Ocak 2016

İzzettin Demir

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR SAYFASI	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iv
ÖZET	1
ABSTRACT	2
EXTENDED ABSTRACT	3
1. GİRİŞ	6
2. GENEL BİLGİLER	9
2.1. ESNEK KÜMELER	9
2.2. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR	16
2.3. ESNEK METRİK UZAYLAR	20
2.4. ESNEK SÜZGEÇLER	21
2.5. BULANIK ESNEK KÜMELER	22
2.6. BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR	26
3. ESNEK DÜZGÜN UZAYLAR	31
3.1. ESNEK DÜZGÜN UZAYLAR	31
3.2. ESNEK DÜZGÜN UZAYLAR İLE ÜRETİLEN ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR	36
3.3. ESNEK DÜZGÜN SÜREKLİ DÖNÜŞÜMLER	40
3.4. ESNEK YAKINLIK UZAYLAR	42
3.5. ESNEK YAKINLIK KOMŞULUKLAR VE ESNEK YAKINLIK DÖNÜŞÜMLER	45
3.6. ESNEK DÜZGÜN UZAYLAR İLE ÜRETİLEN ESNEK YAKINLIK UZAYLAR	49
3.7. BAŞLANGIÇ ESNEK YAKINLIK YAPISI	51
3.8. ESNEK YIĞILMALAR	55

4. SE-DÜZGÜN UZAYLAR	64
4.1. SE-DÜZGÜN UZAYLAR	64
4.2. ESNEK ε -UZAKLIK DÖNÜŞÜMÜ	68
4.3. SABİT ESNEK ELEMAN TEOREMLERİ	70
5. BULANIK ESNEK DÜZGÜN UZAYLAR	80
5.1. BULANIK ESNEK SÜZGEÇLER	80
5.2. BULANIK ESNEK SÜZGEÇ YAKINSAKLIĞI	82
5.3. ULTRA BULANIK ESNEK SÜZGEÇLER	89
5.4. DOYGUN BULANIK ESNEK SÜZGEÇLER	94
5.5. BULANIK ESNEK KOMŞULUK SİSTEMİ	99
5.6. BULANIK ESNEK DÜZGÜN UZAYLAR	104
5.7. BULANIK ESNEK DÜZGÜN SÜREKLİ DÖNÜŞÜMLER	115
6. BULANIK ESNEK YAKINLIK UZAYLAR	118
6.1. BULANIK ESNEK YAKINLIK UZAYLAR	118
6.2. BULANIK ESNEK YAKINLIK KOMŞULUKLAR VE BULANIK ESNEK YAKINLIK DÖNÜŞÜMLER	123
6.3. BAŞLANGIÇ BULANIK ESNEK YAKINLIK YAPISI	128
6.4. BULANIK ESNEK YIĞILMALAR	132
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	139
8. KAYNAKLAR	140
ÖZGEÇMİŞ	147

SİMGELER VE KISALTMALAR

\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^+	Pozitif reel sayılar kümesi
J, Λ	İndeks kümesi
I	[0,1] kapalı aralığı
I_0	(0,1] aralığı
$\vee (\wedge)$	Supremum (İnfimum)
\circ	Bileşke işlemi
X, Y, \dots	Klasik kümeler
χ_A	A klasik kümesinin karakteristik fonksiyonu
E, K, \dots	Parametre kümeleri
$\mathcal{P}(X)$	X in kuvvet kümesi
μ	Bulanık küme
$0_X (1_X)$	Boş (Mutlak) bulanık küme
I^X	X üzerindeki tüm bulanık kümelerin ailesi
F, G, H, \dots	Esnek kümeler
$\tilde{\emptyset}$	Boş (bulanık) esnek küme
\tilde{X}	Mutlak (bulanık) esnek küme
$S(X, E)$	E parametresine göre X üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi
x^e, y^k, \dots	Esnek noktalar
$\tilde{\in}$	Esnek ya da bulanık esnek noktaların aitliği
$SP(X)$	X üzerindeki tüm esnek noktaların ailesi
$\mathcal{N}(x^e)$	x^e esnek noktasının tüm esnek komşuluklarının ailesi
$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dots$	Esnek elemanlar
$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \dots$	Esnek reel sayılar
$\tilde{\in}$	Esnek elemanların aitliği
$\mathbb{R}(E)^*$	Negatif olmayan tüm esnek reel sayıların ailesi
X^E	E parametresine göre X üzerindeki tüm esnek elemanların ailesi

\mathcal{R}	Esnek bağıntı
(X, \mathcal{R}, E)	Esnek sıralı küme
f, g, h, \dots	Bulanık esnek kümeler
$FS(X, E)$	E parametresine göre X üzerindeki tüm bulanık esnek kümelerin ailesi
e_{x^α}	Bulanık esnek nokta
$FSP(X)$	X üzerindeki tüm bulanık esnek noktaların ailesi
$\mathcal{N}(e_{x^\alpha})$	e_{x^α} bulanık esnek noktasının tüm bulanık esnek komşuluklarının ailesi
\mathcal{N}_x	$x \in X$ noktasının tüm bulanık esnek komşuluklarının ailesi



ÖZET

ESNEK VE BULANIK ESNEK KÜMELERİN DÜZGÜN VE YAKINLIK UZAYLARINA UYGULANMASI

İzzettin DEMİR
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Eş Danışman: Prof. Dr. Oya Bedre ÖZBAKIR
Ocak 2016, 148 sayfa

Bu tez çalışmasında, öncelikle esnek küme teorisi kullanılarak esnek düzgün uzaylar tanımlanmış ve bu uzaylar yardımıyla bir esnek topolojik uzay elde edilmiştir. Esnek yakınlık uzaylarıyla ilgili özellikler incelenmiş ve esnek düzgün uzaylar ile ilişkisi araştırılmıştır. Sabit nokta teorisi üzerinde çalışabilmek için esnek elemanlar yardımıyla bir se -düzgün uzay kavramı tanımlanmıştır. Daha sonra bu uzay üzerinde sabit esnek eleman teoremleri elde edilmiştir. Ayrıca bir bulanık esnek komşuluk sistemi kavramı verilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Bunun yanı sıra Lowen anlamında bir bulanık esnek düzgün uzay tanımlanarak bulanık esnek topoloji ve bulanık esnek komşuluk sistemi ile ilişkisi araştırılmıştır. Son olarak bulanık esnek yakınlık uzaylarıyla ilgili özellikler incelenerek klasik anlamdaki yakınlık uzaylarıyla ilişkisi elde edilmiştir.

Anahtar sözcükler: Bulanık esnek düzgün uzay, Bulanık esnek yakınlık uzay, Esnek düzgün uzay, Esnek yakınlık uzay, Sabit esnek eleman

ABSTRACT

APPLICATION OF SOFT AND FUZZY SOFT SETS TO UNIFORM AND PROXIMITY SPACES

İzzettin DEMİR

Duzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. İsmet YILDIZ

Co-Supervisor: Prof. Dr. Oya Bedre ÖZBAKIR

January 2016, 148 pages

In this thesis, soft uniform spaces first were introduced by using the soft set theory and a soft topological space was obtained with the help of these spaces. The properties about soft proximity spaces were examined and their relation with soft uniform spaces was investigated. In order to study on fixed point theory, the concept of an se -uniform space was defined with the aid of soft elements. Then, fixed soft element theorems were obtained in this space. Also, the concept of a fuzzy soft neighborhood system was given and studied its properties. Moreover, a fuzzy soft uniform space in the sense of Lowen was introduced and investigated its relation with fuzzy soft topology and fuzzy soft neighborhood system. Finally, the properties regarding fuzzy soft proximity spaces were examined and their relation with proximity spaces in classical meaning was established.

Keywords: Fuzzy soft uniform space, Fuzzy soft proximity space, Soft uniform space, Soft proximity space, Fixed soft element

EXTENDED ABSTRACT

APPLICATION OF SOFT AND FUZZY SOFT SETS TO UNIFORM AND PROXIMITY SPACES

İzzettin DEMİR

Duzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. İsmet YILDIZ

Co-Supervisor: Prof. Dr. Oya Bedre ÖZBAKIR

January 2016, 148 pages

1. INTRODUCTION:

Molodtsov (1999) initiated the concept of a soft set theory as a new approach for coping with uncertainties and presented the fundamental results of this theory. Then, Maji et al. (2001) combined the concept of fuzzy set and soft set and introduced the new notion of the fuzzy soft set. After presentation of the operations of soft sets and fuzzy soft sets, the properties and applications of these theories have been studied increasingly.

Maji et al. (2002, 2003) gave the first practical application of soft sets in decision making problems and studied on soft set theory in detail. Aktaş and Çağman (2007) introduced the soft group and also compared soft sets to fuzzy set and rough set. Feng et al. (2008) worked on soft semirings. Das and Samanta (2012) introduced the notions of soft real sets and soft real numbers. Shabir and Naz (2011) initiated the study of soft topological spaces.

Roy and Maji (2007) presented some results on an application of fuzzy soft sets in decision making problem. Aygünoğlu and Aygün introduced the notion of a fuzzy soft group. Then, Tanay and Kandemir (2011) initiated the concept of a fuzzy soft topology and gave the some basic properties of it by following Chang (1968). Also, the fuzzy soft topology in Lowen's sense (1976) was given by Varol and Aygün (2012).

Uniformity is a suitable tool for an investigation of topology. Also, there exist its remarkable analogies with metrics. Therefore, it can be considered as a bridge between metric and topology. On the base of the axioms suggested by Bourbaki (1966), Çetkin and Aygün (2013) introduced the concept of a soft uniformity consisting of soft sets on $X \times X$ with the set E of parameters and studied its basic properties. Also, Çetkin (2014)

defined the notion of a fuzzy soft uniformity in Hutton's sense.

Proximity structure was introduced by Efremovic in 1951. It can be considered either as axiomatizations of geometric notions or as suitable tools for an investigation of topology. The most comprehensive work on the theory of proximity spaces was done by Naimpally and Warrack (1970). Extensions of proximity structures to the soft sets and also fuzzy soft sets have been studied by some authors. Hazra et al. (2014a) defined the notion of a proximity in soft setting for the first time, which is termed as soft proximity. Also, by using soft sets, Hazra et al. (2014b) introduced the different notion of a proximity on the lines of basic proximity and called it proximity of soft sets. Then, Kandil et al. (2014) defined soft proximity spaces on the base of the axioms suggested by Efremovic. By using fuzzy soft sets, Çetkin et al. (2014) introduced soft fuzzy proximity spaces on the base of the axioms suggested by Markin and Sostak (1992) and Katsaras (1979), respectively.

Filters were introduced in 1937 by Cartan. The study of filters is a very natural way to describe convergence in a topological space. Moreover, they play a fundamental role in the development of fuzzy spaces which have applications in computer science and engineering. More recently, Park ve diğ. (2011) defined soft filters and studied some of their properties. Çetkin and Aygün (2014) introduced fuzzy soft filters on the base of definition suggested by Kim et al. (2007).

The purpose of this thesis is to study the uniform and proximity structures in both the soft setting and the fuzzy soft setting and to prove some fixed soft element theorems in *se*-uniform spaces.

2. MATERIAL AND METHODS:

We first remind the fundamental concepts of soft set theory. We recall the notion of soft element and some of its basic properties. Then, we recall some concepts of soft topological spaces. Also, we give the notions of two types of soft metric spaces which Das and Samanta (2013a, 2013c) introduced both with respect to soft points and with respect to soft elements. Moreover, we present the concept of soft filter and its related properties given by Park ve diğ. (2011). Later, we recall some basic notions regarding fuzzy soft sets. Also, we give the definition of fuzzy soft topology defined by Tanay and Kandemir (2011) and remind some properties regarding it.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

In the first part of this chapter, we introduce the concept of a soft uniformity by using the soft set theory. We investigate its relation with a soft metric and a soft topology. Also, we study some properties of soft proximity and obtain its relation with proximity in classical meaning. We show how a soft proximity is derived from a soft uniformity. Moreover, we prove the existences of initial soft proximity spaces. Then, we define the notion of a soft cluster and examine its properties. In the second part, as distinct from soft uniform spaces, with the help of soft elements, we define the concept of an *se*-uniform space and investigate some of its properties. Also, we give diverse fixed soft element theorems in *se*-uniform spaces. In the third part, we study fuzzy soft filters. We give the concepts of a fuzzy soft ultrafilter and a saturated fuzzy soft filter and obtain their related properties. Also, we present the concept of a fuzzy soft neighborhood system and study its properties. Then, we define the notion of a fuzzy soft uniformity in Lowen's sense and show its relations with fuzzy soft topology and fuzzy soft neighborhood system. In the fourth part, we study the fuzzy soft proximity in Katsaras's sense. We show that a fuzzy soft proximity determines a fuzzy soft topology. Also, we define the notion of a fuzzy soft δ -neighborhood which offers an alternative approach to the study of fuzzy soft proximity. Moreover, we introduce the notion of a fuzzy soft cluster and show that fuzzy soft ultrafilters and fuzzy soft clusters are closely related.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In this work, we introduce the notion of a soft uniformity and compare it to soft metric and soft topology with the help of examples. Also, we give some properties of soft proximity and show that each soft uniformity determines a soft proximity. As distinct from soft uniform spaces, we define the concept of an *se*-uniform space and prove some fixed soft element theorems in *se*-uniform spaces. Moreover, we study the convergence theory of fuzzy soft filters. Then, we introduce the notion of a fuzzy soft uniformity and show how a fuzzy soft topology is derived from a fuzzy soft uniformity. Finally, we establish some properties of fuzzy soft proximity in Katsaras's sense and give the concept of a fuzzy soft cluster.

Similarly, one can study a different topological structure such as function spaces in both the soft setting and the fuzzy soft setting, and obtain diverse fixed soft element theorems in *se*-uniform spaces.

1. GİRİŞ

Hayatımızın birçok alanında, iyi, güzel, uzun gibi kişiden kişiye veya duruma göre değişiklik gösteren ve matematiksel anlamda tam olarak ifade edilemeyen çeşitli belirsiz kavramlar vardır. Klasik mantıkta belirsizlik içeren bu kavramların matematiksel olarak modellenmesi mümkün değildir. Bu kavramları matematiksel olarak modellemek ve bunlara sistematik çözümler üretmek için araştırmacılar her geçen gün yeni teoriler ortaya atmaktadır. Bu teorilerden bazıları olasılık teorisi, aralık matematiği, bulanık kümeler teorisi ve sezgisel bulanık kümeler teorisidir. Her bir teorinin güçlü olduğu uygulamalar bulunmasının yanı sıra kendine özgü zorlukları da vardır.

Bu teoriler arasında en dikkat çeken Zadeh (1965) tarafından ortaya atılan bulanık kümeler teorisidir. Bu teoride Zadeh, doğruluk değerleri kümesini $[0,1]$ reel sayılar aralığına genelleştirmiştir. Böylece bulanık kümelerde bir elemanın bir kümeye ait olma değeri daha duyarlı bir şekilde ifade edilmiştir. Bir bulanık küme onun üyelik fonksiyonu yardımı ile tanımlanır. Diğer teorilerde olduğu gibi bulanık kümeler teorisinin de bir zorluğu vardır. Molodtsov (1999)'a göre üyelik fonksiyonu bireysel olarak belirlendiğinden her bir durum için bir üyelik fonksiyonu inşa etme zorluğuyla karşılaşılır. Bu nedenle, üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız bir kümeler teorisine ihtiyaç vardır.

Molodtsov (1999) belirsizlik ve kararsızlık modelleri için yeni bir yaklaşım olan ve bulanık kümelerin sahip olduğu zorluklardan bağımsız bir esnek küme teorisi tanımlamıştır. Daha sonra bu teoriyi, Riemann integrali, Perron integrali ve ölçüm teorisi gibi birçok alana başarıyla uygulamıştır.

Esnek küme teorisi ve uygulamaları ile ilgili matematiğin birçok alanında çalışmalar yapılmıştır. Maji ve diğ. (2002, 2003) karar verme problemlerine esnek kümeler teorisini uygulamış ve esnek kümelerde bazı işlemler tanımlamıştır. Pei ve Miao (2005) esnek kümeler ile bilgi sistemleri arasındaki ilişkileri araştırmıştır. Aktaş ve Çağman (2007) esnek grup kavramını tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemiştir. Kharal ve Ahmad (2011) bir esnek kümenin bir esnek dönüşüm altındaki görüntüsünün ve ters

görüntüsünün özelliklerini vermiştir. Shabir ve Naz (2011) esnek topolojik uzayları tanımlamıştır. Aygünoğlu ve Aygün (2012) esnek kompaktlık ve çarpım esnek topolojisi gibi kavramları çalışmıştır. Das ve Samanta (2012) esnek reel sayıları tanımlamış ve ilgili özelliklerini incelemiştir. Nazmul ve Samanta (2013) esnek noktanın komşuluk sistemini araştırmış ve bir esnek kümenin klasik anlamdaki bir dönüşüme göre durumlarını elde etmiştir.

Maji ve diğ. (2001) bulanık ve esnek kümelerin bir genellemesi olan bulanık esnek küme tanımını vermiştir. Daha sonra pek çok araştırmacı bulanık esnek kümeler üzerine çalışmalar yapmıştır. Roy ve Maji (2007) karar verme problemlerine bulanık esnek kümeleri uygulamıştır. Ahmad ve Kharal (2009) bulanık esnek kümelerin çeşitli işlemlerini tanımlamıştır. Aygünoğlu ve Aygün (2009) bulanık esnek kümelerin ilk cebirsel uygulaması olan bulanık esnek grup kavramını vermiştir. Tanay ve Kandemir (2011) bulanık esnek kümelerin Chang anlamındaki topolojisini çalışmıştır. Varol ve Aygün (2012, 2014) Lowen anlamında bulanık esnek topolojiyi tanımlamış ve önemli özellikler elde etmiştir.

Düzgün süreklilik ve düzgün yakınsaklık gibi kavramları topolojik uzaylara genelleştirmek zordur. Bu nedenle topolojik uzaylardan daha genel olan bir düzgün uzay kavramı elde edilmiştir. Düzgün uzayların ilk sistematik gösterimi Bourbaki (1966) tarafından verilmiştir. Düzgün uzaylar bulanık anlamda Hutton (1977) ve Lowen (1981) tarafından çalışılmıştır. Ayrıca Lowen (1982) ve Lowen ve Wuyts (1982, 1983) bulanık düzgün uzaylar üzerinde önemli sonuçlar elde etmiştir. Esnek ve bulanık esnek anlamında ise Çetkin ve Aygün (2013, 2014) tarafından incelenmiştir.

Sabit nokta teorisi topoloji, diferansiyel denklemler ve fonksiyonel analiz gibi matematiğin birçok alanında büyük bir öneme sahiptir. Bu teorideki en temel çalışma olan Banach Daralma Prensi 1922 yılında Banach tarafından verilmiştir. Daha sonra pek çok yazar tarafından çeşitli sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Bunlardan bazıları Jachymski (1966), Jungck ve Rhoades (1998), Kada ve diğ. (1996), Kang (1993) ve Suzuki (2008) şeklindedir. Ayrıca Aamri ve El Moutawakil (2004, 2005), Acharya (1974), Altun (2011), Rodriguez-Montes ve Charris (2001), Tarafdar (1974) ve Türkoğlu ve Fisher (2003) sabit nokta teorisini düzgün uzaylar üzerine uygulamışlardır.

Yakınlık uzaylar topoloji için elverişli özelliklere sahip olduğundan birçok yazar tarafından çalışılmıştır. En kapsamlı çalışma Naimpally ve Warrack (1970) tarafından yapılmıştır. Daha sonra Katsaras (1979) bu uzayları bulanık kümeleri kullanarak çalışmıştır. Artico ve Moresco (1984, 1987) bulanık düzgün ve bulanık yakınlık uzaylar arasındaki ilişkileri incelemiştir. Markin ve Sostak (1992) bulanık yakınlık uzaylarını farklı bir şekilde tanımlamıştır. Esnek anlamda yakınlık uzaylar, birbirinden bağımsız olarak, Hazra ve diğ. (2014a, 2014b) ve Kandil ve diğ. (2014) tarafından çalışılmıştır. Çetkin ve diğ. (2014) ise bu uzayları bulanık esnek kümeleri ele alarak elde etmiştir.

Süzgeç tanımı ilk olarak 1937 yılında Cartan tarafından yapılmıştır. Daha sonra birçok araştırmacı topolojinin gelişmesi için süzgeçler üzerinde önemli çalışmalar elde etmiştir. Prada Vicente ve Saralegui Aranguren (1988) bulanık kümeleri kullanarak süzgeç kavramını incelemiştir. Burton ve diğ. (1999) süzgeç yapısına bulanık anlamda farklı bir şekilde yaklaşmıştır. Bu yapının esnek versiyonları Park ve diğ. (2011) ve Şahin ve Küçük (2013) tarafından çalışılmıştır. Çetkin ve Aygün (2014) ise bulanık esnek anlamda süzgeç kavramını elde etmiştir.

Bu çalışmada, düzgün uzaylar, yakınlık uzaylar ve yığılmalar (clusters) hem esnek anlamda hem de bulanık esnek anlamda ele alınarak iki farklı yapıda incelenmiştir. Ayrıca, esnek eleman kavramı kullanılarak bir *se*-düzgün uzay tanımlanmış ve bu uzay üzerinde çeşitli sabit esnek eleman teoremleri çalışılmıştır. Bunun yanı sıra, bulanık esnek süzgeçler ile ilgili önemli özellikler elde edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezin diğer kısımlarında kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. ESNEK KÜMELER

Tanım 2.1.1. X bir evrensel küme, E X için uygun parametrelerin bir kümesi ve $\mathcal{P}(X)$ X in bir kuvvet kümesi olsun. $F : E \rightarrow \mathcal{P}(X)$ bir dönüşüm olmak üzere (F, E) ikilisine X üzerinde bir esnek küme denir.

Diğer bir deyişle, esnek küme X in alt kümelerinin parametrelerle ifade edilen bir ailesidir. Her $e \in E$ için $F(e)$ değer kümesine esnek kümenin bir e -elemanı denir. Burada, $F(e)$ kümesi boş küme veya X in boş olmayan bir alt kümesidir. Bir (F, E) esnek kümesi

$$(F, E) = \{(e, F(e)) \mid e \in E, F(e) \in \mathcal{P}(X)\}$$

şeklinde ikililer yardımıyla gösterilir (Molodtsov 1999).

X üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi $S(X, E)$ ile gösterilir (Aygünoğlu ve Aygün 2012).

Uyarı 2.1.2. Bir (F, E) esnek kümesi sadelik olması açısından kısaca F ile gösterilecektir ve esnek küme sadece $F : E \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümü olarak düşünülecektir.

Örnek 2.1.3. (i) $X = [0,100]$ bir evrensel küme ve $E = \{\text{çok genç, genç, orta, yaşlı, çok yaşlı}\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. Bu durumda,

$$F(\text{çok genç}) = \{a \in X \mid a \leq 20\} = p_1, \quad F(\text{genç}) = \{a \in X \mid 20 < a \leq 40\} = p_2$$

$$F(\text{orta}) = \{a \in X \mid 40 < a \leq 60\} = p_3, \quad F(\text{yaşlı}) = \{a \in X \mid 60 < a \leq 80\} = p_4$$

$$F(\text{çok yaşlı}) = \{a \in X \mid 80 < a \leq 100\} = p_5$$

olmak üzere

$$F = \{(çok\ genç, p_1), (genç, p_2), (orta, p_3), (yaşlı, p_4), (çok\ yaşlı, p_5)\}$$

X üzerinde bir esnek kümedir.

(ii) μ , X üzerinde bir bulanık küme ve $E = [0,1]$ olsun. $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$$F(\alpha) = \{x \in X \mid \mu(x) \geq \alpha\}$$

olarak tanımlanan $F : E \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümü X üzerinde bir esnek kümedir. Burada, $F(\alpha)$, μ bulanık kümesinin bir α -seviye kümesidir (Pei ve Miano 2005).

Böylece her bulanık küme bir esnek küme olarak gösterilebilir.

Tanım 2.1.4. $F, G \in S(X, E)$ olsun. Bu durumda,

(i) Her $e \in E$ için $F(e) = \emptyset$ ise bu esnek kümeye boş esnek küme denir ve $\tilde{\emptyset}$ ile gösterilir.

(ii) Her $e \in E$ için $F(e) = X$ ise bu esnek kümeye mutlak esnek küme denir ve \tilde{X} ile gösterilir.

(iii) Her $e \in E$ için $H(e) = F(e) \cup G(e)$ şeklinde tanımlanan H esnek kümesine F ve G esnek kümelerin birleşimi denir ve bu durum $H = F \sqcup G$ ile gösterilir (Maji ve diğ. 2003).

Tanım 2.1.5. $F, G \in S(X, E)$ olsun. Bu durumda,

(i) Her $e \in E$ için $F(e) \subseteq G(e)$ ise F esnek kümesine G nin bir esnek alt kümesi denir ve bu durum $F \sqsubseteq G$ ile gösterilir. Ayrıca, $F \sqsubseteq G$ ve $G \sqsubseteq F$ ise F ve G eşittir denir.

(ii) Her $e \in E$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ şeklinde tanımlanan H esnek kümesine F ve G esnek kümelerin kesişimi denir ve bu durum $H = F \sqcap G$ ile gösterilir (Pei ve Miano 2005).

Tanım 2.1.6. $F \in S(X, E)$ olsun. Bu durumda, her $e \in E$ için $F^c(e) = X - F(e)$ şeklinde tanımlanan $F^c : E \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümüne F esnek kümesinin tümleyeni denir. $(F^c)^c = F$ olduğu açıktır (Ali ve diğ. 2009).

Teorem 2.1.7. J bir indeks kümesi olmak üzere her $i \in J$ için $F_i \in S(X, E)$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

$$(i) \left(\prod_{i \in J} F_i \right)^c = \sqcup_{i \in J} F_i^c.$$

$$(ii) \left(\sqcup_{i \in J} F_i \right)^c = \prod_{i \in J} F_i^c \text{ (Zorlutuna ve diğ. 2012).}$$

Teorem 2.1.8. $F, G \in S(X, E)$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

$$(i) F \sqsubseteq G \text{ ise } G^c \sqsubseteq F^c.$$

$$(ii) F \sqcup F^c = \tilde{X}, F \cap F^c = \tilde{\emptyset} \text{ (Çağman ve Enginoğlu 2010).}$$

Tanım 2.1.9. $F \in S(X, E)$ olsun. Bir $x \in X$ için $F(e) = \{x\}$ ve her $e' \in E - \{e\}$ için $F(e') = \emptyset$ olacak şekilde bir $e \in E$ varsa F esnek kümesine bir esnek nokta denir ve x^e ile gösterilir (Das ve Samanta 2013(a)), (Lin 2013), (Nazmul ve Samanta 2013).

X üzerindeki tüm esnek noktaların ailesi $SP(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.10. $F \in S(X, E)$ ve $x^e \in SP(X)$ olsun. $x \in F(e)$ ise x^e esnek noktası F esnek kümesine aittir denir ve bu durum $x^e \tilde{\in} F$ ile gösterilir (Das ve Samanta 2013(a)), (Nazmul ve Samanta 2013).

Tanım 2.1.11. $x_1^{e_1}, x_2^{e_2} \in SP(X)$ olsun. $e_1 = e_2$ ve $x_1 = x_2$ ise $x_1^{e_1}$ ve $x_2^{e_2}$ esnek noktalarına eşittir denir. Diğer yandan, $e_1 \neq e_2$ veya $x_1 \neq x_2$ ise $x_1^{e_1} \neq x_2^{e_2}$ dir (Das ve Samanta 2013(a)).

Önerme 2.1.12. Esnek noktaların herhangi bir birleşimi bir esnek küme oluşturur. Ayrıca, her esnek küme kendisine ait olan tüm esnek noktaların bir birleşimidir (Das ve Samanta 2013(a)).

Tanım 2.1.13. $S(X, E)$ ve $S(Y, K)$, sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde tanımlanmış, E ve K parametre kümelerine sahip tüm esnek kümelerin aileleri olsun. $\varphi : X \rightarrow Y$ ve $\psi : E \rightarrow K$ iki dönüşüm olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $\varphi_\psi : S(X, E) \rightarrow S(Y, K)$ dönüşümüne bir esnek dönüşüm denir.

(i) $F \in S(X, E)$ olsun. Bu durumda $\varphi_\psi(F)$, Y üzerinde bir esnek kümedir ve her $k \in K$ için

$$\varphi_\psi(F)(k) = \begin{cases} \bigcup_{e \in \psi^{-1}(k)} \varphi(F(e)), & \psi^{-1}(k) \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $\varphi_\psi(F)$ esnek kümesine F nin bir esnek görüntüsü denir.

(ii) $G \in S(Y, K)$ olsun. Bu durumda $\varphi_\psi^{-1}(G)$, X üzerinde bir esnek kümedir ve her $e \in E$ için

$$\varphi_\psi^{-1}(G)(e) = \varphi^{-1}(G(\psi(e)))$$

şeklinde tanımlanır. $\varphi_\psi^{-1}(G)$ esnek kümesine G nin bir esnek ters görüntüsü denir (Kharal ve Ahmad 2011).

φ ve ψ dönüşümleri bire-bir (örten) ise φ_ψ esnek dönüşümü de bire-bir (örten) olarak adlandırılır (Aygünoğlu ve Aygün 2012), (Zorlutuna ve diğ. 2012).

Teorem 2.1.14. J bir indeks kümesi olmak üzere her $i \in J$ için $F_i \in S(X, E)$ ve $G_i \in S(Y, K)$ olsun. Bir $\varphi_\psi : S(X, E) \rightarrow S(Y, K)$ esnek dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $F_1 \sqsubseteq F_2$ ise $\varphi_\psi(F_1) \sqsubseteq \varphi_\psi(F_2)$.

(ii) $G_1 \sqsubseteq G_2$ ise $\varphi_\psi^{-1}(G_1) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(G_2)$.

(iii) $\varphi_\psi(\sqcup_{i \in J} F_i) = \sqcup_{i \in J} \varphi_\psi(F_i)$.

(iv) $\varphi_\psi^{-1}(\sqcup_{i \in J} G_i) = \sqcup_{i \in J} \varphi_\psi^{-1}(G_i)$.

(v) $\varphi_\psi^{-1}(\prod_{i \in J} G_i) = \prod_{i \in J} \varphi_\psi^{-1}(G_i)$.

(vi) $\varphi_\psi^{-1}(\tilde{Y}) = \tilde{X}$, $\varphi_\psi^{-1}(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$ ve $\varphi_\psi(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$ (Kharal ve Ahmad 2011).

Teorem 2.1.15. J bir indeks kümesi olmak üzere her $i \in J$ için $F, F_i \in S(X, E)$ ve $G \in S(Y, K)$ olsun. Bir $\varphi_\psi : S(X, E) \rightarrow S(Y, K)$ esnek dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $F \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(F))$ dir. Ayrıca, φ_ψ bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(ii) $\varphi_\psi(\varphi_\psi^{-1}(G)) \sqsubseteq G$ dir. Ayrıca, φ_ψ örten ise eşitlik sağlanır (Aygünoğlu ve Aygün 2012), (Zorlutuna ve diğ. 2012).

Tanım 2.1.16. $F \in S(X, E)$ ve $G \in S(Y, K)$ olsun. F ve G esnek kümelerin kartezyen çarpımı, her $(e, k) \in E \times K$ için $(F \times G)(e, k) = F(e) \times G(k)$ şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre, $F \times G$ esnek kümesi $X \times Y$ üzerinde bir esnek kümedir (Babitha ve Sunil 2010).

Tanım 2.1.17. $p_X : X \times Y \rightarrow X$, $q_E : E \times K \rightarrow E$ ve $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$, $q_K : E \times K \rightarrow K$ izdüşüm dönüşümleri verilsin. $F \times G \in S(X \times Y, E \times K)$ olsun. Bu durumda,

$$(p_X)_{q_E}(F \times G) = F \quad \text{ve} \quad (p_Y)_{q_K}(F \times G) = G$$

olmak üzere $(p_X)_{q_E}$ ve $(p_Y)_{q_K}$ esnek dönüşümlerine esnek izdüşüm dönüşümleri denir (Aygünoğlu ve Aygün 2012).

Tanım 2.1.18. X boştan farklı bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. Bir $\varepsilon : E \rightarrow X$ fonksiyonuna X üzerinde bir esnek eleman denir. $F \in S(X, E)$ olmak üzere her $e \in E$ için $\varepsilon(e) \in F(e)$ ise ε esnek elemanı F esnek kümesine aittir denir ve bu durum $\varepsilon \hat{\in} F$ ile gösterilir. Buradan bir F esnek kümesi, her $e \in E$ için

$$F(e) = \{\varepsilon(e) \mid \varepsilon \hat{\in} F\}$$

olarak ifade edilebilir (Das ve Samanta 2012).

E parametreler kümesine sahip X üzerindeki tüm esnek elemanların ailesi X^E ile gösterilir.

Uyarı 2.1.19. Tek elemanlı her esnek küme (yani, her $e \in E$ için $F(e)$ tek elemanlı bir küme) bir esnek eleman olarak düşünülebilir (Das ve Samanta 2012).

Tanım 2.1.20. \mathbb{R} reel sayılar kümesi, E parametrelerin bir kümesi ve $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, \mathbb{R} nin boştan farklı tüm sınırlı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde,

$$F = \{(e, F(e)) \mid e \in E, F(e) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$$

esnek kümesi \mathbb{R} üzerinde bir esnek reel küme olarak adlandırılır.

Özel olarak F esnek kümesi tek elemanlı bir esnek küme olsun. Bu esnek küme bir esnek eleman olarak düşünülürse bu esnek kümeye bir esnek reel sayı denir (Das ve Samanta 2012).

Tanım 2.1.21. F, G esnek reel sayılar olsun. Bu takdirde

(i) Esnek reel sayıların toplamı, her $e \in E$ için $(F + G)(e) = F(e) + G(e)$ şeklinde tanımlanır.

(ii) Esnek reel sayıların farkı, her $e \in E$ için $(F - G)(e) = F(e) - G(e)$ şeklinde tanımlanır.

(iii) Esnek reel sayıların çarpımı, her $e \in E$ için $(F.G)(e) = F(e).G(e)$ şeklinde tanımlanır.

(iv) F esnek reel sayısının mutlak değeri, her $e \in E$ için $|F|(e) = |F(e)|$ şeklinde tanımlanır.

$F + G, F - G, F.G$ ve $|F|$ nin bir esnek reel sayı olduğu esnek reel sayıların tanımından kolayca görülür (Das ve Samanta 2012).

Tanım 2.1.22. F bir esnek reel sayı olsun. Her $e \in E$ için $F(e)$ negatif olmayan bir reel sayı ise bu durumda F esnek reel sayısına negatif olmayan bir esnek reel sayı denir.

Negatif olmayan tüm esnek reel sayıların kümesi $\mathbb{R}(E)^*$ ile gösterilir.

Bir esnek kümeye ait esnek elemanlar $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ ile gösterilirken esnek reel sayılar $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ olarak gösterilecektir. Özel olarak $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ ile her $e \in E$ için $\bar{\alpha}(e) = \alpha$ olacak şekildeki esnek reel sayılar gösterilecektir. Örneğin, her $e \in E$ için $\bar{0}(e) = 0$ olmak üzere $\bar{0}$ bir esnek reel sayıdır (Das ve Samanta 2012).

Tanım 2.1.23. $\tilde{\alpha}$ ve $\tilde{\beta}$ iki esnek reel sayı olsun.

(i) Her $e \in E$ için $\tilde{\alpha}(e) \leq \tilde{\beta}(e)$ ise bu durum $\tilde{\alpha} \lesssim \tilde{\beta}$ olarak ifade edilir.

(ii) Her $e \in E$ için $\tilde{\alpha}(e) \geq \tilde{\beta}(e)$ ise bu durum $\tilde{\alpha} \gtrsim \tilde{\beta}$ olarak ifade edilir.

(iii) Her $e \in E$ için $\tilde{\alpha}(e) < \tilde{\beta}(e)$ ise bu durum $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ olarak ifade edilir.

(iv) Her $e \in E$ için $\tilde{\alpha}(e) > \tilde{\beta}(e)$ ise bu durum $\tilde{\alpha} \succ \tilde{\beta}$ olarak ifade edilir (Das ve Samanta 2013(c)).

Aşağıdaki tanım bir esnek kümenin klasik anlamdaki bir dönüşüm altındaki görüntüsünü ve ters görüntüsünü gösterir.

Tanım 2.1.24. X ve Y boştan farklı iki küme ve $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Bu takdirde,

(i) f dönüşümü altındaki bir $F \in S(X, E)$ esnek kümesinin görüntüsü, her $e \in E$ için

$$f(F)(e) = f(F(e))$$

olarak tanımlanan bir $f(F)$ esnek kümesidir.

(ii) f dönüşümü altındaki bir $G \in S(Y, E)$ esnek kümesinin ters görüntüsü, her $e \in E$ için

$$f^{-1}(G)(e) = f^{-1}(G(e))$$

olarak tanımlanan bir $f^{-1}(G)$ esnek kümesidir (Nazmul ve Samanta 2013).

Tanım 2.1.25. $\{\tilde{\alpha}_n\}$, esnek reel sayılardan oluşan bir dizi olsun. Her $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ esnek reel sayısına karşılık $n \geq n_0$ özelliğindeki her n doğal sayısı için $|\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}| \prec \tilde{\epsilon}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{\tilde{\alpha}_n\}$ dizisi $\tilde{\alpha}$ esnek reel sayısına esnek yakınıyor denir ve bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_n = \tilde{\alpha}$ ile gösterilir (Das ve Samanta 2013(b)).

Tanım 2.1.26. $\{\tilde{\alpha}_n\}$, esnek reel sayılardan oluşan bir dizi olsun. Her $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ esnek reel sayısına karşılık her $m, n \geq n_0$ için $|\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_m| \prec \tilde{\epsilon}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa $\{\tilde{\alpha}_n\}$ dizisine bir esnek Cauchy dizisi denir (Das ve Samanta 2013(b)).

2.2. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Tanım 2.2.1. $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\tau \subseteq S(X, E)$ ailesine X üzerinde bir esnek topoloji denir.

(ET1) $\emptyset, X \in \tau$.

(ET2) $F_1, F_2, \dots, F_n \in \tau$ ise $\prod_{i=1}^n F_i \in \tau$.

(ET3) Her $i \in J$ için $F_i \in \tau$ ise $\sqcup_{i \in J} F_i \in \tau$.

Bu durumda, (X, τ, E) üçlüsü bir esnek topolojik uzay olarak adlandırılır. τ nun elemanlarına da esnek açık küme denir. $F \in S(X, E)$ olmak üzere $F^c \in \tau$ ise F esnek kümesine X üzerinde bir esnek kapalı küme denir (Shabir ve Naz 2011).

Tanım 2.2.2. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve $F \in S(X, E)$ olsun. F nin esnek içi

$$F^o = \sqcup \{G \mid G \text{ bir esnek açık küme ve } G \subseteq F\}$$

esnek kümesidir.

Buna göre F^o , F tarafından içerilen en büyük esnek açık kümedir (Zorlutuna ve diğ. 2012).

Tanım 2.2.3. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve $F \in S(X, E)$ olsun. F nin esnek kapanışı

$$\bar{F} = \prod \{G \mid G \text{ bir esnek kapalı küme ve } F \subseteq G\}$$

esnek kümesidir.

Buna göre \bar{F} , F yi içeren en küçük esnek kapalı kümedir (Shabir ve Naz 2011).

Teorem 2.2.4. X boştan farklı bir küme olsun. Her $F \in S(X, E)$ esnek kümesine aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\bar{\bar{F}}$ esnek kümesi karşılık getirilsin.

(EO1) $F \subseteq \bar{\bar{F}}$,

(EO2) $\bar{\bar{\bar{F}}} = \bar{\bar{F}}$,

$$(EO3) \overline{F \sqcup G} = \overline{F} \sqcup \overline{G},$$

$$(EO4) \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

Bu durumda,

$$\tau = \{F \in S(X, E) \mid \overline{F^c} = F^c\}$$

ailesi X üzerinde bir esnek topolojidir ve bu topolojiye göre her $F \in S(X, E)$ için \overline{F} , F esnek kümesinin bir esnek kapanışıdır.

Bu operatöre bir esnek kapanış operatörü denir (Nazmul ve Samanta 2013).

Tanım 2.2.5. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olsun. τ nun her elemanı \mathcal{B} nin elemanlarının herhangi bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa \mathcal{B} ailesine τ için bir tabandır denir (Aygünoğlu ve Aygün 2012).

Teorem 2.2.6. X boştan farklı bir küme ve \mathcal{B} , X üzerindeki esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda \mathcal{B} ailesinin X üzerindeki bir esnek topoloji için bir taban olması için gerek ve yeter koşul

(i) \tilde{X} esnek kümesi \mathcal{B} nin elemanlarının bir birleşimi olarak yazılabilir.

(ii) $F, G \in \mathcal{B}$ ise $F \sqcap G$ esnek kümesi \mathcal{B} deki elemanların bir birleşimi olarak yazılabilir (Demir ve Özbakır 2014).

Tanım 2.2.7. (X, τ_1, E) ve (Y, τ_2, K) iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : (X, \tau_1, E) \rightarrow (Y, \tau_2, K)$ bir esnek dönüşüm olsun. Her $G \in \tau_2$ için $\varphi_\psi^{-1}(G) \in \tau_1$ oluyorsa φ_ψ esnek dönüşümüne bir esnek sürekli dönüşüm denir (Aygünoğlu ve Aygün 2012).

Tanım 2.2.8. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve $\mathcal{S} \subseteq \tau$ olsun. \mathcal{S} ailesindeki esnek kümelerin sonlu arakesitlerinden elde edilen \mathcal{B} ailesi τ için bir taban ise \mathcal{S} ailesine τ esnek topolojisi için bir alt taban denir (Aygünoğlu ve Aygün 2012).

Teorem 2.2.9. $\mathcal{S} \subseteq S(X, E)$ ve $\emptyset, \tilde{X} \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki τ ailesi X üzerinde bir esnek topolojidir.

$$\tau = \{\sqcup_{i \in J} (\prod_{\lambda \in \Lambda_i} F_{i,\lambda}) \mid F_{i,\lambda} \in \mathcal{S}, J \text{ keyfi, } \Lambda_i \text{ sonlu indeks kümesi}\}$$

(Aygünoğlu ve Aygün 2012).

Tanım 2.2.10. X boştan farklı bir küme, $\{(Y_i, \tau_i, K_i)\}_{i \in J}$ esnek topolojik uzayların bir ailesi ve $\{(\varphi_\psi)_i : S(X, E) \rightarrow (Y_i, \tau_i, K_i)\}_{i \in J}$ esnek dönüşümlerin bir ailesi olsun. X üzerinde $\mathcal{S} = \{(\varphi_\psi)_i^{-1}(F) \mid F \in \tau_i, i \in J\}$ alt tabanı yardımıyla üretilen esnek topolojiye $\{(\varphi_\psi)_i\}_{i \in J}$ ailesi yardımıyla üretilen bir başlangıç esnek topolojisi denir (Aygünoğlu ve Aygün 2012).

Teorem 2.2.11. X üzerinde $\{(\varphi_\psi)_i\}_{i \in J}$ ailesi yardımıyla üretilen başlangıç esnek topolojisi, her $i \in J$ için $(\varphi_\psi)_i : (X, \tau, E) \rightarrow (Y_i, \tau_i, K_i)$ esnek dönüşümlerini esnek sürekliliği yapan en kaba esnek topolojidir (Aygünoğlu ve Aygün 2012).

Tanım 2.2.12. $\{(X_i, \tau_i, E_i)\}_{i \in J}$ esnek topolojik uzayların bir ailesi olsun. $p_{X_i} : \prod_{i \in J} X_i \rightarrow X_i$ ve $q_{E_i} : \prod_{i \in J} E_i \rightarrow E_i$ olmak üzere $X (= \prod_{i \in J} X_i)$ üzerindeki $\{(p_{X_i})_{(q_{E_i})}\}_{i \in J}$ esnek izdüşüm dönüşümleri yardımıyla üretilen başlangıç esnek topolojisine X üzerinde bir çarpım esnek topolojisi denir ve $\prod_{i \in J} \tau_i$ ile gösterilir (Aygünoğlu ve Aygün 2012).

Tanım 2.2.13. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve $F, G \in S(X, E)$ olsun. $G \sqsubseteq H \sqsubseteq F$ olacak şekilde bir $H \in \tau$ esnek açık kümesi varsa F ye G esnek kümesinin bir esnek komşuluğu denir (Zorlutuna ve diğ. 2012).

Tanım 2.2.14. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay, $F \in S(X, E)$ ve $x^e \in SP(X)$ olsun. $x^e \tilde{\in} G \sqsubseteq F$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ esnek açık kümesi varsa F ye x^e esnek noktasının bir esnek komşuluğu denir.

Bir x^e esnek noktasının esnek komşuluk sistemi tüm esnek komşuluklarının bir ailesidir ve $\mathcal{N}(x^e)$ ile gösterilir (Nazmul ve Samanta 2013).

Teorem 2.2.15. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve $x^e \in SP(X)$ olsun. Bu takdirde, bir $\mathcal{N}(x^e)$ esnek komşuluk sistemi için aşağıdakiler sağlanır.

(EK1) $\mathcal{N}(x^e) \neq \emptyset$.

(EK2) $F \in \mathcal{N}(x^e)$ ise $x^e \tilde{\in} F$ dir.

(EK3) $F \in \mathcal{N}(x^e)$ ve $F \sqsubseteq G$ ise $G \in \mathcal{N}(x^e)$ dir.

(EK4) $F, G \in \mathcal{N}(x^e)$ ise $F \sqcap G \in \mathcal{N}(x^e)$ dir.

(EK5) $F \in \mathcal{N}(x^e)$ ise her $z^\alpha \tilde{\in} G$ için $F \in \mathcal{N}(z^\alpha)$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{N}(x^e)$ vardır.

Tersine, her $x^e \in SP(X)$ esnek noktasına (EK1)-(EK5) koşullarını sağlayan bir $\mathcal{N}(x^e)$ ailesi karşılık getirilsin. Bu durumda her $x^e \in SP(X)$ esnek noktası için $\mathcal{N}(x^e)$ ailesi x^e nin bir esnek komşuluk sistemi olacak şekilde X üzerinde bir tek esnek topoloji vardır (Nazmul ve Samanta 2013).

Önerme 2.2.16. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve $F \in S(X, E)$ olsun. $F \in \tau$ olması için gerek ve yeter koşul F nin her esnek noktasının bir esnek komşuluğu olmasıdır (Nazmul ve Samanta 2013).

Teorem 2.2.17. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay, $F \in S(X, E)$ ve $x^e \in SP(X)$ olsun. $x^e \tilde{\in} \bar{F}$ olması için gerek ve yeter koşul her $G \in \mathcal{N}(x^e)$ için $G \sqcap F \neq \tilde{\emptyset}$ olmasıdır (Lin 2013).

Tanım 2.2.18. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve A, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $\tau_A = \{\tilde{A} \sqcap F \mid F \in \tau\}$ ailesi A üzerinde bir esnek topolojidir. Bu topolojiye A üzerinde bir esnek relatif topoloji ve (A, τ_A, E) üçlüsüne de (X, τ, E) nin bir esnek alt uzayı denir.

Burada \tilde{A}, X üzerinde bir esnek kümedir ve her $e \in E$ için $\tilde{A}(e) = A$ şeklinde tanımlanır (Shabir ve Naz 2011).

Önerme 2.2.19. $(A, \tau_A, E), (X, \tau, E)$ nin bir esnek alt uzayı ve $F \in S(X, E)$ olsun. Bu durumda, F nin A üzerinde bir esnek açık küme olması için gerek ve yeter koşul bir $G \in \tau$ için $F = \tilde{A} \sqcap G$ olmasıdır (Shabir ve Naz 2011).

Tanım 2.2.20. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun. Her farklı $x_1^{e_1}, x_2^{e_2} \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek noktaları için her birinin diğerini içermeyen bir esnek komşuluğu varsa bu uzaya bir esnek T_1 -uzay denir (Bayramov ve Gündüz 2013).

Tanım 2.2.21. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun. $F \sqcap G = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde her F, G esnek kapalı kümesi için $F \sqsubseteq F_1, G \sqsubseteq G_1$ ve $F_1 \sqcap G_1 = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde $F_1, G_1 \in \tau$ varsa bu uzaya bir esnek normal uzay denir (Kandil ve diğ. 2014).

Tanım 2.2.22. (X, τ) esnek topolojik uzayı hem esnek T_1 -uzay hem de esnek normal uzay ise bu uzaya bir esnek T_4 -uzay denir (Kandil ve diğ. 2014).

2.3. ESNEK METRİK UZAYLAR

Das ve Samanta (2013(a), 2013(c)) esnek metrik uzayları hem esnek noktalara hem de esnek elemanlara göre aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.3.1. X boştan farklı bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $d : SP(X) \times SP(X) \rightarrow \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümüne X üzerinde esnek noktalara göre tanımlanan bir esnek metrik denir.

$$(M1) \text{ Her } x_1^{e_1}, x_2^{e_2} \tilde{\in} \tilde{X} \text{ için } d(x_1^{e_1}, x_2^{e_2}) \succeq \bar{0}.$$

$$(M2) d(x_1^{e_1}, x_2^{e_2}) = \bar{0} \Leftrightarrow x_1^{e_1} = x_2^{e_2}.$$

$$(M3) \text{ Her } x_1^{e_1}, x_2^{e_2} \tilde{\in} \tilde{X} \text{ için } d(x_1^{e_1}, x_2^{e_2}) = d(x_2^{e_2}, x_1^{e_1}).$$

$$(M4) \text{ Her } x_1^{e_1}, x_2^{e_2}, x_3^{e_3} \tilde{\in} \tilde{X} \text{ için } d(x_1^{e_1}, x_2^{e_2}) \preceq d(x_1^{e_1}, x_3^{e_3}) + d(x_3^{e_3}, x_2^{e_2}).$$

O halde, (X, d, E) üçlüsüne de esnek noktalara göre tanımlanan bir esnek metrik uzay denir (Das ve Samanta 2013(a)).

Örnek 2.3.2. $X = E = \mathbb{R}$ olsun. Her $x_1^{e_1}, x_2^{e_2} \tilde{\in} \tilde{X}$ için

$$d(x_1^{e_1}, x_2^{e_2}) = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + |\bar{e}_1 - \bar{e}_2|$$

şeklinde tanımlanan $d : SP(X) \times SP(X) \rightarrow \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü X üzerinde esnek noktalara göre tanımlanan bir esnek metriktir (Das ve Samanta 2013(a)).

Tanım 2.3.3. X boştan farklı bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $d : X^E \times X^E \rightarrow \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümüne X üzerinde esnek elemanlara göre tanımlanan bir esnek metrik denir.

(EM1) Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) \succeq \bar{0}$.

(EM2) $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bar{0} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$.

(EM3) Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{y}, \tilde{x})$.

(EM4) Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) \preceq d(\tilde{x}, \tilde{z}) + d(\tilde{z}, \tilde{y})$.

O halde, (X, d, E) üçlüsüne de esnek elemanlara göre tanımlanan bir esnek metrik uzay denir (Das ve Samanta 2013(c)).

Örnek 2.3.4. $X = E = \mathbb{R}$ olsun. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = |\tilde{x} - \tilde{y}|$$

şeklinde tanımlanan $d : X^E \times X^E \rightarrow \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü X üzerinde esnek elemanlara göre tanımlanan bir esnek metriktir (Das ve Samanta 2013(c)).

2.4. ESNEK SÜZGEÇLER

Tanım 2.4.1. (i) Boştan farklı bir $\mathcal{F} \subset S(X, E)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa \mathcal{F} ailesine X üzerinde bir esnek süzgeç denir.

(ES1) $\tilde{\emptyset} \notin \mathcal{F}$.

(ES2) $F, G \in \mathcal{F}$ ise $F \sqcap G \in \mathcal{F}$.

(ES3) $F \in \mathcal{F}$ ve $F \sqsubseteq G$ ise $G \in \mathcal{F}$.

(ii) \mathcal{F}_1 ve \mathcal{F}_2 , X üzerinde iki esnek süzgeç olsun. $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ ise \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 den daha kaba (veya \mathcal{F}_2 , \mathcal{F}_1 den daha incedir) denir (Park ve diğ. 2011).

Tanım 2.4.2. Bir $\mathcal{B} \subset S(X, E)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa \mathcal{B} ailesine X üzerinde bir esnek süzgeç tabanı denir:

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ ve $\tilde{\emptyset} \notin \mathcal{B}$ dir.

(B2) Her $F, G \in \mathcal{B}$ için $H \sqsubseteq F \sqcap G$ olacak şekilde bir $H \in \mathcal{B}$ vardır.

\mathcal{B} , X üzerinde bir esnek süzgeç tabanı ise

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{F \in S(X, E) \mid \text{bir } H \in \mathcal{B} \text{ için } H \subseteq F\}$$

ailesinin X üzerinde bir esnek süzgeç olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu esnek süzgece \mathcal{B} tarafından üretilen bir esnek süzgeç denir (Park ve diğ. 2011).

Tanım 2.4.3. X üzerindeki bir \mathcal{F} esnek süzgecinden daha ince bir esnek süzgeç yok ise \mathcal{F} esnek süzgecine bir ultra esnek süzgeç denir. Ayrıca, X kümesi üzerindeki $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \Lambda}$ esnek süzgeçler ailesi daha kaba olma bağıntısına göre kısmi sıralı olduğundan $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \Lambda}$ ailesi içindeki maksimal elemanlar ultra esnek süzgeçlerdir (Park ve diğ. 2011).

