

**BAZI DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE KOMPAKT OPERATÖRLER VE
MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ**

HÜSEYİN İDİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. EMRAH EVREN KARA**

DÜZCE, 2023

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**BAZI DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE KOMPAKT OPERATÖRLER VE
MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ**

Hüseyin İDİN tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Pınar ZENGİN ALP
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 27/07/2023

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

27 Temmuz 2023

Hüseyin İDİN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında göstermiş olduğu destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Emrah Evren KARA'ya en içten dileklerle teşekkür ederim.

Son 9 yılıma eşlik eden eşime, son 6 yıldır hayatıma anlam katan canım oğlum Devrim'e yanımda oldukları için minnettarım. Hayatımda bir Devrim yaptınız teşekkürler.

Değerli yardımcı hocam Doç Dr. Merve İlkhan KARA'ya da tüm destekleri için teşekkür ederim.

27 Temmuz 2023

Hüseyin İDİN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
SİMGELER	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	3
2.2. DİZİ UZAYLARI, MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ, KOMPAKT OPERATÖRLER	6
2.3. EULER TOTIENT FONKSİYONU VE JORDAN TOTIENT FONKSİYONU	9
3. $c(R_{\Upsilon^r})$ VE $c_0(R_{\Upsilon^r})$ UZAYLARI	12
4. BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ	20
5. $c_0(R_{\Upsilon^r})$ UZAYINDA KOMPAKT OPERATÖRLER	24
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	29
7. KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	34

SİMGELER

bs	Sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı
$B(X, Y)$	X uzayından Y uzayına sınırlı ve lineer operatörlerin uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
c	Yakınsak dizilerin uzayı
\mathbb{C}	Karmaşık sayılar kümesi
cs	Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
$\mathcal{C}ekL$	L operatörünün sıfır uzayı (çekirdeği)
\mathbb{F}	\mathbb{R} veya \mathbb{C} cismi
ℓ	Mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
ℓ_p	Mutlak p -yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
ℓ_∞	Sınırlı dizilerin uzayı
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	Gerçel sayılar kümesi
ω	Reel veya karmaşık terimli dizilerin uzayı
X^α	X dizi uzayının α - duali
X^β	X dizi uzayının β - duali
X^γ	X dizi uzayının γ - duali
μ	Möbius fonksiyonu
φ	Euler totient fonksiyonu

ÖZET

BAZI DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE KOMPAKT OPERATÖRLER VE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Hüseyin İDİN
Düzce Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Emrah Evren KARA
Temmuz 2023, 33 sayfa

Bu tez çalışmasında yeni Banach uzayları tanımlanıp, bu uzayların çeşitli topolojik özellikleri verilecek ve dualleri belirlenecektir. Ayrıca bu uzaylar üzerindeki bazı matris dönüşümlerinin sınıfları karakterize edilecek ve nonkompaktlık Hausdorff ölçüsü yardımı ile bazı matris dönüşümlerinin kompakt olması için gerek ve yeter şartlar verilecektir.

Anahtar sözcükler: Dizi Uzayları, Kompakt Operatörler, Matris Dönüşümleri.

ABSTRACT

COMPACT OPERATORS AND MATRIX TRANSFORMATIONS ON SOME SEQUENCE SPACES

Hüseyin İDİN
Düzce University
Graduate School, Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Emrah Evren KARA
July 2023, 33 pages

In this thesis, new Banach spaces will be defined, various topological properties of these spaces will be given and their duals will be determined. In addition, the classes of some matrix transformations on these spaces will be characterized and the necessary and sufficient conditions will be given for some matrix transformations to be compact with the help of Hausdorff measure of noncompactness.

Keywords: Compact Operators, Matrix Transformations, Sequence Spaces.