Teorem 2.4.4. Bir X kümesi üzerindeki her \mathcal{F} esnek süzgecinden daha ince olan bir ultra esnek süzgeç vardır (Park ve diğ. 2011).

Teorem 2.4.5. \mathcal{F} , X üzerinde bir ultra esnek süzgeç ve $F, G \in S(X, E)$ olsun. Bu takdirde $F \sqcup G \in \mathcal{F}$ ise ya $F \in \mathcal{F}$ ya da $G \in \mathcal{F}$ dir (Park ve diğ. 2011).

Teorem 2.4.6. \mathcal{F} , X üzerinde bir esnek süzgeç olsun. Her $F \in S(X, E)$ için $F \in \mathcal{F}$ veya $F^c \in \mathcal{F}$ ise \mathcal{F} , X üzerinde bir ultra esnek süzgeçtir (Park ve diğ. 2011).

Teorem 2.4.7. $\varphi_{\psi} : S(X, E) \rightarrow S(Y, K)$ bir esnek dönüşüm ve \mathcal{B} , X üzerinde bir ultra esnek süzgeç tabanı olsun. Bu takdirde,

$$\mathcal{B}^* = \{\varphi_{\psi}(F) \mid F \in \mathcal{B}\}$$

Y üzerinde bir ultra esnek süzgeç tabanıdır (Şahin ve Küçük 2013).

2.5. BULANIK ESNEK KÜMELER

Tanım 2.5.1. X bir evrensel küme, E X için uygun parametrelerin bir kümesi ve I^X X üzerindeki tüm bulanık kümelerin bir ailesi olsun. $f : E \rightarrow I^X$ bir dönüşüm olmak üzere (f, E) ikilisine X üzerinde bir bulanık esnek küme denir.

Burada, her $e \in E$ için $f(e) : X \rightarrow I$ bulanık kümesi boş veya boştan farklı bir bulanık kümedir. Bir (f, E) bulanık esnek kümesi

$$(f, E) = \{(e, f(e)) \mid e \in E, f(e) \in I^X\}$$

şeklinde ikililer yardımıyla gösterilir (Maji ve diğ. 2001).

X üzerindeki tüm bulanık esnek kümelerin ailesi $FS(X, E)$ ile gösterilir.

Uyarı 2.5.2. Bir (f, E) bulanık esnek kümesi sadelik olması açısından kısaca f ile gösterilecektir ve bir bulanık esnek küme sadece $f : E \rightarrow I^X$ dönüşümü olarak düşünülecektir.

Örnek 2.5.3. (i) $X = \{x_1, x_2\}$ bir evrensel küme ve $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. Bu durumda

$$f(e_1) = \{x_1/0,5, x_2/1\}, f(e_2) = \{x_1/0,1, x_2/0,8\}, f(e_3) = 0_X$$

olmak üzere

$$f = \{(e_1, \{x_1/0,5, x_2/1\}), (e_2, \{x_1/0,1, x_2/0,8\}), (e_3, 0_X)\}$$

X üzerinde bir bulanık esnek kümedir.

(ii) F, X üzerinde bir esnek küme olsun. Her $e \in E$ parametresi için $F(e)$ görüntü kümesinin karakteristik fonksiyonu yardımıyla

$$f(e)(x) = \chi_{F(e)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in F(e) \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f : E \rightarrow I^X$ dönüşümü X üzerinde bir bulanık esnek kümedir.

Böylece her esnek küme bir bulanık esnek küme olarak gösterilebilir (Varol ve Aygün 2012).

Tanım 2.5.4. $f, g \in FS(X, E)$ olsun. Bu durumda,

(i) Her $e \in E$ için $f(e) = 0_X$ ise bu bulanık esnek kümeye boş bulanık esnek küme denir ve $\tilde{\emptyset}$ ile gösterilir.

(ii) Her $e \in E$ için $f(e) = 1_X$ ise bu bulanık esnek kümeye mutlak bulanık esnek küme denir ve \tilde{X} ile gösterilir.

(iii) Her $e \in E$ için $f(e) \leq g(e)$ ise f bulanık esnek kümesine g nin bir bulanık esnek alt kümesi denir ve bu durum $f \sqsubseteq g$ ile gösterilir. Ayrıca, $f \sqsubseteq g$ ve $g \sqsubseteq f$ ise f ve g eşittir denir.

(iv) Her $e \in E$ için $h(e) = f(e) \vee g(e)$ şeklinde tanımlanan h bulanık esnek kümesine f ve g bulanık esnek kümelerin birleşimi denir ve bu durum $h = f \sqcup g$ ile gösterilir (Maji ve diğ. 2001).

Tanım 2.5.5. $f, g \in FS(X, E)$ olsun. Bu durumda, her $e \in E$ için $h(e) = f(e) \wedge g(e)$ şeklinde tanımlanan h bulanık esnek kümesine f ve g bulanık esnek kümelerin kesişimi denir ve bu durum $h = f \sqcap g$ ile gösterilir (Ahmad ve Kharal 2009).

Tanım 2.5.6. $f \in FS(X, E)$ olsun. Bu durumda, her $e \in E$ için $f^c(e) = 1_X - f(e)$ şeklinde tanımlanan $f^c : E \rightarrow I^X$ dönüşümüne f bulanık esnek kümesinin tümleyeni denir. $(f^c)^c = f$ olduğu açıktır (Varol ve Aygün 2012).

Teorem 2.5.7. J bir indeks kümesi olmak üzere her $i \in J$ için $f, g, f_i \in FS(X, E)$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

$$(i) \left(\prod_{i \in J} f_i \right)^c = \sqcup_{i \in J} f_i^c.$$

$$(ii) \left(\sqcup_{i \in J} f_i \right)^c = \prod_{i \in J} f_i^c.$$

$$(iii) f \sqsubseteq g \text{ ise } g^c \sqsubseteq f^c \text{ (Varol ve Aygün 2012).}$$

Tanım 2.5.8. $f \in FS(X, E)$ olsun. $f(e)$ X de bir bulanık nokta (yani, bir $x \in X$ için $f(e)(x) = \alpha \in (0, 1]$ ve her $x' \in X - \{x\}$ için $f(e)(x') = 0$) ve her $e' \in E - \{e\}$ için $f(e') = 0_X$ olacak şekilde bir $e \in E$ varsa f bulanık esnek kümesine bir bulanık esnek nokta denir ve e_{x^α} ile gösterilir.

$\alpha \leq f(e)(x)$ ise e_{x^α} bulanık esnek noktası f bulanık esnek kümesine aittir denir ve bu durum $e_{x^\alpha} \tilde{\in} f$ ile gösterilir (Atmaca ve Zorlutuna 2013).

X üzerindeki tüm bulanık esnek noktaların ailesi $FSP(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.9. $FS(X, E)$ ve $FS(Y, K)$, sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde tanımlanmış, E ve K parametre kümelerine sahip tüm bulanık esnek kümelerin aileleri olsun. $\varphi : X \rightarrow Y$ ve $\psi : E \rightarrow K$ iki dönüşüm olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $\varphi_\psi : FS(X, E) \rightarrow FS(Y, K)$ dönüşümüne bir bulanık esnek dönüşüm denir.

(i) $f \in FS(X, E)$ olsun. Bu durumda $\varphi_\psi(f)$, Y üzerinde bir bulanık esnek kümedir ve her $k \in K$ ve $y \in Y$ için

$$\varphi_\psi(f)(k)(y) = \begin{cases} \bigvee_{x \in \varphi^{-1}(y)} \left(\bigvee_{e \in \psi^{-1}(k)} f(e) \right) (x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset, \psi^{-1}(k) \neq \emptyset \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $\varphi_\psi(f)$ bulanık esnek kümesine f nin bir bulanık esnek görüntüsü denir.

(ii) $g \in FS(Y, K)$ olsun. Bu durumda $\varphi_\psi^{-1}(g)$, X üzerinde bir bulanık esnek kümedir ve her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\varphi_\psi^{-1}(g)(e)(x) = g(\psi(e))(\varphi(x))$$

şeklinde tanımlanır. $\varphi_\psi^{-1}(g)$ bulanık esnek kümesine g nin bir bulanık esnek ters görüntüsü denir.

φ ve ψ dönüşümleri bire-bir (örten) ise φ_ψ bulanık esnek dönüşümü de bire-bir (örten) olarak adlandırılır (Kharal ve Ahmad 2009).

Teorem 2.5.10. J bir indeks kümesi olmak üzere her $i \in J$ için $f_i \in FS(X, E)$ ve $g_i \in FS(Y, K)$ olsun. Bir $\varphi_\psi : FS(X, E) \rightarrow FS(Y, K)$ bulanık esnek dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $f_1 \sqsubseteq f_2$ ise $\varphi_\psi(f_1) \sqsubseteq \varphi_\psi(f_2)$.

(ii) $g_1 \sqsubseteq g_2$ ise $\varphi_\psi^{-1}(g_1) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g_2)$.

(iii) $\varphi_\psi(\sqcup_{i \in J} f_i) = \sqcup_{i \in J} \varphi_\psi(f_i)$.

(iv) $\varphi_\psi^{-1}(\sqcup_{i \in J} g_i) = \sqcup_{i \in J} \varphi_\psi^{-1}(g_i)$.

(v) $\varphi_\psi^{-1}(\prod_{i \in J} g_i) = \prod_{i \in J} \varphi_\psi^{-1}(g_i)$.

(vi) $\varphi_\psi^{-1}(\tilde{Y}) = \tilde{X}$, $\varphi_\psi^{-1}(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$ ve $\varphi_\psi(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$ (Kharal ve Ahmad 2009).

Teorem 2.5.11. J bir indeks kümesi olmak üzere her $i \in J$ için $f, f_i \in FS(X, E)$ ve $g \in FS(Y, K)$ olsun. Bir $\varphi_\psi : FS(X, E) \rightarrow FS(Y, K)$ bulanık esnek dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $f \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f))$ dir. Ayrıca, φ_ψ bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(ii) $\varphi_\psi(\varphi_\psi^{-1}(g)) \sqsubseteq g$ dir. Ayrıca, φ_ψ örten ise eşitlik sağlanır (Varol ve Aygün 2012).

Tanım 2.5.12. $f \in FS(X, E)$ ve $g \in FS(Y, K)$ olsun. f ve g bulanık esnek kümelerin kartezyen çarpımı, her $(e, k) \in E \times K$ için $(f \times g)(e, k) = f(e) \times g(k)$ şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre, $f \times g$ bulanık esnek kümesi $X \times Y$ üzerinde bir bulanık esnek kümedir (Varol ve Aygün 2012).

Tanım 2.5.13. $p_X : X \times Y \rightarrow X$, $q_E : E \times K \rightarrow E$ ve $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$, $q_K : E \times K \rightarrow K$ izdüşüm dönüşümleri verilsin. $f \times g \in FS(X \times Y, E \times K)$ olsun. Bu durumda,

$$(p_X)_{q_E}(f \times g) = f \quad \text{ve} \quad (p_Y)_{q_K}(f \times g) = g$$

olmak üzere $(p_X)_{q_E}$ ve $(p_Y)_{q_K}$ bulanık esnek dönüşümlerine bulanık esnek izdüşüm dönüşümleri denir (Varol ve Aygün 2012).

2.6. BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Tanım 2.6.1. $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\tau \subseteq FS(X, E)$ ailesine X üzerinde bir bulanık esnek topoloji denir.

(BET1) $\tilde{\emptyset}, \tilde{X} \in \tau$.

(BET2) $f_1, f_2, \dots, f_n \in \tau$ ise $\prod_{i=1}^n f_i \in \tau$.

(BET3) Her $i \in J$ için $f_i \in \tau$ ise $\sqcup_{i \in J} f_i \in \tau$.

Bu durumda, (X, τ, E) üçlüsü bir bulanık esnek topolojik uzay olarak adlandırılır. τ nun elemanlarına da bulanık esnek açık küme denir. $f \in FS(X, E)$ olmak üzere $f^c \in \tau$ ise f bulanık esnek kümesine X üzerinde bir bulanık esnek kapalı küme denir (Tanay ve Kandemir 2011).

Tanım 2.6.2. (X, τ, E) bir bulanık esnek topolojik uzay ve $f \in FS(X, E)$ olsun. f nin bulanık esnek içi

$$f^o = \sqcup\{g \mid g \text{ bir bulanık esnek açık küme ve } g \sqsubseteq f\}$$

bulanık esnek kümesidir.

Buna göre f^o , f tarafından içerilen en büyük bulanık esnek açık kümedir (Tanay ve Kandemir 2011).

Tanım 2.6.3. (X, τ, E) bir bulanık esnek topolojik uzay ve $f \in FS(X, E)$ olsun. f nin bulanık esnek kapanışı

$$\bar{f} = \cap\{g \mid g \text{ bir bulanık esnek kapalı küme ve } f \sqsubseteq g\}$$

bulanık esnek kümesidir.

Buna göre \bar{f} , f yi içeren en küçük bulanık esnek kapalı kümedir (Varol ve Aygün 2012), (Neog ve diğ. 2012).

Teorem 2.6.4. X boştan farklı bir küme olsun. Her $f \in FS(X, E)$ bulanık esnek kümesine aşağıdaki özellikleri sağlayan bir \bar{f} bulanık esnek kümesi karşılık getirilsin.

$$(BEO1) f \sqsubseteq \bar{f},$$

$$(BEO2) \bar{\bar{f}} = \bar{f},$$

$$(BEO3) \overline{f \sqcup g} = \bar{f} \sqcup \bar{g},$$

$$(BEO4) \bar{\emptyset} = \emptyset.$$

Bu durumda,

$$\tau = \{f \in FS(X, E) \mid \bar{f}^c = f^c\}$$

ailesi X üzerinde bir bulanık esnek topolojidir ve bu bulanık esnek topolojiye göre her $f \in FS(X, E)$ için \bar{f} , f bulanık esnek kümesinin bulanık esnek kapanışdır.

Bu operatöre bir bulanık esnek kapanış operatörü denir (Varol ve Aygün 2012).

Tanım 2.6.5. (X, τ_1, E) ve (Y, τ_2, K) iki bulanık esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : (X, \tau_1, E) \rightarrow (Y, \tau_2, K)$ bir bulanık esnek dönüşüm olsun. Her $g \in \tau_2$ için $\varphi_\psi^{-1}(g) \in \tau_1$ oluyorsa φ_ψ bulanık esnek dönüşümüne bir bulanık esnek sürekli dönüşüm denir (Varol ve Aygün 2012).

Teorem 2.6.6. (X, τ_1, E) ve (Y, τ_2, K) iki bulanık esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : (X, \tau_1, E) \rightarrow (Y, \tau_2, K)$ bir bulanık esnek dönüşüm olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler denktir.

(i) φ_ψ bir bulanık esnek sürekli dönüşümdür.

(ii) Her $f \in FS(X, E)$ için $\varphi_\psi(\bar{f}) \subseteq \overline{\varphi_\psi(f)}$ dir (Varol ve Aygün 2012).

Tanım 2.6.7. (X, τ, E) bir bulanık esnek topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olsun. τ nun her elemanı \mathcal{B} nin elemanlarının herhangi bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa \mathcal{B} ailesine τ için bir tabandır denir (Tanay ve Kandemir 2011).

Tanım 2.6.8. (X, τ, E) bir bulanık esnek topolojik uzay ve $\mathcal{S} \subseteq \tau$ olsun. \mathcal{S} ailesindeki bulanık esnek kümelerin sonlu arakesitlerinden elde edilen \mathcal{B} ailesi τ için bir taban ise \mathcal{S} ailesine τ bulanık esnek topolojisi için bir alt taban denir (Varol ve Aygün 2012).

Teorem 2.6.9. $\mathcal{S} \subseteq FS(X, E)$ ve $\tilde{\emptyset}, \tilde{X} \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki τ ailesi X üzerinde bir bulanık esnek topolojidir.

$$\tau = \{ \sqcup_{i \in J} (\prod_{\lambda \in \Lambda_i} f_{i,\lambda}) \mid f_{i,\lambda} \in \mathcal{S}, J \text{ keyfi}, \Lambda_i \text{ sonlu indeks kümesi} \}$$

(Varol ve Aygün 2012).

Tanım 2.6.10. X boştan farklı bir küme, $\{(Y_i, \tau_i, K_i)\}_{i \in J}$ bulanık esnek topolojik uzayların bir ailesi ve $\{(\varphi_\psi)_i : FS(X, E) \rightarrow (Y_i, \tau_i, K_i)\}_{i \in J}$ bulanık esnek dönüşümlerin bir ailesi olsun. X üzerinde $\mathcal{S} = \{(\varphi_\psi)_i^{-1}(f) \mid f \in \tau_i, i \in J\}$ alt tabanı yardımıyla üretilen bulanık esnek topolojiye $\{(\varphi_\psi)_i\}_{i \in J}$ ailesi yardımıyla üretilen bir başlangıç bulanık esnek topolojisi denir (Varol ve Aygün 2012).

Teorem 2.6.11. X üzerinde $\{(\varphi_\psi)_i\}_{i \in J}$ ailesi yardımıyla üretilen başlangıç bulanık esnek topolojisi, her $i \in J$ için $(\varphi_\psi)_i : (X, \tau, E) \rightarrow (Y_i, \tau_i, K_i)$ bulanık esnek dönüşümlerini bulanık esnek sürekli yapan en kaba bulanık esnek topolojidir (Varol ve Aygün 2012).

Tanım 2.6.12. $\{(X_i, \tau_i, E_i)\}_{i \in J}$ bulanık esnek topolojik uzayların bir ailesi olsun. $p_{X_i} : \prod_{i \in J} X_i \rightarrow X_i$ ve $q_{E_i} : \prod_{i \in J} E_i \rightarrow E_i$ olmak üzere $X (= \prod_{i \in J} X_i)$ üzerindeki $\{(p_{X_i})_{(q_{E_i})}\}_{i \in J}$ bulanık esnek izdüşüm dönüşümleri yardımıyla üretilen başlangıç bulanık esnek topolojisine X üzerinde bir çarpım bulanık esnek topolojisi denir ve $\prod_{i \in J} \tau_i$ ile gösterilir (Varol ve Aygün 2012).

Tanım 2.6.13. (X, τ, E) bir bulanık esnek topolojik uzay, $f \in FS(X, E)$ ve $e_{x^\alpha} \in FSP(X)$ olsun. $e_{x^\alpha} \tilde{\Xi} g \sqsubseteq f$ olacak şekilde bir $g \in \tau$ bulanık esnek açık kümesi varsa f ye e_{x^α} bulanık esnek noktasının bir bulanık esnek komşuluğu denir.

Bir e_{x^α} bulanık esnek noktasının bulanık esnek komşuluk sistemi tüm bulanık esnek komşuluklarının bir ailesidir ve $\mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ ile gösterilir (Tanay ve Kandemir 2011).

Teorem 2.6.14. (X, τ, E) bir bulanık esnek topolojik uzay olsun. Bu takdirde bir $\mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ bulanık esnek komşuluk sistemi için aşağıdakiler sağlanır.

(BEK1) $\mathcal{N}(e_{x^\alpha}) \neq \emptyset$.

(BEK2) $f \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ ise $e_{x^\alpha} \tilde{\Xi} f$ dir.

(BEK3) $f \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ ve $f \sqsubseteq g$ ise $g \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ dir.

(BEK4) $f, g \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ ise $f \sqcap g \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ dır.

(BEK5) $f \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ ise $g \sqsubseteq f$ ve her $e'_{y^\lambda} \tilde{\Xi} g$ için $g \in \mathcal{N}(e'_{y^\lambda})$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ vardır (Mahanta ve Das 2012).

Önerme 2.6.15. (X, τ, E) bir bulanık esnek topolojik uzay ve $f \in FS(X, E)$ olsun. $f \in \tau$ olması için gerek ve yeter koşul f nin her bulanık esnek noktasının bir bulanık esnek komşuluğu olmasıdır (Mahanta ve Das 2012).

Teorem 2.6.16. (X, τ_1, E) ve (Y, τ_2, K) iki bulanık esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : (X, \tau_1, E) \rightarrow (Y, \tau_2, K)$ bir bulanık esnek dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

(i) φ_ψ bir bulanık esnek sürekli dönüşümdür.

(ii) Her $e_{x^\alpha} \in FSP(X)$ bulanık esnek noktası ve $\varphi_\psi(e_{x^\alpha})$ nın her h bulanık esnek komşuluğu için $\varphi_\psi(g) \sqsubseteq h$ olacak şekilde e_{x^α} bulanık esnek noktasının bir g bulanık esnek komşuluğu vardır (Atmaca ve Zorlutuna 2013).

Tanım 2.6.17. (X, τ, E) bir bulanık esnek topolojik uzay olsun. $e_{x_1^{\alpha_1}} \neq e_{x_2^{\alpha_2}}$ özelliğindeki her $e_{x_1^{\alpha_1}}, e_{x_2^{\alpha_2}} \in FSP(X)$ için $e_{x_1^{\alpha_1}} \tilde{\in} f$, $e_{x_2^{\alpha_2}} \tilde{\in} g$ ve $f \sqcap g = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde $f, g \in \tau$ varsa (X, τ, E) bulanık esnek topolojik uzayına bir bulanık esnek Hausdorff uzay denir (Mahanta ve Das 2012).

3. ESNEK DÜZGÜN UZAYLAR

Bu bölümde, esnek küme teorisi kullanılarak bir esnek düzgün yapı tanımlanacak ve bir esnek topoloji ve bir esnek metrik ile ilişkisi incelenecektir. Ayrıca, Kandil ve diğ. (2014) tarafından verilen esnek yakınlık uzaylarına ilişkin özellikler elde edilerek klasik anlamdaki yakınlık uzaylarıyla ilişkisi çalışılacaktır. Bunun yanı sıra, bir esnek düzgün uzaydan bir esnek yakınlık uzay üretilerek ve başlangıç esnek yakınlık uzaylarının varlığı gösterilecektir. Daha sonra bir esnek yığılma kavramı verilerek ilgili özellikleri incelenecektir.

3.1. ESNEK DÜZGÜN UZAYLAR

Çetkin ve Aygün (2013), E parametre kümesine göre $X \times X$ üzerindeki esnek kümeleri kullanarak bir esnek düzgün yapı tanımlamıştır. Bu bölümde, bu tanımdan farklı olarak, E parametre kümesine göre $SP(X) \times SP(X)$ üzerindeki esnek kümeleri kullanarak bir esnek düzgün uzay kavramı verilecektir. Böylece, Das ve Samanta (2013(a)) tarafından verilen esnek metrik uzaylar ile ilişkileri incelenebilecektir.

E parametreler kümesine sahip $SP(X) \times SP(X)$ üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi $S(SP(X) \times SP(X), E)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.1. (i) $\Delta \in S(SP(X) \times SP(X), E)$ olmak üzere her $e \in E$ için

$$\Delta(e) = \{(x^\alpha, x^\alpha) \mid x^\alpha \in SP(X)\}$$

ile gösterilen Δ esnek kümesine bir köşegen esnek küme denir.

(ii) $U \in S(SP(X) \times SP(X), E)$ olsun. Bu durumda, her $e \in E$ için

$$U^{-1}(e) = \{(x_1^{e_1}, x_2^{e_2}) \mid (x_2^{e_2}, x_1^{e_1}) \in U(e)\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca $U = U^{-1}$ ise U esnek kümesine bir simetrik esnek küme denir.

(iii) $U, V \in S(SP(X) \times SP(X), E)$ olsun. Bu durumda, her $e \in E$ için

$$U \circ V(e) = \{(x_1^{e_1}, x_2^{e_2}) \mid \text{bir } z^\alpha \in SP(X) \text{ için } (x_1^{e_1}, z^\alpha) \in V(e) \text{ ve } (z^\alpha, x_2^{e_2}) \in U(e)\}$$

ile tanımlanır.

Uyarı 3.1.2. $U, V, W \in S(SP(X) \times SP(X), E)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $U \subseteq V$ ise $U^{-1} \subseteq V^{-1}$ ve $U \circ W \subseteq V \circ W$ olur.

(ii) $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$.

(iii) $(U \circ V) \circ W = U \circ (V \circ W)$.

İspat. Tanım 3.1.1 den kolaylıkla elde edilir.

Tanım 3.1.3. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan boştan farklı $\mathcal{U} \subseteq S(SP(X) \times SP(X), E)$ ailesine X üzerinde bir esnek düzgün yapı denir.

(ED1) $U \in \mathcal{U}$ ise $\Delta \subseteq U$ dur.

(ED2) $U \in \mathcal{U}$ ise $V \circ V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

(ED3) $U \in \mathcal{U}$ ise $V^{-1} \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

(ED4) $U, V \in \mathcal{U}$ ise $U \cap V \in \mathcal{U}$ dur.

(ED5) $U \in \mathcal{U}$ ve $U \subseteq V$ ise $V \in \mathcal{U}$ dur.

Bu durumda, (X, \mathcal{U}, E) üçlüsüne bir esnek düzgün uzay denir.

Örnek 3.1.4. $X = \{x\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. $SP(X) \times SP(X)$ üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan $\Delta, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9, U_{10}, U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{15}$ esnek kümeleri olsun.

$$\Delta(e_1) = \{(x^{e_1}, x^{e_1}), (x^{e_2}, x^{e_2})\}, \quad \Delta(e_2) = \{(x^{e_1}, x^{e_1}), (x^{e_2}, x^{e_2})\},$$

$$U_1(e_1) = \Delta(e_1), \quad U_1(e_2) = \Delta(e_2) \cup \{(x^{e_1}, x^{e_2})\},$$

$$U_2(e_1) = \Delta(e_1), \quad U_2(e_2) = \Delta(e_2) \cup \{(x^{e_2}, x^{e_1})\},$$

$$\begin{aligned}
U_3(e_1) &= \Delta(e_1), & U_3(e_2) &= SP(X) \times SP(X), \\
U_4(e_1) &= \Delta(e_1) \cup \{(x^{e_1}, x^{e_2})\}, & U_4(e_2) &= \Delta(e_2), \\
U_5(e_1) &= \Delta(e_1) \cup \{(x^{e_1}, x^{e_2})\}, & U_5(e_2) &= \Delta(e_2) \cup \{(x^{e_1}, x^{e_2})\}, \\
U_6(e_1) &= \Delta(e_1) \cup \{(x^{e_1}, x^{e_2})\}, & U_6(e_2) &= \Delta(e_2) \cup \{(x^{e_2}, x^{e_1})\}, \\
U_7(e_1) &= \Delta(e_1) \cup \{(x^{e_1}, x^{e_2})\}, & U_7(e_2) &= SP(X) \times SP(X), \\
U_8(e_1) &= \Delta(e_1) \cup \{(x^{e_2}, x^{e_1})\}, & U_8(e_2) &= \Delta(e_2), \\
U_9(e_1) &= \Delta(e_1) \cup \{(x^{e_2}, x^{e_1})\}, & U_9(e_2) &= \Delta(e_2) \cup \{(x^{e_1}, x^{e_2})\}, \\
U_{10}(e_1) &= \Delta(e_1) \cup \{(x^{e_2}, x^{e_1})\}, & U_{10}(e_2) &= \Delta(e_2) \cup \{(x^{e_2}, x^{e_1})\}, \\
U_{11}(e_1) &= \Delta(e_1) \cup \{(x^{e_2}, x^{e_1})\}, & U_{11}(e_2) &= SP(X) \times SP(X), \\
U_{12}(e_1) &= SP(X) \times SP(X), & U_{12}(e_2) &= \Delta(e_2), \\
U_{13}(e_1) &= SP(X) \times SP(X), & U_{13}(e_2) &= \Delta(e_2) \cup \{(x^{e_1}, x^{e_2})\}, \\
U_{14}(e_1) &= SP(X) \times SP(X), & U_{14}(e_2) &= \Delta(e_2) \cup \{(x^{e_2}, x^{e_1})\}, \\
U_{15}(e_1) &= SP(X) \times SP(X), & U_{15}(e_2) &= SP(X) \times SP(X).
\end{aligned}$$

O halde

$$\mathcal{U} = \{\Delta, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9, U_{10}, U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{15}\}$$

ailesi X üzerinde bir esnek düzgün yapıdır ve buradan (X, \mathcal{U}, E) üçlüsü bir esnek düzgün uzaydır.

Uyarı 3.1.5. Yukarıdaki örneğe göre Çetkin ve Aygün anlamındaki esnek düzgün yapı $\mathcal{U} = \{\Delta_C\}$ dir. Burada, $e_1, e_2 \in E$ için $\Delta_C(e_1) = \Delta_C(e_2) = \{(x, x)\}$ olmak üzere $\Delta_C : E \rightarrow \mathcal{P}(X \times X)$ dönüşümü $X \times X$ üzerinde bir esnek kümedir. Böylece Çetkin ve Aygün tarafından tanımlanan esnek düzgün yapı ile Tanım 3.1.3 deki esnek düzgün yapının birbirinden tamamen bağımsız olduğu görülebilir.

Tanım 3.1.6. (X, \mathcal{U}, E) bir esnek düzgün uzay ve $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ boştan farklı bir alt aile olsun. Her $U \in \mathcal{U}$ için $V \sqsubseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{B}$ varsa \mathcal{B} ailesine \mathcal{U} esnek düzgün yapısı için bir esnek taban denir.

Teorem 3.1.7. Boştan farklı bir $\mathcal{B} \subseteq S(SP(X) \times SP(X), E)$ alt kümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu durumda \mathcal{B} ailesi X üzerindeki bir esnek düzgün yapı için bir esnek tabandır.

(i) $B \in \mathcal{B}$ ise $\Delta \sqsubseteq B$ dir.

(ii) $B \in \mathcal{B}$ ise $C \circ C \sqsubseteq B$ olacak şekilde bir $C \in \mathcal{B}$ vardır.

(iii) $B \in \mathcal{B}$ ise $C^{-1} \sqsubseteq B$ olacak şekilde bir $C \in \mathcal{B}$ vardır.

(iv) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ise $B_3 \sqsubseteq B_1 \sqcap B_2$ olacak şekilde bir $B_3 \in \mathcal{B}$ vardır.

İspat. (i)-(iv) koşullarını sağlayan boştan farklı bir \mathcal{B} ailesinin X üzerindeki bir $\mathcal{U} = \{U \in S(SP(X) \times SP(X), E) \mid \text{bir } B \in \mathcal{B} \text{ için } B \sqsubseteq U\}$ esnek düzgün yapısını ürettiğini görmek kolaydır.

Tanım 3.1.8. (X, \mathcal{U}, E) bir esnek düzgün uzay ve boştan farklı bir $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$ alt ailesi olsun. \mathcal{S} ailesinin elemanlarının bütün sonlu arakesitleri \mathcal{U} esnek düzgün yapısı için bir esnek taban oluşturuyorsa \mathcal{S} ailesine \mathcal{U} için bir esnek alt taban denir.

Örnek 3.1.9. (i) $X = E = \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda, her $\alpha \in E$ için

$$D_{x^e}(\alpha) = \Delta(\alpha) \cup \{(x_1^{e_1}, x_2^{e_2}) \mid x_1, x_2 > x \text{ ve } e_1, e_2 > e\}$$

olmak üzere $\mathcal{B} = \{D_{x^e} \mid x^e \in \tilde{X}\}$ ailesi \mathbb{R} üzerindeki bir esnek düzgün yapı için bir esnek tabandır.

Gerçekten, Teorem 3.1.7 (i) ve (iv) koşullarının sağlandığı açıktır. Diğer yandan her $x^e \in \tilde{X}$ için $D_{x^e} \circ D_{x^e} \sqsubseteq D_{x^e}$ ve $D_{x^e}^{-1} \sqsubseteq D_{x^e}$ olduğundan Teorem 3.1.7 (ii) ve (iii) koşulları da elde edilir.

(ii) X bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $\mathcal{U} = \{U \mid \Delta \sqsubseteq U\}$ ailesi X üzerinde bir esnek düzgün yapıdır. Bu esnek düzgün yapıya ayrık esnek düzgün yapı denir. Bu esnek düzgün yapının bir esnek tabanı $\mathcal{B} = \{\Delta\}$ şeklindedir.

Örnek 3.1.10. $X = E = \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda, her $e \in E$ için

$$D_{\tilde{\epsilon}}(e) = \{(x_1^{e_1}, x_2^{e_2}) \mid |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + |\bar{e}_1 - \bar{e}_2| \lesssim \tilde{\epsilon}\}$$

olmak üzere $\mathcal{B} = \{D_{\tilde{\epsilon}} \mid \tilde{\epsilon} \succ \bar{0}\}$ ailesi \mathbb{R} üzerindeki bir esnek düzgün yapı için bir esnek tabandır.

\mathcal{B} nin Teorem 3.1.7 (i)-(iv) koşullarını sağladığını gösterelim.

(i) $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ ve $e \in E$ olsun. Her $x^\alpha \tilde{\in} \tilde{X}$ için $|\bar{x} - \bar{x}| + |\bar{\alpha} - \bar{\alpha}| = \bar{0}$ olduğundan $(x^\alpha, x^\alpha) \in D_{\tilde{\epsilon}}(e)$ elde edilir.

(ii) Her $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ için $D_{\tilde{\epsilon}/2} \circ D_{\tilde{\epsilon}/2} \sqsubseteq D_{\tilde{\epsilon}}$ sağlanır. Gerçekten, $e \in E$ ve $(x_1^{e_1}, x_2^{e_2}) \in D_{\tilde{\epsilon}/2} \circ D_{\tilde{\epsilon}/2}(e)$ olsun. Bu durumda $(x_1^{e_1}, z^\beta) \in D_{\tilde{\epsilon}/2}(e)$ ve $(z^\beta, x_2^{e_2}) \in D_{\tilde{\epsilon}/2}(e)$ olacak şekilde bir $z^\beta \tilde{\in} \tilde{X}$ vardır. Buradan,

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + |\bar{e}_1 - \bar{e}_2| \lesssim |\bar{x}_1 - \bar{z}| + |\bar{z} - \bar{x}_2| + |\bar{e}_1 - \bar{\beta}| + |\bar{\beta} - \bar{e}_2| \lesssim \tilde{\epsilon}/2 + \tilde{\epsilon}/2 = \tilde{\epsilon}$$

bulunur. Böylece $(x_1^{e_1}, x_2^{e_2}) \in D_{\tilde{\epsilon}}(e)$ elde edilir.

(iii) Her $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ için $D_{\tilde{\epsilon}} = D_{\tilde{\epsilon}}^{-1}$ olduğundan açıktır.

(iv) $\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2 \succ \bar{0}$ olsun. Şimdi, her $e \in E$ için $\tilde{\epsilon}(e) = \min\{\tilde{\epsilon}_1(e), \tilde{\epsilon}_2(e)\}$ olacak şekilde bir $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ alınsın. O halde $D_{\tilde{\epsilon}} \sqsubseteq D_{\tilde{\epsilon}_1} \cap D_{\tilde{\epsilon}_2}$ olduğu kolaylıkla görülür.

Daha genel olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1.11. (X, d, E) esnek noktalara göre tanımlanan bir esnek metrik uzay olsun.

Bu durumda, her $e \in E$ için

$$D_{\tilde{\epsilon}}(e) = \{(x_1^{e_1}, x_2^{e_2}) \mid d(x_1^{e_1}, x_2^{e_2}) \lesssim \tilde{\epsilon}\}$$

olmak üzere $\mathcal{B} = \{D_{\tilde{\epsilon}} \mid \tilde{\epsilon} \succ \bar{0}\}$ ailesi X üzerindeki bir esnek düzgün yapı için bir esnek tabandır.

İspat. Örnek 3.1.10 dan ve esnek metrik uzay tanımından açıktır.

Tanım 3.1.12. (i) Yukarıda oluşturulan esnek düzgün yapıya d esnek metriği ile üretilen esnek metrik düzgün yapı denir.

(ii) Bir (X, \mathcal{U}, E) esnek düzgün uzayının esnek düzgün yapısı bir esnek metrik ile üretilebiliyorsa bu esnek düzgün uzaya metriklenebilir esnek düzgün uzay denir.

Uyarı 3.1.13. (X, d, E) esnek noktalara göre tanımlanan bir esnek metrik uzay olsun. X üzerindeki d esnek metriği ile $2d$ esnek metriği aynı esnek düzgün yapıyı üretirler. Buradan bir küme üzerindeki farklı esnek metriklerin aynı esnek düzgün yapıyı üretebildikleri sonucu çıkarılır. O halde esnek düzgün yapılar esnek metrik uzaylardan daha zayıf yapılardır.

Lemma 3.1.14. (X, \mathcal{U}, E) bir esnek düzgün uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) $U \in \mathcal{U}$ ise $U^{-1} \in \mathcal{U}$ olur.

(ii) (ED2) ve (ED3) aksiyomları birlikte aşağıdaki aksiyoma denktir:

Her $U \in \mathcal{U}$ için $V \circ V^{-1} \sqsubseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

(iii) \mathcal{U} esnek düzgün yapıdaki simetrik esnek kümeler \mathcal{U} için bir esnek taban oluştururlar.

İspat. (i) ve (iii) açıktır.

(ii) (ED2) ve (ED3) aksiyomlarının sağlandığını kabul edelim. $U \in \mathcal{U}$ olsun. Bu durumda $V_1 \circ V_1 \sqsubseteq U$ ve $V_2^{-1} \sqsubseteq U$ olacak şekilde $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$ vardır. $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$ alınsın. O halde $V \circ V^{-1} \sqsubseteq U$ elde edilir.

Tersine, yukarıdaki aksiyomun sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde her $U \in \mathcal{U}$ için $V \circ V^{-1} \sqsubseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. (ED1) den $V^{-1} \sqsubseteq U$ olur. $W = V \cap V^{-1}$ olarak tanımlanırsa (i) ve (ED4) gereğince $W \in \mathcal{U}$ elde edilir. Böylece $W \circ W \sqsubseteq U$ sağlanır.

3.2. ESNEK DÜZGÜN UZAYLAR İLE ÜRETİLEN ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde bir esnek noktanın esnek komşuluk sistemi kullanılarak bir esnek düzgün uzaydan bir esnek topolojik uzay elde edilecektir. Ayrıca elde edilen bu esnek topolojik uzay üzerinde önemli özellikler incelenecektir.

Tanım 3.2.1. (X, \mathcal{U}, E) bir esnek düzgün uzay ve $x^e \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. Bu durumda, her $U \in \mathcal{U}$ için

$$U[x^e] = \sqcup \{z^\beta \tilde{\in} \tilde{X} \mid \text{her } \alpha \in E \text{ için } (x^e, z^\beta) \in U(\alpha)\}$$

şeklinde X üzerinde bir esnek küme tanımlanır. Bu durum X üzerindeki bir F esnek kümesine aşağıdaki gibi genişletilir:

$$U[F] = \sqcup_{x^e \tilde{\in} F} U[x^e] = \sqcup \{z^\beta \tilde{\in} \tilde{X} \mid \text{her } \alpha \in E \text{ ve bir } x^e \tilde{\in} F \text{ için } (x^e, z^\beta) \in U(\alpha)\}.$$

Örnek 3.2.2. Örnek 3.1.4 de tanımlanan (X, \mathcal{U}, E) esnek düzgün uzayı alınsın. Bu takdirde, $x^{e_1} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $U_5, U_6 \in \mathcal{U}$ için

$$U_5[x^{e_1}] = x^{e_1} \sqcup x^{e_2} = \tilde{X} \in S(X, E) \text{ ve } U_6[x^{e_1}] = x^{e_1} \in S(X, E)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3. (X, \mathcal{U}, E) bir esnek düzgün uzay olsun. Bu durumda her $x^e \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\mathcal{N}_{x^e} = \{U[x^e] \mid U \in \mathcal{U}\}$ ailesi X üzerindeki bir esnek topolojinin x^e esnek noktasındaki esnek komşuluk sistemini oluşturur.

İspat. Teorem 2.2.15 gereğince \mathcal{N}_{x^e} ailesinin (EK1)-(EK5) koşullarını sağladığını göstermek yeterlidir.

(EK1) koşulu açıktır.

(EK2) $U[x^e] \in \mathcal{N}_{x^e}$ olsun. $\Delta \sqsubseteq U$ olduğundan her $\alpha \in E$ için $(x^e, x^e) \in U(\alpha)$ bulunur. Böylece $x^e \tilde{\in} U[x^e]$ elde edilir.

(EK3) $U[x^e] \in \mathcal{N}_{x^e}$ ve $U[x^e] \sqsubseteq V$ olsun. Her $\alpha \in E$ için

$$W(\alpha) = U(\alpha) \cup \{(x^e, z^\beta) \mid z^\beta \tilde{\in} V\}$$

tanımlansın. O halde $W \in \mathcal{U}$ ve $V = W[x^e]$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece $V \in \mathcal{N}_{x^e}$ sağlanır.

(EK4) $U_1[x^e], U_2[x^e] \in \mathcal{N}_{x^e}$ olsun. $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ olduğundan $U_1 \sqcap U_2 \in \mathcal{U}$ elde edilir. Şimdi, $U_1[x^e] \sqcap U_2[x^e] = (U_1 \sqcap U_2)[x^e]$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
z^\beta \tilde{\in} U_1[x^e] \cap U_2[x^e] &\Leftrightarrow (x^e, z^\beta) \in U_1(\alpha) \text{ ve } (x^e, z^\beta) \in U_2(\alpha), \forall \alpha \in E. \\
&\Leftrightarrow (x^e, z^\beta) \in U_1(\alpha) \cap U_2(\alpha) = (U_1 \cap U_2)(\alpha), \forall \alpha \in E. \\
&\Leftrightarrow z^\beta \tilde{\in} (U_1 \cap U_2)[x^e].
\end{aligned}$$

Böylece $U_1[x^e] \cap U_2[x^e] \in \mathcal{N}_{x^e}$ elde edilir.

(EK5) $U[x^e] \in \mathcal{N}_{x^e}$ olsun. $U \in \mathcal{U}$ olduğundan $V \circ V \sqsubseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. $z^\beta \tilde{\in} V[x^e]$, yani her $\alpha \in E$ için $(x^e, z^\beta) \in V(\alpha)$ olsun. Şimdi, $V[z^\beta] \sqsubseteq U[x^e]$ olduğunu gösterelim. $t^\lambda \tilde{\in} V[z^\beta]$ ise her $\alpha \in E$ için $(x^e, t^\lambda) \in (V \circ V)(\alpha)$ sağlanır. Buradan her $\alpha \in E$ için $(x^e, t^\lambda) \in U(\alpha)$ ve dolayısıyla $t^\lambda \tilde{\in} U[x^e]$ elde edilir. Böylece $V[z^\beta] \in \mathcal{N}_{z^\beta}$ olduğundan (EK3) gereğince $U[x^e] \in \mathcal{N}_{z^\beta}$ olur.

Tanım 3.2.4. Yukarıda tanımlanan esnek topolojiye \mathcal{U} esnek düzgün yapısıyla üretilen esnek düzgün topoloji denir ve $\tau_{\mathcal{U}}$ ile gösterilir.

Örnek 3.2.5. (i) Herhangi bir X kümesi üzerindeki ayrık esnek düzgün yapı ile üretilen esnek topoloji ayrık esnek topolojidir.

(ii) Örnek 3.1.9 (i) de tanımlanan (X, \mathcal{U}, E) esnek düzgün uzayı alınsın. Her $z^\beta \tilde{\in} \tilde{X}$ için $x \geq z$ veya $e \geq \beta$ iken $D_{x^e}[z^\beta] = z^\beta$ olduğundan bu esnek düzgün yapı ile üretilen esnek topoloji ayrık esnek topolojidir.

Buradan, bir küme üzerindeki farklı esnek düzgün yapıların aynı esnek topolojiyi üretebildikleri sonucu çıkarılır. O halde esnek topolojik yapılar esnek düzgün uzaylardan daha zayıf yapılardır.

Lemma 3.2.6. Bir (X, τ, E) esnek topolojik uzayın bir esnek T_1 -uzay olması için gerek ve yeter koşul her $x^e \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek noktasının esnek kapalı olmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) (X, τ, E) bir esnek T_1 -uzay ve $x^e \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. Bu durumda her $y^k \tilde{\in} (\tilde{X} - x^e)$ için $x^e \tilde{\notin} F$ ve $y^k \tilde{\in} F$ olacak şekilde bir $F \in \tau$ vardır. $x^e \cap F = \tilde{\emptyset}$ olduğundan $y^k \tilde{\in} F \sqsubseteq (\tilde{X} - x^e)$ bulunur. Buradan $(\tilde{X} - x^e)$, bir esnek açık kümedir. O halde $x^e \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek noktası esnek kapalıdır.

(\Leftrightarrow) $x^e \neq y^k$ olsun. Hipotezden x^e ve y^k esnek noktaları esnek kapalıdır. Böylece, $x^e \tilde{\in} (\tilde{X} - y^k)$, $y^k \tilde{\notin} (\tilde{X} - y^k)$ ve $y^k \tilde{\in} (\tilde{X} - x^e)$, $x^e \tilde{\notin} (\tilde{X} - x^e)$ olacak şekilde $(\tilde{X} - x^e)$ ve $(\tilde{X} - y^k)$ esnek açık kümeleri vardır. O halde (X, τ, E) bir esnek T_1 -uzaydır.

Teorem 3.2.7. (i) (X, \mathcal{U}, E) bir esnek düzgün uzay ve $F \in S(X, E)$ olsun. Bu takdirde,

$$\bar{F} = \prod_{U \in \mathcal{U}} U[F]$$

sağlanır.

(ii) Bir $(X, \tau_{\mathcal{U}}, E)$ esnek topolojik uzayın bir esnek T_1 -uzay olması için gerek ve yeter koşul her $x^e \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\prod_{U \in \mathcal{U}} U[x^e] = x^e$ olmasıdır.

İspat. (i) $x^e \tilde{\in} \bar{F} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}, U[x^e] \cap F \neq \emptyset$.

$$\Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{U}) (\exists z^\beta \tilde{\in} \tilde{X}) : (z^\beta \tilde{\in} U[x^e] \text{ ve } z^\beta \tilde{\in} F).$$

$$\Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{U}) (\forall \alpha \in E) (\exists z^\beta \tilde{\in} F) : (x^e, z^\beta) \in U(\alpha).$$

$$\Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{U}) (\forall \alpha \in E) (\exists z^\beta \tilde{\in} F) : (z^\beta, x^e) \in U^{-1}(\alpha).$$

$$\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}, x^e \tilde{\in} U^{-1}[F].$$

$$\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}, x^e \tilde{\in} U[F].$$

(ii) $(X, \tau_{\mathcal{U}}, E)$ bir esnek T_1 -uzay ise Lemma 3.2.6 dan her $x^e \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\bar{x}^e = x^e$ elde edilir. Böylece (i) gereğince $\prod_{U \in \mathcal{U}} U[x^e] = \bar{x}^e = x^e$ sağlanır.

Tersine, her $x^e \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\prod_{U \in \mathcal{U}} U[x^e] = x^e$ ise bu durumda (i) gereğince $\bar{x}^e = x^e$ dir. O halde $(X, \tau_{\mathcal{U}}, E)$ bir esnek T_1 -uzaydır.

Tanım 3.2.8. (X, \mathcal{U}, E) bir esnek düzgün uzay olsun. $\prod_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta$ ise bu uzaya bir Hausdorff esnek düzgün uzay denir.

Örnek 3.2.9. Bir ayrık esnek düzgün uzayın bir Hausdorff esnek düzgün uzay olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.2.10. $E = \{e\}$ olmak üzere (X, \mathcal{U}, E) esnek düzgün uzayın bir Hausdorff esnek düzgün uzay olması için gerek ve yeter koşul $(X, \tau_{\mathcal{U}}, E)$ esnek topolojik uzayın bir esnek T_1 -uzay olmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) (X, \mathcal{U}, E) bir Hausdorff esnek düzgün uzay olsun. $x \neq z$ olmak üzere $z^e \notin \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U[x^e]$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $U \in \mathcal{U}$ için $(x^e, z^e) \in U(e)$ bulunur. Hipotez gereğince $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(e) = \Delta(e)$ olduğundan $(x^e, z^e) \in \Delta(e)$ çelişkisi elde edilir. Böylece Teorem 3.2.7 (ii) den $(X, \tau_{\mathcal{U}}, E)$ esnek topolojik uzayı bir esnek T_1 -uzaydır.

(\Leftarrow) $(X, \tau_{\mathcal{U}}, E)$ bir esnek T_1 -uzay olsun. $x \neq z$ olacak şekilde $(x^e, z^e) \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(e)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $U \in \mathcal{U}$ için $z^e \in U[x^e]$ sağlanır. Bu ise $z^e \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U[x^e] = x^e$ çelişkisine neden olur. Böylece (X, \mathcal{U}, E) esnek düzgün uzayı bir Hausdorff esnek düzgün uzaydır.

3.3. ESNEK DÜZGÜN SÜREKLİ DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde esnek düzgün sürekli dönüşümler tanımlanarak esnek sürekli dönüşümler ile ilişkisi araştırılacaktır. Bunun için öncelikle esnek dönüşümler ve esnek sürekli dönüşümler ile ilgili bazı özellikler verilecektir.

Lemma 3.3.1. $\varphi_{\psi} : S(X, E) \rightarrow S(Y, K)$ bir esnek dönüşüm ve $x^e \in SP(X)$ olsun. Bu durumda $\varphi_{\psi}(x^e) = \varphi(x)^{\psi(e)} \in SP(Y)$ sağlanır.

İspat. Esnek dönüşüm tanımından açıktır.

Lemma 3.3.2. $\varphi_{\psi} : S(X, E) \rightarrow S(Y, K)$ bir esnek dönüşüm ve $y^k \in SP(Y)$ olsun. Bu durumda φ_{ψ} birebir ve örten ise $\varphi_{\psi}^{-1}(y^k) = \varphi^{-1}(y)^{\psi^{-1}(k)} \in SP(X)$ sağlanır.

İspat. Esnek dönüşüm tanımından kolaylıkla elde edilir.

Teorem 3.3.3. (X, τ_1, E) ve (Y, τ_2, K) iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_{\psi} : (X, \tau_1, E) \rightarrow (Y, \tau_2, K)$ bir esnek dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

(i) $x^e \in \tilde{X}$ olmak üzere $\varphi_{\psi}(x^e)$ esnek noktasının her G esnek komşuluğu için $\varphi_{\psi}(F) \subseteq G$ olacak şekilde x^e esnek noktasının bir F esnek komşuluğu vardır.

(ii) φ_ψ bir esnek sürekli dönüşümdür, yani Y üzerindeki her G esnek açık kümesi için $\varphi_\psi^{-1}(G)$ esnek kümesi X üzerinde bir esnek açık kümedir.

(iii) Y üzerindeki her F esnek kapalı kümesi için $\varphi_\psi^{-1}(F)$ esnek kümesi X üzerinde bir esnek kapalı kümedir.

(iv) Her $F \in \mathcal{S}(X, E)$ için $\varphi_\psi(\bar{F}) \sqsubseteq \overline{\varphi_\psi(F)}$ dır.

İspat. (i) \Rightarrow (ii) $G \in \tau_2$ ve $x^e \tilde{\in} \varphi_\psi^{-1}(G)$ olsun. Bu durumda G esnek kümesi $\varphi_\psi(x^e)$ nin bir esnek komşuluğudur. (i) gereğince $F \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(G)$ olacak şekilde x^e nin bir F esnek komşuluğu vardır. Böylece $\varphi_\psi^{-1}(G)$ kendi esnek noktalarının bir esnek komşuluğudur ve dolayısıyla bir esnek açık kümedir.

(ii) \Rightarrow (iii) F esnek kümesi Y üzerinde bir esnek kapalı küme ise (ii) den $\varphi_\psi^{-1}(\tilde{Y} - F)$, X üzerinde bir esnek açık kümedir. O halde $\varphi_\psi^{-1}(\tilde{Y} - F) = \tilde{X} - \varphi_\psi^{-1}(F)$ olduğundan $\varphi_\psi^{-1}(F)$, X üzerinde bir esnek kapalı kümedir.

(iii) \Rightarrow (iv) $\varphi_\psi(F) \sqsubseteq H$ olacak şekilde Y üzerinde bir H esnek kapalı kümesi olsun. (iii) den $\varphi_\psi^{-1}(H)$, X üzerinde bir esnek kapalı kümedir. $\bar{F} \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(H)$ olduğundan $\varphi_\psi(\bar{F}) \sqsubseteq H$ elde edilir. Bu ifade $\varphi_\psi(F)$ yi içeren her H esnek kapalı kümesi için doğru olduğundan $\varphi_\psi(\bar{F}) \sqsubseteq \overline{\varphi_\psi(F)}$ sağlanır.

(iv) \Rightarrow (i) $x^e \tilde{\in} \tilde{X}$ ve G esnek kümesi $\varphi_\psi(x^e)$ nin bir esnek komşuluğu olsun. Bu durumda $\varphi_\psi(x^e) \tilde{\in} H \sqsubseteq G$ olacak şekilde Y üzerinde bir H esnek açık kümesi vardır. $B = \tilde{X} - \varphi_\psi^{-1}(H)$ alınsın ve $F = \tilde{X} - \bar{B}$ olsun. $\varphi_\psi(\bar{B}) \sqsubseteq \overline{\varphi_\psi(B)}$ olduğundan $x^e \tilde{\in} F$ elde edilir. Diğer yandan $\varphi_\psi(F) \sqsubseteq G$ olduğundan ispat biter.

Tanım 3.3.4. (X, \mathcal{U}, E) ve (Y, \mathcal{V}, K) iki esnek düzgün uzay ve $\varphi_\psi : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (Y, \mathcal{V}, K)$ bir esnek dönüşüm olsun. $V \in \mathcal{V}$ olmak üzere her $e \in E$ için $(x^\alpha, z^\beta) \in U(e)$ iken her $k \in K$ için $(\varphi_\psi(x^\alpha), \varphi_\psi(z^\beta)) \in V(k)$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ varsa φ_ψ ye bir esnek düzgün sürekli dönüşüm denir.

Örnek 3.3.5. Bir ayrık esnek düzgün uzaydan herhangi bir esnek düzgün uzaya giden her esnek dönüşüm bir esnek düzgün sürekli dönüşümdür.

Teorem 3.3.6. Her esnek düzgün sürekli dönüşüm bir esnek sürekli dönüşümdür.

İspat. $\varphi_\psi : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (Y, \mathcal{V}, K)$ bir esnek düzgün sürekli dönüşüm olsun. $x^\alpha \in \tilde{X}$ ve $V[\varphi_\psi(x^\alpha)]$ esnek kümesi $\varphi_\psi(x^\alpha)$ nın $\tau_\mathcal{V}$ esnek topolojisine göre bir esnek komşuluğu olsun. $V \in \mathcal{V}$ olduğundan hipotez gereğince her $e \in E$ için $(x^\alpha, z^\beta) \in U(e)$ iken her $k \in K$ için $(\varphi_\psi(x^\alpha), \varphi_\psi(z^\beta)) \in V(k)$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Diğer yandan $\varphi_\psi(U[x^\alpha]) \subseteq V[\varphi_\psi(x^\alpha)]$ olduğunu görmek kolaydır. O halde, Teorem 3.3.3 den φ_ψ esnek dönüşümü bir esnek sürekli dönüşümdür.

3.4. ESNEK YAKINLIK UZAYLAR

Bu bölümde Kandil ve diğ. (2014) tarafından tanımlanan esnek yakınlık uzayları ile ilgili özellikler verilerek klasik anlamdaki yakınlık uzaylarıyla ilişkisi elde edilecektir.

Tanım 3.4.1. $S(X, E)$ üzerindeki bir δ ikili bağıntısı aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu bağıntıya X üzerinde bir esnek yakınlık denir.

$$(EY1) \tilde{\emptyset} \bar{\delta} F.$$

$$(EY2) F \sqcap G \neq \tilde{\emptyset} \text{ ise } F \delta G.$$

$$(EY3) F \delta G \text{ ise } G \delta F.$$

$$(EY4) F \delta (G \sqcup H) \Leftrightarrow F \delta G \text{ veya } F \delta H.$$

$$(EY5) F \bar{\delta} G \text{ ise } F \bar{\delta} H \text{ ve } G \bar{\delta} (\tilde{X} - H) \text{ olacak şekilde bir } H \in S(X, E) \text{ vardır.}$$

(Burada, $\bar{\delta}$ ile δ nın olumsuzu gösterilmektedir. Ayrıca $(F, G) \in \delta$ yerine sadelik olması açısından $F \delta G$ yazılmıştır.) O halde, (X, δ, E) üçlüsüne bir esnek yakınlık uzay denir (Kandil ve diğ. 2014).

Örnek 3.4.2. (X, τ, E) bir esnek normal uzay olsun. X üzerinde aşağıdaki şekilde bir δ ikili bağıntısı tanımlansın:

$$F \delta G \Leftrightarrow \bar{F} \sqcap \bar{G} \neq \tilde{\emptyset}$$

Bu durumda δ , X üzerinde bir esnek yakınlıktır (Kandil ve diğ. 2014).

Örnek 3.4.3. X boştan farklı bir küme, E parametrelerin bir kümesi ve $F, G \in S(X, E)$ olsun.

(i) $F\delta G \Leftrightarrow F \neq \tilde{\emptyset}$ ve $G \neq \tilde{\emptyset}$ olarak tanımlanan δ bağıntısı X üzerinde bir esnek yakınlıktır.

(ii) $F\delta G \Leftrightarrow F \sqcap G \neq \tilde{\emptyset}$ şeklindeki δ bağıntısı X üzerinde bir esnek yakınlıktır.

Teorem 3.4.4. (X, δ) klasik anlamda bir yakınlık uzay ve $F, G \in S(X, E)$ olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan δ^i ikili bağıntısı X üzerinde bir esnek yakınlıktır.

$$F\bar{\delta}^i G \Leftrightarrow F \sqsubseteq \tilde{A}, G \sqsubseteq \tilde{B} \text{ ve } A\bar{\delta}B \text{ olacak şekilde } X \text{ in } A \text{ ve } B \text{ alt kümeleri vardır.}$$

İspat. δ^i nin (EY1)-(EY5) aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

(EY1) $\tilde{\emptyset} \sqsubseteq \tilde{\emptyset}, F \sqsubseteq \tilde{X}$ ve $\emptyset\bar{\delta}X$ olduğundan $\tilde{\emptyset}\bar{\delta}^i F$ elde edilir.

(EY2) $F\bar{\delta}^i G$ olsun. Bu durumda $F \sqsubseteq \tilde{A}, G \sqsubseteq \tilde{B}$ ve $A\bar{\delta}B$ olacak şekilde X in A ve B alt kümeleri vardır. $A\bar{\delta}B$ olduğundan $A \cap B = \emptyset$ ve dolayısıyla $\tilde{A} \sqcap \tilde{B} = \tilde{\emptyset}$ bulunur. Böylece $F \sqcap G = \tilde{\emptyset}$ sağlanır.

(EY3) $A\bar{\delta}B$ iken $B\bar{\delta}A$ olduğundan açıktır.

(EY4) $F\bar{\delta}^i(G \sqcup H)$ ise $F\bar{\delta}^i G$ ve $F\bar{\delta}^i H$ olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi $F\bar{\delta}^i G$ ve $F\bar{\delta}^i H$ olduğunu kabul edelim. Buradan $F \sqsubseteq \tilde{A}, G \sqsubseteq \tilde{B}$ ve $A\bar{\delta}B$ olacak şekilde X in A ve B alt kümeleri vardır. Benzer şekilde $F \sqsubseteq \tilde{C}, H \sqsubseteq \tilde{D}$ ve $C\bar{\delta}D$ olacak şekilde X in C ve D alt kümeleri vardır. O halde $F \sqsubseteq (\tilde{A} \sqcap \tilde{C}), (G \sqcup H) \sqsubseteq (\tilde{B} \sqcup \tilde{D})$ ve $(A \cap C)\bar{\delta}(B \cup D)$ olduğundan $F\bar{\delta}^i(G \sqcup H)$ elde edilir.

(EY5) $F\bar{\delta}^i G$ olsun. Bu durumda $F \sqsubseteq \tilde{A}, G \sqsubseteq \tilde{B}$ ve $A\bar{\delta}B$ olacak şekilde X in A ve B alt kümeleri vardır. $A\bar{\delta}B$ olduğundan en az bir $C \subseteq X$ alt kümesi için $A\bar{\delta}C$ ve $B\bar{\delta}(X - C)$ sağlanır. Buradan $F\bar{\delta}^i \tilde{C}$ ve $G\bar{\delta}^i(\tilde{X} - \tilde{C})$ olacak şekilde bir \tilde{C} esnek kümesi vardır.

Teorem 3.4.5. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $F, G \in S(A, E)$ için

$$F\delta_A G \Leftrightarrow F\delta G$$

şeklinde tanımlanan δ_A ikili bağıntısı A üzerinde bir esnek yakınlıktır.

İspat. δ_A için (EY1), (EY2), (EY3) ve (EY4) aksiyomlarının sağlandığı açıktır.

(EY5) $F\overline{\delta_A}G$ olsun. Bu durumda $F\overline{\delta}G$ olur. δ bir esnek yakınlık olduğundan $F\overline{\delta}H$ ve $G\overline{\delta}(\tilde{X} - H)$ olacak şekilde bir $H \in S(X, E)$ vardır.

$$(H \cap \tilde{A}) \subseteq H \quad \text{ve} \quad (\tilde{X} - H) \cap \tilde{A} \subseteq (\tilde{X} - H)$$

olduğundan $F\overline{\delta}(H \cap \tilde{A})$ ve $G\overline{\delta}((\tilde{X} - H) \cap \tilde{A})$ sağlanır. O halde

$$\tilde{A} \cap (\tilde{X} - H) = \tilde{A} - (H \cap \tilde{A})$$

olduğundan tanım gereği $F\overline{\delta_A}(H \cap \tilde{A})$ ve $G\overline{\delta_A}(\tilde{A} - (H \cap \tilde{A}))$ elde edilir.

Bu şekilde oluşturulan A üzerindeki δ_A esnek yakınlık yapısına δ ile üretilen esnek yakınlık denir.

Lemma 3.4.6. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay olsun. $F\delta G$, $F \subseteq H_1$ ve $G \subseteq H_2$ ise $H_1\delta H_2$ olur (Kandil ve diğ. 2014).

Teorem 3.4.7. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay ve $F \in S(X, E)$ olsun.

$$\overline{F} = \sqcup \{x^e \tilde{\in} \tilde{X} \mid x^e \delta F\}$$

olmak üzere $F \rightarrow \overline{F}$ dönüşümü (EO1)-(EO4) koşullarını sağlar. Buradan

$$\tau(\delta) = \{F \in S(X, E) \mid \overline{F^c} = F^c\}$$

ailesi X üzerinde bir esnek topolojidir (Kandil ve diğ. 2014).

Örnek 3.4.3 (i) ve (ii) de tanımlanan esnek yakınlık uzaylarının sırasıyla X üzerinde $\tau(\delta) = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}\}$ ve $\tau(\delta) = S(X, E)$ esnek topolojilerini ürettiği kolaylıkla görülür.

Sonuç 3.4.8. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay ve $F \in S(X, E)$ olsun. $F \in \tau(\delta)$ olması için gerek ve yeter koşul her $x^e \tilde{\in} F$ için $x^e \overline{\delta}(\tilde{X} - F)$ olmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) $x^e \tilde{\in} F$ olsun. Bu durumda $x^e \tilde{\notin} (\tilde{X} - F)$ olur. $(\overline{\tilde{X} - F}) = (\tilde{X} - F)$ olduğundan Teorem 3.4.7 gereğince $x^e \overline{\delta}(\tilde{X} - F)$ elde edilir.

(\Leftarrow) Her $x^e \tilde{\in} F$ için $x^e \overline{\delta}(\tilde{X} - F)$ olsun. Buradan $x^e \tilde{\notin} (\overline{\tilde{X} - F})$ bulunur. $(\overline{\tilde{X} - F}) = (\tilde{X} - F^o)$ olduğundan $x^e \tilde{\in} F^o$ elde edilir. Böylece $F \sqsubseteq F^o$, yani $F \in \tau(\delta)$ dir.

Tanım 3.4.9. δ_1 ve δ_2 , X üzerinde iki esnek yakınlık olsun. Her $F, G \in S(X, E)$ için $F \delta_2 G$ iken $F \delta_1 G$ oluyorsa δ_2 , δ_1 den daha incedir (veya δ_1 , δ_2 den daha kabadır) denir ve bu durum $\delta_1 < \delta_2$ şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki teorem daha ince bir esnek yakınlık yapısının daha ince bir esnek topoloji ürettiğini gösterir.

Teorem 3.4.10. δ_1 ve δ_2 , X üzerinde iki esnek yakınlık olsun. Bu durumda $\delta_1 < \delta_2$ ise $\tau(\delta_1) \subseteq \tau(\delta_2)$ dir.

İspat. $F \in \tau(\delta_1)$ olsun. Sonuç 3.4.8 den her $x^e \tilde{\in} F$ için $x^e \overline{\delta}_1(\tilde{X} - F)$ elde edilir. Hipotez gereğince her $x^e \tilde{\in} F$ için $x^e \overline{\delta}_2(\tilde{X} - F)$ sağlanır. O halde $F \in \tau(\delta_2)$ bulunur.

3.5. ESNEK YAKINLIK KOMŞULUKLAR VE ESNEK YAKINLIK DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde bir esnek yakınlık komşuluk tanımı verilerek esnek yakınlık yapısıyla ilişkileri incelenecektir. Ayrıca bir esnek yakınlık dönüşüm kavramı tanımlanacak ve bu dönüşüm yardımıyla bir esnek sürekli dönüşüm elde edilecektir.

Tanım 3.5.1. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay ve $F, G \in S(X, E)$ olsun. $F \overline{\delta}(\tilde{X} - G)$ ise G esnek kümesine F nin bir esnek yakınlık komşuluğu denir ve bu durum $F \in G$ notasyonu ile gösterilir.

Teorem 3.5.2. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay olmak üzere \in bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlar.

(EYK1) $\tilde{\emptyset} \in F$.

(EYK2) $F \in G$ ise $(\tilde{X} - G) \in (\tilde{X} - F)$.

(EYK3) $F \in G$ ise $F \sqsubseteq G$.

(EYK4) $F \in (G \sqcap H) \Leftrightarrow F \in G$ ve $F \in H$.

(EYK5) $F_1 \sqsubseteq F \in G \sqsubseteq G_1$ ise $F_1 \in G_1$.

(EYK6) $F \in G$ ise $F \in H \in G$ olacak şekilde bir $H \in S(X, E)$ vardır.

İspat. (EYK1) özelliği açıktır.

(EYK2) $F \in G$ ise $F \bar{\delta}(\tilde{X} - G)$ dir. (EY3) den $(\tilde{X} - G) \bar{\delta} F$, yani $(\tilde{X} - G) \in (\tilde{X} - F)$ elde edilir.

(EYK3) $F \in G$ olsun. O halde (EY2) den $F \sqcap (\tilde{X} - G) = \tilde{\emptyset}$ ve dolayısıyla $F \sqsubseteq G$ bulunur.

$$\begin{aligned} \text{(EYK4)} \quad F \in (G \sqcap H) &\Leftrightarrow F \bar{\delta}(\tilde{X} - (G \sqcap H)) \\ &\Leftrightarrow F \bar{\delta}(\tilde{X} - G) \text{ ve } F \bar{\delta}(\tilde{X} - H) \\ &\Leftrightarrow F \in G \text{ ve } F \in H. \end{aligned}$$

(EYK5) $F_1 \bar{\subseteq} G_1$ ise $F_1 \delta(\tilde{X} - G_1)$ dir. $F_1 \sqsubseteq F$ ve $(\tilde{X} - G_1) \sqsubseteq (\tilde{X} - G)$ olduğundan $F \delta(\tilde{X} - G)$ elde edilir. Bu ise $F \bar{\subseteq} G$ çelişmesine neden olur (Burada $\bar{\subseteq}$ ile \subseteq nin olumsuzu gösterilmektedir).

(EYK6) $F \in G$ olsun. Bu takdirde $F \bar{\delta}(\tilde{X} - G)$ ve dolayısıyla (EY5) den en az bir $H \in S(X, E)$ için $F \bar{\delta}(\tilde{X} - H)$ ve $H \bar{\delta}(\tilde{X} - G)$ bulunur. Buradan $F \in H \in G$ dir.

Teorem 3.5.3. $S(X, E)$ üzerinde (EYK1)-(EYK6) özelliklerini sağlayan bir \in bağıntısı verilsin. Bu takdirde, X üzerinde aşağıdaki gibi bir δ esnek yakınlık yapısı vardır.

$$F \bar{\delta} G \Leftrightarrow F \in (\tilde{X} - G).$$

Ayrıca, bu esnek yakınlık yapısına göre G esnek kümesinin F nin bir esnek yakınlık komşuluğu olması için gerek ve yeter koşul $F \in G$ olmasıdır.

İspat. Öncelikle δ nın X üzerinde bir esnek yakınlık olduğunu gösterelim.

(EY1) $F \in S(X, E)$ olsun. (EYK1) den $\tilde{\emptyset} \in (\tilde{X} - F)$ ve buradan da $\tilde{\emptyset} \bar{\delta} F$ elde edilir.

(EY2) $F\bar{\delta}G$ olsun. O halde $F \in (\tilde{X} - G)$ ve (EYK3) den $F \sqcap G = \tilde{\emptyset}$ bulunur.

(EY3) $F\bar{\delta}G$ ise $F \in (\tilde{X} - G)$ olur. (EYK2) özelliği gereğince $G \in (\tilde{X} - F)$ ve dolayısıyla $G\bar{\delta}F$ sağlanır.

(EY4) $F\bar{\delta}(G \sqcup H) \Leftrightarrow F \in (\tilde{X} - (G \sqcup H))$

$$\Leftrightarrow F \in (\tilde{X} - G) \text{ ve } F \in (\tilde{X} - H)$$

$$\Leftrightarrow F\bar{\delta}G \text{ ve } F\bar{\delta}H.$$

(EY5) $F\bar{\delta}G$ olsun. Bu takdirde $F \in (\tilde{X} - G)$ dir. (EYK6) dan $F \in H \in (\tilde{X} - G)$ olacak şekilde bir $H \in S(X, E)$ vardır. Böylece $F\bar{\delta}(\tilde{X} - H)$ ve $H\bar{\delta}G$ elde edilir.

O halde δ, X üzerinde bir esnek yakınlıktır. Ayrıca, esnek yakınlık komşuluk tanımından, G esnek kümesinin F nin bir esnek yakınlık komşuluğu olması için gerek ve yeter koşulun $F \in G$ olması gerektiği kolayca görülür.

Lemma 3.5.4. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay ve $F, G \in S(X, E)$ olsun. Bu takdirde, $F\bar{\delta}G$ olması için gerek ve yeter koşul $\bar{F}\bar{\delta}\bar{G}$ olmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) Lemma 3.4.6 dan açıktır.

(\Leftarrow) $F\bar{\delta}G$ olsun. (EY5) den $F\bar{\delta}H$ ve $G\bar{\delta}(\tilde{X} - H)$ olacak şekilde bir $H \in S(X, E)$ vardır. Buradan $\bar{G} \sqsubseteq H$ dir. Gerçekten, $x^e \notin H$ olsun. Bu durumda $x^e \sqsubseteq (\tilde{X} - H)$ ve Lemma 3.4.6 dan $x^e\bar{\delta}G$ bulunur. Böylece istenilen $x^e \notin G$ ifadesi elde edilir. O halde $F\bar{\delta}H$ olduğundan $F\bar{\delta}\bar{G}$ sağlanır. Benzer şekilde $\bar{F}\bar{\delta}\bar{G}$ olduğu gösterilir.

Teorem 3.5.5. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay ve $F, G \in S(X, E)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $F \in G \Leftrightarrow \bar{F} \in G.$

(ii) $F\bar{\delta}G$ ise $F \in F_1, G \in G_1$ ve $F_1\bar{\delta}G_1$ olacak şekilde F_1 ve G_1 esnek kümeleri vardır.

(iii) $F \in G$ ise $F \in H \sqsubseteq \bar{H} \in G$ olacak şekilde bir $H \in \tau(\delta)$ vardır.

İspat. (i) Lemma 3.5.4 den açıktır.

(ii) $F\bar{\delta}G$ ise (EY5) den $F\bar{\delta}G_1$ ve $G\bar{\delta}(\tilde{X} - G_1)$ olacak şekilde bir $G_1 \in S(X, E)$ vardır. $G_1\bar{\delta}F$ olduğundan bir $F_1 \in S(X, E)$ için $G_1\bar{\delta}F_1$ ve $F\bar{\delta}(\tilde{X} - F_1)$ elde edilir. Buradan $F \in F_1, G \in G_1$ ve $F_1\bar{\delta}G_1$ olacak şekilde F_1 ve G_1 esnek kümeleri bulunur.

(iii) $F \in G$ olsun. O halde (ii) gereğince $F \in F_1, (\tilde{X} - G) \in G_1$ ve $F_1 \cap G_1 = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde F_1 ve G_1 esnek kümeleri vardır. (EYK2) den $F_1 \sqsubseteq (\tilde{X} - G_1) \in G$ ve buradan $F_1\bar{\delta}(\tilde{X} - G)$ elde edilir. Diğer yandan $F\bar{\delta}(\tilde{X} - F_1)$ olduğundan Lemma 3.5.4 gereğince $F\bar{\delta}(\overline{\tilde{X} - F_1})$, yani $F\bar{\delta}(\tilde{X} - (F_1)^o)$ bulunur. $H = (F_1)^o$ alınsın. Dolayısıyla $F \in H \sqsubseteq F_1$ dir. Böylece $F_1\bar{\delta}(\tilde{X} - G)$ olduğundan $\bar{H}\bar{\delta}(\tilde{X} - G)$, yani $\bar{H} \in G$ sağlanır.

Teorem 3.5.6. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay ve $F \in S(X, E)$ ise bu durumda

$$\bar{F} = \prod\{G \mid F \in G\}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $F \in G$ olacak şekilde bir $G \in S(X, E)$ alınsın. Buradan $\bar{F} \in G$ ve (EYK3) den $\bar{F} \sqsubseteq G$ elde edilir. Böylece

$$\bar{F} \sqsubseteq \prod\{G \mid F \in G\}$$

bulunur. Eşitliğin tersini göstermek için $x^e \notin \bar{F}$ olsun. Buradan $x^e \bar{\delta}\bar{F}$ elde edilir. Teorem 3.5.5 (ii) den $\bar{F} \in F_1, x^e \in G_1$ ve $F_1 \cap G_1 = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde F_1 ve G_1 esnek kümeleri vardır. Bu durumda F esnek kümesinin x^e esnek noktasını içermeyen bir F_1 esnek yakınlık komşuluğu vardır. O halde $x^e \notin \prod\{G \mid F \in G\}$ sağlanır.

Tanım 3.5.7. (X, δ_1, E) ve (Y, δ_2, K) herhangi iki esnek yakınlık uzay ve $\varphi_\psi : (X, \delta_1, E) \rightarrow (Y, \delta_2, K)$ bir esnek dönüşüm olsun. Her $F, G \in S(X, E)$ için

$$F\delta_1 G \Rightarrow \varphi_\psi(F)\delta_2\varphi_\psi(G)$$

sağlanıyorsa φ_ψ esnek dönüşümüne bir esnek yakınlık dönüşüm denir.

Önerme 3.5.8. (X, δ_1, E) ve (Y, δ_2, K) herhangi iki esnek yakınlık uzay olsun. Bir $\varphi_\psi : (X, \delta_1, E) \rightarrow (Y, \delta_2, K)$ esnek dönüşümünün bir esnek yakınlık dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul her $F_1, G_1 \in S(Y, K)$ için $F_1 \overline{\delta_2} G_1$ iken $\varphi_\psi^{-1}(F_1) \overline{\delta_1} \varphi_\psi^{-1}(G_1)$ (veya $F_1 \in_2 G_1$ iken $\varphi_\psi^{-1}(F_1) \in_1 \varphi_\psi^{-1}(G_1)$) olmasıdır.

İspat. Esnek yakınlık dönüşüm tanımından açıktır.

Önerme 3.5.9. İki esnek yakınlık dönüşümün bileşkesi bir esnek yakınlık dönüşümdür.

İspat. Esnek yakınlık dönüşüm tanımından kolayca görülür.

Teorem 3.5.10. Bir $\varphi_\psi : (X, \delta_1, E) \rightarrow (Y, \delta_2, K)$ esnek yakınlık dönüşümü bir esnek sürekli dönüşümdür.

İspat. $\varphi_\psi : (X, \delta_1, E) \rightarrow (Y, \delta_2, K)$ esnek yakınlık dönüşümünün esnek sürekli olduğunu göstermek için her $F \in S(X, E)$ için $\varphi_\psi(\overline{F}) \subseteq \overline{\varphi_\psi(F)}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $y^k \in \varphi_\psi(\overline{F})$ olsun. Bu takdirde, $x^e \in \overline{F}$ ve $\varphi_\psi(x^e) = y^k$ olacak şekilde bir $x^e \in \overline{F}$ esnek noktası vardır. Buradan $x^e \delta_1 F$ ve hipotez gereğince $y^k \delta_2 \varphi_\psi(F)$ elde edilir. Böylece $y^k \in \overline{\varphi_\psi(F)}$ sağlanır.

3.6. ESNEK DÜZGÜN UZAYLAR İLE ÜRETİLEN ESNEK YAKINLIK UZAYLAR

Bu bölümün amacı bir esnek düzgün uzay tanımından faydalanarak bir esnek yakınlık uzay elde etmektir. Bunun için öncelikle esas teoremde kullanılacak olan önemli özellikler verilecektir.

Lemma 3.6.1. (X, \mathcal{U}, E) bir esnek düzgün uzay ve $F, G \in S(X, E)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

(i) $U[F] \cap U[G] = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır.

(ii) $U[F] \cap G = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır.

İspat. (i) \Rightarrow (ii) Her $F \in S(X, E)$ ve her $U \in \mathcal{U}$ için $F \subseteq U[F]$ olduğundan kolayca görülür.

(ii) \Rightarrow (i) $U[F] \sqcap G = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ alınsın. Lemma 3.1.14 den $V \circ V \sqsubseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ simetrik esnek kümesi vardır. Şimdi, $V[F] \sqcap V[G] = \tilde{\emptyset}$ olduğu gösterilirse ispat biter. Bir $x^e \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek noktası için $x^e \tilde{\in} V[F]$ ve $x^e \tilde{\in} V[G]$ olduğunu kabul edelim. Tanım 3.2.1 den ve simetrik esnek küme tanımından her $\alpha \in E$ için $(x_1^{e_1}, x^e) \in V(\alpha)$ ve $(x^e, x_2^{e_2}) \in V^{-1}(\alpha) = V(\alpha)$ olacak şekilde bir $x_1^{e_1} \tilde{\in} F$ ve bir $x_2^{e_2} \tilde{\in} G$ vardır. O halde her $\alpha \in E$ için

$$(x_1^{e_1}, x_2^{e_2}) \in (V \circ V)(\alpha) \sqsubseteq U(\alpha)$$

olduğundan $x_2^{e_2} \tilde{\in} U[F]$ elde edilir. Bu ise $U[F] \sqcap G \neq \tilde{\emptyset}$ çelişmesine neden olur.

Lemma 3.6.2. (X, \mathcal{U}, E) bir esnek düzgün uzay ve $F, G \in S(X, E)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) Her $U, V \in \mathcal{U}$ için $(U \sqcap V)[F] \sqsubseteq U[F]$.

(ii) Her $U \in \mathcal{U}$ için $U[F \sqcup G] = U[F] \sqcup U[G]$.

İspat. (i) Tanım 3.2.1 den açıktır.

(ii) $x^e \tilde{\in} U[F \sqcup G]$ olsun. Bu durumda her $\alpha \in E$ için $(x_1^{e_1}, x^e) \in U(\alpha)$ olacak şekilde bir $x_1^{e_1} \tilde{\in} (F \sqcup G)$ esnek noktası vardır. $x_1^{e_1} \tilde{\in} F$ olduğunu kabul edelim ($x_1^{e_1} \tilde{\in} G$ olması hali benzer şekilde yapılır). Buradan $x^e \tilde{\in} U[F]$ ve dolayısıyla $x^e \tilde{\in} U[F] \sqcup U[G]$ elde edilir. Böylece $U[F \sqcup G] \sqsubseteq U[F] \sqcup U[G]$ bulunur. Benzer şekilde $U[F] \sqcup U[G] \sqsubseteq U[F \sqcup G]$ olduğu gösterilir.

Teorem 3.6.3. (X, \mathcal{U}, E) bir esnek düzgün uzay ve $F, G \in S(X, E)$ olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan δ ikili bağıntısı X üzerinde bir esnek yakınlıktır.

$$F \bar{\delta} G \Leftrightarrow U[F] \sqcap U[G] = \tilde{\emptyset} \text{ olacak şekilde bir } U \in \mathcal{U} \text{ vardır.}$$

İspat. (EY1)-(EY3) aksiyomları açık olduğundan (EY4) ve (EY5) aksiyomlarının sağlandığını göstermek yeterlidir.

(EY4) $F \bar{\delta} (G \sqcup H)$ ise $F \bar{\delta} G$ ve $F \bar{\delta} H$ olduğu kolayca görülür. Tersine, $F \bar{\delta} G$ ve $F \bar{\delta} H$ olsun. Bu durumda, $U_1[F] \sqcap U_1[G] = \tilde{\emptyset}$ ve $U_2[F] \sqcap U_2[H] = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ vardır. (ED4) den $U_3 = U_1 \sqcap U_2 \in \mathcal{U}$ olur. Lemma 3.6.2 (i) gereğince

$$U_3[F] \cap U_3[G] = \tilde{\emptyset} \text{ ve } U_3[F] \cap U_3[H] = \tilde{\emptyset}$$

sağlanır. O halde

$$U_3[F] \cap U_3[G \sqcup H] = (U_3[F] \cap U_3[G]) \sqcup (U_3[F] \cap U_3[H]) = \tilde{\emptyset}$$

olduğundan istenilen $F\bar{\delta}(G \sqcup H)$ ifadesi elde edilir.

(EY5) $F\bar{\delta}G$ ise $U[F] \cap U[G] = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Lemma 3.1.14 den $V \circ V \sqsubseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ simetrik esnek kümesi vardır. Öncelikle $V[U[G]] \cap F = \tilde{\emptyset}$ olduğunu gösterelim. Bir $x^e \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek noktası için $x^e \tilde{\in} V[U[G]] \cap F$ olsun. Bu durumda her $\alpha \in E$ için $(x_1^{e_1}, x^e) \in V(\alpha)$ olacak şekilde bir $x_1^{e_1} \tilde{\in} U[G]$ esnek noktası vardır. V bir simetrik esnek küme ve $V \sqsubseteq U$ olduğundan $x_1^{e_1} \tilde{\in} U[F]$ elde edilir. Bu da $U[F] \cap U[G] = \tilde{\emptyset}$ eşitliği ile çelişir. O halde Lemma 3.6.1 den $F\bar{\delta}U[G]$ bulunur. Şimdi ise $V[\tilde{X} - U[G]] \cap G = \tilde{\emptyset}$ olduğunu gösterelim. Bunun için bir $x^e \tilde{\in} V[\tilde{X} - U[G]] \cap G$ esnek noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $\alpha \in E$ için $(x_1^{e_1}, x^e) \in V(\alpha)$ olacak şekilde bir $x_1^{e_1} \tilde{\in} (\tilde{X} - U[G])$ esnek noktası vardır. Buradan bir $\alpha \in E$ için $(x^e, x_1^{e_1}) \notin U(\alpha)$ bulunur. Aksi halde $x_1^{e_1} \tilde{\in} U[G]$ çelişkisi elde edilirdi. V bir simetrik esnek küme ve $V \sqsubseteq U$ olduğundan bir $\alpha \in E$ için $(x_1^{e_1}, x^e) \notin V(\alpha)$ elde edilir ki bu da bir çelişkidir. Böylece Lemma 3.6.1 gereğince $G\bar{\delta}(\tilde{X} - U[G])$ sağlanır.

3.7. BAŞLANGIÇ ESNEK YAKINLIK YAPISI

Bu bölümün amacı başlangıç esnek yakınlık yapısının varlığını araştırmak ve bundan faydalanarak bir çarpım esnek yakınlık tanımlamaktır.

Tanım 3.7.1. X boştan farklı bir küme, E parametrelerin bir kümesi, $\{(X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$ esnek yakınlık uzayların bir ailesi ve her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha : S(X, E) \rightarrow (X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha)$ bir esnek dönüşüm olsun. Her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha : (X, \delta, E) \rightarrow (X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha)$ dönüşümlerini esnek yakınlık dönüşüm yapan X üzerindeki en kaba δ esnek yakınlık yapısına bir başlangıç esnek yakınlık denir.

Aşağıdaki teorem bir başlangıç esnek yakınlık yapısının varlığını gösterir.

Teorem 3.7.2. X boştan farklı bir küme, E parametrelerin bir kümesi, $\{(X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$ esnek yakınlık uzayların bir ailesi ve her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha : S(X, E) \rightarrow (X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha)$ bir esnek dönüşüm olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan δ ikili bağıntısı X üzerinde bir başlangıç esnek yakınlıktır.

$F, G \in S(X, E)$ olsun. $F\delta G$ olması için gerek ve yeter koşul $F = \sqcup_{i=1}^n F_i$ ve $G = \sqcup_{j=1}^m G_j$ olmak üzere her $\{F_i \mid i = 1, \dots, n\}$ ve $\{G_j \mid j = 1, \dots, m\}$ sonlu aileleri için her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(F_i)\delta_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(G_j)$ olacak şekilde en az bir F_i ve G_j esnek kümeleri vardır.

İspat. Öncelikle δ nın X üzerinde bir esnek yakınlık olduğunu gösterelim.

(EY1) aksiyomu açıktır.

(EY2) $F\bar{\delta}G$ olsun. Bu durumda $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ olmak üzere bir $\alpha = s_{ij} \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(F_i)\bar{\delta}_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(G_j)$ olacak şekilde sırasıyla F ve G nin $F = \sqcup_{i=1}^n F_i$ ve $G = \sqcup_{j=1}^m G_j$ sonlu örtüleri vardır. Buradan

$$(\varphi_\psi)_\alpha(\sqcup_{i=1}^n F_i) \cap (\varphi_\psi)_\alpha(\sqcup_{j=1}^m G_j) = (\varphi_\psi)_\alpha(F) \cap (\varphi_\psi)_\alpha(G) = \tilde{\emptyset}$$

elde edilir. Böylece $F \cap G = \tilde{\emptyset}$ sağlanır.

(EY3) Her bir $\alpha \in \Delta$ için δ_α bir esnek yakınlık olduğundan açıktır.

(EY4) $F\delta G$ olsun. Buradan her $H \sqsupseteq G$ için $F\delta H$ olduğu kolayca görülür. O halde $F\delta G$ veya $F\delta H$ iken $F\delta(G \sqcup H)$ sağlanır. Tersine, $F\bar{\delta}G$ ve $F\bar{\delta}H$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ olmak üzere bir $\alpha = s_{ij} \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(F_i)\bar{\delta}_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(G_j)$ olacak şekilde sırasıyla F ve G nin $F = \sqcup_{i=1}^n F_i$ ve $G = \sqcup_{j=1}^m G_j$ sonlu örtüleri vardır. Benzer şekilde $p = 1, \dots, q$ ve $j = m + 1, \dots, m + l$ olmak üzere bir $\alpha = t_{pj} \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(F'_p)\bar{\delta}_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(G_j)$ olacak şekilde sırasıyla F ve H nin $F = \sqcup_{p=1}^q F'_p$ ve $H = \sqcup_{j=m+1}^{m+l} G_j$ sonlu örtüleri vardır. Bu takdirde, $\{F_i \cap F'_p \mid i = 1, \dots, n; p = 1, \dots, q\}$ ve $\{G_j \mid j = 1, \dots, m + l\}$ sırasıyla F ve $G \sqcup H$ nin sonlu örtüleridir. Böylece $\alpha = s_{ij}$ veya $\alpha = t_{pj}$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(F_i \cap F'_p)\bar{\delta}_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(G_j)$ olduğundan $F\bar{\delta}(G \sqcup H)$ elde edilir.

(EY5) $F\bar{\delta}G$ ve her $H \in S(X, E)$ için ya $F\delta H$ ya da $G\delta(\tilde{X} - H)$ koşullarını sağlayan tüm $(F, G) \in S(X, E) \times S(X, E)$ ikililerin kümesi Ω olsun. (EY5) aksiyomunu sağlamak için Ω kümesinin boş olduğunu göstermek yeterlidir. $(F, G) \in \Omega$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(F)\delta_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(G)$ olur. Gerçekten de bir $H' \in S(X_\alpha, E_\alpha)$ için $H = (\varphi_\psi)_\alpha^{-1}(H')$ olsun. $F\delta H$ ise $(\varphi_\psi)_\alpha(F)\delta_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(H)$ sağlanır. $(\varphi_\psi)_\alpha(H) \sqsubseteq H'$ olduğundan $(\varphi_\psi)_\alpha(F)\delta_\alpha H'$ bulunur. Benzer şekilde $G\delta(\tilde{X} - H)$ ise $(\varphi_\psi)_\alpha(G)\delta_\alpha(\tilde{X}_\alpha - H')$ olur. δ_α, X_α üzerinde bir esnek yakınlık olduğundan $(\varphi_\psi)_\alpha(F)\delta_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(G)$ elde edilir. Ayrıca, $(F, G) \in \Omega$ olduğundan her $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(F_i)\bar{\delta}_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(G_j)$ koşulunu sağlayan bir $\alpha \in \Delta$ olacak şekilde $n, m \in \mathbb{N}$ doğal sayıları ve $F = \sqcup_{i=1}^n F_i, G = \sqcup_{j=1}^m G_j$ sonlu örtüleri vardır. $l = n + m$ olsun. Burada $l > 2$ olduğunu görmek kolaydır. O halde her $(F, G) \in \Omega$ için böyle bir $l \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilir. Ω nın elemanlarına karşı gelen bu şekildeki tüm doğal sayıların kümesi κ olsun. Şimdi, κ daki en küçük l doğal sayısına karşı gelen bir $(F, G) \in \Omega$ alınsın. Bu takdirde, her $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(F_i)\bar{\delta}_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(G_j)$ koşulunu sağlayan bir $\alpha \in \Delta$ olacak şekilde $l = n + m$ doğal sayısı ve $F = \sqcup_{i=1}^n F_i, G = \sqcup_{j=1}^m G_j$ sonlu örtüleri vardır. $n > 1$ olduğunu düşünelim ve $F' = F_1 \sqcup \dots \sqcup F_{n-1}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki koşullardan birisi doğrudur:

(i) Her $H \in S(X, E)$ için ya $F'\delta H$ ya da $G\delta(\tilde{X} - H)$ olur.

(ii) Her $H \in S(X, E)$ için ya $F_n\delta H$ ya da $G\delta(\tilde{X} - H)$ olur.

Gerçekten de ne (i) ne de (ii) sağlansın. O halde $F'\bar{\delta}H_1, G\bar{\delta}(\tilde{X} - H_1)$ ve $F_n\bar{\delta}H_2, G\bar{\delta}(\tilde{X} - H_2)$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in S(X, E)$ esnek kümeleri vardır. $H = H_1 \cap H_2$ alınırsa $F\bar{\delta}H$ ve $G\bar{\delta}(\tilde{X} - H)$ elde edilir. Bu ise $(F, G) \in \Omega$ olması ile çelişir.

(i) nin sağlandığını kabul edelim. $F' \sqsubseteq F$ ve $F\bar{\delta}G$ olduğundan $F'\bar{\delta}G$ dir. (i) koşulu gereğince $(F', G) \in \Omega$ elde edilir. Bu durumda $(n - 1) + m = l - 1 \in \kappa$ olduğundan bir çelişki elde edilir. Benzer şekilde (ii) koşulu sağlanırsa da bir çelişki bulunur. Böylece Ω kümesi boştur. Sonuç olarak δ, X üzerinde bir esnek yakınlıktır.

Her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha : (X, \delta, E) \rightarrow (X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha)$ dönüşümlerinin bir esnek yakınlık dönüşüm olduğu kolaylıkla görülür.

Son olarak δ^* , X üzerinde tüm $(\varphi_\psi)_\alpha : (X, \delta^*, E) \rightarrow (X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha)$ dönüşümlerini esnek yakınlık dönüşüm yapan başka bir esnek yakınlık olsun. $\delta < \delta^*$ olduğu gösterilirse ispat biter. Bunun için $F\delta^*G$ olsun. F ve G esnek kümelerin sırasıyla $F = \sqcup_{i=1}^n F_i$ ve $G = \sqcup_{j=1}^m G_j$ sonlu örtüleri olsun. (EY4) den $F_i\delta^*G$ olacak şekilde bir $i \in \{1, \dots, n\}$ vardır. Benzer şekilde $F_i\delta^*G_j$ olacak şekilde bir $j \in \{1, \dots, m\}$ bulunur. Her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha$ bir esnek yakınlık dönüşüm olduğundan $(\varphi_\psi)_\alpha(F_i)\delta_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(G_j)$ elde edilir. Böylece $F\delta G$ sağlanır.

Teorem 3.7.3. Bir $\varphi_\psi : (Y, \delta^*, K) \rightarrow (X, \delta, E)$ esnek dönüşümünün bir esnek yakınlık dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha \circ \varphi_\psi : (Y, \delta^*, K) \rightarrow (X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha)$ esnek dönüşümünün bir esnek yakınlık dönüşüm olmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) Esnek yakınlık dönüşüm tanımından açıktır.

(\Leftarrow) Her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha \circ \varphi_\psi$ bir esnek yakınlık dönüşüm ve $F\delta^*G$ olsun. Bu durumda $\varphi_\psi(F) = \sqcup_{i=1}^n F_i$ ve $\varphi_\psi(G) = \sqcup_{j=1}^m G_j$ olmak üzere

$$F \sqsubseteq \sqcup_{i=1}^n \varphi_\psi^{-1}(F_i), \quad G \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^m \varphi_\psi^{-1}(G_j)$$

elde edilir. $F\delta^*G$ olduğundan (EY4) gereğince $\varphi_\psi^{-1}(F_i)\delta^*\varphi_\psi^{-1}(G_j)$ olacak şekilde en az bir $i \in \{1, \dots, n\}$ ve $j \in \{1, \dots, m\}$ vardır. O halde

$$(\varphi_\psi)_\alpha \circ \varphi_\psi \circ \varphi_\psi^{-1}(F_i) \sqsubseteq (\varphi_\psi)_\alpha(F_i)$$

$$(\varphi_\psi)_\alpha \circ \varphi_\psi \circ \varphi_\psi^{-1}(G_j) \sqsubseteq (\varphi_\psi)_\alpha(G_j)$$

olduğundan her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(F_i)\delta_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(G_j)$ bulunur. Böylece $\varphi_\psi(F)\delta\varphi_\psi(G)$ sağlanır.

Tanım 3.7.4. $\{(X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$ esnek yakınlık uzayların bir ailesi ve $X = \prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$, $E = \prod_{\alpha \in \Delta} E_\alpha$ kartezyen çarpım kümeleri olsun. Her $\alpha \in \Delta$ için $(p_{X_\alpha})_{q_{E_\alpha}}$ esnek izdüşüm dönüşümleri yardımıyla üretilen X üzerindeki $\delta = \prod_{\alpha \in \Delta} \delta_\alpha$ başlangıç esnek yakınlık yapısına bir çarpım esnek yakınlık denir.

Aşağıdaki sonuçlar Teorem 3.7.2 ve Teorem 3.7.3 den kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 3.7.5. $\{(X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$ esnek yakınlık uzayların bir ailesi, $X = \prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$, $E = \prod_{\alpha \in \Delta} E_\alpha$ kartezyen çarpım kümeleri ve her $\alpha \in \Delta$ için $(p_{X_\alpha})_{q_{E_\alpha}}$ bir esnek izdüşüm dönüşüm olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan $\delta = \prod_{\alpha \in \Delta} \delta_\alpha$ ikili bağıntısı X üzerinde bir çarpım esnek yakınlıktır.

$F, G \in S(X, E)$ olsun. $F\delta G$ olması için gerek ve yeter koşul $F = \sqcup_{i=1}^n F_i$ ve $G = \sqcup_{j=1}^m G_j$ olmak üzere her $\{F_i \mid i = 1, \dots, n\}$ ve $\{G_j \mid j = 1, \dots, m\}$ sonlu aileleri için her $\alpha \in \Delta$ için $(p_{X_\alpha})_{q_{E_\alpha}}(F_i)\delta_\alpha(p_{X_\alpha})_{q_{E_\alpha}}(G_j)$ olacak şekilde en az bir F_i ve G_j esnek kümeleri vardır.

Sonuç 3.7.6. Bir $\varphi_\psi : (Y, \delta^*, K) \rightarrow (X, \delta, E)$ esnek dönüşümünün bir esnek yakınlık dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in \Delta$ için $(p_{X_\alpha})_{q_{E_\alpha}} \circ \varphi_\psi : (Y, \delta^*, K) \rightarrow (X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha)$ esnek dönüşümünün bir esnek yakınlık dönüşüm olmasıdır.

3.8. ESNEK YIĞILMALAR

Bu bölümde esnek yığılma kavramı tanımlanarak önemli özellikleri incelenecektir. Ayrıca esnek yığılma kavramının ultra esnek süzgeç ve esnek yakınlık yapılarıyla arasındaki ilişkileri çalışılacaktır.

Tanım 3.8.1. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay ve $\sigma \subset S(X, E)$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa σ ya X üzerinde bir esnek yığılma denir.

(SC1) $F, G \in \sigma$ ise $F\delta G$.

(SC2) Her $G \in \sigma$ için $F\delta G$ ise $F \in \sigma$.

(SC3) $F \sqcup G \in \sigma$ ise $F \in \sigma$ veya $G \in \sigma$.

Örnek 3.8.2. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay ve $x^e \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. Bu durumda

$$\sigma_{x^e} = \{F \in S(X, E) \mid F\delta x^e\}$$

bir esnek yığılmadır.

(SC1) $F, G \in \sigma_{x^e}$ olsun. $F\delta x^e$ ve $G\delta x^e$ olduğundan (EY5) den $F\delta G$ elde edilir.

(SC2) Her $G \in \sigma_{x^e}$ için $F\delta G$ olsun. $x^e \in \sigma_{x^e}$ olduğundan $F\delta x^e$ sağlanır. Böylece $F \in \sigma_{x^e}$ dir.

(SC3) $F \sqcup G \in \sigma_{x^e}$ olsun. (EY2) den $F\delta x^e$ veya $G\delta x^e$ ve buradan da $F \in \sigma_{x^e}$ veya $G \in \sigma_{x^e}$ elde edilir.

Uyarı 3.8.3. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay ve σ , X üzerinde bir esnek yığılma olsun. $x^e \in \sigma$ ise bu durumda $\sigma = \sigma_{x^e}$ olduğu görülür.

Lemma 3.8.4. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay olsun. Bu takdirde,

(i) $\sigma_1 \subset \sigma_2$ olacak şekilde X üzerinde σ_1 ve σ_2 esnek yığılmaları varsa $\sigma_1 = \sigma_2$ dir.

(ii) σ bir esnek yığılma olsun.

(1) $F \in \sigma$ ve $F \sqsubseteq F_1$ ise $F_1 \in \sigma$.

(2) $\tilde{\emptyset} \notin \sigma$ ve $\tilde{X} \in \sigma$.

(3) $F \in \sigma$ olması için gerek ve yeter koşul $\bar{F} \in \sigma$ olmasıdır.

İspat. (i) $F \in \sigma_2$ olsun. Buna göre (SC1) gereğince her $G \in \sigma_2$ için $F\delta G$ olur. $\sigma_1 \subset \sigma_2$ olduğundan her $G \in \sigma_1$ için $F\delta G$ elde edilir. O halde (SC2) den $F \in \sigma_1$ dir.

(ii) (1) $F \in \sigma$ olduğundan her $G \in \sigma$ için $F\delta G$ sağlanır. Böylece her $G \in \sigma$ için $F_1\delta G$ ve dolayısıyla $F_1 \in \sigma$ elde edilir.

(2) (SC1) ve (SC2) koşullarından açıktır.

(3) $\bar{F}\delta G$ iken $F\delta G$ olduğundan (SC2) gereğince kolayca görülür.

Lemma 3.8.5. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay olsun ve $\sigma \subset S(X, E)$ aşağıdaki koşulları sağlasın.

(i) $\tilde{\emptyset} \notin \sigma$.

(ii) $F \sqcup G \in \sigma \Leftrightarrow F \in \sigma$ veya $G \in \sigma$.

$F_0 \in \sigma$ olsun. Bu durumda $F_0 \in \mathcal{F} \subset \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra esnek süzgeç vardır.

İspat. Ω , aşağıdaki iki özelliği sağlayan tüm $\omega \subset S(X, E)$ alt kümelerinden oluşan bir kümeyi gösterebiliriz:

(1) $F_0 \in \omega$.

(2) $F_1, \dots, F_n \in \omega$ ise $F_1 \sqcap \dots \sqcap F_n \in \omega$.

Zorn Lemma dan Ω nın bir ω_0 maksimal elemanı vardır. $F_0 \in \omega_0 \subset \sigma$ olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi ω_0 ailesinin X üzerinde bir esnek süzgeç olduğunu gösterelim.

(ES1) koşulu açıktır.

(ES2) $F_1, F_2 \in \omega_0$ olsun. Bu durumda $F_1 \sqcap F_2 \in \sigma$ olur. $\omega_0 \cup \{F_1 \sqcap F_2\} \in \Omega$ olduğundan ω_0 nın maksimalliği gereğince $F_1 \sqcap F_2 \in \omega_0$ elde edilir.

(ES3) $F \in \omega_0$ ve $F \sqsubseteq G$ olsun. Buradan $G = G \sqcup F \in \sigma$ olur. Böylece $\omega_0 \cup \{G\} \in \Omega$ olduğundan $G \in \omega_0$ sağlanır.

O halde ω_0, X üzerinde bir esnek süzgeçtir. Şimdi, ω_0 ailesinin X üzerinde bir ultra esnek süzgeç olduğu gösterilirse ispat biter. $F \notin \omega_0$ ve $F^c \notin \omega_0$ olacak şekilde bir $F \in S(X, E)$ esnek kümesi olduğunu kabul edelim. Buradan $F_1 \sqcap F \notin \sigma$ ve $F_2 \sqcap F^c \notin \sigma$ olacak şekilde $F_1, F_2 \in \omega_0$ esnek kümeleri vardır. $\omega_0 \in \Omega$ olduğundan $G = F_1 \sqcap F_2 \in \sigma$ bulunur. Diğer yandan $G \sqcap F \notin \sigma$ ve $G \sqcap F^c \notin \sigma$ olduğundan (ii) gereğince

$$(G \sqcap F) \sqcup (G \sqcap F^c) = G \sqcap (F \sqcup F^c) = G \sqcap \tilde{X} = G \notin \sigma$$

çelişkisi elde edilir. Böylece her $F \in S(X, E)$ için $F \in \omega_0$ veya $F^c \in \omega_0$ dır. O halde Teorem 2.4.6 dan ω_0 ailesi X üzerinde bir ultra esnek süzgeçtir.

Lemma 3.8.6. Bir \mathcal{F} esnek süzgeci X üzerinde bir ultra esnek süzgeç ise bu durumda her $F \in S(X, E)$ için $F \in \mathcal{F}$ veya $F^c \in \mathcal{F}$ dir.

İspat. \mathcal{F}, X üzerinde bir ultra esnek süzgeç ve $F \in S(X, E)$ olsun. $F \notin \mathcal{F}$ ise $F^c \in \mathcal{F}$ olduğunu gösterelim. $F \notin \mathcal{F}$ ise (ES3) den her $G \in \mathcal{F}$ için $G \sqcap F^c \neq \tilde{\emptyset}$ bulunur. Buradan $\{G \sqcap F^c \mid G \in \mathcal{F}\}$ ailesi X üzerinde bir esnek süzgeç tabanıdır. Bu esnek süzgeç tabanı ile üretilen X üzerindeki esnek süzgeç \mathcal{G} olsun. Bu takdirde $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ olduğu kolaylıkla görülür. \mathcal{F} bir ultra esnek süzgeç olduğundan $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ dir. O halde $G \sqcap F^c \in \mathcal{G}$ ve $G \sqcap F^c \sqsubseteq F^c$ gereğince $F^c \in \mathcal{G} = \mathcal{F}$ elde edilir ($F^c \notin \mathcal{F}$ ise $F \in \mathcal{F}$ durumu benzer şekilde yapılır).

Teorem 3.8.7. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay ve $\sigma \subset S(X, E)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) σ nın X üzerinde bir esnek yığılma olması için gerek ve yeter koşul

$$\sigma = \{F \in S(X, E) \mid \text{her } G \in \mathcal{F} \text{ için } F\delta G\}$$

olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra esnek süzgeç olmasıdır.

(ii) σ bir esnek yığılma ve $F_0 \in \sigma$ ise $F_0 \in \mathcal{F} \subset \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra esnek süzgeç vardır.

(iii) σ bir esnek yığılma olmak üzere $\mathcal{F} \subset \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra esnek süzgeç varsa

$$\sigma = \{F \in S(X, E) \mid \text{her } G \in \mathcal{F} \text{ için } F\delta G\}$$

olur.

İspat. (i) (\Leftarrow) σ nın X üzerinde bir esnek yığılma olduğunu gösterelim.

(SC1) $F_1, F_2 \in \sigma$ olsun. $F_1\bar{\delta}F_2$ olduğunu kabul edelim. (EY5) den $F_1\bar{\delta}H$ ve $F_2\bar{\delta}(\tilde{X} - H)$ olacak şekilde bir $H \in S(X, E)$ vardır. $F_1, F_2 \in \sigma$ olduğundan $H, (\tilde{X} - H) \notin \mathcal{F}$ bulunur. Böylece Lemma 3.8.6 dan \mathcal{F} nin bir ultra esnek süzgeç olmadığı çelişğine ulaşılır. O halde $F_1\delta F_2$ dir.

(SC2) Her $G \in \sigma$ için $F\delta G$ olsun. $\mathcal{F} \subset \sigma$ olduğu açıktır. Gerçekten, $H \in \mathcal{F}$ ise her $F' \in \mathcal{F}$ için $H \sqcap F' \neq \tilde{\emptyset}$ olur. Böylece her $F' \in \mathcal{F}$ için $H\delta F'$ ve buradan da $H \in \sigma$ elde edilir. O halde hipotezden her $G \in \mathcal{F}$ için $F\delta G$ bulunur. Dolayısıyla $F \in \sigma$ sağlanır.