1. GİRİŞ

Tüm reel veya kompleks terimli dizilerin uzayı ω , dizilerin koordinatsal toplamı ve skalerle çarpımı işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Bu uzayın herhangi bir alt vektör uzayı dizi uzayı olarak adlandırılır. Sınırlı tüm dizilerin uzayı ℓ_∞ , yakınsak tüm dizilerin uzayı c , mutlak p-toplanabilir tüm dizilerin uzayı ℓ_p klasik dizi uzaylarına örnek olarak verilir. Dizi uzayları toplanabilme teorisinin temelini oluşturur. Toplanabilme, özellikle analiz ve fonksiyonel analizde yaklaşım teorisi, operatör teorisi gibi konularda çok fazla uygulaması olan matematiğin geniş bir alanıdır. Klasik toplanabilme teorisi serilerin ya da dizilerin yakınsaklığının genelleştirilmesi ile ilgilenir. Burada amaç ıraksak serilere ya da dizilere bir dönüşüm uygulayarak yakınsak serilere ya da dizilere dönüştürmektir. Bu amaçla dizi uzayları arasında en genel lineer operatör bir sonsuz matris yardımı ile verilebildiğinden genel bir lineer operatör yerine sonsuz matrisler kullanılır. Bu nedenle dizi uzayları çalışılırken matris dönüşümleri önemli bir yere sahip olmuştur.

Sonsuz bir matrisin klasik dizi uzayları üzerinde matris etki alanı yardımıyla klasik uzaya lineer olarak izomorf olan yeni Banach dizi uzayları tanımlanmaktadır. İlk olarak Kızmaz [1] tarafından fark matrisi kullanılarak fark dizi uzayları tanımlanmıştır. Daha sonra özel bir limitleme metodunun etki alanı yardımıyla yeni bir dizi uzayı oluşturma fikri birçok yazar tarafından çalışılmıştır bkz. [2-10]. Ayrıca toplanabilme teorisi ile ilgili daha fazla bilgi ve uygulama için [11] nolu kaynağa göz atılmalıdır.

İlk olarak Volterra kompakt operatörleri integral operatörler adı altında çalışmıştır. Daha sonra kompakt operatörler Alman matematikçi Hilbert tarafından Banach uzaylarında tanımlanıp kullanılmıştır. Kompakt operatörlerin önemi fonksiyonel analizin, yaklaşım teorisi ve operatör teorisi gibi ilgi çekici çeşitli dallarında görülmüştür. İki dizi uzayı arasındaki en genel lineer dönüşüm bir matris ile verilebildiğinden, bir matris operatörünün hangi şartlar altında kompakt olacağı sorusu akla gelmektedir. Bu şartlar nonkompaktlık ölçüsü kavramı yardımıyla belirlenebilmektedir. Nonkompaktlık ölçüsünün operatör teorisi, sabit nokta teorisi, diferansiyel denklemler gibi bir çok alanda önemli özellikleri

vardır. Hausdorff nonkompaktlık ölçüsünün teoride en bilinen uygulamalarından biri BK uzayları arasındaki matris operatörlerinin kompaktlığı için gerekli ve yeterli koşulları elde etmektedir. Son zamanlarda birçok yazar, dizi uzayları üzerinde kompakt operatörleri çalışmış ve çok önemli sonuçlar elde etmiştir. Dizi uzayları üzerinde nonkompaktlık ölçüsü ve uygulaması ile ilgili bazı çalışmalar için bkz. [12-17].

Euler totient fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış regüler bir matris olan Euler totient matrisinin klasik dizi uzaylarındaki etki alanı kullanarak çeşitli dizi uzayları tanımlanmıştır ([18,19]). Sonrasında [20] nolu çalışmada bu matris ile paranormlu dizi uzayları tanımlanıp bu uzayların bazı özellikleri incelenmiştir. Yakın zamanda bu matris çok ilgi görmüş ve bu matris kullanılarak çeşitli dizi ve seri uzayı tanımlanmıştır ([21]-[25]).

Son zamanlarda Jordan totient fonksiyonu yardımıyla yeni bir regüler matris olan Jordan totient matrisi tanımlanıp matris etki alanı kavramı yardımıyla yeni Banach dizi uzayları verilmiştir. Ayrıca bu uzaylar üzerinde matris dönüşümleri ve kompakt operatörler çalışılmıştır ([26]-[28]).

Bu tez çalışmasında yeni bir matris tanımlanıp bu matrisin klasik dizi uzaylarındaki matris etki alanları oluşturulacaktır. İlk olarak bu uzayların bazı topolojik özellikleri verilecek ve bu uzayların dualleri belirlenecektir. Daha sonra bu uzaylar üzerinde tanımlanan matris operatörlerinin bazı sınıfları karakterize edilecektir. Son olarak bu uzaylar üzerinde kompakt operatörler çalışılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak olan temel tanımlar verildikten sonra dizi uzayı, matris dönüşümü ve kompakt operatör kavramı ele alınacaktır. Ayrıca literatürde bilinen sonuçlar verilip çalışma boyunca kullanılacak olan notasyonlara değinilecektir.