(SC3) $F, G \notin \sigma$ olsun. Bu durumda $F\bar{\delta}H_1$ ve $G\bar{\delta}H_2$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in \mathcal{F}$ vardır. $H = H_1 \sqcap H_2$ olarak tanımlanırsa $H \in \mathcal{F}$ ve $(F \sqcup G)\bar{\delta}H$ elde edilir. Böylece $(F \sqcup G) \notin \sigma$ olur.

(\Rightarrow) σ , bir esnek yığılma ve $F_0 \in \sigma$ olsun. Bu durumda Lemma 3.8.5 gereğince $F_0 \in \mathcal{F} \subset \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra esnek süzgeç vardır.

$$\sigma_1 = \{F \in S(X, E) \mid \text{her } G \in \mathcal{F} \text{ için } F\delta G\}$$

olsun. σ_1 in bir esnek yığılma olduğu bilinmektedir. Ayrıca $\sigma \subset \sigma_1$ dir. Gerçekten, $F \in \sigma$ ise her $G \in \sigma$ için $F\delta G$ olur. Buradan her $G \in \mathcal{F}$ için $F\delta G$ ve dolayısıyla $F \in \sigma_1$ bulunur. Böylece Lemma 3.8.4 (i) gereğince $\sigma = \sigma_1$ elde edilir.

(ii) Lemma 3.8.5 den kolaylıkla görülür.

(iii) σ , bir esnek yığılma ve $\mathcal{F} \subset \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra esnek süzgeç olsun.

$$\sigma_1 = \{F \in S(X, E) \mid \text{her } G \in \mathcal{F} \text{ için } F\delta G\}$$

olsun. Böylece σ_1 ailesi σ yı içeren bir esnek yığılmadır. O halde Lemma 3.8.4 (i) gereğince $\sigma = \sigma_1$ elde edilir.

Sonuç 3.8.8. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay olsun. Bu takdirde, X üzerindeki her ultra esnek süzgeç bir tek esnek yığılma tarafından kapsanır.

İspat. \mathcal{F} , X üzerinde bir ultra esnek süzgeç olsun. O halde Teorem 3.8.7 gereğince $\mathcal{F} \subset \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir tek $\sigma = \{F \in S(X, E) \mid \text{her } G \in \mathcal{F} \text{ için } F\delta G\}$ esnek yığılması vardır.

Örnek 3.8.9. Bir (X, τ, E) esnek T_4 -uzayı üzerindeki esnek yakınlık bağıntısı Örnek 3.4.2 deki gibi olsun. $x^e \tilde{\in} \tilde{X}$ olmak üzere X üzerindeki bir $\mathcal{F} = \{F \in S(X, E) \mid x^e \tilde{\in} F\}$ ultra esnek süzgeci ile üretilen esnek yığılma σ olsun. Bu durumda $\sigma_{x^e} = \sigma$ olur.

Gerçekten, $F \in \sigma_{x^e}$ ise $\overline{x^e} \cap \bar{F} \neq \tilde{\emptyset}$ dir. $\overline{x^e} = x^e$ olduğundan $x^e \tilde{\in} \bar{F}$, yani $\bar{F} \in \mathcal{F}$ elde edilir. Buradan her $G \in \mathcal{F}$ için $\bar{G} \cap \bar{F} \neq \tilde{\emptyset}$ bulunur. Böylece $F \in \sigma$ sağlanır. Tersine, $F \in \sigma$ ise her $G \in \mathcal{F}$ için $\bar{G} \cap \bar{F} \neq \tilde{\emptyset}$ dir. $x^e \in \mathcal{F}$ olduğundan $\overline{x^e} \cap \bar{F} \neq \tilde{\emptyset}$ olur. Böylece $x^e \delta F$, yani $F \in \sigma_{x^e}$ elde edilir.

Teorem 3.8.10. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay ve $F_0, G_0 \in S(X, E)$ olsun. $F_0\delta G_0$ ise bu durumda $F_0, G_0 \in \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir σ esnek yığılması vardır.

İspat. $\sigma_0 = \{F \in S(X, E) \mid F\delta G_0\}$ olsun. σ_0 ailesinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu kolaylıkla görülür.

(i) $F_0 \in \sigma_0$.

(ii) $\tilde{\emptyset} \notin \sigma_0$.

(iii) $F \sqcup G \in \sigma_0 \Leftrightarrow F \in \sigma_0$ veya $G \in \sigma_0$.

Lemma 3.8.5 gereğince $F_0 \in \mathcal{F} \subset \sigma_0$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra esnek süzgeç vardır.

$$\sigma = \{F \in S(X, E) \mid \text{her } G \in \mathcal{F} \text{ için } F\delta G\}$$

olsun. Teorem 3.8.7 (i) den σ bir esnek yığılmadır. Diğer yandan, $F_0, G_0 \in \sigma$ olur. Gerçekten, $H \in \mathcal{F}$ ise $H \in \sigma_0$ ve buradan da $H\delta G_0$ elde edilir. Böylece her $H \in \mathcal{F}$ için $H\delta G_0$ olduğundan $G_0 \in \sigma$ sağlanır. Ayrıca $\mathcal{F} \subset \sigma$ olduğundan $F_0 \in \sigma$ bulunur.

Lemma 3.8.11. \mathcal{F} , X üzerinde bir esnek süzgeç ve $A \subseteq X$ olsun. $\mathcal{F}_A = \{F \cap \tilde{A} \mid F \in \mathcal{F}\}$ ailesinin A üzerinde bir esnek süzgeç olması için gerek ve yeter koşul her $F \in \mathcal{F}$ için $F \cap \tilde{A} \neq \tilde{\emptyset}$ olmasıdır.

İspat. Esnek süzgeç tanımından açıktır.

Lemma 3.8.12. \mathcal{F} , X üzerinde bir ultra esnek süzgeç ve $A \subseteq X$ olsun. $\mathcal{F}_A = \{F \cap \tilde{A} \mid F \in \mathcal{F}\}$ ailesinin A üzerinde bir ultra esnek süzgeç olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{A} \in \mathcal{F}$ olmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) $\tilde{A} \notin \mathcal{F}$ olduğunu kabul edelim. \mathcal{F} ailesi ultra esnek süzgeç olduğundan $\tilde{A}^c \in \mathcal{F}$ olur. Bu ise $\tilde{A}^c \cap \tilde{A} = \tilde{\emptyset} \in \mathcal{F}_A$ çelişmesine neden olur.

(\Leftarrow) Öncelikle \mathcal{F}_A nın A üzerinde bir esnek süzgeç olduğunu gösterelim. $\tilde{A} \in \mathcal{F}$ olduğundan her $F \in \mathcal{F}$ için $F \cap \tilde{A} \neq \tilde{\emptyset}$ elde edilir. Böylece Lemma 3.8.11 den \mathcal{F}_A , A üzerinde bir esnek süzgeçtir.

Şimdi ise \mathcal{F}_A nın A üzerinde bir ultra esnek süzgeç olduğunu gösterelim. $F, G \in S(A, E)$ olmak üzere $F \sqcup G \in \mathcal{F}_A$ olsun. Bu durumda $F \sqcup G \in \mathcal{F}$ olur. Teorem 2.4.5 den $F \in \mathcal{F}$ veya $G \in \mathcal{F}$ elde edilir. Buradan, $F = F \cap \tilde{A} \in \mathcal{F}_A$ ve $G = G \cap \tilde{A} \in \mathcal{F}_A$ bulunur. O halde Teorem 2.4.5 den \mathcal{F}_A , A üzerinde bir ultra esnek süzgeçtir.

Teorem 3.8.13. σ , bir (X, δ, E) esnek yakınlık uzayında bir esnek yığılma ve $A \subseteq X$ olsun. $\tilde{A} \in \sigma$ ise (A, δ_A, E) esnek yakınlık uzayında σ tarafından içerilen bir tek esnek yığılma vardır.

İspat. $\tilde{A} \in \sigma$ olduğundan Teorem 3.8.7 (ii) gereğince $\tilde{A} \in \mathcal{F} \subset \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra esnek süzgeç vardır. Lemma 3.8.12 den $\mathcal{F}_A = \{F \cap \tilde{A} \mid F \in \mathcal{F}\}$ ailesi A üzerinde bir ultra esnek süzgeçtir. O halde, Sonuç 3.8.8 den \mathcal{F}_A ultra esnek süzgeci bir tek

$$\sigma' = \{F \in S(A, E) \mid \text{her } G \in \mathcal{F}_A \text{ için } F\delta_A G\}$$

esnek yığılması tarafından kapsanır. Şimdi, $F \in \sigma'$ olsun. Bu durumda her $G \in \mathcal{F}$ için $F\delta(G \cap \tilde{A})$ olur. Buradan, her $G \in \mathcal{F}$ için $F\delta G$ sağlanır. Yani $F \in \sigma$ olur. Böylece $\sigma' \subset \sigma$ elde edilir.

Teorem 3.8.14. (X, δ_1, E) ve (Y, δ_2, K) iki esnek yakınlık uzay ve $\varphi_\psi : (X, \delta_1, E) \rightarrow (Y, \delta_2, K)$ bir esnek yakınlık dönüşüm olsun. σ_1 X üzerinde bir esnek yığılma ise

$$\sigma_2 = \{H \in S(Y, K) \mid \text{her } G \in \sigma_1 \text{ için } H\delta_2\varphi_\psi(G)\}$$

$\varphi_\psi(\sigma_1)$ ailesini içeren Y üzerinde bir esnek yığılmadır.

İspat. Teorem 3.8.7 (i) gereğince

$$\sigma_1 = \{F \in S(X, E) \mid \text{her } G \in \mathcal{F} \text{ için } F\delta_1 G\}$$

olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra esnek süzgeç vardır. Teorem 2.4.7 den $\mathcal{B}^* = \{\varphi_\psi(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$, Y üzerindeki bir \mathcal{F}^* ultra esnek süzgeç için bir tabandır. O halde Teorem 3.8.7 (i) gereğince

$$\sigma_0 = \{H \in S(Y, K) \mid \text{her } G \in \mathcal{F}^* \text{ için } H\delta_2 G\}$$

Y üzerinde bir esnek yığılmadır. Öncelikle, $\varphi_\psi(\sigma_1) \subset \sigma_0$ olduğunu gösterelim. $H \in \varphi_\psi(\sigma_1)$ ise $H = \varphi_\psi(F)$ olacak şekilde bir $F \in \sigma_1$ vardır. Bu durumda her $G \in \mathcal{F}$ için $F\delta_1 G$ bulunur. φ_ψ bir esnek yakınlık dönüşüm olduğundan her $\varphi_\psi(G) \in \mathcal{B}^*$ için $H\delta_2\varphi_\psi(G)$ sağlanır. Buradan da her $F' \in \mathcal{F}^*$ için $H\delta_2 F'$ olur. Böylece $H \in \sigma_0$ elde edilir. Şimdi, $\sigma_2 = \sigma_0$ olduğu gösterilirse ispat biter. $H \in \sigma_2$ olsun. $\mathcal{F} \subset \sigma_1$ olduğundan her

$G \in \mathcal{F}$ için $H\delta_2\varphi_\psi(G)$ dir. Dolayısıyla $H \in \sigma_0$ sağlanır. Tersine, $H \in \sigma_0$ olsun. Her $G \in \sigma_1$ için $\varphi_\psi(G) \in \sigma_0$ olduğundan (SC1) gereğince $H\delta_2\varphi_\psi(G)$ elde edilir. Böylece $H \in \sigma_2$ bulunur.

Tanım 3.8.15. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay ve $A \subseteq X$ olsun. δ ile üretilen esnek yakınlık δ_A olmak üzere bir $\varphi_\psi : (A, \delta_A, E) \rightarrow (X, \delta, E)$ esnek dönüşümü olsun. $\varphi : A \rightarrow X$ ve $\psi : E \rightarrow E$ dönüşümleri birer içirme (inclusion) dönüşüm ise bu durumda $\varphi_\psi : (A, \delta_A, E) \rightarrow (X, \delta, E)$ dönüşümüne bir esnek içirme dönüşüm denir.

Teorem 3.8.16. (X, δ, E) bir esnek yakınlık uzay ve $A \subseteq X$ olsun. σ_1 , A üzerinde bir esnek yığılma ise

$$\sigma_2 = \{F \in S(X, E) \mid \text{her } G \in \sigma_1 \text{ için } F\delta G\}$$

X üzerinde bir esnek yığılmadır.

İspat. Bir $\varphi_\psi : (A, \delta_A, E) \rightarrow (X, \delta, E)$ esnek içirme dönüşümü alalım. Her $F \in S(A, E)$ için $\varphi_\psi(F) = F$ olduğundan bu dönüşüm bir esnek yakınlık dönüşümdür. Böylece Teorem 3.8.14 gereğince istenilen sonuç kolaylıkla elde edilir.

Teorem 3.8.17. σ , bir (X, δ, E) esnek yakınlık uzayında bir esnek yığılma ve $A \subseteq X$ olsun. Her $e \in E$ için $F^*(e) \in A$ olacak şekilde bir $F^* \in \sigma$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$\sigma_1 = \{F \in \sigma \mid \text{her } e \in E \text{ için } F(e) \in A\}$$

A üzerinde bir esnek yığılmadır.

İspat. σ X üzerinde bir esnek yığılma ve $F^* \in \sigma$ olsun. Teorem 3.8.7 den

$$\sigma = \{F \in S(X, E) \mid \text{her } G \in \mathcal{F} \text{ için } F\delta G\}$$

olacak şekilde F^* esnek kümesini içeren X üzerinde bir \mathcal{F} ultra esnek süzgeç vardır. $\tilde{A} \in \mathcal{F}$ olduğundan Lemma 3.8.12 gereğince $\mathcal{F}_A = \{F \cap \tilde{A} \mid F \in \mathcal{F}\}$, A üzerinde bir ultra esnek süzgeçtir. Buradan

$$\sigma_0 = \{F \in S(A, E) \mid \text{her } G \in \mathcal{F}_A \text{ için } F\delta_A G\}$$

A üzerinde bir esnek yığılmadır. $\sigma_0 = \sigma_1$ olduğu gösterilirse ispat biter. $F \in \sigma_0$ olsun. O halde, her $G \in \mathcal{F}$ için $F\delta_A(G \sqcap \tilde{A})$ ve dolayısıyla $F\delta(G \sqcap \tilde{A})$ bulunur. $(G \sqcap \tilde{A}) \sqsubseteq G$ olduğundan her $G \in \mathcal{F}$ için $F\delta G$ elde edilir. Buradan $F \in \sigma$ dır. Böylece $F \in S(A, E)$ olduğundan $F \in \sigma_1$ sağlanır. Şimdi, $F \in \sigma_1$ olsun. Bir $G \in \mathcal{F}_A$ esnek kümesi alınsın. Bu durumda, $G = H \sqcap \tilde{A}$ olacak şekilde bir $H \in \mathcal{F}$ vardır. Buradan $F_1 = H \sqcap F^* \in \mathcal{F}$ ve dolayısıyla $F\delta F_1$ bulunur. $F_1, F \in S(A, E)$ olduğundan δ_A nın tanım gereği $F\delta_A F_1$ elde edilir. Diğer yandan $F_1 \sqsubseteq G$ olduğundan $F\delta_A G$ olur. Böylece her $G \in \mathcal{F}_A$ için $F\delta_A G$ ve buradan da $F \in \sigma_0$ sağlanır.



4. SE-DÜZGÜN UZAYLAR

Bu bölümün amacı sabit nokta teorisini esnek düzgün uzaylara uygulayabilmektir. Fakat önceki bölümde tanımlanan esnek düzgün uzay kavramları bu anlamda yetersiz kaldığından esnek elemanların yardımıyla bir *se*-düzgün uzay kavramı tanımlanacak ve önemli özellikleri elde edilecektir. Ayrıca Aamri ve El Moutawakil (2004) tarafından verilen *E*-uzaklık dönüşümü esnek anlamda incelenecektir. Bunun yanı sıra *se*-düzgün uzaylar üzerinde bir esnek sıralama bağıntısı tanımlanacaktır. Daha sonra bu kavramlar kullanılarak *se*-düzgün uzaylar üzerinde sabit esnek eleman teoremleri incelenecek ve bu teoremler örnekler ile desteklenecektir.

4.1. SE-DÜZGÜN UZAYLAR

Bu bölümde *se*-düzgün uzaylar tanımlanarak ilgili özellikleri verilecektir. Ayrıca esnek elemanlara göre tanımlanan esnek metrik uzaylar ile arasındaki ilişki çalışılacaktır. Daha sonra esnek zayıf bağdaşık dönüşümler ve bir *se*-düzgün uzaya göre bir esnek Cauchy dizisi tanımlanacaktır.

Tanım 4.1.1. (i) $\Delta \subset X^E \times X^E$ olmak üzere

$$\Delta = \{(\tilde{x}, \tilde{x}) \mid \tilde{x} \in \tilde{X}\}$$

ile gösterilen Δ kümesine bir *se*-köşegen denir.

(ii) $U \subset X^E \times X^E$ olsun. Bu durumda,

$$U^{-1} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid (\tilde{y}, \tilde{x}) \in U\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca $U = U^{-1}$ ise U kümesine bir simetrik *se*-küme denir.

(iii) $U, V \subset X^E \times X^E$ olsun. Bu durumda,

$$U \circ V = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid \text{bir } \tilde{z} \in \tilde{X} \text{ için } (\tilde{x}, \tilde{z}) \in V \text{ ve } (\tilde{z}, \tilde{y}) \in U\}$$

ile tanımlanır.

Uyarı 4.1.2. $U, V, W \subset X^E \times X^E$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $U \subseteq V$ ise $U^{-1} \subseteq V^{-1}$ ve $U \circ W \subseteq V \circ W$ dır.

(ii) $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$ dir.

(iii) $(U \circ V) \circ W = U \circ (V \circ W)$ dır.

İspat. Tanım 4.1.1 den kolaylıkla elde edilir.

Tanım 4.1.3. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan boştan farklı bir $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X^E \times X^E)$ ailesine X üzerinde bir *se*-düzgün yapı denir.

(SED1) $U \in \mathcal{U}$ ise $\Delta \subseteq U$.

(SED2) $U \in \mathcal{U}$ ise $V \circ V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

(SED3) $U \in \mathcal{U}$ ise $V^{-1} \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

(SED4) $U, V \in \mathcal{U}$ ise $U \cap V \in \mathcal{U}$.

(SED5) $U \in \mathcal{U}$ ve $U \subseteq V$ ise $V \in \mathcal{U}$.

O halde, (X, \mathcal{U}, E) üçlüsüne de bir *se*-düzgün uzay denir.

Tanım 4.1.4. (X, \mathcal{U}, E) bir *se*-düzgün uzay olsun. $\cap\{U \mid U \in \mathcal{U}\} = \Delta$ ise bu uzaya bir Hausdorff *se*-düzgün uzay denir.

Örnek 4.1.5. $X = \{x, y\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Bu durumda,

$$\tilde{x}_1(e_1) = x, \tilde{x}_1(e_2) = x, \quad \tilde{x}_2(e_1) = y, \tilde{x}_2(e_2) = y$$

$$\tilde{x}_3(e_1) = x, \tilde{x}_3(e_2) = y, \quad \tilde{x}_4(e_1) = y, \tilde{x}_4(e_2) = x$$

olmak üzere $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4 \in \tilde{X}$ olsun. O halde $\mathcal{U} = \{U \subseteq X^E \times X^E \mid \Delta \subseteq U\}$ ailesi X üzerinde bir *se*-düzgün yapı ve dolayısıyla (X, \mathcal{U}, E) bir *se*-düzgün uzaydır. Ayrıca, bu *se*-düzgün uzay bir Hausdorff *se*-düzgün uzaydır.

Tanım 4.1.6. (X, \mathcal{U}, E) bir se -düzgün uzay ve $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ boştan farklı bir alt aile olsun. Her $U \in \mathcal{U}$ için $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ varsa \mathcal{B} ailesine \mathcal{U} se -düzgün yapısı için bir se -taban denir.

Teorem 4.1.7. Boştan farklı bir $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X^E \times X^E)$ alt kümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu durumda \mathcal{B} ailesi X üzerindeki bir se -düzgün yapı için bir se -tabandır.

(SET1) $B \in \mathcal{B}$ ise $\Delta \subseteq B$.

(SET2) $B \in \mathcal{B}$ ise $C \circ C \subseteq B$ olacak şekilde bir $C \in \mathcal{B}$ vardır.

(SET3) $B \in \mathcal{B}$ ise $C^{-1} \subseteq B$ olacak şekilde bir $C \in \mathcal{B}$ vardır.

(SET4) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ise $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $B_3 \in \mathcal{B}$ vardır.

İspat. (SET1)-(SET4) koşullarını sağlayan boştan farklı bir \mathcal{B} ailesinin X üzerindeki bir $\mathcal{U} = \{U \subseteq X^E \times X^E \mid \text{bir } B \in \mathcal{B} \text{ için } B \subseteq U\}$ se -düzgün yapısını ürettiği kolaylıkla görülür.

Örnek 4.1.8. (X, d, E) esnek elemanlara göre tanımlanan bir esnek metrik uzay olsun. Bu durumda,

$$D_{\tilde{\epsilon}} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid d(\tilde{x}, \tilde{y}) \lesssim \tilde{\epsilon}\} \subset X^E \times X^E$$

olmak üzere $\mathcal{B}_d = \{D_{\tilde{\epsilon}} \mid \tilde{\epsilon} \succ \bar{0}\}$ ailesi X üzerindeki bir \mathcal{U}_d se -düzgün yapısı için bir se -tabandır.

İspat. \mathcal{B}_d nin (SET1)-(SET4) koşullarını sağladığını gösterelim.

(SET1) $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ olsun. Her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{x}) = \bar{0}$ olduğundan $(\tilde{x}, \tilde{x}) \in D_{\tilde{\epsilon}}$ elde edilir.

(SET2) Her $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ için $D_{\tilde{\epsilon}/2} \circ D_{\tilde{\epsilon}/2} \subseteq D_{\tilde{\epsilon}}$ sağlanır. Gerçekten, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D_{\tilde{\epsilon}/2} \circ D_{\tilde{\epsilon}/2}$ olsun.

Bu durumda $(\tilde{x}, \tilde{z}) \in D_{\tilde{\epsilon}/2}$ ve $(\tilde{z}, \tilde{y}) \in D_{\tilde{\epsilon}/2}$ olacak şekilde bir $\tilde{z} \in \tilde{X}$ vardır. Buradan

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) \lesssim d(\tilde{x}, \tilde{z}) + d(\tilde{z}, \tilde{y}) \lesssim \tilde{\epsilon}/2 + \tilde{\epsilon}/2 = \tilde{\epsilon}$$

bulunur. Böylece $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D_{\tilde{\epsilon}}$ elde edilir.

(SET3) Her $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ için $D_{\tilde{\epsilon}} = D_{\tilde{\epsilon}}^{-1}$ olduğundan açıktır.

(SET4) $\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2 \succ \bar{0}$ olsun. Şimdi, her $e \in E$ için $\tilde{\epsilon}(e) = \min\{\tilde{\epsilon}_1(e), \tilde{\epsilon}_2(e)\}$ olacak şekilde bir $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ alınsın. O halde $D_{\tilde{\epsilon}} \subseteq D_{\tilde{\epsilon}_1} \cap D_{\tilde{\epsilon}_2}$ olduğu kolaylıkla görülür.

Uyarı 4.1.9. Yukarıda oluşturulan *se*-düzgün yapıya d esnek metriği ile üretilen *se*-düzgün yapı denir. Ayrıca, bu *se*-düzgün uzayın bir Hausdorff *se*-düzgün uzay olduğu kolayca elde edilir.

Tanım 4.1.10. (X, \mathcal{U}, E) bir Hausdorff *se*-düzgün uzay ve $f, g : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (X, \mathcal{U}, E)$ iki dönüşüm olsun. $f(\tilde{x}) = g(\tilde{x})$ koşulunu sağlayan her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek elemanı için $f(g(\tilde{x})) = g(f(\tilde{x}))$ oluyorsa f ve g dönüşümlerine esnek zayıf bağdaşık dönüşümler denir.

Örnek 4.1.11. $X = E = [0, 1]$ ve $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = |\tilde{x} - \tilde{y}|$ olmak üzere bir (X, d, E) esnek metrik uzayı alınsın. d esnek metriği ile üretilen *se*-düzgün yapı \mathcal{U}_d olmak üzere (X, \mathcal{U}_d, E) bir Hausdorff *se*-düzgün uzaydır. Aşağıdaki gibi $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümleri tanımlansın.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ 1, & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ 1, & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

Bu durumda, $\frac{1}{3} \tilde{\leq} \tilde{x} \tilde{\leq} \bar{1}$ koşulunu sağlayan her \tilde{x} esnek elemanı için $f(g(\tilde{x})) = g(f(\tilde{x}))$ elde edilir. Buna göre f ve g dönüşümleri esnek zayıf bağdaşık dönüşümlerdir.

Tanım 4.1.12. (X, \mathcal{U}, E) bir *se*-düzgün uzay olsun. $U \in \mathcal{U}$ olmak üzere $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in U$ ve $(\tilde{y}, \tilde{x}) \in U$ ise \tilde{x} ve \tilde{y} esnek elemanlarına esnek U -yakın denir.

Uyarı 4.1.13. (X, \mathcal{U}, E) bir *se*-düzgün uzay olsun. $U \in \mathcal{U}$ ise $U^{-1} \in \mathcal{U}$ olduğu açıktır. Buradan, \mathcal{U} nun her elemanı bir simetrik *se*-küme içerir. Gerçekten, $U \in \mathcal{U}$ olsun. (SED4) den $V = U \cap U^{-1} \in \mathcal{U}$ bir simetrik *se*-kümedir ve $V \subseteq U$ sağlanır. O halde $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in V$ ise \tilde{x} ve \tilde{y} esnek elemanları hem esnek V -yakın hem de esnek U -yakındır. Böylece \mathcal{U} nun her elemanı bir simetrik *se*-küme olarak düşünülebilir.

Tanım 4.1.14. (X, \mathcal{U}, E) bir *se*-düzgün uzay ve $\{\tilde{x}_n\}$ X deki esnek elemanlardan oluşan bir dizi olsun. $U \in \mathcal{U}$ olmak üzere her $m, n \geq n_0$ için \tilde{x}_n ve \tilde{x}_m esnek elemanları esnek U -yakın olacak şekilde bir $n_0 \geq 1$ doğal sayısı varsa $\{\tilde{x}_n\}$ dizisine \mathcal{U} ya göre bir esnek Cauchy dizisi denir.

4.2. ESNEK \mathcal{E} -UZAKLIK DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde Aamri ve El Moutawakil (2004) tarafından verilen E -uzaklık kavramı esnek elemanlar yardımıyla genelleştirilecektir. Daha sonra sabit esnek eleman teoremlerinde kullanılacak olan esnek p -yakınsaklık, esnek p -Cauchy dizisi, esnek S -tam uzay, esnek p -tam uzay ve esnek p -sürekli dönüşüm gibi kavramlar verilecektir.

Tanım 4.2.1. (X, \mathcal{U}, E) bir se -düzgün uzay olsun. $\mathbb{R}(E)^+ = \{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathbb{R}} \mid \tilde{\alpha} \succ \bar{0} \text{ veya } \tilde{\alpha} = \bar{0}\}$ olmak üzere $p : X^E \times X^E \rightarrow \mathbb{R}(E)^+$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir esnek \mathcal{E} -uzaklık denir.

(p_1) $U \in \mathcal{U}$ olmak üzere bir $\tilde{z} \in \tilde{X}$ için $p(\tilde{z}, \tilde{x}) \lesssim \tilde{\delta}$ ve $p(\tilde{z}, \tilde{y}) \lesssim \tilde{\delta}$ iken $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in U$ olacak şekilde bir $\tilde{\delta} \succ \bar{0}$ vardır.

(p_2) Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{X}$ için $p(\tilde{x}, \tilde{y}) \lesssim p(\tilde{x}, \tilde{z}) + p(\tilde{z}, \tilde{y})$.

Örnek 4.2.2. Örnek 4.1.11 de tanımlanan (X, \mathcal{U}_d, E) se -düzgün uzayı alınsın. Diğer yandan, her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için

$$p(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{cases} \bar{0}, & \tilde{y} = \bar{0} \\ \tilde{y}, & \bar{0} \lesssim \tilde{y} \lesssim \bar{1} \\ \bar{1}, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $p : X^E \times X^E \rightarrow \mathbb{R}(E)^+$ dönüşümü X üzerinde bir esnek \mathcal{E} -uzaklıktır. Gerçekten de,

(p_1) $U \in \mathcal{U}_d$ olsun. Bu durumda, $D_{\tilde{\epsilon}} \subseteq U$ olacak şekilde bir $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ vardır. $p(\tilde{z}, \tilde{x}) \lesssim \tilde{\epsilon}$ ve $p(\tilde{z}, \tilde{y}) \lesssim \tilde{\epsilon}$ ise $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = |\tilde{x} - \tilde{y}| \lesssim \tilde{\epsilon}$ elde edilir. Buradan $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D_{\tilde{\epsilon}}$ ve dolayısıyla $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in U$ bulunur. Böylece p dönüşümü (p_1) koşulunu sağlar.

(p_2) Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{X}$ için $p(\tilde{x}, \tilde{y}) = p(\tilde{z}, \tilde{y})$ olduğundan (p_2) koşulu da sağlanır.

Örnek 4.2.3. Örnek 4.1.5 de tanımlanan (X, \mathcal{U}, E) se -düzgün uzayı alınsın. Aşağıdaki şekilde tanımlanan $p : X^E \times X^E \rightarrow \mathbb{R}(E)^+$ dönüşümünün X üzerinde bir esnek \mathcal{E} -uzaklık olduğu kolayca görülür.

$$p(\tilde{x}_i, \tilde{x}_i) = \bar{0}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$p(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) = p(\tilde{x}_{i+1}, \tilde{x}_i) = \frac{\bar{1}}{4}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$p(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+2}) = p(\tilde{x}_{i+2}, \tilde{x}_i) = \frac{\bar{1}}{3}, \quad i = 1, 2$$

$$p(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+3}) = p(\tilde{x}_{i+3}, \tilde{x}_i) = \frac{\bar{1}}{2}, \quad i = 1$$

Tanım 4.2.4. (X, \mathcal{U}, E) bir se -düzgün uzay, p X üzerinde bir esnek \mathcal{E} -uzaklık ve $\{\tilde{x}_n\}$, X deki esnek elemanlardan oluşan bir dizi olsun.

(i) Her $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ esnek reel sayısına karşılık $n \geq n_0$ özelliğindeki her n doğal sayısı için $p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \preceq \tilde{\epsilon}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek elemanına esnek p -yakınsıyor denir ve bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \bar{0}$ ile gösterilir.

(ii) Her $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ esnek reel sayısına karşılık her $m, n \geq n_0$ için $p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \preceq \tilde{\epsilon}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa $\{\tilde{x}_n\}$ dizisine bir esnek p -Cauchy dizisi denir ve bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) = \bar{0}$ ile gösterilir.

(iii) Her $\{\tilde{x}_n\}$ esnek p -Cauchy dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \bar{0}$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek elemanı varsa bu se - düzgün uzayına bir esnek S -tam uzay denir.

(iv) Her $e \in E$ için

$$\delta_p(\tilde{X})(e) = \sup\{p(\tilde{x}, \tilde{y})(e) \mid \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}\} < \infty$$

ise bu se - düzgün uzayına bir esnek p -sınırlı uzay denir.

Tanım 4.2.5. (X, \mathcal{U}, E) bir se -düzgün uzay, p X üzerinde bir esnek \mathcal{E} -uzaklık ve A , X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. A daki her $\{\tilde{a}_n\}$ esnek p -Cauchy dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} p(\tilde{a}_n, \tilde{a}) = \bar{0}$ olacak şekilde bir $\tilde{a} \in \tilde{A}$ esnek elemanı varsa A ya X in bir esnek S -tam alt uzayı denir.

Tanım 4.2.6. (X, \mathcal{U}, E) bir se -düzgün uzay ve p X üzerinde bir esnek \mathcal{E} -uzaklık olsun.

(i) \mathcal{U} ya göre her $\{\tilde{x}_n\}$ esnek Cauchy dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \bar{0}$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek elemanı varsa bu uzaya bir esnek p -tam uzay denir.

(ii) $\{\tilde{x}_n\}$, X deki esnek elemanlardan oluşan bir dizi olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \bar{0}$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} p(f(\tilde{x}_n), f(\tilde{x})) = \bar{0}$ oluyorsa $f : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (X, \mathcal{U}, E)$ dönüşümüne bir esnek p -sürekli dönüşüm denir.

4.3. SABİT ESNEK ELEMAN TEOREMLERİ

Bu bölümde sabit esnek eleman teoremleri üzerine çalışılacaktır. Bunun için öncelikle sabit esnek eleman, esnek sıralı küme ve esnek azalan olmayan dönüşüm gibi kavramlar tanımlanacaktır. Ayrıca sabit esnek eleman teoremlerinde kullanılacak önemli bir özellik ispatlanacaktır.

Tanım 4.3.1. (X, \mathcal{U}, E) bir Hausdorff se -düzgün uzay ve $f : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (X, \mathcal{U}, E)$ bir dönüşüm olsun. $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$ özelliğini sağlayan $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek elemanına f nin bir sabit esnek elemanı denir.

Örnek 4.3.2. Örnek 4.1.11 de tanımlanan $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü alınsın. O halde $\bar{0} \lesssim \tilde{x} \lesssim \frac{1}{3}$ koşulunu sağlayan her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ve $\tilde{x} = \bar{1}$ esnek elemanları f nin sabit esnek elemanlarıdır.

Tanım 4.3.3. X boştan farklı bir küme, E parametrelerin bir kümesi ve \mathcal{R} de X üzerinde bir esnek bağıntı, yani $X^E \times X^E$ nin bir alt kümesi olsun. \mathcal{R} esnek bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa \mathcal{R} ye X üzerinde bir esnek sıralama bağıntısı denir ($(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{R}$ nin yerine sadelik olması açısından $\tilde{x}\mathcal{R}\tilde{y}$ yazılır).

(ESB1) $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için $\tilde{x}\mathcal{R}\tilde{x}$.

(ESB2) $\tilde{x}\mathcal{R}\tilde{y}$ ve $\tilde{y}\mathcal{R}\tilde{x}$ ise $\tilde{x} = \tilde{y}$.

(ESB3) $\tilde{x}\mathcal{R}\tilde{y}$ ve $\tilde{y}\mathcal{R}\tilde{z}$ ise $\tilde{x}\mathcal{R}\tilde{z}$.

Bu durumda, (X, \mathcal{R}, E) üçlüsüne de bir esnek sıralı küme denir. Örneğin, $(\mathbb{R}, \lesssim, E)$ bir esnek sıralı kümedir.

Tanım 4.3.4. $(X, \widetilde{\leq}, E)$ ve $(Y, \widetilde{\leq}', E)$ iki esnek sıralı küme ve $f : (X, \widetilde{\leq}, E) \rightarrow (Y, \widetilde{\leq}', E)$ bir dönüşüm olsun. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için $\tilde{x} \widetilde{\leq} \tilde{y}$ iken $f(\tilde{x}) \widetilde{\leq}' f(\tilde{y})$ oluyorsa bu dönüşüme bir esnek azalan olmayan dönüşüm denir.

Lemma 4.3.5. (X, \mathcal{U}, E) bir Hausdorff *se*-düzgün uzay ve p X üzerinde bir esnek \mathcal{E} -uzaklık olsun. $\{\tilde{x}_n\}, \{\tilde{y}_n\}$ X deki esnek elemanlardan oluşan keyfi diziler ve $\{\tilde{\alpha}_n\}, \{\tilde{\beta}_n\}$ negatif olmayan esnek reel sayılardan oluşan ve $\bar{0}$ ye esnek yakınsayan diziler olsun. Bu durumda, her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{X}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $p(\tilde{x}_n, \tilde{y}) \widetilde{\leq} \tilde{\alpha}_n$ ve $p(\tilde{x}_n, \tilde{z}) \widetilde{\leq} \tilde{\beta}_n$ ise $\tilde{y} = \tilde{z}$ olur. Özel olarak $p(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bar{0}$ ve $p(\tilde{x}, \tilde{z}) = \bar{0}$ ise $\tilde{y} = \tilde{z}$ elde edilir.

(ii) Her $m > n$ için $p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \widetilde{\leq} \tilde{\alpha}_n$ ise $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi \mathcal{U} ya göre bir esnek Cauchy dizisidir.

İspat. (i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $p(\tilde{x}_n, \tilde{y}) \widetilde{\leq} \tilde{\alpha}_n$ ve $p(\tilde{x}_n, \tilde{z}) \widetilde{\leq} \tilde{\beta}_n$ olsun. $\{\tilde{\alpha}_n\}$ ve $\{\tilde{\beta}_n\}, \bar{0}$ ye esnek yakınsayan diziler olduğundan her $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ esnek reel sayısına karşılık $n \geq n_0$ özelliğindeki her n doğal sayısı için $p(\tilde{x}_n, \tilde{y}) \widetilde{\leq} \tilde{\epsilon}$ ve $p(\tilde{x}_n, \tilde{z}) \widetilde{\leq} \tilde{\epsilon}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Tanım 4.2.1 (p_1) gereğince her $U \in \mathcal{U}$ için $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in U$ bulunur. O halde, (X, \mathcal{U}, E) bir Hausdorff *se*-düzgün uzay olduğundan istenilen $\tilde{y} = \tilde{z}$ ifadesi elde edilir.

(ii) $U \in \mathcal{U}$ olsun. Bu durumda bir $\tilde{z} \in \tilde{X}$ için $p(\tilde{z}, \tilde{x}) \widetilde{\leq} \tilde{\delta}$ ve $p(\tilde{z}, \tilde{y}) \widetilde{\leq} \tilde{\delta}$ iken $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in U$ olacak şekilde bir $\tilde{\delta} \succ \bar{0}$ vardır. $\{\tilde{\alpha}_n\}$ dizisi $\bar{0}$ ye esnek yakınsayan bir dizi olduğundan her $n \geq n_0$ için $\tilde{\alpha}_n \widetilde{\leq} \tilde{\delta}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Hipotez gereğince her $m > n \geq n_0$ için $p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \widetilde{\leq} \tilde{\alpha}_n \widetilde{\leq} \tilde{\delta}$ elde edilir. Şimdi, $m > n \geq n_0$ olacak şekilde bir $m \geq 1$ alınsın. Böylece, her $u, v \geq m$ için $p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_u) \widetilde{\leq} \tilde{\delta}$ ve $p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_v) \widetilde{\leq} \tilde{\delta}$ olduğundan \tilde{x}_u ve \tilde{x}_v esnek elemanları esnek U -yakındır.

$\psi : (\mathbb{R}^+, \widetilde{\leq}, E) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \widetilde{\leq}, E)$ bir esnek azalan olmayan dönüşüm olsun ve aşağıdaki koşulları sağlasın:

(ψ_1) Her $\tilde{\alpha} \succ \bar{0}$ için $\bar{0} \widetilde{\leq} \psi(\tilde{\alpha}) \widetilde{\leq} \tilde{\alpha}$.

(ψ_2) Her $\tilde{\alpha} \succ \bar{0}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(\tilde{\alpha}) = \bar{0}$.

Teorem 4.3.6. (X, \mathcal{U}, E) bir Hausdorff *se*-düzgün uzay olsun. p , X üzerinde bir esnek \mathcal{E} -uzaklık olmak üzere (X, \mathcal{U}, E) bir esnek p -sınırlı uzay olsun ve $f, g : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (X, \mathcal{U}, E)$ esnek zayıf bağdaşık dönüşümleri aşağıdaki koşulları sağlasın:

(i) $f(X) \subseteq g(X)$.

(ii) Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için $p(f(\tilde{x}), f(\tilde{y})) \lesssim \psi(p(g(\tilde{x}), g(\tilde{y})))$.

(iii) $f(X)$ veya $g(X)$ X in bir esnek S -tam alt uzayıdır.

Bu durumda f ve g dönüşümlerinin bir tek ortak sabit esnek elemanı vardır.

İspat. $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ olsun. $f(X) \subseteq g(X)$ olduğundan $f(\tilde{x}_0) = g(\tilde{x}_1)$ olacak şekilde bir $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ esnek elemanı vardır. Benzer şekilde $f(\tilde{x}_1) = g(\tilde{x}_2)$ olacak şekilde bir $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}$ esnek elemanı vardır. Bu şekilde devam edilirse $f(\tilde{x}_{n-1}) = g(\tilde{x}_n)$ olacak şekilde bir $\tilde{x}_n \in \tilde{X}$ esnek elemanı oluşturulabilir. Şimdi, $f(X)$ deki esnek elemanlardan oluşan bir $\{f(\tilde{x}_n)\}$ dizisinin bir esnek p -Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\tilde{\epsilon} \succ \bar{0}$ olsun. $\delta_p(\tilde{X}) \succ \bar{0}$ olduğundan (ψ_2) koşulu gereğince her $n \geq n_0$ için $\psi^n(\delta_p(\tilde{X})) \lesssim \tilde{\epsilon}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. Bu durumda (ii) den $m \geq n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} p(f(\tilde{x}_n), f(\tilde{x}_m)) &\lesssim \psi(p(g(\tilde{x}_n), g(\tilde{x}_m))) = \psi(p(f(\tilde{x}_{n-1}), f(\tilde{x}_{m-1}))) \\ &\lesssim \psi^2(p(g(\tilde{x}_{n-1}), g(\tilde{x}_{m-1}))) = \psi^2(p(f(\tilde{x}_{n-2}), f(\tilde{x}_{m-2}))) \\ &\vdots \\ &\lesssim \psi^n(p(f(\tilde{x}_0), f(\tilde{x}_{m-n}))) \end{aligned}$$

elde edilir. ψ bir esnek azalan olmayan dönüşüm olduğundan

$$p(f(\tilde{x}_n), f(\tilde{x}_m)) \lesssim \psi^n(p(f(\tilde{x}_0), f(\tilde{x}_{m-n}))) \lesssim \psi^n(\delta_p(\tilde{X})) \lesssim \tilde{\epsilon}$$

sağlanır. Diğer yandan p dönüşümü simetrik olmadığından benzer işlemler yapılarak

$$p(f(\tilde{x}_m), f(\tilde{x}_n)) \lesssim \psi^n(\delta_p(\tilde{X})) \lesssim \tilde{\epsilon}$$

ifadesi bulunur. Böylece $\{f(\tilde{x}_n)\}$ dizisi bir esnek p -Cauchy dizisidir.

X in bir esnek S -tam alt uzayı $g(X)$ olsun. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} p(f(\tilde{x}_n), g(\tilde{r})) = \bar{0}$ olacak şekilde bir $\tilde{r} \in \tilde{X}$ esnek elemanı vardır. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} p(g(\tilde{x}_n), g(\tilde{r})) = \bar{0}$ ifadesi bulunur. O halde

$$p(f(\tilde{x}_n), f(\tilde{r})) \lesssim \psi(p(g(\tilde{x}_n), g(\tilde{r})))$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(f(\tilde{x}_n), f(\tilde{r})) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(f(\tilde{x}_n), g(\tilde{r})) = \bar{0}$$

elde edilir. Lemma 4.3.5 (i) gereğince $f(\tilde{r}) = g(\tilde{r})$ dır. f ve g dönüşümleri esnek zayıf bağdaşık dönüşümler olduğundan $f(g(\tilde{r})) = g(f(\tilde{r}))$ olur. Ayrıca,

$$f(f(\tilde{r})) = f(g(\tilde{r})) = g(f(\tilde{r})) = g(g(\tilde{r}))$$

sağlanır. $p(f(\tilde{r}), f(f(\tilde{r}))) \lesssim \bar{0}$ olduğunu kabul edelim. (ii) ve (ψ_1) koşullarından

$$\begin{aligned} p(f(\tilde{r}), f(f(\tilde{r}))) &\lesssim \psi(p(g(\tilde{r}), g(f(\tilde{r})))) = \psi(p(f(\tilde{r}), f(f(\tilde{r})))) \\ &\gtrsim p(f(\tilde{r}), f(f(\tilde{r}))) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bir çelişkidir. Buradan $p(f(\tilde{r}), f(f(\tilde{r}))) = \bar{0}$ olur. Benzer şekilde $p(f(\tilde{r}), f(\tilde{r})) = \bar{0}$ elde edilir. $p(f(\tilde{r}), f(f(\tilde{r}))) = p(f(\tilde{r}), f(\tilde{r})) = \bar{0}$ olduğundan Lemma 4.3.5 (i) gereğince $f(\tilde{r}) = f(f(\tilde{r}))$ sağlanır. Böylece $g(f(\tilde{r})) = f(f(\tilde{r})) = f(\tilde{r})$ olduğundan $f(\tilde{r})$ esnek elemanı f ve g dönüşümlerinin bir ortak sabit esnek elemanıdır.

X in bir esnek S -tam alt uzayı $f(X)$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} p(f(\tilde{x}_n), f(\tilde{u})) = \bar{0}$ olacak şekilde bir $\tilde{u} \in \tilde{X}$ esnek elemanı vardır. (i) koşulu gereğince $f(\tilde{u}) = g(\tilde{r})$ olacak şekilde bir $\tilde{r} \in \tilde{X}$ esnek elemanı bulunur. Böylece yukarıda yapılan ispata benzer şekilde $g(\tilde{r})$ esnek elemanı f ve g dönüşümlerinin bir ortak sabit esnek elemanıdır.

Şimdi, f ve g dönüşümlerinin bir tek ortak sabit esnek elemana sahip olduğunu gösterelim. Bunun için $f(\tilde{u}) = g(\tilde{u}) = \tilde{u}$ ve $f(\tilde{v}) = g(\tilde{v}) = \tilde{v}$ olacak şekilde $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{X}$ esnek elemanları olsun. $p(\tilde{u}, \tilde{v}) \lesssim \bar{0}$ ise (ii) ve (ψ_1) koşullarından

$$p(\tilde{u}, \tilde{v}) = p(f(\tilde{u}), f(\tilde{v})) \lesssim \psi(p(g(\tilde{u}), g(\tilde{v}))) = \psi(p(\tilde{u}, \tilde{v})) \gtrsim p(\tilde{u}, \tilde{v})$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Bu takdirde $p(\tilde{u}, \tilde{v}) = \bar{0}$ sağlanır. Benzer şekilde $p(\tilde{u}, \tilde{u}) = \bar{0}$ olduğu gösterilebilir. Böylece Lemma 4.3.5 (i) gereğince $\tilde{u} = \tilde{v}$ bulunur. O halde f ve g dönüşümlerinin bir tek ortak sabit esnek elemanı vardır.

Aşağıdaki örnek, Teorem 4.3.6 daki (ii) koşulu ve f, g dönüşümlerinin esnek zayıf bağdaşık olma koşulu kaldırıldığında bu teoremin sağlanmayacağını gösterir.

Örnek 4.3.7. Örnek 4.2.2 de tanımlanan (X, \mathcal{U}_d, E) Hausdorff se -düzgün uzayı ve p esnek \mathcal{E} -uzaklık dönüşümü alınsın. (X, \mathcal{U}_d, E) uzayının bir esnek p -sınırlı uzay olduğu açıktır. $f, g : (X, \mathcal{U}_d, E) \rightarrow (X, \mathcal{U}_d, E)$ dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{3}) \text{ ve } x = 1 \\ \frac{1}{5}, & x \in [\frac{1}{3}, 1) \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} - x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ \frac{1}{2}, & x \in [\frac{1}{3}, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Bu takdirde, $f(X) \subseteq g(X)$ ve $f(X)$ in bir esnek S -tam uzay olduğu kolayca görülür. Diğer yandan,

$$f(g(\bar{1})) = f(\bar{0}) = \bar{0} \quad \text{ve} \quad g(f(\bar{1})) = g(\bar{0}) = \frac{\bar{1}}{3}$$

olduğundan f ve g dönüşümleri esnek zayıf bağdaşık dönüşümler değildir. Şimdi,

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ \frac{x}{3}, & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

olacak şekilde bir $\psi : [0,1] \rightarrow [0,1]$ esnek azalan olmayan dönüşüm tanımlansın. Bu dönüşüm ψ_1 ve ψ_2 koşullarını sağlar. Fakat her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için

$$p\left(f(\tilde{x}), f\left(\frac{\bar{1}}{3}\right)\right) = \frac{\bar{1}}{5} \gtrsim \psi\left(p\left(g(\tilde{x}), g\left(\frac{\bar{1}}{3}\right)\right)\right) = \frac{\bar{1}}{6}$$

olduğundan Teorem 4.3.6 daki (ii) koşulu sağlanmaz. O halde f ve g dönüşümlerinin ortak sabit esnek elemanı yoktur.

Aşağıdaki örnek Teorem 4.3.6'nın sağlandığını gösterir.

Örnek 4.3.8. Örnek 4.2.3 de tanımlanan (X, \mathcal{U}, E) Hausdorff se -düzgün uzayı ve p esnek \mathcal{E} -uzaklık dönüşümü alınsın. (X, \mathcal{U}, E) uzayının bir esnek p -sınırlı uzay olduğu açıktır. $f, g : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (X, \mathcal{U}, E)$ dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$f(x) = f(y) = x \quad \text{ve} \quad g(x) = x, \quad g(y) = y.$$

Bu durumda, $f(X) \subseteq g(X)$ ve $f(X)$ in bir esnek S -tam uzay olduğu kolayca görülür. Ayrıca, $f(\tilde{x}_1) = g(\tilde{x}_1)$ iken $f(g(\tilde{x}_1)) = g(f(\tilde{x}_1))$ sağlandığından f ve g dönüşümleri esnek zayıf bağdaşık dönüşümlerdir. Şimdi, Örnek 4.3.7 de tanımlanan ψ dönüşümü ele alınsın. Böylece Teorem 4.3.6 daki (ii) koşulu her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için gerçekleşir. O halde Teorem 4.3.6 daki tüm koşullar sağlanır ve dolayısıyla \tilde{x}_1 esnek elemanı f ve g nin tek ortak sabit esnek elemanıdır.

Teorem 4.3.6 da sırasıyla $g = Id_X$ ve $f = Id_X$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar kolaylıkla elde edilir (Burada $Id_X : X \rightarrow X$ bir birim dönüşümdür).

Sonuç 4.3.9. (X, \mathcal{U}, E) bir Hausdorff se -düzgün uzay olsun. p X üzerinde bir esnek \mathcal{E} -uzaklık olmak üzere (X, \mathcal{U}, E) bir esnek p -sınırlı uzay olsun ve $f : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (X, \mathcal{U}, E)$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlasın:

(i) Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için $p(f(\tilde{x}), f(\tilde{y})) \preceq \psi(p(\tilde{x}, \tilde{y}))$.

(ii) $f(X)$ X in bir esnek S -tam alt uzayıdır.

Bu durumda f dönüşümünün bir tek sabit esnek elemanı vardır.

Sonuç 4.3.10. (X, \mathcal{U}, E) bir Hausdorff se -düzgün uzay ve bir esnek S -tam uzay olsun. p , X üzerinde bir esnek \mathcal{E} -uzaklık olmak üzere (X, \mathcal{U}, E) bir esnek p -sınırlı uzay olsun. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için

$$p(\tilde{x}, \tilde{y}) \preceq \psi(p(g(\tilde{x}), g(\tilde{y})))$$

olacak şekilde bir $g : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (X, \mathcal{U}, E)$ örten dönüşümü varsa bu durumda g dönüşümünün bir tek sabit esnek elemanı vardır.

Tanım 4.3.11. X boştan farklı bir küme, E parametrelerin bir kümesi ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. X deki esnek elemanlardan oluşan her $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi için $\{f(\tilde{x}_n)\}$ dizisi \mathbb{R} de bir esnek yakınsak dizi oluyorsa f ye bir esnek yarı dizisel sürekli dönüşüm denir.

Örnek 4.3.12. Her $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sabit dönüşümünün bir esnek yarı dizisel sürekli dönüşüm olduğunu görmek kolaydır.

Tanım 4.3.13. (X, \preceq, E) bir esnek sıralı küme ve $f, g : X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. Her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için $f(\tilde{x}) \preceq g(f(\tilde{x}))$ ve $g(\tilde{x}) \preceq f(g(\tilde{x}))$ oluyorsa f ve g dönüşümlerine esnek zayıf artan dönüşümler denir.

Örnek 4.3.14. $([0,1], \preceq, E)$ bir esnek sıralı küme olsun ve Örnek 4.2.5 de tanımlanan $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümleri alınsın. Bu durumda $\bar{0} \preceq \tilde{x} \preceq \frac{\bar{1}}{3}$ koşulunu sağlayan her \tilde{x} esnek elemanı için

$$f(\tilde{x}) = \tilde{x} \preceq g(f(\tilde{x})) = g(\tilde{x}) = \bar{1} - \tilde{x} \text{ ve } g(\tilde{x}) = \bar{1} - \tilde{x} \preceq f(g(\tilde{x})) = f(\bar{1} - \tilde{x}) = \bar{1}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\frac{\bar{1}}{3} \preceq \tilde{x} \preceq \bar{1}$ koşulunu sağlayan her \tilde{x} esnek elemanı için

$$f(\tilde{x}) = \bar{1} \preceq g(f(\tilde{x})) = g(\bar{1}) = \bar{1} \text{ ve } g(\tilde{x}) = \bar{1} \preceq f(g(\tilde{x})) = f(\bar{1}) = \bar{1}$$

sağlanır. Diğer tüm $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek elemanları için de sağlandığından f ve g dönüşümleri esnek zayıf artan dönüşümlerdir.

Lemma 4.3.15. (X, \mathcal{U}, E) bir Hausdorff se -düzgün uzay, p X üzerinde bir esnek \mathcal{E} -uzaklık ve $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için

$$\tilde{x} \preceq \tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y} \text{ veya } p(\tilde{x}, \tilde{y}) \preceq \varphi(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{y})$$

şeklinde tanımlanan \preceq esnek bağıntısı X üzerinde bir esnek sıralama bağıntısıdır.

İspat. \preceq esnek bağıntısının (ESB1)-(ESB3) özelliklerini sağladığını gösterelim.

(ESB1) Her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için $\tilde{x} = \tilde{x}$ olduğundan $\tilde{x} \preceq \tilde{x}$ sağlanır.

(ESB2) Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için $\tilde{x} \preceq \tilde{y}$ ve $\tilde{y} \preceq \tilde{x}$ olsun. Bu takdirde,

$$\tilde{x} = \tilde{y} \text{ veya } p(\tilde{x}, \tilde{y}) \preceq \varphi(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{y}) \text{ ve } \tilde{y} = \tilde{x} \text{ veya } p(\tilde{y}, \tilde{x}) \preceq \varphi(\tilde{y}) - \varphi(\tilde{x})$$

elde edilir. Buradan ya $\tilde{x} = \tilde{y}$ ya da $p(\tilde{x}, \tilde{y}) + p(\tilde{y}, \tilde{x}) = \bar{0}$ dir. $p(\tilde{x}, \tilde{y}) + p(\tilde{y}, \tilde{x}) = \bar{0}$ ise bu durumda $p(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bar{0}$ ve $p(\tilde{y}, \tilde{x}) = \bar{0}$ olur. Tanım 4.2.1 (p_2) gereğince $p(\tilde{x}, \tilde{x}) = \bar{0}$ sağlanır. Böylece Lemma 4.3.5 (i) den istenilen $\tilde{x} = \tilde{y}$ ifadesi elde edilir.

(ESB3) Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{X}$ için $\tilde{x} \preceq \tilde{y}$ ve $\tilde{y} \preceq \tilde{z}$ olsun. Bu takdirde,

$$\tilde{x} = \tilde{y} \text{ veya } p(\tilde{x}, \tilde{y}) \preceq \varphi(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{y}) \text{ ve } \tilde{y} = \tilde{z} \text{ veya } p(\tilde{y}, \tilde{z}) \preceq \varphi(\tilde{y}) - \varphi(\tilde{z})$$

elde edilir. O halde, $\tilde{x} \preceq \tilde{z}$ olduğunu göstermek için aşağıdaki durumları inceleyelim:

1.Durum: $\tilde{x} = \tilde{y}$ ve $\tilde{y} = \tilde{z}$ ise $\tilde{x} = \tilde{z}$ olduğundan $\tilde{x} \preceq \tilde{z}$ sağlanır.

2.Durum: $\tilde{x} = \tilde{y}$ ve $p(\tilde{y}, \tilde{z}) \preceq \varphi(\tilde{y}) - \varphi(\tilde{z})$ ise $p(\tilde{x}, \tilde{z}) \preceq \varphi(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{z})$ olduğundan $\tilde{x} \preceq \tilde{z}$ bulunur.

3.Durum: $p(\tilde{x}, \tilde{y}) \preceq \varphi(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{y})$ ve $\tilde{y} = \tilde{z}$ ise $p(\tilde{x}, \tilde{z}) \preceq \varphi(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{z})$ olduğundan $\tilde{x} \preceq \tilde{z}$ olur.

4.Durum: $p(\tilde{x}, \tilde{y}) \preceq \varphi(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{y})$ ve $p(\tilde{y}, \tilde{z}) \preceq \varphi(\tilde{y}) - \varphi(\tilde{z})$ ise bu durumda

$$p(\tilde{x}, \tilde{z}) \preceq p(\tilde{x}, \tilde{y}) + p(\tilde{y}, \tilde{z}) \preceq \varphi(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{y}) + \varphi(\tilde{y}) - \varphi(\tilde{z}) = \varphi(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{z})$$

olduğundan $\tilde{x} \preceq \tilde{z}$ sağlanır.

Böylece \preceq esnek bağıntısı X üzerinde bir esnek sıralama bağıntısıdır.

Tanım 4.3.16. Yukarıda tanımlanan esnek bağıntıya φ ile üretilen bir esnek sıralama bağıntısı denir.

Teorem 4.3.17. (X, \mathcal{U}, E) bir Hausdorff *se*-düzgün uzay olsun. Her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için $p(\tilde{x}, \tilde{x}) = \bar{0}$ olacak şekilde p X üzerinde bir esnek \mathcal{E} -uzaklık, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir esnek yarı dizisel sürekli dönüşüm ve $f, g : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (X, \mathcal{U}, E)$ dönüşümleri esnek p -sürekli olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa bu durumda f ve g dönüşümlerinin bir ortak sabit esnek elemanı vardır.

(i) (X, \mathcal{U}, E) bir esnek p -tam uzaydır.

(ii) \preceq esnek bağıntısı X üzerinde φ ile üretilen bir esnek sıralama bağıntısı olmak üzere $f, g : (X, \preceq, E) \rightarrow (X, \preceq, E)$ dönüşümleri esnek zayıf artan dönüşümlerdir.

İspat. $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ olsun. $n \in \{0,1, \dots\}$ için

$$f(\tilde{x}_{2n}) = \tilde{x}_{2n+1} \text{ ve } g(\tilde{x}_{2n+1}) = \tilde{x}_{2n+2}$$

olacak şekilde X deki esnek elemanlardan oluşan bir $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi tanımlansın. f ve g dönüşümleri esnek zayıf artan olduğundan

$$\tilde{x}_1 = f(\tilde{x}_0) \preceq g(f(\tilde{x}_0)) = g(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$$

$$\tilde{x}_2 = g(\tilde{x}_1) \preceq f(g(\tilde{x}_1)) = f(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_3$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse

$$\tilde{x}_1 \preceq \tilde{x}_2 \preceq \dots \preceq \tilde{x}_n \preceq \tilde{x}_{n+1} \preceq \dots$$

elde edilir. φ dönüşümü bir esnek yarı dizisel sürekli olduğundan $\{\varphi(\tilde{x}_n)\}$ dizisi esnek reel sayılardan oluşan bir esnek yakınsak dizidir. Bu dizinin \mathbb{R} de bir esnek Cauchy dizisi olduğu kolayca görülür. Buradan $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi \mathcal{U} ya göre bir esnek Cauchy dizisidir. Gerçekten, $U \in \mathcal{U}$ olsun. Bu takdirde, bir $\tilde{z} \in \tilde{X}$ için $p(\tilde{z}, \tilde{x}) \preceq \tilde{\delta}$ ve $p(\tilde{z}, \tilde{y}) \preceq \tilde{\delta}$ iken $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in U$ olacak şekilde bir $\tilde{\delta} \succ \bar{0}$ vardır. $\{\varphi(\tilde{x}_n)\}$ dizisi \mathbb{R} de bir esnek Cauchy dizisi olduğundan her $m, n \geq n_0$ için $|\varphi(\tilde{x}_m) - \varphi(\tilde{x}_n)| \preceq \tilde{\delta}$ olacak şekilde bir $n_0 \geq 1$ doğal sayısı vardır. Diğer yandan, $m = n$ ise \tilde{x}_n ve \tilde{x}_m esnek elemanlarının esnek U -yakın olduğu açıktır. $n < m$ ise $\tilde{x}_n \preceq \tilde{x}_m$ olduğundan

$$\tilde{x}_n = \tilde{x}_m \text{ veya } p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \preceq \varphi(\tilde{x}_n) - \varphi(\tilde{x}_m)$$

elde edilir. Buradan

$$p(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \preceq \varphi(\tilde{x}_n) - \varphi(\tilde{x}_m) = |\varphi(\tilde{x}_m) - \varphi(\tilde{x}_n)| \preceq \tilde{\delta}$$

ifadesi sağlanır. O halde her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için $p(\tilde{x}, \tilde{x}) = \bar{0}$ olduğundan \tilde{x}_n ve \tilde{x}_m esnek elemanları esnek U -yakındır. (X, \mathcal{U}, E) bir esnek p -tam uzay olduğundan bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek elemanı için $\lim_{n \rightarrow \infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \bar{0}$ elde edilir. Buradan, f esnek p -sürekli olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} p(\tilde{x}_{2n+1}, \tilde{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(\tilde{x}_{2n+1}, f(\tilde{x})) = \bar{0}$ bulunur. Böylece Lemma 4.3.5 (i) gereğince $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$ sağlanır. Benzer şekilde g dönüşümü de esnek p -sürekli olduğundan $g(\tilde{x}) = \tilde{x}$ elde edilir. O halde f ve g dönüşümleri bir ortak sabit esnek elemana sahiptir.

Teorem 4.3.18. (X, \mathcal{U}, E) bir Hausdorff se -düzgün uzay olsun. Her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için $p(\tilde{x}, \tilde{x}) = \bar{0}$ olacak şekilde p X üzerinde bir esnek \mathcal{E} -uzaklık, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir esnek yarı dizisel sürekli dönüşüm ve $f : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (X, \mathcal{U}, E)$ bir esnek p -sürekli dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa bu durumda f dönüşümünün bir sabit esnek elemanı vardır.

(i) (X, \mathcal{U}, E) bir esnek p -tam uzaydır.

(ii) $\tilde{\preceq}$ esnek bağıntısı X üzerinde φ ile üretilen bir esnek sıralama bağıntısı olmak üzere $f : (X, \tilde{\preceq}, E) \rightarrow (X, \tilde{\preceq}, E)$ dönüşümü bir $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ için $\tilde{x}_0 \tilde{\preceq} f(\tilde{x}_0)$ olacak şekilde bir esnek azalan olmayan dönüşümdür.

İspat. $\tilde{x}_0 \tilde{\preceq} f(\tilde{x}_0)$ olacak şekilde bir $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ esnek elemanı olsun. $n \in \{1, 2, \dots\}$ için $f(\tilde{x}_{n-1}) = \tilde{x}_n$ olacak şekilde X deki esnek elemanlardan oluşan bir $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi tanımlansın. f dönüşümü esnek azalan olmayan olduğundan $\tilde{x}_0 \tilde{\preceq} \tilde{x}_1 \tilde{\preceq} \tilde{x}_2 \tilde{\preceq} \dots$ elde edilir. Teorem 4.3.17 nin ispatındaki benzer işlemler yapılırsa $\{\tilde{x}_n\}$ dizisinin \mathcal{U} ya göre bir esnek Cauchy dizisi olduğu görülür. (X, \mathcal{U}, E) bir esnek p -tam uzay olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \bar{0}$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek elemanı vardır. f dönüşümü esnek p -sürekli olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} p(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(\tilde{x}_n, f(\tilde{x})) = \bar{0}$ bulunur. Böylece Lemma 4.3.5 (i) gereğince $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$ sağlanır.

Örnek 4.3.19. Örnek 4.2.3 de tanımlanan (X, \mathcal{U}, E) Hausdorff se -düzgün uzayı ve p esnek \mathcal{E} -uzaklık dönüşümü alınsın. $\Delta \in \mathcal{U}$ olduğundan (X, \mathcal{U}, E) bir esnek p -tam uzaydır. Şimdi, $f(x) = f(y) = x$ ve $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$ olacak şekilde $f : X \rightarrow X$ ve $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümleri tanımlansın. φ dönüşümü bir sabit dönüşüm olduğundan bir esnek yarı dizisel sürekli dönüşümdür. Diğer yandan, φ ile üretilen esnek sıralama bağıntısı $\tilde{\preceq} = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1), (\tilde{x}_2, \tilde{x}_2), (\tilde{x}_3, \tilde{x}_3), (\tilde{x}_4, \tilde{x}_4)\}$ şeklindedir. O halde f dönüşümü bir esnek p -sürekli ve $\tilde{\preceq}$ esnek bağıntısına göre bir esnek azalan olmayan dönüşümdür. Ayrıca, $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ için $\tilde{x}_1 \tilde{\preceq} f(\tilde{x}_1)$ elde edilir. Böylece, Teorem 4.3.18 deki tüm koşullar sağlanır ve \tilde{x}_1 f nin bir sabit esnek elemanı olur.

5. BULANIK ESNEK DÜZGÜN UZAYLAR

Bu bölümde öncelikle Çetkin ve Aygün (2014) tarafından verilen bulanık esnek süzgeçler ile ilgili özellikler incelenecektir. Çarpım bulanık esnek topolojik uzaylarda bulanık esnek süzgeçlerin yakınsaklığı üzerine çalışılacaktır. Ayrıca bir ultra bulanık esnek süzgeç ve bir doymun bulanık esnek süzgeç kavramları tanımlanarak önemli sonuçları elde edilecektir. Bunun yanı sıra bir bulanık esnek komşuluk sistemi tanımlanacak ve bu tanımdan faydalanarak bir bulanık esnek topoloji üretilecektir. Daha sonra Lowen anlamında bir bulanık esnek düzgün uzay tanımlanarak bulanık esnek komşuluk sistemi ve bulanık esnek topoloji ile arasındaki ilişki gösterilecektir. Ayrıca bir bulanık esnek düzgün sürekli dönüşüm kavramı verilecek ve bir bulanık esnek düzgün sürekli dönüşümden bir bulanık esnek sürekli dönüşüm elde edilecektir.

5.1. BULANIK ESNEK SÜZGEÇLER

Bu bölümde bulanık esnek süzgeçler ile ilgili özellikler çalışılacaktır. Bir bulanık esnek süzgeç tabanı tanımı verilecek ve bir bulanık esnek süzgecin bir esnek dönüşüm altındaki görüntüsü incelenecektir.

Tanım 5.1.1. (i) Boştan farklı bir $\mathcal{F} \subset FS(X, E)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa \mathcal{F} ailesine X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç denir.

$$(S1) \tilde{\emptyset} \notin \mathcal{F}.$$

$$(S2) f, g \in \mathcal{F} \text{ ise } f \sqcap g \in \mathcal{F}.$$

$$(S3) f \in \mathcal{F} \text{ ve } f \sqsubseteq g \text{ ise } g \in \mathcal{F}.$$

(ii) \mathcal{F}_1 ve \mathcal{F}_2 , X üzerinde iki bulanık esnek süzgeç olsun. $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ ise \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 den daha kaba (veya \mathcal{F}_2 , \mathcal{F}_1 den daha incedir) denir (Çetkin ve Aygün 2014).

Örnek 5.1.2. Her $\alpha \in (0,1]$ için

$$\mathcal{F}_\alpha = \{f \in FS(X, E) \mid \text{her } e \in E \text{ ve } x \in X \text{ için } e_{x^\alpha} \tilde{\in} f\}$$

ailesi X üzerinde bir bulanık esnek süzgeçtir.

Tanım 5.1.3. $f \in FS(X, E)$ olsun. Bu durumda,

(i) J indis kümesi sonlu olmak üzere $\{e_i\}_{i \in J} \subset E$ için $f(e_i) \neq 0_X$ ve her $e \in E - \{e_i\}_{i \in J}$ için $f(e) = 0_X$ ise f bir sonlu bulanık esnek küme olarak adlandırılır.

(ii) J indis kümesi sayılabilir olmak üzere $\{e_i\}_{i \in J} \subset E$ için $f(e_i) \neq 0_X$ ve her $e \in E - \{e_i\}_{i \in J}$ için $f(e) = 0_X$ ise f bir sayılabilir bulanık esnek küme olarak adlandırılır.

Uyarı 5.1.4. Sonlu sayıdaki sonlu bulanık esnek kümelerin birleşiminin bir sonlu bulanık esnek küme olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca sayılabilir sayıdaki sayılabilir bulanık esnek kümelerin birleşimi de bir sayılabilir bulanık esnek kümedir.

Örnek 5.1.5. (i) $X = \{x_1, x_2\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ olsun. Bu durumda,

$$f = \{(e_1, \{x_1/0,2, x_2/0\}), (e_2, \{x_1/0,5, x_2/0,1\}), (e_3, 0_X), (e_4, 0_X), \dots\}$$

bir sonlu bulanık esnek kümedir.

(ii) $X = \{x_1, x_2\}$, $E = \{e_i \mid i \in \mathbb{R}\}$ ve $f \in FS(X, E)$ olsun. Her $e \in \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ için $f(e) \neq 0_X$ ve her $e' \in E - \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ için $f(e') = 0_X$ ise f bir sayılabilir bulanık esnek kümedir.

Örnek 5.1.6. (i) X herhangi bir küme ve E sonsuz bir küme olsun. Bu takdirde,

$$\mathcal{F} = \{f \in FS(X, E) \mid f^c \text{ sonlu}\}$$

ailesi X üzerinde bir bulanık esnek süzgeçtir.

(ii) X herhangi bir küme ve E sayılamaz bir küme olsun. Bu takdirde,

$$\mathcal{F} = \{f \in FS(X, E) \mid f^c \text{ sayılabilir}\}$$

ailesi X üzerinde bir bulanık esnek süzgeçtir.

Tanım 5.1.7. Bir $\mathcal{B} \subset FS(X, E)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa \mathcal{B} ailesine X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç tabanı denir.

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ ve $\tilde{\emptyset} \notin \mathcal{B}$ dir.

(B2) Her $f, g \in \mathcal{B}$ için $h \sqsubseteq f \sqcap g$ olacak şekilde bir $h \in \mathcal{B}$ vardır.

Uyarı 5.1.8. \mathcal{B} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç tabanı ise

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \{f \in FS(X, E) \mid \text{bir } h \in \mathcal{B} \text{ için } h \sqsubseteq f\}$$

ailesinin X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu bulanık esnek süzgece \mathcal{B} tarafından üretilen bir bulanık esnek süzgeç denir.

Örnek 5.1.9. $\tilde{\emptyset} \neq f \in FS(X, E)$ olmak üzere $\mathcal{B} = \{f\}$ ailesi X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç tabanıdır.

Teorem 5.1.10. $\varphi_\psi : FS(X, E) \rightarrow FS(Y, K)$ bir bulanık esnek dönüşüm ve \mathcal{F} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç ise

$$\{\varphi_\psi(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

ailesi de Y üzerindeki bir $\varphi_\psi(\mathcal{F})$ bulanık esnek süzgeci için bir tabandır.

İspat. Tanım 5.1.7 deki (B1) ve (B2) koşullarının sağlandığı bulanık esnek süzgeç tanımından açıktır.

5.2. BULANIK ESNEK SÜZGEÇ YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde öncelikle bir bulanık esnek süzgeç yardımıyla bir bulanık esnek topoloji üretilecektir. Daha sonra bulanık esnek topolojik uzaylarda bulanık esnek süzgeç yakınsaklığı tanımlanarak önemli özellikler elde edilecektir. Ayrıca bir bulanık esnek Hausdorff uzaydaki bir bulanık esnek süzgecin bir tek bulanık esnek noktaya yakınsadığı gösterilecektir.

Lemma 5.2.1. Her $e_{x^\alpha} \in FSP(X)$ esnek noktasına (BEK1)-(BEK5) koşullarını sağlayan bir $\mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ ailesi karşılık getirilsin. Bu durumda her $e_{x^\alpha} \in FSP(X)$ bulanık esnek noktası için $\mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ ailesi e_{x^α} nın bir bulanık esnek komşuluk sistemi olacak şekilde X üzerinde bir tek bulanık esnek topoloji vardır.

İspat. $\tau = \{f \in FS(X, E) \mid \text{her } e_{x^\alpha} \tilde{\in} f \text{ için } f \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})\}$ olsun. Bu takdirde,

$\emptyset, \tilde{X} \in \tau$ olduğu açıktır.

$f, g \in \tau$ ve $e_{x^\alpha} \tilde{\in} f \sqcap g$ olsun. Bu durumda $e_{x^\alpha} \tilde{\in} f$ ve $e_{x^\alpha} \tilde{\in} g$ olur. Böylece $f, g \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ ve (BEK4) gereğince $f \sqcap g \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ elde edilir. O halde $f \sqcap g \in \tau$ dur.

$\{f_i\}_{i \in J} \subseteq \tau$ ve $e_{x^\alpha} \tilde{\in} \sqcup_{i \in J} f_i$ olsun. Buradan $e_{x^\alpha} \tilde{\in} f_{i_0}$ olacak şekilde bir $i_0 \in J$ vardır. τ nun tanımından $f_{i_0} \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ bulunur. O halde (BEK3) gereğince $\sqcup_{i \in J} f_i \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ elde edilir.

Şimdi, $\mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ ailesinin e_{x^α} nın bir bulanık esnek komşuluk sistemi olduğunu göstereyim. f bulanık esnek kümesi e_{x^α} nın bir bulanık esnek komşuluğu olsun. Bu durumda $e_{x^\alpha} \tilde{\in} g \sqsubseteq f$ olacak şekilde bir $g \in \tau$ vardır. τ nun tanımından $g \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ dır. O halde $g \sqsubseteq f$ olduğundan $f \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ elde edilir. Tersine, $f \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ olsun. (BEK5) gereğince $g \sqsubseteq f$ ve her $e'_{y^\lambda} \tilde{\in} g$ için $g \in \mathcal{N}(e'_{y^\lambda})$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ vardır. τ nun tanımı gereğince $g \in \tau$ sağlanır. Ayrıca, $g \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ olduğundan $e_{x^\alpha} \tilde{\in} g$ elde edilir. Böylece f bulanık esnek kümesi e_{x^α} nın bir bulanık esnek komşuluğudur.

Teorem 5.2.2. Boştan farklı herhangi bir X kümesi üzerindeki her e_{x^α} bulanık esnek noktasına aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{F}(e_{x^\alpha})$ bulanık esnek süzgeci karşı gelirse, $\mathcal{F}(e_{x^\alpha})$ bulanık esnek süzgeci $\mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ bulanık esnek komşuluk sistemi olacak şekilde X üzerinde bir tek τ bulanık esnek topolojisi vardır.

(i) $f \in \mathcal{F}(e_{x^\alpha})$ ise $e_{x^\alpha} \tilde{\in} f$ dir.

(ii) $f \in \mathcal{F}(e_{x^\alpha})$ ise $g \sqsubseteq f$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{F}(e_{x^\alpha})$ vardır. Burada her $e'_{y^\lambda} \tilde{\in} g$ için $g \in \mathcal{F}(e'_{y^\lambda})$ dır.

İspat. $\mathcal{F}(e_{x^\alpha})$ ailesi (BEK1)-(BEK5) özelliklerini sağladığından Lemma 5.2.1 gereğince ispat açıktır.

Tanım 5.2.3. (X, τ, E) bir bulanık esnek topolojik uzay, $f \in FS(X, E)$ ve $e_{x^\alpha} \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. Her $g \in \mathcal{N}((e_{x^\alpha})^c)$ için $g \not\sqsubseteq f^c$ oluyorsa e_{x^α} bulanık esnek noktasına f bulanık esnek kümesinin bir bulanık esnek değme noktası denir.

Örnek 5.2.4. $X = \{x_1, x_2\}$ ve $E = \{e^1, e^2\}$ olsun. $f, g \in FS(X, E)$ bulanık esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$f = \{(e^1, \{x_1/0,1, x_2/0,7\}), (e^2, \{x_1/0,5, x_2/0,3\})\},$$

$$g = \{(e^1, \{x_1/0,3, x_2/0,6\}), (e^2, \{x_1/0,2, x_2/0,3\})\}.$$

Bu takdirde, $\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, f, g, f \sqcup g, f \sqcap g\}$ ailesi X üzerinde bir bulanık esnek topolojidir. Ayrıca her $h \in \mathcal{N}(e^1_{x_2^{0,6}})$ için $h \not\sqsubseteq f^c$ olduğundan $e^1_{x_2^{0,4}}$ bulanık esnek noktası f bulanık esnek kümesinin bir bulanık esnek değme noktasıdır.

Teorem 5.2.5. (X, τ, E) bir bulanık esnek topolojik uzay ve $f \in FS(X, E)$ olsun. $e_{x^\alpha} \tilde{\in} \bar{f}$ olması için gerek ve yeter koşul e_{x^α} nın f bulanık esnek kümesinin bir bulanık esnek değme noktası olmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) $e_{x^\alpha} \tilde{\in} \bar{f}$ olsun. f yi içeren her k bulanık esnek kapalı kümesi için $\alpha \leq k(e)(x)$ sağlanır. O halde $h \sqsubseteq f^c$ koşulunu sağlayan her h bulanık esnek açık kümesi için $h(e)(x) \leq (1 - \alpha)$ dır. Diğer bir deyişle, $(1 - \alpha) < h(e)(x)$ koşulunu sağlayan her h bulanık esnek açık kümesi için $h \not\sqsubseteq f^c$ dir. Böylece e_{x^α}, f nin bir bulanık esnek değme noktasıdır.

(\Leftarrow) e_{x^α}, f nin bir bulanık esnek değme noktası olsun. Bu takdirde, $e_{x^{1-\alpha}} \tilde{\in} h$ koşulunu sağlayan her h bulanık esnek açık kümesi için $h \not\sqsubseteq f^c$ elde edilir. Buna göre, $h \sqsubseteq f^c$ olacak şekildeki her h bulanık esnek açık kümesi için $(1 - \alpha) > h(e)(x)$ dir. Diğer bir deyişle, $f \sqsubseteq k$ olacak şekildeki her k bulanık esnek kapalı kümesi için $\alpha \leq k(e)(x)$ bulunur. Böylece $e_{x^\alpha} \tilde{\in} \bar{f}$ sağlanır.

Tanım 5.2.6. (X, τ, E) bir bulanık esnek topolojik uzay ve \mathcal{F}, X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç olsun. $e_{x^\alpha} \in FSP(X)$ olmak üzere,

(i) $\mathcal{N}(e_{x^\alpha}) \subseteq \mathcal{F}$ ise \mathcal{F} bulanık esnek süzgeci e_{x^α} bulanık esnek noktasına yakınsar denir ve bu durum $\mathcal{F} \rightarrow e_{x^\alpha}$ ile gösterilir. Bu e_{x^α} bulanık esnek noktasına da \mathcal{F} nin bir bulanık esnek limit noktası denir.

(ii) Her $f \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ ve her $g \in \mathcal{F}$ için $f \sqcap g \neq \tilde{\emptyset}$ ise e_{x^α} bulanık esnek noktasına \mathcal{F} nin bir bulanık esnek yığılma noktası denir ve bu durum $\mathcal{F} \infty e_{x^\alpha}$ notasyonu ile gösterilir.

$\mathcal{F} \rightarrow e_{x^\alpha}$ ise $\mathcal{F} \infty e_{x^\alpha}$ olduğu açıktır, fakat aşağıdaki örnek bunun tersinin genelde doğru olmadığını gösterir.

Örnek 5.2.7. Örnek 5.2.4 deki (X, τ, E) bulanık esnek topolojik uzayı alınsın. X üzerindeki bir $\mathcal{F} = \{h \in FS(X, E) \mid f \sqsubseteq h\}$ bulanık esnek süzgeci bir $e^1_{x_1^{0,3}} \in FSP(X)$ bulanık esnek yığılma noktasına sahiptir, fakat bulanık esnek limit noktası yoktur.

Teorem 5.2.8. (X, τ, E) bir bulanık esnek topolojik uzay ve \mathcal{F} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç olsun. Bir $e_{x^\alpha} \in FSP(X)$ bulanık esnek noktasının \mathcal{F} nin bir bulanık esnek yığılma noktası olması için gerek ve yeter koşul X üzerinde \mathcal{F} den daha ince olan ve e_{x^α} bulanık esnek noktasına yakınsayan bir \mathcal{G} bulanık esnek süzgecinin bulunmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) $\mathcal{F} \infty e_{x^\alpha}$ ise $\{f \sqcap g \mid f \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha}), g \in \mathcal{F}\}$ ailesi X üzerindeki bir \mathcal{G} bulanık esnek süzgeci için bir tabandır. Bu \mathcal{G} bulanık esnek süzgeci \mathcal{F} den daha incedir ve $\mathcal{F} \rightarrow e_{x^\alpha}$ sağlanır.

(\Leftarrow) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ve $\mathcal{G} \rightarrow e_{x^\alpha}$ ise her $f \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ ve her $g \in \mathcal{F}$ için $f, g \in \mathcal{G}$ olduğundan $f \sqcap g \neq \tilde{\emptyset}$ ve dolayısıyla $\mathcal{F} \infty e_{x^\alpha}$ elde edilir.

Teorem 5.2.9. (X, τ, E) bir bulanık esnek topolojik uzay, $f \in FS(X, E)$ ve $e_{x^\alpha} \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $f \in \tau$ olması için gerek ve yeter koşul $e_{x^\alpha} \tilde{\in} f$ bulanık esnek noktasına yakınsayan X üzerindeki her \mathcal{F} bulanık esnek süzgeci için $f \in \mathcal{F}$ olmasıdır.

(ii) e_{x^α} bulanık esnek noktasının f nin bir bulanık esnek değme noktası olması için gerek ve yeter koşul $f^c \notin \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F} \rightarrow e_{x^{1-\alpha}}$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} bulanık esnek süzgecinin olmasıdır.

(iii) $f \in \tau^c$ olması için gerek ve yeter koşul X üzerindeki bir \mathcal{F} bulanık esnek süzgeci için $f^c \notin \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F} \rightarrow e_{x^{1-\alpha}}$ olduğunda $e_{x^\alpha} \tilde{\in} f$ olmasıdır.

İspat. (i) (\Rightarrow) Bulanık esnek açık küme tanımından kolaylıkla elde edilir.

(\Leftarrow) f nin kendi içindeki her bulanık esnek noktasının bir bulanık esnek komşuluğu olduğunu göstermek yeterlidir. $e_{x^\alpha} \tilde{\in} f$ olsun ve $\mathcal{N}(e_{x^\alpha}) = \mathcal{F}$ alınsın. Bu durumda hipotezden $f \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ bulunur.

(ii) (\Rightarrow) e_{x^α} bulanık esnek noktası f nin bir bulanık esnek değme noktası ise her $g \in \mathcal{N}(e_{x^{1-\alpha}})$ için $g \not\subseteq f^c$ dir. $\mathcal{F} = \mathcal{N}(e_{x^{1-\alpha}})$ alınsın. Buradan $f^c \notin \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F} \rightarrow e_{x^{1-\alpha}}$ sağlanır.

(\Leftarrow) $f^c \notin \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F} \rightarrow e_{x^{1-\alpha}}$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} bulanık esnek süzgeç olsun. O halde her $g \in \mathcal{N}(e_{x^{1-\alpha}})$ için $g \not\subseteq f^c$ dir, aksi halde $f^c \in \mathcal{F}$ çelişkisi elde edilirdi. Böylece e_{x^α} , f nin bir bulanık esnek değme noktasıdır.

(iii) (\Rightarrow) Özellik (ii) ve Teorem 5.2.5 den açıktır.

(\Leftarrow) $\bar{f} \sqsubseteq f$ olduğunu göstermek yeterlidir. $e_{x^\alpha} \tilde{\in} \bar{f}$ olsun. Teorem 5.2.5 den her $g \in \mathcal{N}(e_{x^{1-\alpha}})$ için $g \not\subseteq f^c$ bulunur. $\mathcal{F} = \mathcal{N}(e_{x^{1-\alpha}})$ alınsın. O halde $f^c \notin \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F} \rightarrow e_{x^{1-\alpha}}$ sağlanır. Böylece hipotezden $e_{x^\alpha} \tilde{\in} f$ elde edilir.

Teorem 5.2.10. (X, τ_1, E) ve (Y, τ_2, K) herhangi iki bulanık esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : (X, \tau_1, E) \rightarrow (Y, \tau_2, K)$ bir bulanık esnek dönüşüm olsun. φ_ψ bulanık esnek dönüşümünün bir $e_{x^\alpha} \tilde{\in} \tilde{X}$ bulanık esnek noktasında bulanık esnek sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{F} \rightarrow e_{x^\alpha}$ koşulunu sağlayan X üzerindeki her \mathcal{F} bulanık esnek süzgeci için $\varphi_\psi(\mathcal{F}) \rightarrow \varphi_\psi(e_{x^\alpha})$ sağlanmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) φ_ψ bulanık esnek dönüşümü $e_{x^\alpha} \tilde{\in} \tilde{X}$ bulanık esnek noktasında bulanık esnek sürekli olduğundan her $f \in \mathcal{N}(\varphi_\psi(e_{x^\alpha}))$ için $\varphi_\psi(g) \sqsubseteq f$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ vardır. $\mathcal{F} \rightarrow e_{x^\alpha}$ olduğundan $g \in \mathcal{F}$ ve buradan da $f \in \varphi_\psi(\mathcal{F})$ olur. Böylece $\mathcal{N}(\varphi_\psi(e_{x^\alpha})) \subseteq \varphi_\psi(\mathcal{F})$, yani $\varphi_\psi(\mathcal{F}) \rightarrow \varphi_\psi(e_{x^\alpha})$ elde edilir.

(\Leftarrow) $\mathcal{F} = \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ olsun. O halde $\mathcal{F} \rightarrow e_{x^\alpha}$ sağlandığından $\varphi_\psi(\mathcal{F}) \rightarrow \varphi_\psi(e_{x^\alpha})$ olur. Bu ise her $f \in \mathcal{N}(\varphi_\psi(e_{x^\alpha}))$ için $\varphi_\psi(g) \sqsubseteq f$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{N}(e_{x^\alpha})$ nin mevcut olduğunu ifade eder. Buna göre φ_ψ bulanık esnek dönüşümü bu $e_{x^\alpha} \tilde{\in} \tilde{X}$ bulanık esnek noktasında bulanık esnek sürekli dir.

Uyarı 5.2.11. Her $i \in J$ için X_i boştan farklı bir küme, E_i X_i için uygun olan parametrelerin bir kümesi ve $e^i_{x_i, \alpha_i} \in FSP(X_i)$ olsun. Bir $\prod_{i \in J} e^i_{x_i, \alpha_i}$ bulanık esnek çarpımı $\prod_{i \in J} X_i$ de bir bulanık esnek noktadır ve bu durum $\alpha = \inf\{\alpha_i \mid i \in J\}$ olmak üzere $(e^i)_{(x_i)^\alpha}$ notasyonu ile gösterilecektir.

Teorem 5.2.12. $\{(X_i, \tau_i, E_i)\}_{i \in J}$ bulanık esnek topolojik uzayların bir ailesi, $(X = \prod_{i \in J} X_i, \tau, E)$ bir çarpım bulanık esnek topoloji ve \mathcal{F} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\mathcal{F} \rightarrow (e^i)_{(x_i)^\alpha} \in FSP(X)$ olması için gerek ve yeter koşul her $i \in J$ için $(p_{X_i})_{(q_{E_i})}(\mathcal{F}) \rightarrow e^i_{x_i, \alpha_i} \in FSP(X_i)$ olmasıdır.

(ii) $\mathcal{F} \infty (e^i)_{(x_i)^\alpha} \in FSP(X)$ ise her $i \in J$ için $(p_{X_i})_{(q_{E_i})}(\mathcal{F}) \infty e^i_{x_i, \alpha_i} \in FSP(X_i)$ dir.

İspat. (i) (\Rightarrow) $\mathcal{F} \rightarrow (e^i)_{(x_i)^\alpha}$ ve her $i \in J$ için $(p_{X_i})_{(q_{E_i})}$ bulanık esnek sürekli olduğundan Teorem 5.2.10 gereğince $(p_{X_i})_{(q_{E_i})}(\mathcal{F}) \rightarrow (p_{X_i})_{(q_{E_i})}((e^i)_{(x_i)^\alpha}) = e^i_{x_i, \alpha_i}$ elde edilir.

(\Leftarrow) Her $i \in J$ için $(p_{X_i})_{(q_{E_i})}(\mathcal{F}) \rightarrow e^i_{x_i, \alpha_i}$ olsun. Tanım 2.6.12 den

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in \Lambda} (p_{X_i})_{(q_{E_i})}^{-1}(f_i) \mid \forall i \in \Lambda, f_i \in \tau_i \text{ ve } \Lambda \subset J \text{ sonlu} \right\}$$

ailesi τ için bir tabandır. $\mathcal{F} \rightarrow (e^i)_{(x_i)^\alpha}$ olduğunu göstermek için $(e^i)_{(x_i)^\alpha} \tilde{\in} h$ olacak şekilde bir $h = \prod_{j=1}^n (p_{X_{i_j}})_{(q_{E_{i_j}})}^{-1}(f_{i_j}) \in \mathcal{B}$ alınsın. Hipotezden her $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$(p_{X_{i_j}})_{(q_{E_{i_j}})}(\mathcal{F}) \rightarrow e^{i_j}_{x_{i_j}, \alpha_{i_j}}$ ve dolayısıyla $f_{i_j} \in (p_{X_{i_j}})_{(q_{E_{i_j}})}(\mathcal{F})$ elde edilir. Teorem

5.1.10 gereğince bir $g_j \in \mathcal{F}$ için $(p_{X_{i_j}})_{(q_{E_{i_j}})}(g_j) \sqsubseteq f_{i_j}$ sağlanır. Buradan her

$j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $g_j \sqsubseteq (p_{X_{i_j}})_{(q_{E_{i_j}})}^{-1}(f_{i_j})$ olur. Diğer yandan, $\prod_{j=1}^n g_j \in \mathcal{F}$ ve

$\prod_{j=1}^n g_j \sqsubseteq \prod_{j=1}^n (p_{X_{i_j}})_{(q_{E_{i_j}})}^{-1}(f_{i_j}) = h$ olduğundan $h \in \mathcal{F}$ bulunur. Sonuç olarak

$\mathcal{F} \rightarrow (e^i)_{(x_i)^\alpha}$ elde edilir.

(ii) Özellik (i) ve Teorem 5.2.8 den açıktır.

Teorem 5.2.13. Bir (X, τ, E) bulanık esnek topolojik uzayın bir bulanık esnek Hausdorff uzay olması için gerek ve yeter koşul (X, τ, E) deki yakınsak her bulanık esnek süzgecin bir tek bulanık esnek limit noktasına yakınsamasıdır.

İspat. (\Rightarrow) (X, τ, E) bir bulanık esnek Hausdorff uzay ve \mathcal{F} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç olsun. \mathcal{F} bulanık esnek süzgecinin $e_{x_1}^{1, \alpha_1}$ ve $e_{x_2}^{2, \alpha_2}$ gibi iki farklı bulanık esnek noktaya yakınsadığını kabul edelim. Hipotezden $e_{x_1}^{1, \alpha_1} \tilde{\in} f$, $e_{x_2}^{2, \alpha_2} \tilde{\in} g$ ve $f \sqcap g = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde $f, g \in \tau$ vardır. \mathcal{F} bulanık esnek süzgeci $e_{x_1}^{1, \alpha_1}$ ve $e_{x_2}^{2, \alpha_2}$ bulanık esnek noktalarına yakınsadığından $f, g \in \mathcal{F}$ dir. (S2) bulanık esnek süzgeç aksiyomundan $f \sqcap g = \tilde{\emptyset} \in \mathcal{F}$ elde edilir ki bu da (S1) ile çelişir. O halde $e_{x_1}^{1, \alpha_1} = e_{x_2}^{2, \alpha_2}$ sağlanır.

(\Leftarrow) (X, τ, E) nin bir bulanık esnek Hausdorff uzay olmadığını kabul edelim. O halde her $f \in \mathcal{N}(e_{x_1}^{1, \alpha_1})$ ve her $g \in \mathcal{N}(e_{x_2}^{2, \alpha_2})$ için $f \sqcap g \neq \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde $e_{x_1}^{1, \alpha_1} \neq e_{x_2}^{2, \alpha_2}$ koşulunu sağlayan $e_{x_1}^{1, \alpha_1}, e_{x_2}^{2, \alpha_2} \tilde{\in} \tilde{X}$ bulanık esnek noktaları vardır. Bu durumda,

$$\mathcal{F} = \{f \sqcap g \mid f \in \mathcal{N}(e_{x_1}^{1, \alpha_1}), g \in \mathcal{N}(e_{x_2}^{2, \alpha_2})\}$$

ailesi X üzerinde bir bulanık esnek süzgeçtir. Diğer yandan, $\mathcal{N}(e_{x_1}^{1, \alpha_1}) \subset \mathcal{F}$ ve $\mathcal{N}(e_{x_2}^{2, \alpha_2}) \subset \mathcal{F}$ olduğundan $\mathcal{F} \rightarrow e_{x_1}^{1, \alpha_1}$ ve $\mathcal{F} \rightarrow e_{x_2}^{2, \alpha_2}$ çelişmesine varılır. Sonuç olarak (X, τ, E) bir bulanık esnek Hausdorff uzaydır.

Aşağıdaki örnek, bulanık esnek Hausdorff uzay olmayan bir bulanık esnek topolojik uzaydaki bir bulanık esnek süzgecin birden fazla bulanık esnek noktaya yakınsadığını gösterir.

Örnek 5.2.14. Örnek 5.2.4 deki (X, τ, E) bulanık esnek topolojik uzayı alınsın. Buna göre (X, τ, E) bir bulanık esnek Hausdorff uzay değildir. Ayrıca, $\mathcal{N}(e_{x_2}^{1, 0.7}) = \mathcal{N}(e_{x_1}^{2, 0.5})$ olduğu kolayca görülür. Diğer yandan, $\mathcal{F} = \mathcal{N}(e_{x_2}^{1, 0.7}) = \mathcal{N}(e_{x_1}^{2, 0.5})$ olarak alınırsa $\mathcal{F} \rightarrow e_{x_2}^{1, 0.7}$ ve $\mathcal{F} \rightarrow e_{x_1}^{2, 0.5}$ elde edilir.

5.3. ULTRA BULANIK ESNEK SÜZGEÇLER

Bu bölümde bir ultra bulanık esnek süzgeç kavramı tanımlanacak ve önemli sonuçları elde edilecektir. Bunu yanı sıra bir bulanık esnek kümenin dayanağı tanımı verilerek ultra bulanık esnek süzgeçler ile klasik anlamdaki ultra süzgeçler arasındaki ilişki araştırılacaktır.

Tanım 5.3.1. X üzerindeki bir \mathcal{F} bulanık esnek süzgecinden daha ince bir bulanık esnek süzgeç yok ise \mathcal{F} bulanık esnek süzgecine bir ultra bulanık esnek süzgeç denir. Ayrıca, X kümesi üzerindeki $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \Lambda}$ bulanık esnek süzgeçler ailesi daha kaba olma bağıntısına göre kısmi sıralı olduğundan $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \Lambda}$ ailesi içindeki maksimal elemanlar ultra bulanık esnek süzgeçlerdir.

Teorem 5.3.2. Bir X kümesi üzerindeki her \mathcal{F} bulanık esnek süzgecinden daha ince olan bir ultra bulanık esnek süzgeç vardır.

İspat. \mathcal{F} den daha ince olan X üzerindeki tüm bulanık esnek süzgeçlerin kümesi Ω olsun. Bu küme daha kaba olma bağıntısına göre kısmi sıralıdır. Şimdi, bir $\{\mathcal{F}_i \mid i \in \Lambda\} \subseteq \Omega$ zinciri alalım. Bu takdirde $\bigcup_{i \in \Lambda} \mathcal{F}_i$, X üzerinde bir bulanık esnek süzgeçtir ve $\{\mathcal{F}_i \mid i \in \Lambda\}$ alt kümesinin bir üst sınırıdır. Zorn Lemma dan Ω kümesi bir \mathcal{G} maksimal elemana sahiptir. Böylece \mathcal{G} , \mathcal{F} yi içeren bir ultra bulanık esnek süzgeçtir.

Lemma 5.3.3. $\mathcal{A} \subset FS(X, E)$ olsun. \mathcal{A} ailesi sonlu arakesit özelliğine sahip ise X üzerinde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ özelliğine sahip bir \mathcal{F} bulanık esnek süzgeci vardır.

İspat. \mathcal{A} ailesinin tüm sonlu arakesitlerinden oluşan aile $\Delta(\mathcal{A})$ ve $\Delta(\mathcal{A})$ ya ait herhangi bir bulanık esnek kümeyi kapsayan tüm bulanık esnek kümelerin oluşturduğu aile de \mathcal{F} olsun. Buradan \mathcal{F} nin \mathcal{A} yi içeren bir bulanık esnek süzgeç olduğu kolaylıkla gösterilir.

Teorem 5.3.4. \mathcal{F} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) \mathcal{F} nin X üzerinde bir ultra bulanık esnek süzgeç olması için gerek ve yeter koşul her $f \in \mathcal{F}$ için $f \sqcap g = \tilde{\emptyset}$ olacak şekildeki her $g \in FS(X, E)$ bulanık esnek kümesinin \mathcal{F} ye ait olmasıdır.

(ii) \mathcal{F} , X üzerinde bir ultra bulanık esnek süzgeç ve $f_1 \sqcup f_2 \in \mathcal{F}$ ise ya $f_1 \in \mathcal{F}$ ya da $f_2 \in \mathcal{F}$ dir.

(iii) \mathcal{F} , X üzerinde bir ultra bulanık esnek süzgeç ise her $f \in FS(X, E)$ için ya $f \in \mathcal{F}$ ya da $f^c \in \mathcal{F}$ dir.

İspat. (i) \mathcal{F} , X üzerinde bir ultra bulanık esnek süzgeç ve her $f \in \mathcal{F}$ için $f \sqcap g = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde bir $g \in FS(X, E)$ olsun. $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{g\}$ ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip olduğu kolayca görülebilir. Lemma 5.3.3 den $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{H} bulanık esnek süzgeci vardır. \mathcal{F} nin maksimalliğinden $\mathcal{F} = \mathcal{H}$ bulunur. Böylece $g \in \mathcal{F}$ elde edilir.

Tersine, her $f \in \mathcal{F}$ için $f \sqcap g = \tilde{\emptyset}$ olacak şekildeki her g bulanık esnek kümesi \mathcal{F} ye ait olsun. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ olacak şekilde bir \mathcal{G} bulanık esnek süzgeç olduğunu kabul edelim. O halde $h \in \mathcal{G}$ ve $h \notin \mathcal{F}$ olacak şekilde bir $h \in FS(X, E)$ vardır. $f \in \mathcal{F}$ ise bu durumda $f, h \in \mathcal{G}$ ve dolayısıyla $f \sqcap h \neq \tilde{\emptyset}$ sağlanır. Buradan, $h \in \mathcal{F}$ çelişkisi elde edilir.

(ii) $f_1, f_2 \notin \mathcal{F}$ olduğunu kabul edelim ve $f = f_1 \sqcup f_2 \in \mathcal{F}$ olsun. Özellik (i) gereğince $f_1 \sqcap g_1 = f_2 \sqcap g_2 = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde $g_1, g_2 \in \mathcal{F}$ vardır. $g = g_1 \sqcap g_2$ ise bu durumda $g \in \mathcal{F}$ ve $f \sqcap g = \tilde{\emptyset}$ elde edilir. Bu ise $f \notin \mathcal{F}$ çelişkisine neden olur.

(iii) $f \notin \mathcal{F}$ ve $f^c \notin \mathcal{F}$ olduğunu kabul edelim. Özellik (i) den $g \sqcap (f \sqcup f^c) = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{F}$ vardır. $g \neq \tilde{\emptyset}$ olduğundan en az bir $e \in E$ ve $x \in X$ için $g(e)(x) \neq 0$ sağlanır. Diğer yandan, $f(e)(x) \vee f^c(e)(x) \neq 0$ olduğundan

$$g(e)(x) \wedge (f(e)(x) \vee f^c(e)(x)) \neq 0$$

çelişkisi elde edilir.

Tanım 5.3.5. \mathcal{F} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç olsun. $\sqcap\{f \mid f \in \mathcal{F}\} = \tilde{\emptyset}$ ise bu \mathcal{F} bulanık esnek süzgecine bir serbest bulanık esnek süzgeç denir.

Teorem 5.3.6. Her \mathcal{F} ultra bulanık esnek süzgeci bir serbest bulanık esnek süzgeçtir.

İspat. $\sqcap\{f \mid f \in \mathcal{F}\} \neq \tilde{\emptyset}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda bir $e_{x^\alpha} \in \sqcap\{f \mid f \in \mathcal{F}\}$ bulanık esnek noktası vardır. Şimdi, $\lambda < \alpha$ olacak şekilde bir e_{x^λ} bulanık esnek noktası

alınsın. Her $f \in \mathcal{F}$ için $e_{x\lambda} \sqcap f \neq \tilde{\emptyset}$ olduğundan Teorem 5.3.4 (i) gereğince $e_{x\lambda} \in \mathcal{F}$ dir. Böylece $\alpha \leq \lambda$ çelişkisi elde edilir.

Teorem 5.3.7. $\varphi_\psi : FS(X, E) \rightarrow FS(Y, K)$ bir bulanık esnek dönüşüm ve \mathcal{B} , X üzerinde bir ultra bulanık esnek süzgeç tabanı olsun. Bu takdirde,

$$\mathcal{B}^* = \{\varphi_\psi(f) \mid f \in \mathcal{B}\}$$

Y üzerinde bir ultra bulanık esnek süzgeç tabanıdır.

İspat. Öncelikle, \mathcal{B}^* ın Y üzerinde bir bulanık esnek süzgeç tabanı olduğunu gösterelim.

(B1) $\mathcal{B}^* \neq \emptyset$ ve $\tilde{\emptyset} \notin \mathcal{B}^*$ olduğu açıktır.

(B2) $\varphi_\psi(f_1), \varphi_\psi(f_2) \in \mathcal{B}^*$ olsun. Bu durumda $f_3 \sqsubseteq f_1 \sqcap f_2$ olacak şekilde bir $f_3 \in \mathcal{B}$ vardır. Buradan $\varphi_\psi(f_3) \sqsubseteq \varphi_\psi(f_1) \sqcap \varphi_\psi(f_2)$ elde edilir. Böylece \mathcal{B}^* , Y üzerinde bir bulanık esnek süzgeç tabanıdır.

\mathcal{B}^* ile üretilen Y üzerindeki bulanık esnek süzgeç \mathcal{F}^* olsun. Şimdi \mathcal{F}^* ın bir ultra bulanık esnek süzgeç olduğunu gösterelim. $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{G}$ olacak şekilde Y üzerinde başka bir bulanık esnek süzgeç olduğunu varsayalım. Bu durumda, $g \in \mathcal{G}$ ve $g \notin \mathcal{F}^*$ olacak şekilde bir $g \in FS(X, E)$ vardır. \mathcal{B} ile üretilen X üzerindeki ultra bulanık esnek süzgeç \mathcal{F} olsun. $f \in \mathcal{F}$ ise bir $h \in \mathcal{B}$ için $h \sqsubseteq f$ dir. Buna göre, $\varphi_\psi(h) \sqcap g \neq \tilde{\emptyset}$ olduğundan $\varphi_\psi(h)(k)(y) > \alpha$ ve $g(k)(y) > \alpha$ olacak şekilde en az bir $k \in K$, $y \in Y$ ve $\alpha > 0$ vardır. $\varphi_\psi(h)$ ın tanımından $\psi(e) = k$, $\varphi(x) = y$ ve $h(e)(x) > \alpha$ olacak şekilde en az bir $e \in E$ ve $x \in X$ vardır. Buradan, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \alpha < \min\{h(e)(x), g(\psi(e))(\varphi(x))\} &= \min\{h(e)(x), \varphi_\psi^{-1}(g)(e)(x)\} \\ &= (h \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g))(e)(x) \\ &\leq (f \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g))(e)(x). \end{aligned}$$

Böylece, her $f \in \mathcal{F}$ için $f \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g) \neq \tilde{\emptyset}$ sağlanır. Teorem 5.3.4 (i) den $\varphi_\psi^{-1}(g) \in \mathcal{F}$ ve buradan da bir $g_1 \in \mathcal{B}$ için $g_1 \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g)$ bulunur. O halde, $\varphi_\psi(g_1) \sqsubseteq g$ ve $\varphi_\psi(g_1) \in \mathcal{B}^*$ olduğundan $g \in \mathcal{F}^*$ çelişkisi elde edilir.

Uyarı 5.3.8. X boştan farklı bir küme, E parametrelerin bir kümesi ve $A \subseteq X$ olsun. A üzerindeki bulanık esnek kümelerin ailesi,

$$FS(A, E) = \{f \in FS(X, E) \mid \text{her } e \in E \text{ ve her } x \in X - A \text{ için } f(e)(x) = 0\}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Tanım 5.3.9. X boştan farklı bir küme, E parametrelerin bir kümesi ve $A \subseteq X$ olsun. χ_A , A nın bir karakteristik fonksiyonu olmak üzere, her $e \in E$ için

$$\widetilde{\chi}_A(e) = \chi_A$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\chi}_A : E \rightarrow I^X$ dönüşümü A üzerinde bir bulanık esnek kümedir (Neog ve diğ. 2012).

Lemma 5.3.10. Boştan farklı bir X kümesinin A ve B alt kümeleri olsun. Bu durumda,

(i) $\widetilde{\chi}_A \sqcap \widetilde{\chi}_B = \widetilde{\chi}_{A \cap B}$.

(ii) $\widetilde{\chi}_A \sqcup \widetilde{\chi}_B = \widetilde{\chi}_{A \cup B}$.

(iii) $(\widetilde{\chi}_A)^c = \widetilde{\chi}_{A^c}$.