2.1. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1. $U \neq \emptyset$ olmak üzere \mathbb{F} reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$\begin{aligned} + : U \times U &\rightarrow U \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times U &\rightarrow U \\ (\alpha, u) &\mapsto \alpha u \end{aligned} \tag{2.2}$$

işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlasın.

$\forall u, v, t \in U$ için,

A1) $u + v \in U$,

A2) $u + (v + t) = (u + v) + t$,

A3) $u + \theta = \theta + u = u$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır,

A4) $u + (-u) = (-u) + u = \theta$ olacak şekilde $(-u) \in U$ vardır,

A5) $u + v = v + u$.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

B1) $\alpha u \in U$,

$$B2) \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v,$$

$$B3) (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta v,$$

$$B4) \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u,$$

$$B5) 1u = u, 1 \in \mathbb{F}.$$

Bu durumda U kümesine \mathbb{F} cismi üzerinde bir vektör uzayı denir [29].

Tanım 2.2. U , \mathbb{F} cismi üzerinde bir vektör uzayı ve N de U 'nun bir alt kümesi olsun. Her $u, v \in N$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için $\alpha u + \beta v \in N$ oluyorsa N kümesine U 'nun alt vektör uzayı denir [29].

Tanım 2.3. U , \mathbb{F} cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona U üzerinde bir norm denir. $(U, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

$\forall u, v \in U$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ için,

$$N1) \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta,$$

$$N2) \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|,$$

$$N3) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ [29].}$$

Tanım 2.4. $(U, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere U uzayında bir (u_n) dizisi verilsin ve $u_0 \in U$ olsun. Eğer verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n > n_0$ için $\|u_n - u_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (u_n) dizisi u_0 noktasına yakınsaktır denir. Bu durum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0 \tag{2.3}$$

şeklinde gösterilir [29].

Tanım 2.5. $(U, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere (u_n) , U uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı bulunuyorsa (u_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir [29].

Tanım 2.6. $(U, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Banach uzayı denir [29].

Tanım 2.7. $(U, \|\cdot\|)$ normlu uzay, $u \in U$ ve $r > 0$ olsun. $B(u, r) = \{v : \|u - v\| < r\}$ ve $B_U = \{u : \|u\| = 1\}$ kümelerine sırasıyla u merkezli r yarıçaplı açık yuvar ve birim yuvar yüzeyi denir [29].

Tanım 2.8. U ve U' aynı \mathbb{F} cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $L:U \rightarrow U'$ operatörü her $u, v \in U$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için

$$L(u + v) = L(u) + L(v) \quad (2.4)$$

$$L(\alpha u) = \alpha L(u) \quad (2.5)$$

şartlarını sağlıyorsa L operatörüne U uzayından U' uzayına bir lineer operatör denir [29].

Tanım 2.9. $L : U \rightarrow U'$ bir lineer operatör olsun.

$$\text{Çek}L = \{u \in U : Lu = \theta'\} \quad (2.6)$$

kümesine L operatörünün çekirdeği veya sıfır uzayı denir. Burada θ' , U' uzayının sıfır vektörüdür [29].

Teorem 2.10. L lineer operatörünün bire-bir olması için gerek ve yeter şart $\text{Çek}L = \{\theta\}$ olmasıdır [29].

Tanım 2.11. U ve V normlu uzaylar olmak üzere $L : U \rightarrow V$ lineer bir operatör olsun. Her $u \in U$ için

$$\|L(u)\| \leq c\|u\| \quad (2.7)$$

olacak şekilde $c > 0$ reel sayısı varsa L operatörüne sınırlı lineer operatör denir [29].

Tanım 2.12. U ve V normlu uzaylar olmak üzere, $L : U \rightarrow V$ lineer operatör olsun.

$$\|L\| = \sup\left\{\frac{\|L(u)\|}{\|u\|} : u \in U, u \neq \theta\right\} = \sup\{\|L(u)\| : u \in U, \|u\| \leq 1\} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanan $\|L\|$ değerine L operatörünün normu denir [29].

Tanım 2.13. U normlu uzayından V normlu uzayına lineer bir izometrik izomorfizm, normu koruyan yani her $u \in U$ için,

$$\|L(u)\|_V = \|u\|_U \quad (2.9)$$

olan bire-bir ve örten $L : U \rightarrow V$ lineer operatördür. Bu durumda U ve V uzaylarına lineer izomorfiktirler denir ve $U \cong V$ ile gösterilir [29].