İspat. Tanım 5.3.9 dan açıktır.

Teorem 5.3.11. \mathcal{F} , X üzerinde bir ultra bulanık esnek süzgeç, $A \subseteq X$ ve her $e \in E$, $x \in X - A$ için $f^*(e)(x) = 0$ olacak şekilde bir $f^* \in \mathcal{F}$ olsun. Her $f \in \mathcal{F}$ için $f_A = f \sqcap \widetilde{\chi}_A$ olmak üzere,

$$\mathcal{F}_A = \{f_A \mid f \in \mathcal{F}\}$$

ailesi A üzerinde bir ultra bulanık esnek süzgeçtir.

İspat. Öncelikle \mathcal{F}_A nın A üzerinde bir bulanık esnek süzgeç olduğunu gösterelim.

(S1) $\widetilde{\emptyset} \in \mathcal{F}_A$ olduğunu kabul edelim. O halde bir $f \in \mathcal{F}$ için $f \sqcap \widetilde{\chi}_A = \widetilde{\emptyset}$ olur. Buradan $f \sqcap f^* = \widetilde{\emptyset} \in \mathcal{F}$ çelişkisine ulaşılır.

(S2) $f_A, g_A \in \mathcal{F}_A$ olsun. Bu takdirde, $f, g \in \mathcal{F}$ ve buradan da $f \sqcap g \in \mathcal{F}$ bulunur. Buna göre, $(f \sqcap g)_A = f_A \sqcap g_A$ olduğundan $f_A \sqcap g_A \in \mathcal{F}_A$ sağlanır.

(S3) $f_A \in \mathcal{F}_A$ olsun. $f_A \sqsubseteq g$ koşulunu sağlayan bir $g \in FS(A, E)$ alınsın. f yi içeren bir $h \in FS(X, E)$ bulanık esnek kümesi, her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$h(e)(x) = \begin{cases} g(e)(x), & x \in A \\ 1, & x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $h \in \mathcal{F}$ ve $g = h_A \in \mathcal{F}_A$ elde edilir.

Şimdi ise \mathcal{F}_A nın A üzerinde bir ultra bulanık esnek süzgeç olduğunu gösterelim. Her $f_A \in \mathcal{F}_A$ için $f_A \sqcap g \neq \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde bir $g \in FS(A, E)$ olsun. Bir $h \in FS(X, E)$ bulanık esnek kümesi, her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$h(e)(x) = \begin{cases} g(e)(x), & x \in A \\ 1, & x \notin A \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Her $f \in \mathcal{F}$ için $f \sqcap h \neq \tilde{\emptyset}$ olduğundan Teorem 5.3.4 (i) gereğince $h \in \mathcal{F}$ ve buradan da $g = h_A \in \mathcal{F}_A$ sağlanır. Böylece Teorem 5.3.4 (i) den istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 5.3.12. $f \in FS(X, E)$ olsun. Bu takdirde,

$$\text{supp}(f) = \{x \in X \mid f(e)(x) > 0, \forall e \in E\}$$

ailesine f bulanık esnek kümesinin dayanağı denir.

Örnek 5.3.13. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. O halde,

$$f = \{(e_1, \{x_1/0, x_2/0,3, x_3/0,2\}), (e_2, \{x_1/0,1, x_2/0,4, x_3/0\})\}$$

bulanık esnek kümesi için $\text{supp}(f) = \{x_2\}$ dir.

Tanım 5.3.14. \mathcal{F} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç ve $A \subseteq X$ olsun. $A = \text{supp}(f)$ olacak şekilde her $f \in FS(X, E)$ için $f \in \mathcal{F}$ oluyorsa A alt kümesine \mathcal{F} tarafından içerilir denir ve bu durum $A \vdash \mathcal{F}$ ile gösterilir.

Teorem 5.3.15. \mathcal{F} , X üzerinde bir ultra bulanık esnek süzgeç ise her $A \subseteq X$ için ya $A \vdash \mathcal{F}$ ya da $A^c \vdash \mathcal{F}$ dir.

İspat. Her $A \subseteq X$ için $A \not\vdash \mathcal{F}$ ve $A^c \not\vdash \mathcal{F}$ olduğunu kabul edelim. $A \not\vdash \mathcal{F}$ ise $A = \text{supp}(f)$ olacak şekilde bir $f \in FS(X, E)$ için $f \notin \mathcal{F}$ olur. Benzer şekilde $A^c \not\vdash \mathcal{F}$ ise

$A^c = \text{supp}(g)$ olacak şekilde bir $g \in FS(X, E)$ için $g \notin \mathcal{F}$ bulunur. Teorem 5.3.4 (i) den $f, g \notin \mathcal{F}$ ise $f \sqcap h_1 = \tilde{\emptyset}$ ve $g \sqcap h_2 = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde $h_1, h_2 \in \mathcal{F}$ vardır. Buna göre $A = \text{supp}(f)$ olduğundan her $x \in A$ ve $e \in E$ için $h_1(e)(x) = 0$ olur. Ayrıca $A^c = \text{supp}(g)$ olduğundan her $x \in A^c$ ve $e \in E$ için $h_2(e)(x) = 0$ dır. Bu ise $h_1 \sqcap h_2 = \tilde{\emptyset} \in \mathcal{F}$ çelişmesine neden olur.

Teorem 5.3.16. \mathcal{F} , X üzerinde bir ultra bulanık esnek süzgeç olsun. Bu durumda $\mathcal{F}^i = \{\text{supp}(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$ ailesi X üzerinde bir ultra süzgeçtir.

İspat. $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda ya $A \in \mathcal{F}^i$ ya da $A^c \in \mathcal{F}^i$ olduğunu gösterelim. \mathcal{F} , X üzerinde bir ultra bulanık esnek süzgeç olduğundan Teorem 5.3.15 gereğince ya $A \vdash \mathcal{F}$ ya da $A^c \vdash \mathcal{F}$ dir. $A \vdash \mathcal{F}$ ise $A = \text{supp}(f)$ olacak şekilde her $f \in FS(X, E)$ için $f \in \mathcal{F}$ olur. O halde \mathcal{F}^i nin tanımından $A \in \mathcal{F}^i$ elde edilir. Benzer şekilde $A^c \in \mathcal{F}^i$ bulunur. Böylece \mathcal{F}^i , X üzerinde bir ultra süzgeçtir.

5.4. DOYGUN BULANIK ESNEK SÜZGEÇLER

Bu bölümün amacı bir doygun bulanık esnek süzgeç kavramı tanımlayarak ilgili özelliklerini araştırmaktır.

Tanım 5.4.1. $f \in FS(X, E)$ ve $\epsilon \in I = [0, 1]$ olsun. Bu durumda her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$(f + \epsilon)(e)(x) = (f(e)(x) + \epsilon) \wedge 1 \quad \text{ve} \quad (f - \epsilon)(e)(x) = (f(e)(x) - \epsilon) \vee 0$$

olarak tanımlanan $(f + \epsilon) : E \rightarrow I^X$ ve $(f - \epsilon) : E \rightarrow I^X$ dönüşümleri X üzerinde bulanık esnek kümelerdir.

\mathcal{F} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç tabanı olsun. $I_0 = (0, 1]$ olmak üzere

$$\hat{\mathcal{F}} = \{\sqcup_{\epsilon \in I_0} (f_\epsilon - \epsilon) \mid \text{her } \epsilon \in I_0 \text{ için } f_\epsilon \in \mathcal{F}\}$$

şeklinde bir eşitlik tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki özellikler elde edilir.

Teorem 5.4.2. \mathcal{F} ve \mathcal{G} X üzerinde iki bulanık esnek süzgeç tabanı olsun. Bu takdirde,

(i) $\mathcal{F} \subseteq \hat{\mathcal{F}}$.

(ii) Her $\epsilon \in I_0$ için $(f + \epsilon) \in \mathcal{F}$ ise $f \in \hat{\mathcal{F}}$ dır.

(iii) $\hat{\mathcal{F}}$, X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç tabanıdır.

(iv) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ise $\hat{\mathcal{F}} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$ dir.

(v) $\tilde{\mathcal{F}} = \langle \hat{\mathcal{F}} \rangle$ olmak üzere $\tilde{\mathcal{F}} = \langle \hat{\mathcal{F}} \rangle$ olur.

(vi) $\hat{\hat{\mathcal{F}}} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$.

(vii) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ise $\tilde{\mathcal{F}} \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$ dir.

(viii) \mathcal{F} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç ise $\tilde{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}}$ olur.

İspat. (i) $f \in \mathcal{F}$ olsun. Her $\epsilon \in I_0$ için $f_\epsilon = f$ alınsın. Buradan,

$$\sqcup_{\epsilon \in I_0} (f_\epsilon - \epsilon) = \sqcup_{\epsilon \in I_0} (f - \epsilon) = f \in \hat{\mathcal{F}}$$

elde edilir.

(ii) Her $\epsilon \in I_0$ için $(f + \epsilon) \in \mathcal{F}$ olsun. Bu takdirde,

$$\sqcup_{\epsilon \in I_0} ((f + \epsilon) - \epsilon) = f \in \hat{\mathcal{F}}$$

sağlanır.

(iii) (B1) $\hat{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ ve $\tilde{\emptyset} \notin \hat{\mathcal{F}}$ olduğu açıktır.

(B2) $f, g \in \hat{\mathcal{F}}$ olsun. Bu durumda $f = \sqcup_{\epsilon \in I_0} (f_\epsilon - \epsilon)$ ve $g = \sqcup_{\epsilon \in I_0} (g_\epsilon - \epsilon)$ olacak şekilde her $\epsilon \in I_0$ için $f_\epsilon, g_\epsilon \in \mathcal{F}$ olur. Bu durumda her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\begin{aligned} (f \sqcap g)(e)(x) &= (\vee_{\epsilon \in I_0} (f_\epsilon - \epsilon)(e)(x)) \wedge (\vee_{\epsilon \in I_0} (g_\epsilon - \epsilon)(e)(x)) \\ &= \vee_{\epsilon \in I_0} ((f_\epsilon - \epsilon)(e)(x) \wedge (g_\epsilon - \epsilon)(e)(x)) \\ &\geq \vee_{\epsilon \in I_0} ((f_\epsilon \sqcap g_\epsilon) - \epsilon)(e)(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan her $\epsilon \in I_0$ için $f_\epsilon, g_\epsilon \in \mathcal{F}$ olduğundan $h_\epsilon \sqsubseteq f_\epsilon \sqcap g_\epsilon$ olacak şekilde bir $h_\epsilon \in \mathcal{F}$ vardır. Böylece, $\sqcup_{\epsilon \in I_0} (h_\epsilon - \epsilon) \in \hat{\mathcal{F}}$ ve

$$f \sqcap g \sqsupseteq \sqcup_{\epsilon \in I_0} ((f_\epsilon \sqcap g_\epsilon) - \epsilon) \sqsupseteq \sqcup_{\epsilon \in I_0} (h_\epsilon - \epsilon)$$

sağlanır.

(iv) $f \in \widehat{\mathcal{F}}$ olsun. Bu durumda $f = \sqcup_{\epsilon \in I_0} (f_\epsilon - \epsilon)$ olacak şekilde her $\epsilon \in I_0$ için bir $f_\epsilon \in \mathcal{F}$ olur. Hipotez gereğince her $\epsilon \in I_0$ için $f_\epsilon \in \mathcal{G}$ olduğundan $f \in \widehat{\mathcal{G}}$ sağlanır.

(v) $f \in \widetilde{\mathcal{F}} = \langle \widehat{\mathcal{F}} \rangle$ olsun. Bu durumda bir $g \in \widehat{\mathcal{F}}$ için $g \sqsubseteq f$ olur. Buradan $g = \sqcup_{\epsilon \in I_0} (g_\epsilon - \epsilon) \sqsubseteq f$ olacak şekilde her $\epsilon \in I_0$ için bir $g_\epsilon \in \mathcal{F}$ vardır. Dolayısıyla her $\epsilon \in I_0$ için $g_\epsilon \sqsubseteq (f + \epsilon)$ sağlanır. O halde her $\epsilon \in I_0$ için $(f + \epsilon) \in \langle \mathcal{F} \rangle$ bulunur. Böylece

$$\sqcup_{\epsilon \in I_0} ((f + \epsilon) - \epsilon) = f \in \langle \widehat{\mathcal{F}} \rangle$$

elde edilir.

Tersine, $f \in \langle \widehat{\mathcal{F}} \rangle$ olsun. Bu durumda $f = \sqcup_{\epsilon \in I_0} (f_\epsilon - \epsilon)$ olacak şekilde her $\epsilon \in I_0$ için $f_\epsilon \in \langle \mathcal{F} \rangle$ bulunur. Buradan her $\epsilon \in I_0$ için $g_\epsilon \sqsubseteq f_\epsilon$ olacak şekilde bir $g_\epsilon \in \mathcal{F}$ vardır. Böylece $\sqcup_{\epsilon \in I_0} (g_\epsilon - \epsilon) \sqsubseteq f$ olduğundan $f \in \langle \widehat{\mathcal{F}} \rangle$ elde edilir.

(vi) $f \in \widehat{\widehat{\mathcal{F}}}$ olsun. Bu durumda $f = \sqcup_{\epsilon \in I_0} (f_\epsilon - \epsilon)$ olacak şekilde her $\epsilon \in I_0$ için bir $f_\epsilon \in \widehat{\mathcal{F}}$ vardır. Benzer şekilde $f_\epsilon = \sqcup_{\delta \in I_0} (f_\epsilon^\delta - \delta)$ olacak şekilde her $\delta \in I_0$ için bir $f_\epsilon^\delta \in \mathcal{F}$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} f &= \sqcup_{\epsilon \in I_0} (\sqcup_{\delta \in I_0} (f_\epsilon^\delta - \delta) - \epsilon) \\ &= \sqcup_{\epsilon \in I_0} \sqcup_{\delta \in I_0} ((f_\epsilon^\delta - \delta) - \epsilon) \\ &= \sqcup_{\epsilon \in I_0} \sqcup_{\delta \in I_0} (f_\epsilon^\delta - (\delta + \epsilon)) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, $\alpha = \epsilon + \delta$ olmak üzere $g_\alpha = \sqcup_{\epsilon, \delta \in I_0} f_\epsilon^\delta \in \langle \mathcal{F} \rangle$ alınsın. O halde,

$$f = \sqcup_{\alpha \in I_0} (g_\alpha - \alpha)$$

bulunur. Böylece $f \in \langle \widehat{\mathcal{F}} \rangle = \widetilde{\mathcal{F}}$ sağlanır.

(vii) $\mathcal{F} \sqsubseteq \mathcal{G}$ olsun. (iv) den $\widehat{\mathcal{F}} \sqsubseteq \widehat{\mathcal{G}}$ ve buradan da $\langle \widehat{\mathcal{F}} \rangle \sqsubseteq \langle \widehat{\mathcal{G}} \rangle$ elde edilir.

(viii) \mathcal{F} bir bulanık esnek süzgeç olsun. Bu durumda $\mathcal{F} = \langle \mathcal{F} \rangle$ olur. O halde (v) gereğince $\widehat{\mathcal{F}} = \langle \widehat{\mathcal{F}} \rangle = \widetilde{\mathcal{F}}$ elde edilir.

Tanım 5.4.3. \mathcal{F} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç olsun. $\mathcal{F} = \widehat{\mathcal{F}}$ ise \mathcal{F} ye bir doygun bulanık esnek süzgeç denir.

Teorem 5.4.4. \mathcal{F} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler denktir.

(i) \mathcal{F} bir doygun bulanık esnek süzgeçtir.

(ii) Her $\epsilon \in I_0$ için $(f + \epsilon) \in \mathcal{F}$ ise $f \in \mathcal{F}$ dir.

İspat. (i) \Rightarrow (ii) Her $\epsilon \in I_0$ için $(f + \epsilon) \in \mathcal{F}$ olsun. Teorem 5.4.2 (ii) gereğince $f \in \widehat{\mathcal{F}}$ dir. Böylece hipotezden $f \in \mathcal{F}$ elde edilir.

(ii) \Rightarrow (i) Teorem 5.4.2 (i) den $\mathcal{F} \subseteq \widehat{\mathcal{F}}$ sağlanır. Tersine, $f \in \widehat{\mathcal{F}}$ olsun. Bu durumda $f = \sqcup_{\epsilon \in I_0} (f_\epsilon - \epsilon)$ olacak şekilde her $\epsilon \in I_0$ için bir $f_\epsilon \in \mathcal{F}$ vardır. Buradan her $\epsilon \in I_0$ için $f_\epsilon \sqsubseteq (f + \epsilon)$ elde edilir. \mathcal{F} bir bulanık esnek süzgeç olduğundan her $\epsilon \in I_0$ için $(f + \epsilon) \in \mathcal{F}$ dir. Böylece (ii) gereğince $f \in \mathcal{F}$ sağlanır.

Örnek 5.4.5. \mathcal{F} , X üzerinde klasik anlamda bir süzgeç olsun. Bu takdirde,

$$f^\beta = \{x \in X \mid \text{her } e \in E \text{ için } f(e)(x) \geq \beta\}$$

olmak üzere herhangi bir $\alpha \in I_0$ için

$$\mathcal{F}^\alpha = \{f \in FS(X, E) \mid \text{her } \beta < \alpha \text{ için } f^\beta \in \mathcal{F}\}$$

X üzerinde bir doygun bulanık esnek süzgeçtir.

Öncelikle \mathcal{F}^α nın X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç olduğunu gösterelim.

(S1) $\mathcal{F}^\alpha \neq \emptyset$ ve $\tilde{\emptyset} \notin \mathcal{F}^\alpha$ olduğu açıktır.

(S2) $f, g \in \mathcal{F}^\alpha$ olsun. Buradan her $\beta < \alpha$ için $f^\beta, g^\beta \in \mathcal{F}$ olur. \mathcal{F} klasik anlamda bir süzgeç olduğundan her $\beta < \alpha$ için $f^\beta \cap g^\beta = (f \cap g)^\beta \in \mathcal{F}$ elde edilir. Böylece $f \cap g \in \mathcal{F}^\alpha$ sağlanır.

(S3) $f \in \mathcal{F}^\alpha$ ve $f \sqsubseteq g$ olsun. Bu durumda her $\beta < \alpha$ için $f^\beta \in \mathcal{F}$ ve $f^\beta \sqsubseteq g^\beta$ elde edilir. \mathcal{F} klasik anlamda bir süzgeç olduğundan her $\beta < \alpha$ için $g^\beta \in \mathcal{F}$ olur. O halde $g \in \mathcal{F}^\alpha$ dir.

Şimdi ise \mathcal{F}^α nın X üzerinde bir doygun bulanık esnek süzgeç olduğunu gösterelim. Her $\epsilon \in I_0$ için $(f + \epsilon) \in \mathcal{F}^\alpha$ olsun. Bu takdirde her $\beta < \alpha$ için

$$(f + \epsilon)^\beta = \{x \in X \mid \text{her } e \in E \text{ için } f(e)(x) + \epsilon \geq \beta\} \in \mathcal{F}$$

bulunur. Bu ifade her $\epsilon \in I_0$ için doğru olduğundan, $\beta < \alpha$ için

$$f^\beta = \{x \in X \mid \text{her } e \in E \text{ için } f(e)(x) \geq \beta\} \in \mathcal{F}$$

elde edilir. Böylece $f \in \mathcal{F}^\alpha$ sağlanır. O halde Teorem 5.4.4 gereğince \mathcal{F}^α X üzerinde bir doygun bulanık esnek süzgeçtir.

Teorem 5.4.6. \mathcal{F} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\hat{\mathcal{F}} = \{f \in FS(X, E) \mid \text{her } \epsilon \in I_0 \text{ için } (f + \epsilon) \in \mathcal{F}\}$.

(ii) $\hat{\mathcal{F}}$, X üzerinde bir doygun bulanık esnek süzgeçtir.

İspat. (i) $f \in \hat{\mathcal{F}}$ olsun. Bu durumda $f = \sqcup_{\epsilon \in I_0} (f_\epsilon - \epsilon)$ olacak şekilde her $\epsilon \in I_0$ için bir $f_\epsilon \in \mathcal{F}$ vardır. Buradan her $\epsilon \in I_0$ için $(f_\epsilon - \epsilon) \sqsubseteq f$ ve dolayısıyla $f_\epsilon \sqsubseteq (f + \epsilon)$ elde edilir. Böylece \mathcal{F} bir bulanık esnek süzgeç olduğundan her $\epsilon \in I_0$ için $(f + \epsilon) \in \mathcal{F}$ bulunur.

Tersine, her $\epsilon \in I_0$ için $(f + \epsilon) \in \mathcal{F}$ olsun. Teorem 5.4.2 (ii) gereğince $f \in \hat{\mathcal{F}}$ sağlanır.

(ii) \mathcal{F} bir bulanık esnek süzgeç olduğundan Teorem 5.4.2 (v) ve (viii) den $\hat{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}} = \langle \hat{\mathcal{F}} \rangle = \widehat{\langle \mathcal{F} \rangle}$ elde edilir. Buradan $\hat{\mathcal{F}}$, X üzerinde bir bulanık esnek süzgeçtir.

Şimdi, $\hat{\mathcal{F}} = \hat{\hat{\mathcal{F}}}$ olduğunu gösterelim. Teorem 5.4.2 (i) den $\hat{\mathcal{F}} \subseteq \hat{\hat{\mathcal{F}}}$ dır. Tersine, $f \in \hat{\hat{\mathcal{F}}}$ olsun. (i) gereğince her $\epsilon \in I_0$ için $(f + \epsilon) \in \hat{\mathcal{F}}$ olur. Dolayısıyla her $\epsilon \in I_0$ ve her $\delta \in I_0$ için $(f + \epsilon) + \delta = f + (\epsilon + \delta) \in \mathcal{F}$ elde edilir. Buradan $\alpha = \epsilon + \delta$ olmak üzere her $\alpha \in I_0$ için $(f + \alpha) \in \mathcal{F}$ sağlanır. O halde $f \in \hat{\mathcal{F}}$ dır. Böylece $\hat{\mathcal{F}}$, X üzerinde bir doygun bulanık esnek süzgeçtir.

Teorem 5.4.7. \mathcal{F} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç tabanı ise $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}$ dir.

İspat. \mathcal{F} bir bulanık esnek süzgeç tabanı ise $\langle \mathcal{F} \rangle$, X üzerinde bir bulanık esnek süzgeçtir. Teorem 5.4.6 (ii) gereğince $\langle \widehat{\mathcal{F}} \rangle$, X üzerinde bir doymun bulanık esnek süzgeçtir. Teorem 5.4.2 (v) den $\langle \widehat{\mathcal{F}} \rangle = \langle \widehat{\mathcal{F}} \rangle = \tilde{\mathcal{F}}$ elde edilir. Buradan $\tilde{\mathcal{F}}$, X üzerinde bir doymun bulanık esnek süzgeçtir. O halde Teorem 5.4.2 (viii) gereğince $\tilde{\mathcal{F}} = \widehat{\tilde{\mathcal{F}}} = \tilde{\mathcal{F}}$ sağlanır.

5.5. BULANIK ESNEK KOMŞULUK SİSTEMİ

Bu bölümde bir bulanık esnek komşuluk sistemi tanımlanacak ve bir bulanık esnek topoloji ile arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 5.5.1. Her $x \in X$ için $\mathcal{N}_x \subseteq FS(X, E)$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{\mathcal{N}_x\}_{x \in X}$ ailesine bir bulanık esnek komşuluk sistemi denir.

- (i) Her $x \in X$ için \mathcal{N}_x bir doymun bulanık esnek süzgeçtir.
- (ii) Her $x \in X$ ve $f \in \mathcal{N}_x$ olmak üzere her $e \in E$ için $f(e)(x) = 1$ dir.
- (iii) Her $x \in X$, $f \in \mathcal{N}_x$ ve her $\epsilon \in I_0$ için her $z \in X$ için $g_z \in \mathcal{N}_z$ ve her $e \in E$, $y \in X$ için

$$\bigvee_{z \in X} (g_x(e)(z) \wedge g_z(e)(y)) \leq f(e)(y) + \epsilon$$

olacak şekilde bir $\{g_z \mid z \in X\}$ ailesi vardır.

\mathcal{N}_x ailesine x noktasının bir bulanık esnek komşuluk süzgeci denir. \mathcal{N}_x in elemanlarına da x in bulanık esnek komşulukları denir.

Tanım 5.5.2. Her $x \in X$ için $\mathcal{B}_x \subseteq FS(X, E)$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ ailesine bir bulanık esnek komşuluk tabanı denir.

- (i) Her $x \in X$ için \mathcal{B}_x bir bulanık esnek süzgeç tabanıdır.
- (ii) Her $x \in X$ ve $f \in \mathcal{B}_x$ olmak üzere her $e \in E$ için $f(e)(x) = 1$ dir.
- (iii) Her $x \in X$, $f \in \mathcal{B}_x$ ve her $\epsilon \in I_0$ için her $z \in X$ için $g_z \in \mathcal{B}_z$ ve her $e \in E$, $y \in X$ için

$$\bigvee_{z \in X} (g_x(e)(z) \wedge g_z(e)(y)) \leq f(e)(y) + \epsilon$$

olacak şekilde bir $\{g_z \mid z \in X\}$ ailesi vardır.

\mathcal{B}_x ailesine x noktasının bir bulanık esnek komşuluk tabanı denir. \mathcal{B}_x in elemanlarına da x in temel bulanık esnek komşulukları denir.

Tanım 5.5.3. $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_x\}_{x \in X}$ bir bulanık esnek komşuluk sistemi ve $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ olsun. Her $x \in X$ için \mathcal{B}_x bir bulanık esnek süzgeç tabanı ve $\widetilde{\mathcal{B}}_x = \mathcal{N}_x$ ise bu durumda \mathcal{B} ailesine \mathcal{N} için bir tabandır denir.

Önerme 5.5.4. $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ bir bulanık esnek komşuluk tabanı ise $\{\widetilde{\mathcal{B}}_x\}_{x \in X}$ bir bulanık esnek komşuluk sistemidir ve bir tabanı $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ ailesidir.

İspat. $\{\widetilde{\mathcal{B}}_x\}_{x \in X}$ ailesinin bir bulanık esnek komşuluk sistemi olduğunu göstermek için Tanım 5.5.1 deki koşulların sağlandığını göstermek gerekir.

(i) ve (ii) koşullarını görmek kolaydır.

(iii) $x \in X$, $f \in \widetilde{\mathcal{B}}_x$ ve $\epsilon \in I_0$ olsun. Bu durumda $\sqcup_{\epsilon \in I_0} (g_\epsilon - \epsilon) \sqsubseteq f$ olacak şekilde her $\epsilon \in I_0$ için bir $g_\epsilon \in \mathcal{B}_x$ vardır. Buradan $(g_{\epsilon/2} - \frac{\epsilon}{2}) \sqsubseteq f$ elde edilir. O halde hipotez gereğince her $z \in X$ için $h_z \in \widetilde{\mathcal{B}}_z$ ve her $e \in E$, $y \in X$ için

$$\bigvee_{z \in X} (h_x(e)(z) \wedge h_z(e)(y)) \leq g_{\epsilon/2}(e)(y) + \frac{\epsilon}{2} \leq f(e)(y) + \epsilon$$

olacak şekilde bir $\{h_z \mid z \in X\}$ ailesi vardır.

Böylece $\{\widetilde{\mathcal{B}}_x\}_{x \in X}$ bir bulanık esnek komşuluk sistemidir. Ayrıca $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ ailesinin bu bulanık esnek komşuluk sistemi için bir taban olduğu kolaylıkla görülür.

Önerme 5.5.5. $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ ailesi bir $\{\mathcal{N}_x\}_{x \in X}$ bulanık esnek komşuluk sistemi için bir taban ise bu durumda $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ ailesi bir bulanık esnek komşuluk tabanıdır.

İspat. Tanım 5.5.2 deki (i) ve (ii) koşulları açıktır.

(iii) $x \in X$, $f \in \mathcal{B}_x$ ve $\epsilon \in I_0$ olsun. $\mathcal{B}_x \subseteq \widetilde{\mathcal{B}}_x = \mathcal{N}_x$ olduğundan her $z \in X$ için $g_z \in \mathcal{N}_z$ ve her $e \in E$, $y \in X$ için

$$\bigvee_{z \in X} (g_x(e)(z) \wedge g_z(e)(y)) \leq f(e)(y) + \frac{\epsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $\{g_z \mid z \in X\}$ ailesi vardır. Buradan her $z \in X$ için $(k_z - \frac{\epsilon}{2}) \sqsubseteq g_z$ olacak şekilde bir $k_z \in \mathcal{B}_z$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\bigvee_{z \in X} (k_x(e)(z) \wedge k_z(e)(y)) \leq \bigvee_{z \in X} (g_x(e)(z) \wedge g_z(e)(y)) + \frac{\epsilon}{2} \leq f(e)(y) + \epsilon$$

sağlanır. Böylece her $z \in X$ için $k_z \in \mathcal{B}_z$ ve her $e \in E, y \in X$ için

$$\bigvee_{z \in X} (k_x(e)(z) \wedge k_z(e)(y)) \leq f(e)(y) + \epsilon$$

olacak şekilde bir $\{k_z \mid z \in X\}$ ailesi vardır. O halde $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ bir bulanık esnek komşuluk tabanıdır.

$\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_x\}_{x \in X}$ bir bulanık esnek komşuluk sistemi ve $f \in FS(X, E)$ olsun. Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\bar{f}(e)(x) = \bigwedge_{g \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge g(e)(y))$$

şeklinde bir eşitlik tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.5.6. $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_x\}_{x \in X}$ bir bulanık esnek komşuluk sistemi olsun. Bu takdirde $f \rightarrow \bar{f}$ dönüşümü (BEO1)-(BEO4) koşullarını sağlar. Buradan

$$\tau_{\mathcal{N}} = \{f \in FS(X, E) \mid \bar{f}^c = f^c\}$$

ailesi X üzerinde bir bulanık esnek topolojidir.

İspat. $f \rightarrow \bar{f}$ dönüşümünün (BEO1)-(BEO4) koşullarını sağladığını gösterelim.

(BEO1) $f \in FS(X, E)$ olsun. Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\bar{f}(e)(x) = \bigwedge_{g \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge g(e)(y))$$

dir. O halde her $g \in \mathcal{N}_x$ için $g(e)(x) = 1$ olduğundan $f(e)(x) \leq \bar{f}(e)(x)$ elde edilir. Böylece istenilen $f \sqsubseteq \bar{f}$ ifadesi sağlanır.

(BEO2) $f \in FS(X, E)$ olsun. Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\begin{aligned}\bar{f}(e)(x) &= \bigwedge_{g \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in X} \bar{f}(e)(y) \wedge g(e)(y) \\ &= \bigwedge_{g \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in X} \left(\bigwedge_{g' \in \mathcal{N}_y} \bigvee_{z \in X} (f(e)(z) \wedge g'(e)(z)) \right) \wedge g(e)(y) \\ &= \bigwedge_{g \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in X} \bigwedge_{g' \in \mathcal{N}_y} \bigvee_{z \in X} (f(e)(z) \wedge g'(e)(z) \wedge g(e)(y))\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan her $g \in \mathcal{N}_x$ ve her $\epsilon \in I_0$ için her $z \in X$ için $h_z \in \mathcal{N}_z$ ve her $e \in E, y \in X$ için

$$\bigvee_{y \in X} (h_x(e)(y) \wedge h_y(e)(z)) \leq g(e)(z) + \epsilon$$

olacak şekilde bir $\{h_z \mid z \in X\}$ ailesi vardır. Buradan

$$\begin{aligned}\bigvee_{y, z \in X} f(e)(z) \wedge h_x(e)(y) \wedge h_y(e)(z) &\leq \bigvee_{z \in X} f(e)(z) \wedge \left(\bigvee_{y \in X} h_x(e)(y) \wedge h_y(e)(z) \right) \\ &\leq \bigvee_{z \in X} (f(e)(z) \wedge (g(e)(z) + \epsilon)) \\ &\leq \bigvee_{z \in X} (f(e)(z) \wedge g(e)(z)) + \epsilon\end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\bar{f}(e)(x) &\leq \bigvee_{y \in X} \bigwedge_{g' \in \mathcal{N}_y} \bigvee_{z \in X} (f(e)(z) \wedge g'(e)(z) \wedge h_x(e)(y)) \\ &\leq \bigvee_{y \in X} \bigvee_{z \in X} (f(e)(z) \wedge h_y(e)(z) \wedge h_x(e)(y)) \\ &\leq \bigvee_{z \in X} (f(e)(z) \wedge g(e)(z)) + \epsilon\end{aligned}$$

olur. Bu ifade her $g \in \mathcal{N}_x$ ve her $\epsilon \in I_0$ için doğru olduğundan

$$\bar{f}(e)(x) \leq \bigwedge_{g \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{z \in X} (f(e)(z) \wedge g(e)(z)) = \bar{f}(e)(x)$$

dir. Böylece $\bar{f} \sqsubseteq \bar{f}$ sağlanır ve (BEO1) gereğince $\bar{f} = \bar{f}$ elde edilir.

(BEO3) $f, g \in FS(X, E)$ olsun. Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
(\overline{f \sqcup g})(e)(x) &= \bigwedge_{h \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in X} ((f \sqcup g)(e)(y) \wedge h(e)(y)) \\
&= \bigwedge_{h \in \mathcal{N}_x} \left(\bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge h(e)(y)) \vee \bigvee_{y \in X} (g(e)(y) \wedge h(e)(y)) \right) \\
&\geq \bigwedge_{h \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge h(e)(y)) \vee \bigwedge_{h \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in X} (g(e)(y) \wedge h(e)(y)) \\
&= \bar{f}(e)(x) \vee \bar{g}(e)(x) = (\bar{f} \sqcup \bar{g})(e)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\overline{f \sqcup g} \supseteq \bar{f} \sqcup \bar{g}$ sağlanır.

Tersine,

$$\begin{aligned}
(\bar{f} \sqcup \bar{g})(e)(x) &= \bigwedge_{h, h' \in \mathcal{N}_x} \left(\bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge h(e)(y)) \vee \bigvee_{y \in X} (g(e)(y) \wedge h'(e)(y)) \right) \\
&= \bigwedge_{h, h' \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in X} ((f(e)(y) \wedge h(e)(y)) \vee (g(e)(y) \wedge h'(e)(y)))
\end{aligned}$$

bulunur. $h'' = h \sqcap h' \in \mathcal{N}_x$ olduğundan

$$(\bar{f} \sqcup \bar{g})(e)(x) \geq \bigwedge_{h'' \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in X} ((f \sqcup g)(e)(y) \wedge h''(e)(y)) = \overline{(f \sqcup g)}(e)(x)$$

elde edilir. Böylece $\bar{f} \sqcup \bar{g} \supseteq \overline{f \sqcup g}$ sağlanır.

(BEO4) $\bar{\emptyset} = \tilde{\emptyset}$ olduğu açıktır.

Tanım 5.5.7. Yukarıda tanımlanan $\tau_{\mathcal{N}}$ bulanık esnek topolojisine bir bulanık esnek komşuluk uzayı denir.

Teorem 5.5.8. $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ ailesi bir $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_x\}_{x \in X}$ bulanık esnek komşuluk sistemi için bir taban ise bu durumda her $f \in FS(X, E)$ ve her $e \in E, x \in X$ için

$$\begin{aligned}
\bar{f}(e)(x) &= \bigwedge_{g \in \hat{\mathcal{B}}_x} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge g(e)(y)) \\
&= \bigwedge_{g \in \langle \mathcal{B}_x \rangle} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge g(e)(y)) \\
&= \bigwedge_{g \in \mathcal{B}_x} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge g(e)(y))
\end{aligned}$$

olur.

İspat. $f \in FS(X, E)$ olsun. Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\bar{f}(e)(x) = \bigwedge_{g \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge g(e)(y))$$

dir. $\mathcal{B}_x \subseteq \widehat{\mathcal{B}_x} \subseteq \widetilde{\mathcal{B}_x} = \mathcal{N}_x$ olduğundan

$$\bar{f}(e)(x) \leq \bigwedge_{g \in \widehat{\mathcal{B}_x}} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge g(e)(y)) \leq \bigwedge_{g \in \mathcal{B}_x} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge g(e)(y)) \quad (1)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\mathcal{B}_x \subseteq \langle \mathcal{B}_x \rangle \subseteq \widetilde{\mathcal{B}_x} = \mathcal{N}_x$ olduğundan

$$\bar{f}(e)(x) \leq \bigwedge_{g \in \langle \mathcal{B}_x \rangle} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge g(e)(y)) \leq \bigwedge_{g \in \mathcal{B}_x} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge g(e)(y)) \quad (2)$$

olur. Diğer yandan her $h \in \mathcal{N}_x$ ve her $\epsilon \in I_0$ için $(h' - \epsilon) \sqsubseteq h$ olacak şekilde bir $h' \in \mathcal{B}_x$ vardır. O halde

$$\begin{aligned} \bar{f}(e)(x) &= \bigwedge_{h \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge h(e)(y)) \\ &\geq \bigwedge_{h' \in \mathcal{B}_x} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge (h' - \epsilon)(e)(y)) \\ &\geq \bigwedge_{h' \in \mathcal{B}_x} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge h'(e)(y)) - \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade her $\epsilon \in I_0$ için doğru olduğundan

$$\bar{f}(e)(x) \geq \bigwedge_{h' \in \mathcal{B}_x} \bigvee_{y \in X} (f(e)(y) \wedge h'(e)(y))$$

sağlanır. Böylece (1) ve (2) gereğince ispat biter.

5.6. BULANIK ESNEK DÜZGÜN UZAYLAR

Bu bölümde Lowen anlamında bir bulanık esnek düzgün uzay tanımlanarak önemli sonuçları elde edilecektir. Ayrıca bu uzayların bir bulanık esnek topoloji ve bir bulanık esnek komşuluk sistemi ile ilişkisi incelenecektir.

Tanım 5.6.1. (i) $f \in FS(X \times X, E)$ olmak üzere her $e \in E$ ve $(x, y) \in X \times X$ için

$$f_s(e)(x, y) = f(e)(y, x)$$

olarak tanımlanan $f_s : E \rightarrow I^{X \times X}$ dönüşümü $X \times X$ üzerinde bir bulanık esnek kümedir.

(ii) $f, g \in FS(X \times X, E)$ olsun. Bu durumda her $e \in E$ ve $(x, y) \in X \times X$ için

$$(f \circ g)(e)(x, y) = \bigvee_{z \in X} (g(e)(x, z) \wedge f(e)(z, y))$$

şeklinde tanımlanan $f \circ g : E \rightarrow I^{X \times X}$ dönüşümü $X \times X$ üzerinde bir bulanık esnek kümedir.

Tanım 5.6.2. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan boştan farklı bir $\mathcal{U} \subseteq FS(X \times X, E)$ ailesine X üzerinde bir bulanık esnek düzgün yapı denir.

(BED1) \mathcal{U} , X üzerinde bir doygun bulanık esnek süzgeçtir.

(BED2) $f \in \mathcal{U}$ olmak üzere her $e \in E$ ve $x \in X$ için $f(e)(x, x) = 1$ dir.

(BED3) Her $f \in \mathcal{U}$ için $f_s \in \mathcal{U}$ dur.

(BED4) Her $f \in \mathcal{U}$ ve her $\epsilon \in I_0$ için $(g \circ g) \sqsubseteq (f + \epsilon)$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{U}$ vardır.

O halde, (X, \mathcal{U}, E) üçlüsüne de bir bulanık esnek düzgün uzay denir.

Örnek 5.6.3. X boştan farklı bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. Bu takdirde,

$$\mathcal{U} = \{f \in FS(X \times X, E) \mid \text{her } e \in E \text{ ve } x \in X \text{ için } f(e)(x, x) = 1\}$$

ailesi X üzerinde bir bulanık esnek düzgün yapıdır.

(BED1)-(BED3) aksiyomları açık olduğundan sadece (BED4) aksiyomunun sağlandığını göstermek yeterlidir.

(BED4) $f \in \mathcal{U}$ ve $\epsilon \in I_0$ olsun. Bu durumda her $e \in E$ ve $(x, y) \in X \times X$ için

$$f \circ f(e)(x, y) = \bigvee_{z \in X} (f(e)(x, z) \wedge f(e)(z, y)) \leq f(e)(x, y) \leq (f(e)(x, y) + \epsilon) \wedge 1$$

olduğundan $(f \circ f) \sqsubseteq (f + \epsilon)$ elde edilir.

Tanım 5.6.4. Boştan farklı bir $\mathcal{B} \subseteq FS(X \times X, E)$ alt kümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa \mathcal{B} ailesine X üzerinde bir bulanık esnek düzgün taban denir.

(i) \mathcal{B} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç tabanıdır.

(ii) $f \in \mathcal{B}$ olmak üzere her $e \in E$ ve $x \in X$ için $f(e)(x, x) = 1$ dir.

(iii) Her $f \in \mathcal{B}$ ve her $\epsilon \in I_0$ için $g \sqsubseteq (f_s + \epsilon)$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{B}$ vardır.

(iv) Her $f \in \mathcal{B}$ ve her $\epsilon \in I_0$ için $(g \circ g) \sqsubseteq (f + \epsilon)$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{B}$ vardır.

Örnek 5.6.5. X boştan farklı bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $\epsilon > 0$ olmak üzere her $e \in E$ ve $(x, y) \in X \times X$ için

$$f_\epsilon(e)(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ (|x - y| - \epsilon) \vee 0, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde bir $f_\epsilon : E \rightarrow I^{X \times X}$ bulanık esnek kümesi tanımlansın. O halde,

$$\mathcal{B} = \{f_\epsilon \mid \epsilon > 0\}$$

ailesi X üzerinde bir bulanık esnek düzgün tabandır.

Tanım 5.6.6. (X, \mathcal{U}, E) bir bulanık esnek düzgün uzay ve $\mathcal{B} \subseteq FS(X \times X, E)$ olsun. \mathcal{B} , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç tabanı ve $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{U}$ ise \mathcal{B} ailesine \mathcal{U} bulanık esnek düzgün yapısı için bir taban denir.

Örnek 5.6.7. X boştan farklı bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. Her $e \in E$ ve $(x, y) \in X \times X$ için

$$f(e)(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ \frac{1}{2}, & x \neq y \end{cases}$$

olacak şekilde bir bulanık esnek küme tanımlansın. O halde $\mathcal{B} = \{f\}$ ailesi X üzerindeki bir bulanık esnek düzgün yapı için bir tabandır. Gerçekten de,

\mathcal{B} nin bir bulanık esnek süzgeç tabanı olduğu açıktır. Şimdi,

$$\widetilde{\{f\}} = \langle \hat{f} \rangle = \mathcal{U} = \{g \in FS(X \times X, E) \mid \sqcup_{\epsilon \in I_0} (f - \epsilon) \sqsubseteq g\}$$

ailesinin X üzerinde bir bulanık esnek düzgün yapı olduğunu göstereyim.

(BED1) \mathcal{U} ailesinin X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç olduğunu görmek kolaydır. Diğer yandan, her $\delta \in I_0$ için $(g + \delta) \in \mathcal{U}$ olsun. Buradan $\sqcup_{\epsilon \in I_0} (f - \epsilon) \sqsubseteq (g + \delta)$ bulunur. Bu ifade her $\epsilon \in I_0$ için doğru olduğundan $f \sqsubseteq (g + \delta)$ sağlanır. Benzer şekilde

$f \sqsubseteq g$ elde edilir. O halde $f \in \mathcal{U}$ ve \mathcal{U} bir bulanık esnek süzgeç olduğundan $g \in \mathcal{U}$ olur. Böylece \mathcal{U}, X üzerinde bir doygun bulanık esnek süzgeçtir.

(BED2) ve (BED3) aksiyomları açıktır.

(BED4) $g \in \mathcal{U}$ ise bu durumda $\sqcup_{\epsilon \in I_0} (f - \epsilon) \sqsubseteq g$ dir. Buradan her $\epsilon \in I_0$ için

$$(f \circ f) = f \sqsubseteq (g + \epsilon)$$

elde edilir. Böylece $f \in \mathcal{U}$ olduğundan aksiyom sağlanır.

Önerme 5.6.8. (1) \mathcal{B} X üzerinde bir bulanık esnek düzgün taban ise $\tilde{\mathcal{B}}$ ailesi X üzerinde bir bulanık esnek düzgün yapıdır.

(2) \mathcal{B} ailesi bir \mathcal{U} bulanık esnek düzgün yapısı için bir taban ise \mathcal{B} bir bulanık esnek düzgün tabandır.

İspat. (1) \mathcal{B} X üzerinde bir bulanık esnek düzgün taban olsun. $\tilde{\mathcal{B}}$ nın (BED1)-(BED4) aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

(BED1) \mathcal{B} bir bulanık esnek süzgeç tabanı olduğundan Teorem 5.4.2 (iii) gereğince $\hat{\mathcal{B}}$ bir bulanık esnek süzgeç tabanıdır ve buradan da $\tilde{\mathcal{B}} = \langle \hat{\mathcal{B}} \rangle$ bir bulanık esnek süzgeçtir. Ayrıca Teorem 5.4.2 (viii) ve Teorem 5.4.7 den $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\tilde{\mathcal{B}}} = \hat{\tilde{\mathcal{B}}}$ elde edilir. Böylece $\tilde{\mathcal{B}}$ bir doygun bulanık esnek süzgeçtir.

(BED2) aksiyomu açıktır.

(BED3) $f \in \tilde{\mathcal{B}}$ ve $\epsilon \in I_0$ olsun. Bu durumda bir $h \in \hat{\mathcal{B}}$ için $h \sqsubseteq f$ olur. Buradan $h = \sqcup_{\epsilon \in I_0} (h_\epsilon - \epsilon)$ olacak şekilde her $\epsilon \in I_0$ için bir $h_\epsilon \in \mathcal{B}$ vardır. Şimdi, $(h_{\epsilon'} - \frac{\epsilon}{2}) \sqsubseteq f$ olacak şekilde bir $h_{\epsilon'} \in \mathcal{B}$ alınsın. \mathcal{B} bir bulanık esnek düzgün taban olduğundan $g_{\epsilon'} \sqsubseteq (h_{\epsilon'})_s + \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde bir $g_{\epsilon'} \in \mathcal{B}$ bulunur. Buradan

$$g_{\epsilon'} \sqsubseteq \left((h_{\epsilon'})_s + \frac{\epsilon}{2} \right) \sqsubseteq (f_s + \epsilon)$$

elde edilir. Böylece $\tilde{\mathcal{B}}$ bir bulanık esnek süzgeç olduğundan her $\epsilon \in I_0$ için $(f_s + \epsilon) \in \tilde{\mathcal{B}}$ sağlanır. O halde Teorem 5.4.4 den $f_s \in \tilde{\mathcal{B}}$ dir.

(BED4) $f \in \tilde{\mathcal{B}}$ ve $\epsilon \in I_0$ olsun. Bu durumda bir $h \in \hat{\mathcal{B}}$ için $h \sqsubseteq f$ olur. Buradan $h = \sqcup_{\epsilon \in I_0} (h_\epsilon - \epsilon)$ olacak şekilde her $\epsilon \in I_0$ için bir $h_\epsilon \in \mathcal{B}$ vardır. Şimdi, $(h_{\epsilon'} - \frac{\epsilon}{2}) \sqsubseteq f$ olacak şekilde bir $h_{\epsilon'} \in \mathcal{B}$ alınsın. \mathcal{B} bir bulanık esnek düzgün taban olduğundan bir $g_{\epsilon'} \in \mathcal{B}$ için $(g_{\epsilon'} \circ g_{\epsilon'}) \sqsubseteq (h_{\epsilon'} + \frac{\epsilon}{2})$ bulunur. Ayrıca $\mathcal{B} \subseteq \tilde{\mathcal{B}}$ gereğince $g_{\epsilon'} \in \tilde{\mathcal{B}}$ sağlanır. O halde

$$(g_{\epsilon'} \circ g_{\epsilon'}) \sqsubseteq (h_{\epsilon'} + \frac{\epsilon}{2}) \sqsubseteq (f + \epsilon)$$

olacak şekilde bir $g_{\epsilon'} \in \tilde{\mathcal{B}}$ olduğundan ispat biter.

(2) \mathcal{B} nin bir bulanık esnek düzgün taban olduğunu göstermek için Tanım 5.6.4 deki koşulların sağlandığını göstermek gerekir.

(i) ve (ii) koşulları açıktır.

(iii) $f \in \mathcal{B}$ ve $\epsilon \in I_0$ olsun. Bu durumda $(f + \frac{\epsilon}{2}) \in \tilde{\mathcal{B}}$ ve dolayısıyla $(f_s + \frac{\epsilon}{2}) \in \tilde{\mathcal{B}}$ olur. O halde bir $h_{\epsilon'} \in \mathcal{B}$ için $(h_{\epsilon'} - \frac{\epsilon}{2}) \sqsubseteq (f_s + \frac{\epsilon}{2})$ elde edilir. Böylece $h_{\epsilon'} \sqsubseteq (f_s + \epsilon)$ olacak şekilde bir $h_{\epsilon'} \in \mathcal{B}$ sağlanır.

(iv) $f \in \mathcal{B}$ ve $\epsilon \in I_0$ olsun. Bu durumda $(f + \frac{\epsilon}{3}) \in \tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{U}$ olur. \mathcal{U} nun tanım gereğince $(g \circ g) \sqsubseteq (f + \frac{\epsilon}{3}) + \frac{\epsilon}{3}$ olacak şekilde bir $g \in \tilde{\mathcal{B}}$ vardır. O halde bir $h_{\epsilon'} \in \mathcal{B}$ için $(h_{\epsilon'} - \frac{\epsilon}{3}) \sqsubseteq g$, yani $h_{\epsilon'} \sqsubseteq (g + \frac{\epsilon}{3})$ elde edilir. Bu takdirde,

$$(h_{\epsilon'} \circ h_{\epsilon'}) \sqsubseteq \left((g \circ g) + \frac{\epsilon}{3} \right) \sqsubseteq (f + \epsilon)$$

sağlanır. Böylece $(h_{\epsilon'} \circ h_{\epsilon'}) \sqsubseteq (f + \epsilon)$ olacak şekilde bir $h_{\epsilon'} \in \mathcal{B}$ vardır.

Önerme 5.6.9. (X, \mathcal{U}, E) bir bulanık esnek düzgün uzay olsun. Bu takdirde,

$$\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{U} \mid f = f_s\}$$

ailesi \mathcal{U} bulanık esnek düzgün yapısı için bir tabandır.

İspat. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ ve $\tilde{\emptyset} \notin \mathcal{B}$ olduğu açıktır. Diğer yandan $f, g \in \mathcal{B}$ olsun. Bu durumda $f = f_s$ ve $g = g_s$ olur. Buradan $(f \sqcap g)_s = f \sqcap g$ elde edilir. Böylece $f \sqcap g \in \mathcal{B}$ dir.

Şimdi, $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{U}$ olduğunu gösterelim. $f \in \tilde{\mathcal{B}}$ olsun. Bu durumda $\sqcup_{\epsilon \in I_0} (h_\epsilon - \epsilon) \sqsubseteq f$ olacak şekilde her $\epsilon \in I_0$ için bir $h_\epsilon \in \mathcal{B}$ vardır. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ ve \mathcal{U} bir doygun bulanık esnek süzgeç olduğundan $\sqcup_{\epsilon \in I_0} (h_\epsilon - \epsilon) \in \mathcal{U}$ ve buradan da $f \in \mathcal{U}$ sağlanır.

Tersine, $f \in \mathcal{U}$ olsun. (BED3) den $f_s \in \mathcal{U}$ ve dolayısıyla $f \sqcap f_s \in \mathcal{U}$ olur. O halde $(f \sqcap f_s)_s = f \sqcap f_s$ olduğundan $f \sqcap f_s \in \mathcal{B}$ bulunur. Ayrıca $f \sqcap f_s \sqsubseteq f$ olduğundan $f \in \langle \mathcal{B} \rangle$ sağlanır. Böylece Teorem 5.4.2 (i) ve (v) gereğince $\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \widehat{\langle \mathcal{B} \rangle} = \tilde{\mathcal{B}}$ olduğundan $f \in \tilde{\mathcal{B}}$ elde edilir.

Tanım 5.6.10. $f \in FS(X \times X, E)$ ve $h \in FS(X, E)$ olsun. Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$f\langle x \rangle(e)(y) = f(e)(y, x) \quad \text{ve} \quad f\langle h \rangle(e)(x) = \bigvee_{y \in X} (h(e)(y) \wedge f(e)(y, x))$$

şeklinde tanımlanan $f\langle x \rangle : E \rightarrow I^X$ ve $f\langle h \rangle : E \rightarrow I^X$ dönüşümleri X üzerinde bulanık esnek kümelerdir.

Lemma 5.6.11. (X, \mathcal{U}, E) bir bulanık esnek düzgün uzay, $f, g \in \mathcal{U}$ ve $h, h' \in FS(X, E)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $h \sqsubseteq f\langle h \rangle$.

(ii) Her $\epsilon \in I$ için $(f + \epsilon)\langle h \rangle \sqsubseteq f\langle h \rangle + \epsilon$.

(iii) $f\langle h \sqcup h' \rangle = f\langle h \rangle \sqcup f\langle h' \rangle$.

(iv) $f\langle h \rangle \sqcup g\langle h' \rangle \sqsupseteq (f \sqcap g)\langle h \sqcup h' \rangle$.

(v) $f\langle g\langle h \rangle \rangle = (f \circ g)\langle h \rangle$.

(vi) Her $e \in E$ için $\bigvee_{x \in X} f\langle h \rangle(e)(x) \wedge h'(e)(x) = \bigvee_{x \in X} f_s\langle h' \rangle(e)(x) \wedge h(e)(x)$.

İspat. (i) Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$f\langle h \rangle(e)(x) = \bigvee_{y \in X} (h(e)(y) \wedge f(e)(y, x)) \geq h(e)(x)$$

elde edilir. Böylece $f\langle h \rangle \sqsupseteq h$ dir.

(ii) $\epsilon \in I$ olsun. Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
 (f + \epsilon)\langle h \rangle(e)(x) &= \bigvee_{y \in X} (h(e)(y) \wedge (f + \epsilon)(e)(y, x)) \\
 &\leq \bigvee_{y \in X} (h(e)(y) + \epsilon) \wedge (f(e)(y, x) + \epsilon) \\
 &= \left(\bigvee_{y \in X} (h(e)(y) \wedge f(e)(y, x)) \right) + \epsilon \\
 &= f\langle h \rangle(e)(x) + \epsilon
 \end{aligned}$$

olduğundan $(f + \epsilon)\langle h \rangle \sqsupseteq f\langle h \rangle + \epsilon$ sağlanır.

(iii) Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
 f\langle h \sqcup h' \rangle(e)(x) &= \bigvee_{y \in X} ((h \sqcup h')(e)(y) \wedge f(e)(y, x)) \\
 &= \bigvee_{y \in X} \left((h(e)(y) \wedge f(e)(y, x)) \vee (h'(e)(y) \wedge f(e)(y, x)) \right) \\
 &= \left(\bigvee_{y \in X} (h(e)(y) \wedge f(e)(y, x)) \right) \vee \left(\bigvee_{y \in X} (h'(e)(y) \wedge f(e)(y, x)) \right) \\
 &= f\langle h \rangle(e)(x) \vee f\langle h' \rangle(e)(x) = (f\langle h \rangle \sqcup f\langle h' \rangle)(e)(x)
 \end{aligned}$$

olduğundan istenilen $f\langle h \sqcup h' \rangle = f\langle h \rangle \sqcup f\langle h' \rangle$ ifadesi elde edilir.

(iv) Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
 f\langle h \rangle(e)(x) \vee g\langle h' \rangle(e)(x) &= \bigvee_{y \in X} h(e)(y) \wedge f(e)(y, x) \vee \bigvee_{y \in X} h'(e)(y) \wedge g(e)(y, x) \\
 &\geq \bigvee_{y \in X} (h(e)(y) \vee h'(e)(y)) \wedge (f \sqcap g)(e)(y, x) \\
 &= \bigvee_{y \in X} (h \sqcup h')(e)(y) \wedge (f \sqcap g)(e)(y, x) \\
 &= (f \sqcap g)\langle h \sqcup h' \rangle(e)(x)
 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $f\langle h \rangle \sqcup g\langle k \rangle \sqsupseteq (f \sqcap g)\langle h \sqcup h' \rangle$ sağlanır.

(v) Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
 f\langle g\langle h \rangle \rangle(e)(x) &= \bigvee_{y \in X} (g\langle h \rangle(e)(y) \wedge f(e)(y, x)) \\
 &= \bigvee_{y \in X} \left(\bigvee_{z \in X} (h(e)(z) \wedge g(e)(z, y)) \right) \wedge f(e)(y, x) \\
 &= \bigvee_{y \in X} \bigvee_{z \in X} h(e)(z) \wedge g(e)(z, y) \wedge f(e)(y, x)
 \end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan, her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)\langle h \rangle(e)(x) &= \bigvee_{z \in X} (h(e)(z) \wedge (f \circ g)(e)(z, x)) \\
 &= \bigvee_{z \in X} h(e)(z) \wedge \left(\bigvee_{y \in X} (g(e)(z, y) \wedge f(e)(y, x)) \right) \\
 &= \bigvee_{z \in X} \bigvee_{y \in X} h(e)(z) \wedge g(e)(z, y) \wedge f(e)(y, x)
 \end{aligned}$$

olduğundan ispat biter.

(vi) Her $e \in E$ için

$$\begin{aligned}
 \bigvee_{x \in X} f\langle h \rangle(e)(x) \wedge h'(e)(x) &= \bigvee_{x \in X} \left(\bigvee_{y \in X} (h(e)(y) \wedge f(e)(y, x)) \right) \wedge h'(e)(x) \\
 &= \bigvee_{x \in X} \bigvee_{y \in X} h(e)(y) \wedge f(e)(y, x) \wedge h'(e)(x) \\
 &= \bigvee_{y \in X} \left(\bigvee_{x \in X} h'(e)(x) \wedge f_s(e)(x, y) \right) \wedge h(e)(y) \\
 &= \bigvee_{y \in X} f_s\langle h' \rangle(e)(y) \wedge h(e)(y)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.6.12. (X, \mathcal{U}, E) bir bulanık esnek düzgün uzay ve $h \in FS(X, E)$ olsun.

$$\bar{h} = \prod_{g \in \mathcal{U}} g\langle h \rangle$$

olmak üzere $h \rightarrow \bar{h}$ dönüşümü (BEO1)-(BEO4) koşullarını sağlar. Buradan

$$\tau_{\mathcal{U}} = \{h \in FS(X, E) \mid \bar{h}^c = h^c\}$$

ailesi X üzerinde bir bulanık esnek topolojidir.

İspat. $h \rightarrow \bar{h}$ dönüşümünün (BEO1)-(BEO4) koşullarını sağladığını gösterelim.

(BEO1) Lemma 5.6.11 (i) den $\bar{h} = \bigwedge_{g \in \mathcal{U}} g\langle h \rangle \supseteq h$ elde edilir.

(BEO2) $g \in \mathcal{U}$ ve $\epsilon \in I_0$ olsun. Bu durumda $(g' \circ g') \sqsubseteq (g + \epsilon)$ olacak şekilde bir $g' \in \mathcal{U}$ vardır. Buradan her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
g\langle h \rangle(e)(x) &= \bigvee_{y \in X} h(e)(y) \wedge g(e)(y, x) \\
&\geq \bigvee_{y \in X} h(e)(y) \wedge ((g' \circ g')(e)(y, x) - \epsilon) \\
&= \bigvee_{y \in X} h(e)(y) \wedge (\bigvee_{z \in X} g'(e)(y, z) \wedge g'(e)(z, x) - \epsilon) \\
&= \bigvee_{y \in X} \bigvee_{z \in X} h(e)(y) \wedge g'(e)(y, z) \wedge g'(e)(z, x) - \epsilon \\
&\geq \bigvee_{z \in X} g'(e)(z, x) \wedge \left(\bigwedge_{g'' \in \mathcal{U}} \bigvee_{y \in X} h(e)(y) \wedge g''(e)(y, z) \right) - \epsilon \\
&= \bigvee_{z \in X} g'(e)(z, x) \wedge \bar{h}(e)(z) - \epsilon \\
&= g'\langle \bar{h} \rangle(e)(x) - \epsilon
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\bigwedge_{g \in \mathcal{U}} g\langle h \rangle(e)(x) \geq \bigwedge_{g' \in \mathcal{U}} g'\langle \bar{h} \rangle(e)(x) - \epsilon$$

elde edilir. Bu ifade her $\epsilon \in I_0$ için doğru olduğundan

$$\bigwedge_{g \in \mathcal{U}} g\langle h \rangle(e)(x) \geq \bigwedge_{g' \in \mathcal{U}} g'\langle \bar{h} \rangle(e)(x)$$

yani $\bar{h}(e)(x) \geq \bar{\bar{h}}(e)(x)$ bulunur. Böylece $\bar{h} \supseteq \bar{\bar{h}}$ sağlanır ve (BEO1) gereğince $\bar{h} = \bar{\bar{h}}$ elde edilir.

(BEO3) Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
\overline{(h \sqcup h')}(e)(x) &= \bigwedge_{g \in \mathcal{U}} g\langle h \sqcup h' \rangle(e)(x) \\
&= \bigwedge_{g \in \mathcal{U}} g\langle h \rangle(e)(x) \vee g\langle h' \rangle(e)(x) \\
&\geq \left(\bigwedge_{g \in \mathcal{U}} g\langle h \rangle(e)(x) \right) \vee \left(\bigwedge_{g \in \mathcal{U}} g\langle h' \rangle(e)(x) \right) \\
&= \bar{h}(e)(x) \vee \bar{h}'(e)(x) = (\bar{h} \sqcup \bar{h}')(e)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\overline{h \sqcup h'} \supseteq \bar{h} \sqcup \bar{h}'$ sağlanır.

Tersine,

$$\begin{aligned} (\bar{h} \sqcup \bar{h}')(e)(x) &= (\bigwedge_{g \in \mathcal{U}} g \langle h \rangle (e)(x)) \vee (\bigwedge_{g' \in \mathcal{U}} g' \langle h' \rangle (e)(x)) \\ &= \bigwedge_{g, g' \in \mathcal{U}} (g \langle h \rangle (e)(x) \vee g' \langle h' \rangle (e)(x)) \end{aligned}$$

bulunur. $f = (g \sqcap g') \in \mathcal{U}$ olduğundan Lemma 5.6.11 (iv) gereğince

$$(\bar{h} \sqcup \bar{h}')(e)(x) \geq \bigwedge_{f \in \mathcal{U}} f \langle h \sqcup h' \rangle (e)(x) = \overline{(h \sqcup h')}(e)(x)$$

elde edilir. Böylece $\bar{h} \sqcup \bar{h}' \supseteq \overline{h \sqcup h'}$ sağlanır.

(BEO4) $\bar{\emptyset} = \tilde{\emptyset}$ olduğu açıktır.

Tanım 5.6.13. Yukarıda tanımlanan $\tau_{\mathcal{U}}$ bulanık esnek topolojisine bir bulanık esnek düzgün topoloji denir.

Örnek 5.6.14. Örnek 5.6.3 de tanımlanan bulanık esnek düzgün uzayının X üzerinde bir $\tau = FS(X, E)$ bulanık esnek topolojisini ürettiği kolayca gösterilir.

Önerme 5.6.15. \mathcal{B} ailesi bir \mathcal{U} bulanık esnek düzgün yapısı için bir taban ise bu durumda her $h \in FS(X, E)$ için

$$\bar{h} = \prod_{g \in \hat{\mathcal{B}}} g \langle h \rangle = \prod_{g \in \langle \mathcal{B} \rangle} g \langle h \rangle = \prod_{g \in \mathcal{B}} g \langle h \rangle$$

olur.

İspat. Teorem 5.5.8 in ispatına benzer şekilde elde edilir.

Teorem 5.6.16. (X, \mathcal{U}, E) bir bulanık esnek düzgün uzay olsun. Her $x \in X$ için

$$\mathcal{U}_x = \{f \langle x \rangle \mid f \in \mathcal{U}\}$$

olmak üzere $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ ailesi bir bulanık esnek komşuluk sistemidir.

İspat. $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ ailesinin bir bulanık esnek komşuluk sistemi olduğunu göstermek için Tanım 5.5.1 deki koşulların sağlandığını göstermek gerekir.

(i) $x \in X$ olsun. $\mathcal{U}_x \neq \emptyset$ ve $\tilde{\emptyset} \notin \mathcal{U}_x$ olduğu açıktır.

$f\langle x \rangle, g\langle x \rangle \in \mathcal{U}_x$ olsun. Bu durumda $f, g \in \mathcal{U}$ olur. O halde $f \sqcap g \in \mathcal{U}$ ve

$$f\langle x \rangle \sqcap g\langle x \rangle = (f \sqcap g)\langle x \rangle$$

olduğundan $f\langle x \rangle \sqcap g\langle x \rangle \in \mathcal{U}_x$ elde edilir.

$f\langle x \rangle \in \mathcal{U}_x$ ve $f\langle x \rangle \sqsubseteq h$ olsun. Buradan $f \in \mathcal{U}$ ve her $e \in E, y \in X$ için $f(e)(y, x) \leq h(e)(y)$ elde edilir. Şimdi, bir $g \in FS(X \times X, E)$ bulanık esnek kümesi, her $e \in E$ ve her $(x_1, x_2) \in X \times X$ için

$$g(e)(x_1, x_2) = \begin{cases} f(e)(x_1, x_2), & x_2 \neq x \\ h(e)(x_1), & x_2 = x \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Buradan $f \sqsubseteq g$ ve dolayısıyla $g \in \mathcal{U}$ olur. Böylece $g\langle x \rangle = h$ olduğundan $h \in \mathcal{U}_x$ elde edilir.

Her $\epsilon \in I_0$ için $(f\langle x \rangle + \epsilon) \in \mathcal{U}_x$ olsun. Her $\epsilon \in I_0$ için $(f\langle x \rangle + \epsilon) = (f + \epsilon)\langle x \rangle$ olduğundan her $\epsilon \in I_0$ için $(f + \epsilon) \in \mathcal{U}$ elde edilir. (BED1) gereğince $f \in \mathcal{U}$ sağlanır ve buradan da $f\langle x \rangle \in \mathcal{U}_x$ elde edilir. Böylece \mathcal{U}_x bir doygun bulanık esnek süzgeçtir.

(ii) koşulu açıktır.

(iii) $x \in X, f\langle x \rangle \in \mathcal{U}_x$ ve $\epsilon \in I_0$ olsun. $f \in \mathcal{U}$ olduğundan $(g \circ g) \sqsubseteq (f + \epsilon)$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{U}$ vardır. Şimdi, her $z \in X$ için $g\langle z \rangle \in \mathcal{U}_z$ olacak şekilde bir $\{g\langle z \rangle \mid z \in X\}$ ailesi alınsın. Her $e \in E$ ve $y \in X$ için

$$\begin{aligned} \bigvee_{z \in X} (g\langle x \rangle(e)(z) \wedge g\langle z \rangle(e)(y)) &= \bigvee_{z \in X} (g(e)(z, x) \wedge g(e)(z, y)) \\ &= (g \circ g)(e)(y, x) \\ &\leq f(e)(y, x) + \epsilon \\ &= f\langle x \rangle(e)(y) + \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ ailesi bir bulanık esnek komşuluk sistemidir.

5.7. BULANIK ESNEK DÜZGÜN SÜREKLİ DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümün amacı bir bulanık esnek düzgün sürekli dönüşüm kavramı tanımlayarak bu dönüşüm yardımıyla bir bulanık esnek sürekli dönüşüm elde etmektir.

Tanım 5.7.1. (X, \mathcal{U}, E) ve (Y, \mathcal{V}, K) herhangi iki bulanık esnek düzgün uzay ve $\varphi_\psi : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (Y, \mathcal{V}, K)$ bir bulanık esnek dönüşüm olsun. Her $f \in \mathcal{V}$ için $(\varphi \times \varphi)_\psi(g) \sqsubseteq f$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{U}$ varsa φ_ψ bulanık esnek dönüşümüne bir bulanık esnek düzgün sürekli dönüşüm denir (Burada, $\varphi \times \varphi : X \times X \rightarrow Y \times Y$ dönüşümü, her $(x_1, x_2) \in X \times X$ için $(\varphi \times \varphi)(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2))$ şeklinde tanımlanır).

Lemma 5.7.2. (X, \mathcal{U}, E) ve (Y, \mathcal{V}, K) herhangi iki bulanık esnek düzgün uzay ve $\varphi_\psi : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (Y, \mathcal{V}, K)$ bir bulanık esnek dönüşüm olsun. φ_ψ nin bir bulanık esnek düzgün sürekli dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul her $f \in \mathcal{V}$ için $(\varphi \times \varphi)_\psi^{-1}(f) \in \mathcal{U}$ olmasıdır.

İspat. Tanım 5.7.1 den kolaylıkla elde edilir.

Örnek 5.7.3. Örnek 5.6.3 de tanımlanan (X, \mathcal{U}, E) bulanık esnek düzgün uzayı alınsın. Bu durumda $\varphi : X \rightarrow X$ ve $\psi : E \rightarrow E$ herhangi iki dönüşüm olmak üzere $\varphi_\psi : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (X, \mathcal{U}, E)$ bulanık esnek dönüşümü bir bulanık esnek düzgün sürekli dönüşümdür.

Teorem 5.7.4. $(\varphi_1)_{\psi_1} : (X_1, \mathcal{U}_1, E_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{U}_2, E_2)$, $(\varphi_2)_{\psi_2} : (X_2, \mathcal{U}_2, E_2) \rightarrow (X_3, \mathcal{U}_3, E_3)$ iki bulanık esnek düzgün sürekli dönüşüm olsun. Bu takdirde,

$$(\varphi_1)_{\psi_1} \circ (\varphi_2)_{\psi_2} : (X_1, \mathcal{U}_1, E_1) \rightarrow (X_3, \mathcal{U}_3, E_3)$$

bir bulanık esnek düzgün sürekli dönüşümdür.

İspat. $f \in \mathcal{U}_3$ olsun. Bu durumda Lemma 5.7.2 gereğince $(\varphi_2 \times \varphi_2)_{\psi_2}^{-1}(f) \in \mathcal{U}_2$ elde edilir. Buradan da

$$(\varphi_1 \times \varphi_1)_{\psi_1}^{-1}((\varphi_2 \times \varphi_2)_{\psi_2}^{-1}(f)) = ((\varphi_2 \circ \varphi_1) \times (\varphi_2 \circ \varphi_1))_{\psi_2 \circ \psi_1}^{-1}(f) \in \mathcal{U}_1$$

sağlanır. Böylece $(\varphi_1)_{\psi_1} \circ (\varphi_2)_{\psi_2}$ bir bulanık esnek düzgün sürekli dönüşümdür.

Teorem 5.7.5. (X, \mathcal{U}, E) ve (Y, \mathcal{V}, K) iki bulanık esnek düzgün uzay ve \mathcal{B} ve \mathcal{C} sırasıyla \mathcal{U} ve \mathcal{V} için birer taban olsun. Bu takdirde, $\varphi_\psi : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (Y, \mathcal{V}, K)$ bulanık esnek dönüşümünün bir bulanık esnek düzgün sürekli dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul her $f \in \mathcal{V}$ ve her $\epsilon \in I_0$ için $(g - \epsilon) \sqsubseteq (\varphi \times \varphi)_\psi^{-1}(f)$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{B}$ olmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) $f \in \mathcal{V}$ ve $\epsilon \in I_0$ olsun. Teorem 5.4.6 (i) den $(f + \frac{\epsilon}{2}) \in \mathcal{V}$ bulunur. Hipotez gereğince

$$g' \sqsubseteq (\varphi \times \varphi)_\psi^{-1}\left(f + \frac{\epsilon}{2}\right) = (\varphi \times \varphi)_\psi^{-1}(f) + \frac{\epsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $g' \in \mathcal{U} = \tilde{\mathcal{B}}$ vardır. Buradan $(g - \frac{\epsilon}{2}) \sqsubseteq g'$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{B}$ bulunur. Böylece $(g - \epsilon) \sqsubseteq (\varphi \times \varphi)_\psi^{-1}(f)$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{B}$ elde edilir.

(\Leftarrow) $f \in \mathcal{V} = \tilde{\mathcal{C}}$ olsun. Bu durumda $(f_\epsilon - \epsilon) \sqsubseteq f$ olacak şekilde her $\epsilon \in I_0$ için bir $f_\epsilon \in \mathcal{C}$ vardır. Hipotezden $\epsilon \in I_0$ olmak üzere $(g_\epsilon - \epsilon) \sqsubseteq (\varphi \times \varphi)_\psi^{-1}(f_\epsilon)$ olacak şekilde bir $g_\epsilon \in \mathcal{B}$ elde edilir. Buradan

$$g_\epsilon \sqsubseteq (\varphi \times \varphi)_\psi^{-1}(f_\epsilon) + \epsilon \sqsubseteq (\varphi \times \varphi)_\psi^{-1}(f + \epsilon) + \epsilon = (\varphi \times \varphi)_\psi^{-1}(f) + 2\epsilon$$

olur. Dolayısıyla her $\epsilon \in I_0$ için

$$(g_\epsilon - 2\epsilon) \sqsubseteq (\varphi \times \varphi)_\psi^{-1}(f)$$

olacak şekilde bir $g_\epsilon \in \mathcal{B}$ vardır. O halde $g = \sqcup_{\epsilon \in I_0} (g_\epsilon - 2\epsilon) \sqsubseteq (\varphi \times \varphi)_\psi^{-1}(f)$ sağlanır. Böylece $g \in \hat{\mathcal{B}} \subseteq \tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{U}$ olduğundan ispat biter.

Sonuç 5.7.6. (X, \mathcal{U}, E) ve (Y, \mathcal{V}, K) iki bulanık esnek düzgün uzay olsun. Bu takdirde, $\varphi_\psi : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (Y, \mathcal{V}, K)$ bulanık esnek dönüşümünün bir bulanık esnek düzgün sürekli dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul her $f \in \mathcal{V}$ ve her $\epsilon \in I_0$ için $(g - \epsilon) \sqsubseteq (\varphi \times \varphi)_\psi^{-1}(f)$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{U}$ olmasıdır.

İspat. Her bulanık esnek düzgün yapı kendisi için bir taban olduğundan Teorem 5.7.5 gereğince kolaylıkla ispatlanır.

Teorem 5.7.7. $\varphi_\psi : (X, \mathcal{U}, E) \rightarrow (Y, \mathcal{V}, K)$ bir bulanık esnek düzgün sürekli dönüşüm ise bu durumda $\varphi_\psi : (X, \tau_{\mathcal{U}}, E) \rightarrow (Y, \tau_{\mathcal{V}}, K)$ bir bulanık esnek sürekli dönüşümdür.

İspat. Teorem 2.6.6 gereğince her $h \in FS(X, E)$ için $\varphi_\psi(\bar{h}) \sqsubseteq \overline{\varphi_\psi(h)}$ olduğu gösterilirse ispat biter. $h \in FS(X, E)$ olsun. Her $k \in K$ ve $y \in Y$ için $\psi^{-1}(k) \neq \emptyset$ ve $\varphi^{-1}(y) \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\overline{\varphi_\psi(h)}(k)(y) &= \bigwedge_{g \in \mathcal{V}} g(\varphi_\psi(h))(k)(y) \\ &= \bigwedge_{g \in \mathcal{V}} \left(\bigvee_{z \in Y} \varphi_\psi(h)(k)(z) \wedge g(k)(z, y) \right) \\ &= \bigwedge_{g \in \mathcal{V}} \bigvee_{z \in Y} \left(\bigvee_{x \in \varphi^{-1}(z)} \bigvee_{e \in \psi^{-1}(k)} h(e)(x) \wedge g(k)(z, y) \right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her $e \in \psi^{-1}(k)$ için

$$\overline{\varphi_\psi(h)}(k)(y) \geq \bigwedge_{g \in \mathcal{V}} \bigvee_{x \in X} \left(h(e)(x) \wedge g(\psi(e))(\varphi(x), y) \right)$$

sağlanır. φ_ψ bir bulanık esnek düzgün sürekli dönüşüm olduğundan her $g \in \mathcal{V}$ için $f \sqsubseteq (\varphi \times \varphi)_\psi^{-1}(g)$ olacak şekilde bir $f \in \mathcal{U}$ vardır. Diğer yandan her $x' \in \varphi^{-1}(y)$ için

$$\begin{aligned}\overline{\varphi_\psi(h)}(k)(y) &\geq \bigwedge_{g \in \mathcal{V}} \bigvee_{x \in X} \left(h(e)(x) \wedge g(\psi(e))(\varphi(x), \varphi(x')) \right) \\ &\geq \bigwedge_{f \in \mathcal{U}} \bigvee_{x \in X} \left(h(e)(x) \wedge f(e)(x, x') \right) \\ &= \bar{h}(e)(x')\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\overline{\varphi_\psi(h)}(k)(y) \geq \bigvee_{x' \in \varphi^{-1}(y)} \bigvee_{e \in \psi^{-1}(k)} \bar{h}(e)(x') = \varphi_\psi(\bar{h})(k)(y)$$

olduğundan istenilen $\overline{\varphi_\psi(h)} \sqsupseteq \varphi_\psi(\bar{h})$ ifadesi elde edilir.

6. BULANIK ESNEK YAKINLIK UZAYLAR

Bu bölümde Çetkin ve diğ. (2014) tarafından tanımlanan bulanık esnek yakınlık uzaylar incelenerek önemli sonuçları elde edilecektir. Ayrıca bulanık esnek yakınlık uzaylar ile bulanık esnek topolojik uzaylar arasındaki ilişki çalışılacaktır. Bunun yanı sıra, bir bulanık esnek yakınlık komşuluk ve bir bulanık esnek yakınlık dönüşüm kavramları verilerek ilgili özellikleri araştırılacaktır. Daha sonra bir başlangıç bulanık esnek yakınlık tanımlanarak bir çarpım bulanık esnek yakınlık elde edilecektir. Son olarak bir bulanık esnek yığılma kavramı verilerek önemli özellikleri incelenecektir.

6.1. BULANIK ESNEK YAKINLIK UZAYLAR

Bu bölümde Çetkin ve diğ. (2014) tarafından tanımlanan bulanık esnek yakınlık uzayları ile ilgili özellikler incelenerek klasik anlamdaki yakınlık uzaylarıyla ilişkileri elde edilecektir. Ayrıca bulanık esnek yakınlık uzaylar yardımıyla bir bulanık esnek topolojik uzay üretilecektir.

Tanım 6.1.1. $FS(X, E)$ üzerindeki bir δ ikili bağıntısı aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu bağıntıya X üzerinde bir bulanık esnek yakınlık denir.

$$(BEY1) \tilde{\delta} \bar{\delta} f.$$

$$(BEY2) f \sqcap g \neq \tilde{\delta} \text{ ise } f \delta g.$$

$$(BEY3) f \delta g \text{ ise } g \delta f.$$

$$(BEY4) f \delta (g \sqcup h) \Leftrightarrow f \delta g \text{ veya } f \delta h.$$

$$(BEY5) f \bar{\delta} g \text{ ise } f \bar{\delta} h \text{ ve } g \bar{\delta} (\tilde{X} - h) \text{ olacak şekilde bir } h \in FS(X, E) \text{ vardır.}$$

(Burada, $\bar{\delta}$ ile δ nın olumsuzu gösterilmektedir. Ayrıca $(f, g) \in \delta$ yerine sadelik olması açısından $f \delta g$ yazılmıştır) Bu durumda (X, δ, E) üçlüsüne bir bulanık esnek yakınlık uzay denir (Çetkin ve diğ. 2014).

Örnek 6.1.2. X boştan farklı bir küme ve E , X için uygun parametrelerin bir kümesi olsun. $f, g \in FS(X, E)$ olmak üzere

$$f \delta g \Leftrightarrow f \neq \tilde{\emptyset} \text{ ve } g \neq \tilde{\emptyset}$$

olarak tanımlanan δ bağıntısı X üzerinde bir bulanık esnek yakınlıktır.

Lemma 6.1.3. δ , X üzerinde bir bulanık esnek yakınlık olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $f \delta g, f \sqsubseteq h_1$ ve $g \sqsubseteq h_2$ ise $h_1 \delta h_2$ olur.

(ii) Her $f \neq \tilde{\emptyset}$ için $f \delta f$ dir.

(iii) $f \delta \tilde{X}$ olması için gerek ve yeter koşul $f \neq \tilde{\emptyset}$ olmasıdır.

İspat. Bulanık esnek yakınlık tanımından kolaylıkla elde edilir.

Teorem 6.1.4. (X, δ) klasik anlamda bir yakınlık uzay olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan δ^i ikili bağıntısı X üzerinde bir bulanık esnek yakınlıktır.

$f, g \in FS(X, E)$ olsun. $f \delta^i g$ olması için gerek ve yeter koşul $f \sqsubseteq \tilde{\chi}_A, g \sqsubseteq \tilde{\chi}_B$ ve $A \bar{\delta} B$ olacak şekilde X in A ve B alt kümeleri vardır.

İspat. δ^i nin (BEY1)-(BEY5) aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

(BEY1) $\tilde{\emptyset} \sqsubseteq \tilde{\chi}_\emptyset, f \sqsubseteq \tilde{\chi}_X$ ve $\emptyset \bar{\delta} X$ olduğundan $\tilde{\emptyset} \delta^i f$ elde edilir.

(BEY2) $f \delta^i g$ olsun. Bu durumda $f \sqsubseteq \tilde{\chi}_A, g \sqsubseteq \tilde{\chi}_B$ ve $A \bar{\delta} B$ olacak şekilde X in A ve B alt kümeleri vardır. $A \bar{\delta} B$ olduğundan $A \cap B = \emptyset$ ve dolayısıyla $\tilde{\chi}_A \sqcap \tilde{\chi}_B = \tilde{\emptyset}$ bulunur. Böylece $f \sqcap g = \tilde{\emptyset}$ sağlanır.

(BEY3) $A \bar{\delta} B$ iken $B \bar{\delta} A$ olduğundan açıktır.

(BEY4) $f \delta^i (g \sqcup h)$ ise $f \delta^i g$ ve $f \delta^i h$ olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi $f \delta^i g$ ve $f \delta^i h$ olduğunu kabul edelim. Buradan $f \sqsubseteq \tilde{\chi}_A, g \sqsubseteq \tilde{\chi}_B$ ve $A \bar{\delta} B$ olacak şekilde X in A ve B alt kümeleri vardır. Benzer şekilde $f \sqsubseteq \tilde{\chi}_C, h \sqsubseteq \tilde{\chi}_D$ ve $C \bar{\delta} D$ olacak şekilde X in C ve D alt

kümeleri vardır. O halde $f \sqsubseteq \widetilde{\chi_{A \cap C}}$, $g \sqcup h \sqsubseteq \widetilde{\chi_{B \cup D}}$ ve $(A \cap C)\bar{\delta}(B \cup D)$ olduğundan $f\bar{\delta}^i(g \sqcup h)$ elde edilir.

(BEY5) $f\bar{\delta}^i g$ olsun. Bu durumda $f \sqsubseteq \widetilde{\chi_A}$, $g \sqsubseteq \widetilde{\chi_B}$ ve $A\bar{\delta}B$ olacak şekilde X in A ve B alt kümeleri vardır. $A\bar{\delta}B$ olduğundan en az bir $C \subseteq X$ alt kümesi için $A\bar{\delta}C$ ve $B\bar{\delta}(X - C)$ sağlanır. Buradan $f\bar{\delta}^i\widetilde{\chi_C}$ ve $g\bar{\delta}^i(\widetilde{X} - \widetilde{\chi_C})$ olacak şekilde bir $\widetilde{\chi_C}$ bulanık esnek kümesi vardır.

Teorem 6.1.5. (X, δ^*, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay olsun.

(i) $\delta^* = \delta^i$ olacak şekilde X üzerinde klasik anlamda bir δ yakınlık vardır.

(ii) $f\bar{\delta}^* g$ ise $f \sqsubseteq \widetilde{\chi_A}$, $g \sqsubseteq \widetilde{\chi_B}$ ve $\widetilde{\chi_A}\bar{\delta}^*\widetilde{\chi_B}$ olacak şekilde X in A ve B alt kümeleri vardır.

(iii) $A\delta B \Leftrightarrow \widetilde{\chi_A}\bar{\delta}^*\widetilde{\chi_B}$ ikili bağıntısı X üzerinde klasik anlamda bir yakınlıktır.

O halde (i) ve (ii) koşulları denktir ve (iii) yi gerektirir.

İspat. (i) \Rightarrow (ii) açıktır.

(ii) \Rightarrow (iii) δ ikili bağıntısı için (Y1), (Y2), (Y3) ve (Y4) aksiyomlarının sağlandığı açıktır.

(Y5) X in A ve B alt kümeleri için $A\bar{\delta}B$ olsun. $\widetilde{\chi_A}\bar{\delta}^*\widetilde{\chi_B}$ olduğundan $\widetilde{\chi_A}\bar{\delta}^*f$ ve $\widetilde{\chi_B}\bar{\delta}^*(\widetilde{X} - f)$ olacak şekilde bir $f \in FS(X, E)$ vardır. Hipotezden $\widetilde{\chi_A} \sqsubseteq \widetilde{\chi_C}$, $f \sqsubseteq \widetilde{\chi_D}$, $\widetilde{\chi_B} \sqsubseteq \widetilde{\chi_G}$, $(\widetilde{X} - f) \sqsubseteq \widetilde{\chi_H}$, $\widetilde{\chi_C}\bar{\delta}^*\widetilde{\chi_D}$ ve $\widetilde{\chi_G}\bar{\delta}^*\widetilde{\chi_H}$ bulunur. Böylece $\widetilde{\chi_A}\bar{\delta}^*\widetilde{\chi_D}$ ve dolayısıyla $A\bar{\delta}D$ elde edilir. Benzer şekilde $\widetilde{\chi_B}\bar{\delta}^*\widetilde{\chi_{(X-D)}}$ ve buradan da $B\bar{\delta}(X - D)$ elde edilir. O halde (Y5) aksiyomu sağlanır.

(ii) \Rightarrow (i) X in kuvvet kümesi üzerinde aşağıdaki gibi bir δ ikili bağıntısı tanımlansın.

$$A\delta B \Leftrightarrow \widetilde{\chi_A}\bar{\delta}^*\widetilde{\chi_B}.$$

δ nın X üzerinde klasik anlamda bir yakınlık olduğunu biliyoruz. O halde $\delta^* = \delta^i$ olduğu gösterilirse ispat biter. $f\bar{\delta}^* g$ olsun. Hipotezden $f \sqsubseteq \widetilde{\chi_A}$, $g \sqsubseteq \widetilde{\chi_B}$ ve $\widetilde{\chi_A}\bar{\delta}^*\widetilde{\chi_B}$ olacak şekilde X in A ve B alt kümeleri vardır. $\widetilde{\chi_A}\bar{\delta}^*\widetilde{\chi_B}$ olduğundan $A\bar{\delta}B$ ve dolayısıyla $f\bar{\delta}^i g$ sağlanır. Tersine $f\bar{\delta}^i g$ olduğunu kabul edelim. δ^i nin tanımından $f \sqsubseteq \widetilde{\chi_A}$, $g \sqsubseteq \widetilde{\chi_B}$ ve $A\bar{\delta}B$ olacak şekilde X in A ve B alt kümeleri vardır. Böylece $\widetilde{\chi_A}\bar{\delta}^*\widetilde{\chi_B}$ ve buradan da $f\bar{\delta}^* g$ elde edilir.

(X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay ve $f \in FS(X, E)$ olsun.

$$\bar{f} = \tilde{X} - \sqcup \{g \in FS(X, E) \mid f \bar{\delta} g\}$$

şeklinde bir eşitlik tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.1.6. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay olsun. Bu takdirde $f \rightarrow \bar{f}$ dönüşümü (BEO1)-(BEO4) koşullarını sağlar. Buradan

$$\tau(\delta) = \{f \in FS(X, E) \mid \bar{f}^c = f^c\}$$

ailesi X üzerinde bir bulanık esnek topolojidir.

İspat. $f \rightarrow \bar{f}$ dönüşümünün (BEO1)-(BEO4) koşullarını sağladığını gösterelim.

(BEO1) $f \neq \tilde{\emptyset}$ olduğunu kabul edelim. $g \bar{\delta} f$ olacak şekilde bir $g \in FS(X, E)$ alınsın. (BEY2) den $g \sqcap f = \tilde{\emptyset}$ dır. O halde her $e \in E$ ve $x \in X$ için ya $g(e)(x) = 0$ ya da $f(e)(x) = 0$ olur. Buna göre $g(e)(x) \leq 1 - f(e)(x)$ ve buradan da $\bigvee_{g \bar{\delta} f} g(e)(x) \leq 1 - f(e)(x)$ sağlanır. Sonuç olarak

$$f(e)(x) \leq 1 - \bigvee_{g \bar{\delta} f} g(e)(x) = \bar{f}(e)(x)$$

elde edilir.

(BEO2) Bunun için

$$g \delta f \Leftrightarrow g \delta \bar{f}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Gerek koşul Lemma 6.1.3 den açıktır. Yeter koşul için $g \delta \bar{f}$ olsun. $g \bar{\delta} f$ olduğunu kabul edelim. (BEY5) den $g \bar{\delta} h$ ve $f \bar{\delta} (\tilde{X} - h)$ olacak şekilde bir $h \in FS(X, E)$ vardır. $g \bar{\delta} h$ ve $g \delta \bar{f}$ olduğundan en az bir $e \in E$ ve $x \in X$ için $h(e)(x) < \bar{f}(e)(x)$ elde edilir. Şimdi, $h(e)(x) < a < \bar{f}(e)(x)$ olacak şekilde bir a sayısı seçilsin ve $e_{x^{1-a}} \in FS(X, E)$ tanımlansın. $1 - a \leq 1 - h(e)(x)$ olduğundan $e_{x^{1-a}} \sqsubseteq (\tilde{X} - h)$ sağlanır. Ayrıca $e_{x^{1-a}} \delta f$ dir, aksi halde $\bar{f}(e)(x) \leq 1 - (1 - a) = a$ olurdu. Böylece $e_{x^{1-a}} \delta f$ ve $e_{x^{1-a}} \sqsubseteq (\tilde{X} - h)$ olduğundan $(\tilde{X} - h) \delta f$ çelişkisi elde edilir.

(BEO3) $\overline{f \sqcup g} \supseteq \bar{f} \sqcup \bar{g}$ olduğu açıktır. Tersine $\overline{f \sqcup g}(e)(x) > \bar{f}(e)(x) \vee \bar{g}(e)(x)$ olacak şekilde bir $e \in E$ ve $x \in X$ olduğunu kabul edelim.

$$a = \overline{f \sqcup g}(e)(x) > \bar{f}(e)(x) \vee \bar{g}(e)(x) + \epsilon$$

sağlayan bir $\epsilon > 0$ alınsın. Şimdi, $\bar{f}(e)(x) \geq \bar{g}(e)(x)$ (benzer şekilde $\bar{g}(e)(x) > \bar{f}(e)(x)$ durumu da alınabilir) olsun. Bu takdirde,

$$\bar{f}(e)(x) = 1 - \vee\{h(e)(x) \mid h\bar{\delta}f\} < a - \epsilon$$

olduğundan bir $h \in FS(X, E)$ için $h\bar{\delta}f$ ve $1 - h(e)(x) < a - \epsilon$ olur. Bunun yanı sıra

$$1 - h(e)(x) \geq \bar{f}(e)(x) \geq \bar{g}(e)(x) > \bar{g}(e)(x) - \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliğinden $1 - h(e)(x) + \frac{\epsilon}{2} > \bar{g}(e)(x)$ bulunur. $\bar{g}(e)(x) = 1 - \vee\{h'(e)(x) \mid h'\bar{\delta}g\}$ sağlandığından $h'\bar{\delta}g$ ve $h(e)(x) - \frac{\epsilon}{2} < h'(e)(x)$ olacak şekilde bir $h' \in FS(X, E)$ vardır. Ayrıca $(h \sqcap h')\bar{\delta}f$ ve $(h \sqcap h')\bar{\delta}g$ olduğundan $(h \sqcap h')\bar{\delta}(\overline{f \sqcup g})$ elde edilir. (BEY2) den

$$\overline{f \sqcup g}(e)(x) \leq 1 - (h \sqcap h')(e)(x)$$

bulunur. Diğer yandan $h(e)(x) - \frac{\epsilon}{2} < (h' \sqcap h)(e)(x)$ sağlandığından aşağıdaki ifade elde edilir:

$$a = \overline{f \sqcup g}(e)(x) \leq 1 - (h \sqcap h')(e)(x) \leq 1 - h(e)(x) + \frac{\epsilon}{2} < a - \epsilon + \frac{\epsilon}{2} = a - \frac{\epsilon}{2}$$

Elde edilen bu çelişki (BEO3) koşulunun sağlandığını gösterir.

(BEO4) $\tilde{\emptyset}\bar{\delta}\tilde{X}$ olduğundan $\tilde{\emptyset} = \tilde{\emptyset}$ elde edilir.

Örnek 6.1.7. Örnek 6.1.2 de tanımlanan bulanık esnek yakınlık uzayının X üzerinde bir $\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}\}$ bulanık esnek topolojisini ürettiği kolayca gösterilir.

Teorem 6.1.8. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $f, g \in FS(A, E)$ için

$$f\delta_A g \Leftrightarrow f\delta g$$

şeklinde tanımlanan δ_A ikili bağıntısı A üzerinde bir bulanık esnek yakınlıktır.

İspat. δ_A için (BEY1), (BEY2), (BEY3) ve (BEY4) aksiyomlarının sağlandığı açıktır.

(BEY5) $f\bar{\delta}_A g$ olsun. Bu durumda $f\bar{\delta}g$ olur. δ bir bulanık esnek yakınlık olduğundan $f\bar{\delta}h$ ve $g\bar{\delta}(\tilde{X} - h)$ olacak şekilde bir $h \in FS(X, E)$ vardır.

$$(h \sqcap \tilde{\chi}_A) \sqsubseteq h \quad \text{ve} \quad ((\tilde{X} - h) \sqcap \tilde{\chi}_A) \sqsubseteq (\tilde{X} - h)$$

olduğundan $f\bar{\delta}(h \sqcap \tilde{\chi}_A)$ ve $g\bar{\delta}((\tilde{X} - h) \sqcap \tilde{\chi}_A)$ sağlanır. O halde

$$\tilde{\chi}_A \sqcap (\tilde{X} - h) = \tilde{\chi}_A - (h \sqcap \tilde{\chi}_A)$$

olduğundan tanım gereği $f\bar{\delta}_A(h \sqcap \tilde{\chi}_A)$ ve $g\bar{\delta}_A(\tilde{\chi}_A - (h \sqcap \tilde{\chi}_A))$ elde edilir.

Tanım 6.1.9. Yukarıda oluşturulan A üzerindeki δ_A bulanık esnek yakınlık yapısına δ ile üretilen bulanık esnek yakınlık denir.

6.2. BULANIK ESNEK YAKINLIK KOMŞULUKLAR VE BULANIK ESNEK YAKINLIK DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde bir bulanık esnek yakınlık komşuluk kavramı tanımlanarak bulanık esnek yakınlık yapılarıyla ilişkileri incelenecektir. Ayrıca bir bulanık esnek yakınlık dönüşüm tanımı verilecek ve bu dönüşüm yardımıyla bir bulanık esnek sürekli dönüşüm elde edilecektir.

Tanım 6.2.1. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay ve $f, g \in FS(X, E)$ olsun. $f\bar{\delta}(\tilde{X} - g)$ ise g bulanık esnek kümesine f nin bir bulanık esnek yakınlık komşuluğu denir ve bu durum $f \in g$ notasyonu ile gösterilir.

Teorem 6.2.2. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay olmak üzere \in bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$(YK1) \tilde{\emptyset} \in f.$$

$$(YK2) f \in g \text{ ise } (\tilde{X} - g) \in (\tilde{X} - f).$$

$$(YK3) f \in g \text{ ise } f \sqcap g^c = \tilde{\emptyset}.$$

$$(YK4) f \in (g \sqcap h) \Leftrightarrow f \in g \text{ ve } f \in h.$$

$$(YK5) f \sqsubseteq g \sqsubseteq h \sqsubseteq h' \text{ ise } f \in h'.$$

$$(YK6) f \in g \text{ ise } f \in h \in g \text{ olacak şekilde bir } h \in FS(X, E) \text{ vardır.}$$

İspat. (YK1) özelliği açıktır.

(YK2) $f \in g$ ise $f\bar{\delta}(\tilde{X} - g)$ dir. (BEY3) den $(\tilde{X} - g)\bar{\delta}f$, yani $(\tilde{X} - g) \in (\tilde{X} - f)$ elde edilir.

(YK3) $f \in g$ olsun. O halde (BEY2) den $f \sqcap g^c = \tilde{\emptyset}$ bulunur.

(YK4) $f \in (g \sqcap h) \Leftrightarrow f\bar{\delta}(g \sqcap h)^c = g^c \sqcup h^c \Leftrightarrow f\bar{\delta}g^c$ ve $f\bar{\delta}h^c \Leftrightarrow f \in g$ ve $f \in h$.

(YK5) $f \bar{\in} h'$ ise $f\bar{\delta}(\tilde{X} - h')$ elde edilir. $f \sqsubseteq g$ ve $(\tilde{X} - h') \sqsubseteq (\tilde{X} - h)$ olduğundan $g\bar{\delta}(\tilde{X} - h)$ sağlanır. Bu ise $g \bar{\in} h$ çelişkisine neden olur (Burada $\bar{\in}$ ile \in nin olumsuzu gösterilmektedir).

(YK6) $f \in g$ olsun. Bu takdirde $f\bar{\delta}(\tilde{X} - g)$ ve dolayısıyla (BEY5) den en az bir $h \in FS(X, E)$ için $f\bar{\delta}(\tilde{X} - h)$ ve $h\bar{\delta}(\tilde{X} - g)$ bulunur. Buradan $f \in h \in g$ elde edilir.

Teorem 6.2.3. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay ve $f, g \in FS(X, E)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $f \in g \Leftrightarrow \bar{f} \in g$.

(ii) $f \in g$ ise $f \sqsubseteq h \sqsubseteq g$ olacak şekilde bir $h \in \tau(\delta)$ vardır.

(iii) $f\bar{\delta}g$ ise $f \in h_1$, $g \in h_2$ ve $h_1\bar{\delta}h_2$ olacak şekilde h_1 ve h_2 bulanık esnek kümeleri vardır.

İspat. (i) $g\bar{\delta}f \Leftrightarrow g\bar{\delta}\bar{f}$ özelliğinden açıktır.

(ii) $f \in g$ olsun. O halde $f\bar{\delta}(\tilde{X} - g)$ ve buradan

$$\overline{\tilde{X} - g} = \tilde{X} - \sqcup\{h' \mid (\tilde{X} - g)\bar{\delta}h'\} \sqsubseteq \tilde{X} - f$$

elde edilir. $h = \tilde{X} - (\overline{\tilde{X} - g})$ alınsın. Dolayısıyla

$$\overline{\tilde{X} - h} = \overline{\overline{\tilde{X} - g}} = \overline{\tilde{X} - g} = \tilde{X} - h$$

olur. Böylece $h \in \tau(\delta)$ ve $f \sqsubseteq h \sqsubseteq g$ sağlanır.

(iii) $f\bar{\delta}g$ ise (BEY5) den $f\bar{\delta}h_2$ ve $g\bar{\delta}(\tilde{X} - h_2)$ olacak şekilde bir $h_2 \in FS(X, E)$ vardır. $h_2\bar{\delta}f$ olduğundan bir $h_1 \in FS(X, E)$ için $h_2\bar{\delta}h_1$ ve $f\bar{\delta}(\tilde{X} - h_1)$ elde edilir. Buradan $f \in h_1$, $g \in h_2$ ve $h_1\bar{\delta}h_2$ olacak şekilde h_1 ve h_2 bulanık esnek kümeleri bulunur.

Teorem 6.2.4. $FS(X, E)$ üzerinde (YK1)-(YK6) özelliklerini sağlayan bir \in bağıntısı verilsin. Bu takdirde, X üzerinde aşağıdaki gibi bir δ bulanık esnek yakınlık vardır.

$$f\bar{\delta}g \Leftrightarrow f \in (\tilde{X} - g).$$

Ayrıca, bu bulanık esnek yakınlık yapısına göre g bulanık esnek kümesinin f nin bir bulanık esnek yakınlık komşuluğu olması için gerek ve yeter koşul $f \in g$ olmasıdır.

İspat. Öncelikle δ nın X üzerinde bir bulanık esnek yakınlık olduğunu gösterelim.

(BEY1) $f \in FS(X, E)$ olsun. (YK1) den $\tilde{\emptyset} \in (\tilde{X} - f)$ ve buradan da $\tilde{\emptyset}\bar{\delta}f$ elde edilir.

(BEY2) $f\bar{\delta}g$ olsun. O halde $f \in g^c$ ve (YK3) den

$$f \sqcap g = f \sqcap (g^c)^c = \tilde{\emptyset}$$

bulunur.

(BEY3) $f\bar{\delta}g$ ise $f \in g^c$ olur. (YK2) özelliği gereğince $g \in f^c$ ve dolayısıyla $g\bar{\delta}f$ sağlanır.

(BEY4) $f\bar{\delta}(g \sqcup h) \Leftrightarrow f \in (g \sqcup h)^c = g^c \sqcap h^c \Leftrightarrow f \in g^c$ ve $f \in h^c \Leftrightarrow f\bar{\delta}g$ ve $f\bar{\delta}h$.

(BEY5) $f\bar{\delta}g$ olsun. Bu takdirde $f \in (\tilde{X} - g)$ dir. (YK6) dan $f \in h \in (\tilde{X} - g)$ olacak şekilde bir $h \in FS(X, E)$ vardır. Böylece $f\bar{\delta}(\tilde{X} - h)$ ve $h\bar{\delta}g$ elde edilir.

O halde δ , X üzerinde bir bulanık esnek yakınlıktır. Ayrıca, bulanık esnek yakınlık komşuluk tanımından, g bulanık esnek kümesinin f nin bir bulanık esnek yakınlık komşuluğu olması için gerek ve yeter koşulun $f \in g$ olması gerektiği kolayca görülür.

Teorem 6.2.5. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay ve $f \in FS(X, E)$ ise bu durumda

$$\bar{f} = \sqcap\{g \mid f \in g\}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $f \in g$ olacak şekilde bir $g \in FS(X, E)$ alınsın. Buradan $\bar{f} \in g$ ve (YK3) den $\bar{f} \sqsubseteq g$ elde edilir. Böylece

$$\bar{f} \sqsubseteq \Pi\{g \mid f \in g\}$$

bulunur. Eşitliğin tersini göstermek için $\Lambda\{g(e)(x) \mid f \in g\} > \bar{f}(e)(x)$ olacak şekilde bir $e \in E$ ve $x \in X$ olduğunu kabul edelim. $\Lambda\{g(e)(x) \mid f \in g\} = a$ olsun. Bu durumda

$$\bar{f}(e)(x) = 1 - V\{h(e)(x) \mid f \bar{\delta} h\} < a - \epsilon$$

olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. Bu takdirde en az bir $h \in FS(X, E)$ için $f \bar{\delta} h$ ve $1 - h(e)(x) < a - \epsilon$ sağlanır. $f \bar{\delta} h$ olduğundan $f \in (\bar{X} - h)$ ve buradan da $\Pi\{g \mid f \in g\} \sqsubseteq (\bar{X} - h)$ elde edilir. Bu ise

$$a = \Lambda\{g(e)(x) \mid f \in g\} \leq 1 - h(e)(x) < a - \epsilon$$

çelişkisine neden olur.

Tanım 6.2.6. (X, δ_1, E) ve (Y, δ_2, K) herhangi iki bulanık esnek yakınlık uzay ve $\varphi_\psi : (X, \delta_1, E) \rightarrow (Y, \delta_2, K)$ bir bulanık esnek dönüşüm olsun. Her $f, g \in FS(X, E)$ için

$$f \delta_1 g \Rightarrow \varphi_\psi(f) \delta_2 \varphi_\psi(g)$$

sağlanıyorsa φ_ψ bulanık esnek dönüşümüne bir bulanık esnek yakınlık dönüşüm denir (Çetkin ve diğ. 2014).

Önerme 6.2.7. (X, δ_1, E) ve (Y, δ_2, K) herhangi iki bulanık esnek yakınlık uzay olsun. Bir $\varphi_\psi : (X, \delta_1, E) \rightarrow (Y, \delta_2, K)$ bulanık esnek dönüşümünün bir bulanık esnek yakınlık dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul her $h_1, h_2 \in FS(Y, K)$ için $h_1 \bar{\delta}_2 h_2$ iken $\varphi_\psi^{-1}(h_1) \bar{\delta}_1 \varphi_\psi^{-1}(h_2)$ (veya $h_1 \in_2 h_2$ iken $\varphi_\psi^{-1}(h_1) \in_1 \varphi_\psi^{-1}(h_2)$) olmasıdır.

İspat. Tanım 6.2.6 dan kolaylıkla elde edilir.

Önerme 6.2.8. İki bulanık esnek yakınlık dönüşümün bileşkesi bir bulanık esnek yakınlık dönüşümdür.

İspat. Tanım 6.2.6 dan açıktır.

Teorem 6.2.9. Bir $\varphi_\psi : (X, \delta_1, E) \rightarrow (Y, \delta_2, K)$ bulanık esnek yakınlık dönüşümü bir bulanık esnek sürekli dönüşümdür.

İspat. $f \in \tau(\delta_2)$ olsun. $h \overline{\delta_2}(\tilde{Y} - f)$ olacak şekilde bir $h \in FS(Y, K)$ alınsın. Hipotezden, $\varphi_\psi^{-1}(h) \overline{\delta_1}(\tilde{X} - \varphi_\psi^{-1}(f))$ olur. (BEY2) aksiyomu gereğince

$$\overline{\tilde{X} - \varphi_\psi^{-1}(f)} \sqsubseteq \tilde{X} - \varphi_\psi^{-1}(h)$$

olur. Bu takdirde her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$\begin{aligned} (\overline{\tilde{X} - \varphi_\psi^{-1}(f)})(e)(x) &\leq (\tilde{X} - \varphi_\psi^{-1}(h))(e)(x) \\ &= 1 - h(\psi(e))(\varphi(x)) \\ &= (\tilde{Y} - h)(\psi(e))(\varphi(x)) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} (\overline{\tilde{X} - \varphi_\psi^{-1}(f)})(e)(x) &\leq (\Pi_{h \overline{\delta_2}(\tilde{Y} - f)}(\tilde{Y} - h))(\psi(e))(\varphi(x)) \\ &= (\overline{\tilde{Y} - f})(\psi(e))(\varphi(x)) \\ &= (\tilde{Y} - f)(\psi(e))(\varphi(x)) \\ &= 1 - \varphi_\psi^{-1}(f)(e)(x) \\ &= (\tilde{X} - \varphi_\psi^{-1}(f))(e)(x) \end{aligned}$$

ifadesi sağlanır. Böylece $\overline{\tilde{X} - \varphi_\psi^{-1}(f)} \sqsubseteq \tilde{X} - \varphi_\psi^{-1}(f)$ olduğundan $\varphi_\psi^{-1}(f) \in \tau(\delta_1)$ elde edilir. O halde φ_ψ bulanık esnek yakınlık dönüşümü bir bulanık esnek sürekli dönüşümdür.

6.3. BAŞLANGIÇ BULANIK ESNEK YAKINLIK YAPISI

Bu bölümün amacı başlangıç bulanık esnek yakınlık yapısının varlığını araştırmak ve bundan faydalanarak bir çarpım bulanık esnek yakınlık tanımlamaktır.

Tanım 6.3.1. δ_1 ve δ_2 , X üzerinde iki bulanık esnek yakınlık olsun. Her $f, g \in FS(X, E)$ için $f \delta_2 g$ iken $f \delta_1 g$ oluyorsa δ_2 , δ_1 den daha incedir (veya δ_1 , δ_2 den daha kabadır) denir ve bu durum $\delta_1 < \delta_2$ şeklinde gösterilir.

Tanım 6.3.2. X boştan farklı bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olmak üzere $\{(X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$ bulanık esnek yakınlık uzayların bir ailesi ve her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha : FS(X, E) \rightarrow (X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha)$ bir bulanık esnek dönüşüm olsun. Her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha : (X, \delta, E) \rightarrow (X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha)$ dönüşümlerini bulanık esnek yakınlık dönüşüm yapan X üzerindeki en kaba δ bulanık esnek yakınlık yapısına bir başlangıç bulanık esnek yakınlık denir.

Aşağıdaki teorem bir başlangıç bulanık esnek yakınlık yapısının varlığını gösterir.

Teorem 6.3.3. X boştan farklı bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olmak üzere $\{(X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$ bulanık esnek yakınlık uzayların bir ailesi ve her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha : FS(X, E) \rightarrow (X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha)$ bir bulanık esnek dönüşüm olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan δ ikili bağıntısı X üzerinde bir başlangıç bulanık esnek yakınlıktır.

$f, g \in FS(X, E)$ olsun. $f \delta g$ olması için gerek ve yeter koşul $f = \sqcup_{i=1}^n f_i$ ve $g = \sqcup_{j=1}^m g_j$ olmak üzere her $\{f_i \mid i = 1, \dots, n\}$ ve $\{g_j \mid j = 1, \dots, m\}$ sonlu aileleri için her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(f_i) \delta_\alpha (\varphi_\psi)_\alpha(g_j)$ olacak şekilde en az bir f_i ve g_j bulanık esnek kümeleri vardır.

İspat. Öncelikle δ nın X üzerinde bir bulanık esnek yakınlık olduğunu gösterelim.

(BEY1) aksiyomu açıktır.

(BEY2) $f \bar{\delta} g$ olsun. Bu durumda $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ olmak üzere bir $\alpha = s_{ij} \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(f_i) \bar{\delta}_\alpha (\varphi_\psi)_\alpha(g_j)$ olacak şekilde sırasıyla f ve g nin $f = \sqcup_{i=1}^n f_i$ ve $g = \sqcup_{j=1}^m g_j$ sonlu örtüleri vardır. Buradan

$$(\varphi_\psi)_\alpha(\sqcup_{i=1}^n f_i) \sqcap (\varphi_\psi)_\alpha(\sqcup_{j=1}^m g_j) = (\varphi_\psi)_\alpha(f) \sqcap (\varphi_\psi)_\alpha(g) = \tilde{\emptyset}$$

elde edilir. Böylece $f \sqcap g = \tilde{\emptyset}$ sağlanır.

(BEY3) Her bir $\alpha \in \Delta$ için δ_α bir bulanık esnek yakınlık olduğundan açıktır.

(BEY4) $f\delta g$ olsun. Buradan her $h \sqsupseteq g$ için $f\delta h$ olduğu kolayca görülür. O halde $f\delta g$ veya $f\delta h$ iken $f\delta(g \sqcup h)$ sağlanır. Tersine, $f\bar{\delta}g$ ve $f\bar{\delta}h$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ olmak üzere bir $\alpha = s_{ij} \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(f_i)\bar{\delta}_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(g_j)$ olacak şekilde sırasıyla f ve g nin $f = \sqcup_{i=1}^n f_i$ ve $g = \sqcup_{j=1}^m g_j$ sonlu örtüleri vardır. Benzer şekilde $p = 1, \dots, q$ ve $j = m + 1, \dots, m + l$ olmak üzere bir $\alpha = t_{pj} \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(k_p)\bar{\delta}_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(g_j)$ olacak şekilde sırasıyla f ve h nin $f = \sqcup_{p=1}^q k_p$ ve $h = \sqcup_{j=m+1}^{m+l} g_j$ sonlu örtüleri vardır. Bu takdirde,

$$\{f_i \sqcap k_p \mid i = 1, \dots, n; p = 1, \dots, q\} \text{ ve } \{g_j \mid j = 1, \dots, m + l\}$$

sırasıyla f ve $g \sqcup h$ nin sonlu örtüleridir. Böylece $\alpha = s_{ij}$ veya $\alpha = t_{pj}$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(f_i \sqcap k_p)\bar{\delta}_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(g_j)$ olduğundan $f\bar{\delta}(g \sqcup h)$ elde edilir.

(BEY5) $f\bar{\delta}g$ ve her $h \in FS(X, E)$ için ya $f\delta h$ ya da $g\delta(\tilde{X} - h)$ koşullarını sağlayan tüm $(f, g) \in FS(X, E) \times FS(X, E)$ ikililerin kümesi Ω olsun. (BEY5) aksiyomunu sağlamak için Ω kümesinin boş olduğunu göstermek yeterlidir. $(f, g) \in \Omega$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(f)\delta_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(g)$ olur. Gerçekten de bir $h' \in FS(X_\alpha, E_\alpha)$ için $h = (\varphi_\psi)_\alpha^{-1}(h')$ olsun. $f\delta h$ ise $(\varphi_\psi)_\alpha(f)\delta_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(h)$ sağlanır. $(\varphi_\psi)_\alpha(h) \sqsubseteq h'$ olduğundan $(\varphi_\psi)_\alpha(f)\delta_\alpha h'$ bulunur. Benzer şekilde $g\delta(\tilde{X} - h)$ ise $(\varphi_\psi)_\alpha(g)\delta_\alpha(\tilde{X}_\alpha - h')$ olur. δ_α, X_α üzerinde bir bulanık esnek yakınlık olduğundan $(\varphi_\psi)_\alpha(f)\delta_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(g)$ elde edilir. Ayrıca, $(f, g) \in \Omega$ olduğundan her $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(f_i)\bar{\delta}_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(g_j)$ koşulunu sağlayan bir $\alpha \in \Delta$ olacak şekilde $n, m \in \mathbb{N}$ doğal sayıları ve $f = \sqcup_{i=1}^n f_i, g = \sqcup_{j=1}^m g_j$ sonlu örtüleri vardır. $l = n + m$ olsun. Burada $l > 2$ olduğunu görmek kolaydır. O halde her $(f, g) \in \Omega$ için böyle bir $l \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilir. Ω nın elemanlarına karşı gelen bu şekildeki tüm doğal sayıların kümesi κ olsun. Şimdi, κ daki en küçük l doğal sayısına karşı gelen bir $(f, g) \in \Omega$ alınsın. Bu takdirde her $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(f_i)\bar{\delta}_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(g_j)$ koşulunu sağlayan bir $\alpha \in \Delta$ olacak şekilde $l = n + m$ doğal sayısı ve $f = \sqcup_{i=1}^n f_i, g = \sqcup_{j=1}^m g_j$ sonlu örtüleri vardır. $n > 1$ olduğunu düşünelim ve

$f' = f_1 \sqcup \dots \sqcup f_{n-1}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki koşullardan birisi doğrudur:

(i) Her $h \in FS(X, E)$ için ya $f'\delta h$ ya da $g\delta(\tilde{X} - h)$ olur.

(ii) Her $h \in FS(X, E)$ için ya $f_n\delta h$ ya da $g\delta(\tilde{X} - h)$ olur.

Gerçekten de ne (i) ne de (ii) sağlansın. O halde $f'\bar{\delta}h_1$, $g\bar{\delta}(\tilde{X} - h_1)$ ve $f_n\bar{\delta}h_2$, $g\bar{\delta}(\tilde{X} - h_2)$ olacak şekilde $h_1, h_2 \in FS(X, E)$ bulanık esnek kümeleri vardır. $h = h_1 \cap h_2$ alınırsa $f\bar{\delta}h$ ve $g\bar{\delta}(\tilde{X} - h)$ elde edilir. Bu ise $(f, g) \in \Omega$ olması ile çelişir.

(i) nin sağlandığını kabul edelim. $f' \sqsubseteq f$ ve $f\bar{\delta}g$ olduğundan $f'\bar{\delta}g$ dir. (i) koşulu gereğince $(f', g) \in \Omega$ elde edilir. Bu durumda $(n - 1) + m = l - 1 \in \kappa$ olduğundan bir çelişki elde edilir. Benzer şekilde (ii) koşulu sağlanırsa da bir çelişki bulunur. Böylece Ω kümesi boştur. Sonuç olarak δ , X üzerinde bir bulanık esnek yakınlıktır.

Her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha : (X, \delta, E) \rightarrow (X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha)$ dönüşümlerinin bir bulanık esnek yakınlık dönüşüm olduğu kolaylıkla görülür.

Son olarak δ^* , X üzerinde tüm $(\varphi_\psi)_\alpha : (X, \delta^*, E) \rightarrow (X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha)$ dönüşümlerini bulanık esnek yakınlık dönüşüm yapan başka bir bulanık esnek yakınlık olsun. $\delta < \delta^*$ olduğu gösterilirse ispat biter. Bunun için $f\delta^*g$ olsun. f ve g bulanık esnek kümelerin sırasıyla $f = \sqcup_{i=1}^n f_i$ ve $g = \sqcup_{j=1}^m g_j$ sonlu örtüleri olsun. (BEY4) den $f_i\delta^*g$ olacak şekilde bir $i \in \{1, \dots, n\}$ vardır. Benzer şekilde $f_i\delta^*g_j$ olacak şekilde bir $j \in \{1, \dots, m\}$ bulunur. Her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha$ bir bulanık esnek yakınlık dönüşüm olduğundan $(\varphi_\psi)_\alpha(f_i)\delta_\alpha(\varphi_\psi)_\alpha(g_j)$ elde edilir. Böylece $f\delta g$ sağlanır.

Teorem 6.3.4. Bir $\varphi_\psi : (Y, \delta^*, K) \rightarrow (X, \delta, E)$ bulanık esnek dönüşümünün bir bulanık esnek yakınlık dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in \Delta$ için

$$(\varphi_\psi)_\alpha \circ \varphi_\psi : (Y, \delta^*, K) \rightarrow (X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha)$$

bulanık esnek dönüşümünün bir bulanık esnek yakınlık dönüşüm olmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) Bulanık esnek yakınlık dönüşüm tanımından açıktır.

(\Leftarrow) Her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha \circ \varphi_\psi$ bir bulanık esnek yakınlık dönüşüm ve $f \delta^* g$ olsun. Bu durumda $\varphi_\psi(f) = \sqcup_{i=1}^n f_i$ ve $\varphi_\psi(g) = \sqcup_{j=1}^m g_j$ olmak üzere

$$f \sqsubseteq \sqcup_{i=1}^n \varphi_\psi^{-1}(f_i), \quad g \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^m \varphi_\psi^{-1}(g_j)$$

elde edilir. $f \delta^* g$ olduğundan (BEY4) gereğince $\varphi_\psi^{-1}(f_i) \delta^* \varphi_\psi^{-1}(g_j)$ olacak şekilde en az bir $i \in \{1, \dots, n\}$ ve $j \in \{1, \dots, m\}$ vardır. O halde

$$(\varphi_\psi)_\alpha \circ \varphi_\psi \circ \varphi_\psi^{-1}(f_i) \sqsubseteq (\varphi_\psi)_\alpha(f_i)$$

$$(\varphi_\psi)_\alpha \circ \varphi_\psi \circ \varphi_\psi^{-1}(g_j) \sqsubseteq (\varphi_\psi)_\alpha(g_j)$$

olduğundan her $\alpha \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_\alpha(f_i) \delta_\alpha (\varphi_\psi)_\alpha(g_j)$ bulunur. Böylece $\varphi_\psi(f) \delta \varphi_\psi(g)$ sağlanır.

Tanım 6.3.5. $\{(X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$ bulanık esnek yakınlık uzayların bir ailesi ve $X = \prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$, $E = \prod_{\alpha \in \Delta} E_\alpha$ kartezyen çarpım kümeleri olsun. Her $\alpha \in \Delta$ için $(p_{X_\alpha})_{q_{E_\alpha}}$ bulanık esnek izdüşüm dönüşümleri yardımıyla üretilen X üzerindeki $\delta = \prod_{\alpha \in \Delta} \delta_\alpha$ başlangıç bulanık esnek yakınlık yapısına bir çarpım bulanık esnek yakınlık denir.

Aşağıdaki sonuçlar Teorem 6.3.3 ve Teorem 6.3.4 den kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 6.3.6. $\{(X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$ bulanık esnek yakınlık uzayların bir ailesi, $X = \prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$, $E = \prod_{\alpha \in \Delta} E_\alpha$ kartezyen çarpım kümeleri ve her $\alpha \in \Delta$ için $(p_{X_\alpha})_{q_{E_\alpha}}$ bir bulanık esnek izdüşüm dönüşümü olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan $\delta = \prod_{\alpha \in \Delta} \delta_\alpha$ ikili bağıntısı X üzerinde bir çarpım bulanık esnek yakınlıktır.

$f, g \in FS(X, E)$ olsun. $f \delta g$ olması için gerek ve yeter koşul $f = \sqcup_{i=1}^n f_i$ ve $g = \sqcup_{j=1}^m g_j$ olmak üzere her $\{f_i \mid i = 1, \dots, n\}$ ve $\{g_j \mid j = 1, \dots, m\}$ sonlu aileleri için her $\alpha \in \Delta$ için $(p_{X_\alpha})_{q_{E_\alpha}}(f_i) \delta_\alpha (p_{X_\alpha})_{q_{E_\alpha}}(g_j)$ olacak şekilde en az bir f_i ve g_j bulanık esnek kümeleri vardır.

Sonuç 6.3.7. Bir $\varphi_\psi : (Y, \delta^*, K) \rightarrow (X, \delta, E)$ bulanık esnek dönüşümünün bir bulanık esnek yakınlık dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in \Delta$ için $(p_{X_\alpha})_{q_{E_\alpha}} \circ \varphi_\psi : (Y, \delta^*, K) \rightarrow (X_\alpha, \delta_\alpha, E_\alpha)$ bulanık esnek dönüşümünün bir bulanık esnek yakınlık dönüşüm olmasıdır.

6.4. BULANIK ESNEK YIĞILMALAR

Bu bölümde bir bulanık esnek yığılma kavramı tanımlanacak ve önemli sonuçları elde edilecektir. Ayrıca bulanık esnek yığılma kavramının ultra bulanık esnek süzgeç ve bulanık esnek yakınlık yapılarıyla arasındaki ilişkileri araştırılacaktır.

Tanım 6.4.1. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay ve $\sigma \subset FS(X, E)$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa σ ya X üzerinde bir bulanık esnek yığılma denir.

(C1) $f, g \in \sigma$ ise $f\delta g$.

(C2) Her $g \in \sigma$ için $f\delta g$ ise $f \in \sigma$.

(C3) $f \sqcup g \in \sigma$ ise $f \in \sigma$ veya $g \in \sigma$.

Örnek 6.4.2. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay ve $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere $e_{x^\lambda} \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. Bu durumda

$$\sigma_{e_{x^\lambda}} = \{f \in FS(X, E) \mid \bar{f}(e)(x) > \lambda\}$$

bir bulanık esnek yığılmadır.

(C1) $f, g \in \sigma_{e_{x^\lambda}}$ olsun. $\bar{f}(e)(x) > \lambda$ ve $\bar{g}(e)(x) > \lambda$ olduğundan $\bar{f} \sqcap \bar{g} \neq \tilde{\emptyset}$ ve dolayısıyla $f\delta g$ elde edilir.

(C2) Her $g \in \sigma_{e_{x^\lambda}}$ için $f\delta g$ olsun. Buna göre $f\bar{\delta}g$ olacak şekilde bir $g \in FS(X, E)$ bulanık esnek kümesi varsa $g \notin \sigma_{e_{x^\lambda}}$, yani $g(e)(x) \leq \lambda$ olur. Buradan

$$\bar{f}(e)(x) = 1 - V\{g(e)(x) \mid f\bar{\delta}g\} \geq 1 - \lambda > \lambda$$

ifadesi sağlanır. Böylece $f \in \sigma_{e_{x^\lambda}}$ elde edilir.

(C3) $f \sqcup g \in \sigma_{e_{x^\lambda}}$ ise $(\overline{f \sqcup g})(e)(x) > \lambda$ bulunur. O halde $\bar{f}(e)(x) > \lambda$ veya $\bar{g}(e)(x) > \lambda$ ve buradan da $f \in \sigma_{e_{x^\lambda}}$ veya $g \in \sigma_{e_{x^\lambda}}$ elde edilir.

Lemma 6.4.3. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay olsun. Bu takdirde,

(1) $\sigma_1 \subset \sigma_2$ olacak şekilde X üzerinde σ_1 ve σ_2 bulanık esnek yığılmaları varsa $\sigma_1 = \sigma_2$ dir.

(2) σ bir bulanık esnek yığılma olsun.

(i) $f \in \sigma$ ve $f \sqsubseteq f_1$ ise $f_1 \in \sigma$.

(ii) $\tilde{\emptyset} \notin \sigma$ ve $\tilde{X} \in \sigma$.

(iii) $f \in \sigma$ olması için gerek ve yeter koşul $\bar{f} \in \sigma$ olmasıdır.

İspat. (1) $f \in \sigma_2$ olsun. Buna göre (C1) gereğince her $g \in \sigma_2$ için $f\delta g$ olur. $\sigma_1 \subset \sigma_2$ olduğundan her $g \in \sigma_1$ için $f\delta g$ elde edilir. O halde (C2) den $f \in \sigma_1$ dir.

(2) (i) $f \in \sigma$ olduğundan her $g \in \sigma$ için $f\delta g$ sağlanır. Böylece her $g \in \sigma$ için $f_1\delta g$ ve dolayısıyla $f_1 \in \sigma$ elde edilir.

(ii) (C1) ve (C2) koşullarından açıktır.

(iii) $\bar{f}\delta g$ iken $f\delta g$ olduğundan (C2) gereğince kolayca görülür.

Teorem 6.4.4. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay olsun ve $\sigma \subset FS(X, E)$ aşağıdaki koşulları sağlasın.

(i) $\tilde{\emptyset} \notin \sigma$.

(ii) $f \in \sigma \Leftrightarrow \bar{f} \in \sigma$.

(iii) $f \sqcup g \in \sigma \Leftrightarrow f \in \sigma$ veya $g \in \sigma$.

$f_0 \in \sigma$ olsun. Bu durumda $f_0 \in \mathcal{F} \subset \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra bulanık esnek süzgeç vardır.

İspat. Ω , aşağıdaki iki özelliği sağlayan tüm $\omega \subset FS(X, E)$ alt kümelerinden oluşan bir kümeyi göstereyim.

(1) $f_0 \in \omega$.

(2) $f_1, \dots, f_n \in \omega$ ise $f_1 \sqcap \dots \sqcap f_n \in \omega$.

Zorn Lemma dan Ω nın bir ω_0 maksimal elemanı vardır. $f_0 \in \omega_0 \subset \sigma$ olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi ω_0 ailesinin X üzerinde bir bulanık esnek süzgeç olduğunu gösterelim.

(S1) koşulu açıktır.

(S2) $f_1, f_2 \in \omega_0$ olsun. Bu durumda $f_1 \sqcap f_2 \in \sigma$ olur. $\omega_0 \cup \{f_1 \sqcap f_2\} \in \Omega$ olduğundan ω_0 in maksimalliği gereğince $f_1 \sqcap f_2 \in \omega_0$ elde edilir.

(S3) $f \in \omega_0$ ve $f \sqsubseteq g$ olsun. Buradan $g = (g \sqcup f) \in \sigma$ olur. Böylece $\omega_0 \cup \{g\} \in \Omega$ olduğundan $g \in \omega_0$ sağlanır.

O halde ω_0 , X üzerinde bir bulanık esnek süzgeçtir. Teorem 5.3.2 den ω_0 ailesini içeren X üzerinde bir \mathcal{F} ultra bulanık esnek süzgeç vardır. Bu durumda $\mathcal{F} \subset \sigma$ olduğu gösterilirse ispat biter. $f \in \mathcal{F}$ ve $f \notin \sigma$ olacak şekilde bir $f \in FS(X, E)$ bulanık esnek kümesi olduğunu kabul edelim. (ii) den $\bar{f} \notin \sigma$ olur. Diğer yandan $\bar{f} \in \mathcal{F}$ ve $\bar{f} \sqcap (\tilde{X} - \bar{f}) = \tilde{\emptyset}$ olduğundan Teorem 5.3.4 (i) gereğince $(\tilde{X} - \bar{f}) \notin \mathcal{F}$ ve buradan da $(\tilde{X} - \bar{f}) \notin \omega_0$ elde edilir. $\tilde{X} = \bar{f} \sqcup (\tilde{X} - \bar{f}) \in \sigma$ ve $\bar{f} \notin \sigma$ olduğundan $(\tilde{X} - \bar{f}) \in \sigma$ bulunur. Şimdi, her $h \in \omega_0$ için $(\tilde{X} - \bar{f}) \sqcap h \in \sigma$ olduğunu kabul edelim. ω_0 bir bulanık esnek süzgeç olduğundan $h_1, \dots, h_n \in \omega_0$ ise $h_1 \sqcap \dots \sqcap h_n \in \omega_0$ ve dolayısıyla $(\tilde{X} - \bar{f}) \sqcap h_1 \sqcap \dots \sqcap h_n \in \sigma$ sağlanır. Bu durumda $\omega_0 \cup \{\tilde{X} - \bar{f}\} \in \Omega$ elde edilir. Bu ise $(\tilde{X} - \bar{f}) \in \omega_0$ çelişmesine neden olur. O halde $(\tilde{X} - \bar{f}) \sqcap h \notin \sigma$ olacak şekilde en az bir $h \in \omega_0$ vardır. Ayrıca $\bar{f} \notin \sigma$ ve $(\bar{f} \sqcap h) \sqsubseteq \bar{f}$ olduğundan $(\bar{f} \sqcap h) \notin \sigma$ dir. Böylece (iii) gereğince

$$h = \tilde{X} \sqcap h = (\bar{f} \sqcup (\tilde{X} - \bar{f})) \sqcap h = (\bar{f} \sqcap h) \sqcup ((\tilde{X} - \bar{f}) \sqcap h) \notin \sigma$$

bulunur. Elde edilen bu çelişki ise ispatı tamamlar.

Teorem 6.4.5. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay ve $\sigma \subset FS(X, E)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) σ nın X üzerinde bir bulanık esnek yığılma olması için gerek ve yeter koşul

$$\sigma = \{f \in FS(X, E) \mid \text{her } g \in \mathcal{F} \text{ için } f \delta g\}$$

olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra bulanık esnek süzgeç olmasıdır.

(ii) σ bir bulanık esnek yığılma ve $f_0 \in \sigma$ ise $f_0 \in \mathcal{F} \subset \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra bulanık esnek süzgeç vardır.

(iii) σ bir bulanık esnek yığılma olmak üzere $\mathcal{F} \subset \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra bulanık esnek süzgeç varsa

$$\sigma = \{f \in FS(X, E) \mid \text{her } g \in \mathcal{F} \text{ için } f\delta g\}$$

olur.

İspat. (i) (\Leftarrow) σ nın X üzerinde bir bulanık esnek yığılma olduğunu gösterelim.

(C1) $f_1, f_2 \in \sigma$ olsun. $f_1\bar{\delta}f_2$ olduğunu kabul edelim. (BEY5) den $f_1\bar{\delta}h$ ve $f_2\bar{\delta}(\bar{X} - h)$ olacak şekilde bir $h \in FS(X, E)$ vardır. $f_1, f_2 \in \sigma$ olduğundan $h, (\bar{X} - h) \notin \mathcal{F}$ bulunur. Böylece Teorem 5.3.4 (iii) den \mathcal{F} nin bir ultra bulanık esnek süzgeç olmadığı çelişkiye ulaşılır. O halde $f_1\delta f_2$ elde edilir.

(C2) Her $g \in \sigma$ için $f\delta g$ olsun. $\mathcal{F} \subset \sigma$ olduğu açıktır. Gerçekten, $h \in \mathcal{F}$ ise her $h' \in \mathcal{F}$ için $h \sqcap h' \neq \bar{\emptyset}$ olur. Böylece her $h' \in \mathcal{F}$ için $h\delta h'$ ve buradan da $h \in \sigma$ elde edilir. O halde her $g \in \sigma$ için $f\delta g$ olduğundan her $g \in \mathcal{F}$ için $f\delta g$ bulunur. Dolayısıyla $f \in \sigma$ sağlanır.

(C3) $f, g \notin \sigma$ olsun. Bu durumda $f\bar{\delta}h_1$ ve $g\bar{\delta}h_2$ olacak şekilde $h_1, h_2 \in \mathcal{F}$ vardır. $h = (h_1 \sqcap h_2)$ olarak tanımlanırsa $h \in \mathcal{F}$ ve $(f \sqcup g)\bar{\delta}h$ elde edilir. Böylece $(f \sqcup g) \notin \sigma$ olur.

(\Rightarrow) σ , bir bulanık esnek yığılma ve $f_0 \in \sigma$ olsun. Bu durumda Teorem 6.4.4 gereğince $f_0 \in \mathcal{F} \subset \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra bulanık esnek süzgeç vardır.

$$\sigma_1 = \{f \in FS(X, E) \mid \text{her } g \in \mathcal{F} \text{ için } f\delta g\}$$

olsun. σ_1 in bir bulanık esnek yığılma olduğu bilinmektedir. Ayrıca $\sigma \subset \sigma_1$ dir. Gerçekten, $h \in \sigma$ ise her $h' \in \sigma$ için $h\delta h'$ olur. Buradan her $h' \in \mathcal{F}$ için $h\delta h'$ ve dolayısıyla $h \in \sigma_1$ bulunur. Böylece Lemma 6.4.3 (1) gereğince $\sigma = \sigma_1$ elde edilir.

(ii) Teorem 6.4.4 den kolaylıkla görülür.

(iii) σ , bir bulanık esnek yığılma ve $\mathcal{F} \subset \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra bulanık esnek süzgeç olsun.

$$\sigma_1 = \{f \in FS(X, E) \mid \text{her } g \in \mathcal{F} \text{ için } f\delta g\}$$

olsun. Böylece σ_1 ailesi σ yı içeren bir bulanık esnek yığılmadır. O halde Lemma 6.4.3 (1) gereğince $\sigma = \sigma_1$ elde edilir.

Sonuç 6.4.6. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay olsun. Bu takdirde X üzerindeki her ultra bulanık esnek süzgeç bir tek bulanık esnek yığılma tarafından kapsanır.

İspat. \mathcal{F} , X üzerinde bir ultra bulanık esnek süzgeç olsun. O halde Teorem 6.4.5 gereğince $\mathcal{F} \subset \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir tek $\sigma = \{f \in FS(X, E) \mid \text{her } g \in \mathcal{F} \text{ için } f\delta g\}$ bulanık esnek yığılması vardır.

Teorem 6.4.7. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay ve $f_0, g_0 \in FS(X, E)$ olsun. $f_0\delta g_0$ ise bu durumda $f_0, g_0 \in \sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir σ bulanık esnek yığılması vardır.

İspat. $\sigma_0 = \{f \in FS(X, E) \mid f\delta g_0\}$ olsun. σ_0 ailesinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu kolaylıkla görülür.

(i) $f_0 \in \sigma_0$.

(ii) $\emptyset \notin \sigma_0$.

(iii) $f \in \sigma_0 \Leftrightarrow \bar{f} \in \sigma_0$.

(iv) $f \sqcup g \in \sigma_0 \Leftrightarrow f \in \sigma_0$ veya $g \in \sigma_0$.

Teorem 6.4.4 gereğince $f_0 \in \mathcal{F} \subset \sigma_0$ olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra bulanık esnek süzgeç vardır.

$$\sigma = \{f \in FS(X, E) \mid \text{her } g \in \mathcal{F} \text{ için } f\delta g\}$$

olsun. Teorem 6.4.5 (i) den σ bir bulanık esnek yığılmadır. Diğer yandan $f_0, g_0 \in \sigma$ olur. Gerçekten, $h \in \mathcal{F}$ ise $h \in \sigma_0$ ve buradan da $h\delta g_0$ elde edilir. Böylece her $h \in \mathcal{F}$ için $h\delta g_0$ olduğundan $g_0 \in \sigma$ sağlanır. Ayrıca $\mathcal{F} \subset \sigma$ olduğundan $f_0 \in \sigma$ bulunur.

Teorem 6.4.8. (X, δ_1, E) ve (Y, δ_2, K) iki bulanık esnek yakınlık uzay ve $\varphi_\psi : (X, \delta_1, E) \rightarrow (Y, \delta_2, K)$ bir bulanık esnek yakınlık dönüşüm olsun. σ_1 X üzerinde bir bulanık esnek yığılma ise

$$\sigma_2 = \{h \in FS(Y, K) \mid \text{her } g \in \sigma_1 \text{ için } h\delta_2\varphi_\psi(g)\}$$

$\varphi_\psi(\sigma_1)$ ailesini içeren Y üzerinde bir bulanık esnek yığılmadır.

İspat. Teorem 6.4.5 (i) gereğince

$$\sigma_1 = \{f \in FS(X, E) \mid \text{her } g \in \mathcal{F} \text{ için } f\delta_1g\}$$

olacak şekilde X üzerinde bir \mathcal{F} ultra bulanık esnek süzgeç vardır. Teorem 5.3.7 den $\mathcal{B}^* = \{\varphi_\psi(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$, Y üzerindeki bir \mathcal{F}^* ultra bulanık esnek süzgeç için bir tabandır. O halde Teorem 6.4.5 (i) gereğince

$$\sigma_0 = \{h \in FS(Y, K) \mid \text{her } g \in \mathcal{F}^* \text{ için } h\delta_2g\}$$

Y üzerinde bir bulanık esnek yığılmadır. Öncelikle, $\varphi_\psi(\sigma_1) \subset \sigma_0$ olduğunu gösterelim. $h \in \varphi_\psi(\sigma_1)$ ise $h = \varphi_\psi(f)$ olacak şekilde bir $f \in \sigma_1$ vardır. Bu durumda her $g \in \mathcal{F}$ için $f\delta_1g$ bulunur. φ_ψ bir bulanık esnek yakınlık dönüşüm olduğundan her $\varphi_\psi(g) \in \mathcal{B}^*$ için $h\delta_2\varphi_\psi(g)$ sağlanır. Buradan da her $f' \in \mathcal{F}^*$ için $h\delta_2f'$ olur. Böylece $h \in \sigma_0$ elde edilir. Şimdi, $\sigma_2 = \sigma_0$ olduğu gösterilirse ispat biter. $h \in \sigma_2$ olsun. $\mathcal{F} \subset \sigma_1$ olduğundan her $g \in \mathcal{F}$ için $h\delta_2\varphi_\psi(g)$ dir. Dolayısıyla $h \in \sigma_0$ sağlanır. Tersine, $h \in \sigma_0$ olsun. Her $g \in \sigma_1$ için $\varphi_\psi(g) \in \sigma_0$ olduğundan (C1) gereğince $h\delta_2\varphi_\psi(g)$ elde edilir. Böylece $h \in \sigma_2$ dir.

Tanım 6.4.9. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay ve $A \subseteq X$ olsun. δ ile üretilen bulanık esnek yakınlık δ_A olmak üzere bir $\varphi_\psi : (A, \delta_A, E) \rightarrow (X, \delta, E)$ bulanık esnek dönüşüm olsun. $\varphi : A \rightarrow X$ ve $\psi : E \rightarrow E$ dönüşümleri birer içirme (inclusion) dönüşüm ise bu durumda $\varphi_\psi : (A, \delta_A, E) \rightarrow (X, \delta, E)$ dönüşümüne bir bulanık esnek içirme dönüşüm denir.

Teorem 6.4.10. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay ve $A \subseteq X$ olsun. σ_1 A üzerinde bir bulanık esnek yığılma ise

$$\sigma_2 = \{f \in FS(X, E) \mid \text{her } g \in \sigma_1 \text{ için } f\delta g\}$$

X üzerinde bir bulanık esnek yığılmadır.

İspat. Bir $\varphi_\psi : (A, \delta_A, E) \rightarrow (X, \delta, E)$ bulanık esnek içirme dönüşümü alınsın. Her $f \in FS(A, E)$ için $\varphi_\psi(f) = f$ olduğundan bu dönüşüm bir bulanık esnek yakınlık dönüşümdür. Böylece Teorem 6.4.8 gereğince istenilen sonuç kolaylıkla elde edilir.

Teorem 6.4.11. (X, δ, E) bir bulanık esnek yakınlık uzay, σ X üzerinde bir bulanık esnek yığılma ve $A \subseteq X$ olsun. Her $e \in E$ ve $x \in X - A$ için $f^*(e)(x) = 0$ olacak şekilde bir $f^* \in \sigma$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$\sigma_1 = \{f \in \sigma \mid \text{her } e \in E \text{ ve her } x \in X - A \text{ için } f(e)(x) = 0\}$$

A üzerinde bir bulanık esnek yığılmadır.

İspat. σ X üzerinde bir bulanık esnek yığılma ve $f^* \in \sigma$ olsun. Teorem 6.4.5 den

$$\sigma = \{f \in FS(X, E) \mid \text{her } g \in \mathcal{F} \text{ için } f\delta g\}$$

olacak şekilde f^* bulanık esnek kümesini içeren X üzerinde bir \mathcal{F} ultra bulanık esnek süzgeç vardır. Her $f \in \mathcal{F}$ için $f_A = f \sqcap \widetilde{\chi}_A$ olmak üzere $\mathcal{F}_A = \{f_A \mid f \in \mathcal{F}\}$ olsun. Teorem 5.3.11 den \mathcal{F}_A ailesi A üzerinde bir bulanık esnek süzgeçtir. Buradan

$$\sigma_0 = \{f \in FS(A, E) \mid \text{her } g_A \in \mathcal{F}_A \text{ için } f\delta_A g_A\}$$

A üzerinde bir bulanık esnek yığılmadır. $\sigma_0 = \sigma_1$ olduğu gösterilirse ispat biter. $f \in \sigma_0$ olsun. O halde her $g \in \mathcal{F}$ için $f\delta_A g_A$ ve dolayısıyla $f\delta g_A$ bulunur. $g_A \sqsubseteq g$ olduğundan her $g \in \mathcal{F}$ için $f\delta g$ elde edilir. Buradan $f \in \sigma$ dır. Böylece $f \in FS(A, E)$ olduğundan $f \in \sigma_1$ sağlanır. Şimdi, $f \in \sigma_1$ olsun. Bir $g_A \in \mathcal{F}_A$ bulanık esnek kümesi alınsın. Bu durumda $f_1 = (g \sqcap f^*) \in \mathcal{F}$ ve dolayısıyla $f\delta f_1$ bulunur. $f_1, f \in FS(A, E)$ olduğundan δ_A nın tanımı gereği $f\delta_A f_1$ elde edilir. Diğer yandan $f_1 \sqsubseteq g_A$ olduğundan $f\delta_A g_A$ olur. Böylece her $g_A \in \mathcal{F}_A$ için $f\delta_A g_A$ ve buradan da $f \in \sigma_0$ sağlanır.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde sıralanmıştır.

1. Esnek küme teorisi kullanılarak esnek düzgün uzaylar tanımlanmış ve esnek topolojik uzaylar ve esnek metrik uzaylar ile ilişkisi incelenmiştir. Kandil ve diğ. (2014) tarafından verilen esnek yakınlık uzaylarına ilişkin özellikler araştırılmış ve klasik anlamdaki yakınlık uzaylarıyla ilişkisi çalışılmıştır. Ayrıca, esnek düzgün uzaylardan bir esnek yakınlık uzay üretilmiş ve bir çarpım bulanık esnek yakınlık uzay kavramı tanımlanmıştır. Daha sonra bir esnek yığılma kavramı verilerek önemli sonuçları elde edilmiştir.

2. Sabit nokta teorisini esnek anlamda düzgün uzaylara uygulayabilmek için esnek elemanların yardımıyla bir *se*-düzgün uzay kavramı tanımlanmış ve önemli özellikleri elde edilmiştir. Daha sonra *se*-düzgün uzaylar üzerinde sabit esnek eleman teoremleri incelenmiş ve bu teoremler örnekler ile desteklenmiştir.

3. Çetkin ve Aygün (2014) tarafından verilen bulanık esnek süzgeçler ile ilgili özellikler incelenmiş ve bulanık esnek topolojik uzaylarda bulanık esnek süzgeçlerin yakınsaklığı üzerine çalışılmıştır. Ayrıca bir ultra bulanık esnek süzgeç ve bir doygun bulanık esnek süzgeç kavramları verilerek önemli sonuçları elde edilmiştir. Bir bulanık esnek komşuluk sistemi tanımlanmış ve bulanık esnek topolojik uzaylar ile ilişkisi incelenmiştir. Daha sonra Lowen anlamında bir bulanık esnek düzgün uzay tanımlanarak bulanık esnek komşuluk sistemi ve bulanık esnek topolojik uzaylar ile ilişkisi gösterilmiştir.

4. Çetkin ve diğ. (2014) tarafından tanımlanan bulanık esnek yakınlık uzaylar incelenerek önemli özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca bulanık esnek yakınlık uzaylar yardımıyla bir bulanık esnek topolojik uzay üretilmiştir. Bir bulanık esnek yakınlık komşuluk ve bir bulanık esnek yakınlık dönüşüm kavramları verilerek ilgili özellikleri çalışılmıştır. Bunun yanı sıra başlangıç bulanık esnek yakınlık uzaylarının varlığı gösterilmiştir. Daha sonra bir bulanık esnek yığılma kavramı verilmiş ve ultra bulanık esnek süzgeçler ve bulanık esnek yakınlık uzaylar ile ilişkileri araştırılmıştır.

Benzer şekilde, fonksiyon uzayları gibi farklı topolojik yapılar hem esnek anlamda hem de bulanık esnek anlamda incelenebilir. Ayrıca *se*-düzgün uzaylar üzerinde çeşitli sabit esnek eleman teoremleri elde edilebilir.

8. KAYNAKLAR

- Aamri M., El Moutawakil D., Common fixed point theorems for E-contractive or E-expansive maps in uniform spaces, *Acta Math. Acad. Peadagog. Nyhazi.*, 20 (2004) 83-91.
- Aamri M., El Moutawakil D., Weak compatibility and common fixed point theorems for A-contractive and E-expansive maps in uniform spaces, *Serdica Math. J.*, 31 (2005) 75-86.
- Acharya S.P., Some results on fixed points in uniform space, *Yokohama. Math. J.*, 22 (1974) 105-116.
- Ahmad B., Kharal A., On fuzzy soft sets, *Adv. Fuzzy Syst.*, 2009 (2009) 1-10.
- Aktaş H., Çağman N., Soft sets and soft groups, *Inform. Sci.*, 177 (2007) 2726-2735.
- Ali M.I., Feng F., Liu X., Min W.K., Shabir M., On some new operations in soft set theory, *Comput. Math. Appl.*, 57 (2009) 1547-1553.
- Allam A. A., Abd El-Hakeim K.M., Morsi N.N., On fuzzy neighbourhood spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 41 (1991) 201-212.
- Altun I., Common fixed point theorems for weakly increasing mappings on ordered uniform spaces, *Miskolc Math. Notes*, 12 (1) (2011) 3-10.
- Altun I., Imdad M., Some fixed point theorems on ordered uniform spaces, *Filomat*, 23 (3) (2009) 15-22.
- Angelov V.G., Fixed point theorem in uniform spaces and applications, *Czechoslovak Math. J.*, 37 (1987) 19-33.
- Artico G., Moresco R., Fuzzy proximities and totally bounded fuzzy uniformities, *J. Math. Anal. Appl.*, 99 (1984) 320-337.
- Artico G., Moresco R., Fuzzy proximities according with Lowen fuzzy uniformities, *Fuzzy Sets and Systems*, 21 (1987) 85-98.
- Atanassov K., Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 20 (1986) 87-96.

- Atanassov K., Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 64 (1994) 159-174.
- Atmaca S., Zorlutuna I., On fuzzy soft topological spaces, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 5 (2) (2013) 377-386.
- Aygünoğlu A., Aygün H., Introduction to fuzzy soft groups, *Comput. Math. Appl.*, 58 (2009) 1279-1286.
- Aygünoğlu A., Aygün H., Some notes on soft topological spaces, *Neural Comput. Appl.*, 21 (2012) 113-119.
- Banach S., Sur les operations dans les ensembles abstrait et leur application aux equations integrales, *Fund. Math.*, 3 (1922) 133–181.
- Bayramov S., Gündüz Ç., Soft locally compact spaces and soft paracompact spaces, *J. Math. Syst. Sci.*, 3 (2013) 122-130.
- Bourbaki N., *General Topology, Part I*, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1966).
- Burton M.H., Muraleetharan M., Gutierrez Garcia J., Generalised filters I, *Fuzzy Sets and Systems*, 106 (1999) 275-284.
- Cartan H., Filtres et ultrafiltres, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 205 (1937) 777-779.
- Chang C.L., Fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 24 (1) (1968) 182-190.
- Chen D., Tsang E.C.C., Yeung D.S., Wang X., The parameterization reduction of soft sets and its applications, *Comput. Math. Appl.*, 49 (2005) 757-763.
- Çağman N., Enginoğlu S., Soft set theory and uni-int decision making, *European J. Oper. Res.*, 207 (2010) 848-855.
- Çetkin V., Bulanık esnek topolojik yapılar, *Doktora Tezi*, Kocaeli Üniversitesi, (2014).
- Çetkin V., Aygün H., Uniformity structure in the context of soft set, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 6 (1) (2013) 69-76.
- Çetkin V., Aygün H., On convergence of fuzzy soft filters, *3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*, Vienna-Austria, (2014) 25-28.
- Çetkin V., Sostak A.P., Aygün H., An approach to the concept of soft fuzzy proximity, *Abstr. Appl. Anal.*, 2014 (2014) 1-15.

- Das S., Samanta S.K., Soft real sets, soft real numbers and their properties, *J. Fuzzy Math.*, 20 (3) (2012) 551-576.
- Das S., Samanta S.K., Soft metric, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 6 (1) (2013a) 77-94.
- Das S., Samanta S.K., On soft innerproduct spaces, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 6 (1) (2013b) 151-170.
- Das S., Samanta S.K., On soft metric spaces, *J. Fuzzy Math.*, 21 (3) (2013c) 707-734.
- Demir İ., Özbakır O.B., Soft Hausdorff spaces and their some properties, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 8 (5) (2014) 769-783.
- Efremovic V.A., Infinitesimal spaces, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 76 (1951) 341-343.
- Efremovic V.A., The geometry of proximity I, *Mat. Sb.*, 31 (1952) 189-200.
- Feng F., Fujita H., Jun Y.B., Khan M., Decomposition of fuzzy soft sets with finite value spaces, *Sci. World J.*, 2014 (2014) 1-10.
- Feng F., Jun Y.B., Zhao X., Soft semirings, *Comput. Math. Appl.*, 56 (10) (2008) 2621-2628.
- Feng F., Li Y.M., Soft subsets and soft product operations, *Inform. Sci.*, 232 (2013) 44-57.
- Ganguly A., Fixed point theorems for three maps in uniform spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 17 (1986) 476-480.
- Gau W.L., Buehrer D.J., Vague sets, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 23 (2) (1993) 610-614.
- Georgiou D.N., Megaritis A.C., Petropoulos V.I., On soft topological spaces, *Appl. Math. Inf. Sci.*, 7 (5) (2013) 1889-1901.
- Gorzalany M.B., A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 21 (1987) 1-17.
- Gündüz Ç., Bayramov S., Some results on fuzzy soft topological spaces, *Math. Probl. Eng.*, 2013 (2013) 1-10.
- Hazra H., Majumdar P., Samanta S.K., Soft proximity, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 7 (6) (2014a) 867-877.

- Hazra H., Majumdar P., Samanta S.K., Proximity of soft sets, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 8 (1) (2014b) 113-123.
- Hutton B., Uniformities on fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 58 (1977) 559-571.
- Jachymski J., Fixed point theorems for expansive mappings, *Math. Japon.*, 42 (1) (1965) 131-136.
- Jungck G., Rhoades B.E., Fixed point for the set valued functions without continuity, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 29 (3) (1998) 227-238.
- Kada O., Suzuki T., Takahashi W., Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces, *Math. Japon.*, 44 (2) (1996) 381-391.
- Kandil A., Tantawy O.A., El-Sheikh S.A., Zakaria A., New structures of proximity spaces, *Inf. Sci. Lett.*, 3 (3) (2014) 85-89.
- Kang S.M., Fixed points for expansion mappings, *Math. Japon.*, 38 (4) (1993) 713-717.
- Katsaras A.K., Fuzzy proximity spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 68 (1) (1979) 100-110.
- Kharal A., Ahmad B., Mappings on fuzzy soft classes, *Adv. Fuzzy Syst.*, 2009 (2009) 1-6.
- Kharal A., Ahmad B., Mappings on soft classes, *New Math. Nat. Comput.*, 7 (3) (2011) 471-481.
- Kim Y.C., Ramadan A., Usama M.A., (L,M)-neighborhood spaces, *Kangweon-Kyungki Math. J.*, 15 (2) (2007) 121-133.
- Kong Z., Gao L.Q., Wang L.F., Li S., The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm, *Comput. Math. Appl.*, 56 (2008) 3029-3037.
- Kotze W., Uniform spaces, *Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory*, Editörler: U. Höhle, S.E. Rodabaugh, Kluwer Academic Publishers, (1999) 553-580.
- Lin F., Soft connected spaces and soft paracompact spaces, *Int. J. Math. Comput. Sci. Eng.*, 7 (2) (2013) 754-760.
- Lowen R., Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness, *J. Math. Anal. Appl.*, 56 (1976) 621-633.

- Lowen R., Convergence in fuzzy topological spaces, *Gen. Topol. Appl.*, 10 (1979) 147–160.
- Lowen R., Fuzzy uniform spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 82 (1981) 370-385.
- Lowen R., Fuzzy neighborhood spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 7 (1982) 165-189.
- Lowen R., Wuyts P., Completeness, compactness and precompactness in fuzzy uniform spaces: Part 1, *J. Math. Anal. Appl.*, 90(2) (1982) 563-581.
- Lowen R., Wuyts P., Completeness, compactness and precompactness in fuzzy uniform spaces: Part 2, *J. Math. Anal. Appl.*, 92(2) (1983) 342-371.
- Ma X., Sulaiman N., Qin H., Herawan T., Zain J.M., A new efficient normal parameter reduction algorithm of soft sets, *Comput. Math. Appl.*, 62 (2011) 588-598.
- Mahanta J., Das P.K., Results on fuzzy soft topological spaces, *arXiv:1203.0634v1*, (2012) 1-11.
- Maji P.K., Biswas R., Roy A.R., Fuzzy soft sets, *J. Fuzzy Math.*, 9 (3) (2001) 589-602.
- Maji P.K., Biswas R., Roy A.R., Soft set theory, *Comput. Math. Appl.*, 45 (2003) 555-562.
- Maji P.K., Roy A.R., Biswas R., An application of soft sets in a decision making problem, *Comput. Math. Appl.*, 44 (2002) 1077-1083.
- Markin S.A., Sostak A.P., Another approach to the concept of a fuzzy proximity, *Suppl. Rend. Circ. Matem. Palermo*, 29 (1992) 529-550.
- Molodtsov D., Soft set theory-first results, *Comput. Math. Appl.*, 37 (1999) 19-31.
- Naimpally S.A., Warrack B.D., *Proximity Spaces*, Cambridge University Press, New York, (1970).
- Nazmul S., Samanta S.K., Neighbourhood properties of soft topological spaces, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 6 (1) (2013) 1-15.
- Neog T.J., Sut D.K., Hazarika G.C., Fuzzy soft topological spaces, *Int. J. Latest Trend Math.*, 2 (2012) 54-67.
- Park J.H., Park Y.B., Kwun Y.C., Filterness of soft sets, *J. Korean Inst. Intell. Syst.*, 21 (2011) 781-785.
- Pawlak Z., Rough sets, *Int. J. Comput. Inform. Sci.*, 11 (1982) 341-356.

- Pei D., Miao D., From soft sets to information systems, *in: X. Hu, Q. Liu, A. Skowron, T.Y. Lin, R.R. Yager, B. Zhang (Eds.), Proceedings of Granular Computing, IEEE 2 (2005) 617-621.*
- Prada Vicente M.A., Saralegui Aranguren M., Fuzzy filters, *J. Math. Anal. Appl.*, 129 (1988) 560-568.
- Ramadan A.A., El-Adawy T.M., Abd Alla M.A., On fuzzifying preproximity spaces, *Arab. J. Sci. Eng.*, 30 (2005) 51-67.
- Rhoades B.E., A comparison of various definitions of contractive mappings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 226 (1977) 257-290.
- Rodriguez-Montes J., Charris J.A., Fixed points for W-contractive or W-expansive maps in uniform spaces: toward a unified approach, *Southwest J. Pure Appl. Math.*, 1 (2001) 93-101.
- Roy A.R., Maji P.K., A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems, *J. Comput. Appl. Math.*, 203 (2007) 412-418.
- Shabir M., Naz M., On soft topological spaces, *Comput. Math. Appl.*, 61 (2011) 1786-1799.
- Sostak A.P., On a fuzzy topological structure, *Suppl. Rend. Circ. Matem. Palermo*, 11 (1985) 89-103.
- Suzuki T., A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136 (5) (2008) 1861-1869.
- Şahin R., Küçük A., Soft filters and their convergence properties, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 6(3) (2013) 529-543.
- Tanay B., Kandemir M.B., Topological structures of fuzzy soft sets, *Comput. Math. Appl.*, 61 (2011) 412-418.
- Tarafdar E., An approach to fixed point theorems on uniform spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 191 (1974) 209-225.
- Türkoğlu D., Some fixed point theorems hybrid contractions in uniform space, *Taiwanese J. Math.*, 12 (2008) 807-820.
- Türkoğlu D., Fisher B., Fixed point of multivalued mapping in uniform spaces, *Proc. Indian Acad. Sci.*, 113 (2003) 183-187.

Varol B.P., Aygün H., Fuzzy soft topology, *Hacet. J. Math. Stat.*, 41 (3) (2012) 407-419.

Varol B.P., Aygünoğlu A., Aygün H., Neighborhood structures of fuzzy soft topological spaces, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 27 (4) (2014) 2127-2135.

Wang S.Z., Li B.Y., Gao Z.M., Iseki K., Some fixed point theorems on expansion mappings, *Math. Japon.*, 29 (4) (1984) 631-636.

Zadeh L.A., Fuzzy sets, *Inform. Control*, 8 (1965) 338-353.

Zorlutuna I., Akdağ M., Min W.K., Atmaca S., Remarks on soft topological spaces, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 3 (2) (2012) 171-185.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : DEMİR, İzzettin
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 01.11.1987 / Mardin
Telefon : +90 (380) 541 24 04
Faks : +90 (380) 541 24 03
E-posta : izzettindemir@duzce.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek Lisans	Ege Üniversitesi	2011
Lisans	Ege Üniversitesi	2009
Lise	Vali Vecdi Gönül Lisesi	2004

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2014 -	Düzce Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce (YDS: 85)

Yayımlar

1. Demir İ., Özbakır O.B., On β -paracompact spaces, *Filomat*, 27 (6) (2013) 971–976.
2. Demir İ., Özbakır O.B., Soft Hausdorff spaces and their some properties, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 8 (5) (2014) 769-783.
3. Demir İ., Özbakır O.B., Some properties of fuzzy soft proximity spaces, *Sci. World J.*, 2015 (2015) 1-10.
4. Özbakır O.B., Demir İ., On the soft uniformity and its some properties, *J. Math. Comput. Sci.*, 5 (6) (2015) 762-779.

5. Demir İ., Özbakır O.B., Yıldız İ., Fuzzy soft ultrafilters and convergence properties of fuzzy soft filters, *J. New Results Sci.*, 8 (2015) 92-107.
6. Demir İ., Özbakır O.B., Yıldız İ., On fixed soft element theorems in *se*-uniform spaces, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9 (2016) 1230-1242.
7. Demir İ., Özbakır O.B., Yıldız İ., A contribution to the study of soft proximity spaces, Submitted.