2.2. DİZİ UZAYLARI, MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ, KOMPAKT OPERATÖRLER

Tanım 2.14.

$$\omega = \{u = (u_n) : u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}, n \rightarrow u(n) = u_n\} \quad (2.10)$$

tüm dizilerin uzayı olmak üzere bu uzayın bir alt vektör uzayına dizi uzayı denir [11].

Çalışma boyunca kullanılacak klasik dizi uzayları aşağıda verilmiştir.

$$\ell_p = \{u = (u_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p < \infty\}, 1 < p < \infty$$

(p . dereceden mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı)

$$\ell = \{u = (u_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty\}$$

(Mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı)

$$\ell_{\infty} = \{u = (u_k) \in \omega : \sup_k |u_k| < \infty\}$$

(Sınırlı dizilerin uzayı)

$$c_0 = \{u = (u_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0\}$$

(Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı)

$$c = \{u = (u_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = l, l \in \mathbb{F}\}$$

(Yakınsak dizilerin uzayı)

$$bs = \{u = (u_k) \in \omega : (\sum_{k=1}^n u_k) \in \ell_{\infty}\}$$

(Sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı)

$$cs = \{u = (u_k) \in \omega : (\sum_{k=1}^n u_k) \in c\}$$

(Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı)

$$cs_0 = \{u = (u_k) \in \omega : (\sum_{k=1}^n u_k) \in c_0\}$$

(Sıfıra yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı)

Tanım 2.15. U bir lineer topolojik dizi uzayı olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n : U \rightarrow \mathbb{F}$, $u \mapsto p_n(u) = u_n$ biçiminde tanımlı koordinat dönüşümleri sürekli ise U dizi uzayına K -uzayı denir. U bir K -uzayı olsun. U tam lineer metrik uzay ise U dizi uzayına FK -uzayı denir. U bir FK -uzayı olsun. U uzayının metriği normlanabiliyorsa bu uzaya BK -uzayı denir [11].

Teorem 2.16. (Silverman Toeplitz Teoremi) Bir $\Lambda = (\lambda_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart:

- 1) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{nk}| < \infty$
- 2) Her bir k için $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{nk} = 0$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{nk} = 1$

olmasıdır [11].

Örnek 2.17. (q_k) pozitif sayıların bir dizisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $Q_n = \sum_{k=1}^n q_k$ olsun. $E = (e_{nk})$ Riesz matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$e_{nk} = \begin{cases} \frac{q_k}{Q_n} & , \quad 1 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , \quad k > n \text{ ise} \end{cases} \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır. $Q_n \rightarrow \infty$ için bu matris regülerdir [11].

Tanım 2.18. $\Lambda = (\lambda_{nk})$ sonsuz bir matris ve U, V herhangi iki dizi uzayı olsun.

$u = (u_n) \in \omega$ dizisinin Λ -dönüşümü klasik matris çarpımı kullanılarak elde edilen Λu dizisidir ve bu dizinin terimleri her bir serinin yakınsak olması şartıyla

$$(\Lambda u)_n = \sum_k \lambda_{nk} u_k (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanır. Eğer Λu dizisi mevcut ve her $u \in U$ için $\Lambda u \in V$ ise Λ matrisi U uzayından V uzayına matris dönüşümü tanımlar denir. Bu matris dönüşümü lineer bir dönüşümdür [11].

Çalışma boyunca Λ_n ile Λ matrisinin n . satırındaki dizi gösterilecektir.

Tanım 2.19. $\Lambda = (\lambda_{nk})$ sonsuz bir matris ve U bir dizi uzayı olsun. $\Lambda = (\lambda_{nk})$ matrisinin U dizi uzayı üzerindeki etki alanı U_Λ ile gösterilir ve

$$U_\Lambda = \{u = (u_n) \in \omega : \Lambda u \in U\} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır. U_Λ uzayı da bir dizi uzayıdır [11].

(U, V) ile U uzayından V uzayına tanımlı tüm matrislerin sınıfı gösterilecektir. $B(U, V)$ ile U normlu uzayından V normlu uzayına tanımlı tüm sınırlı (sürekli) lineer operatörlerin sınıfı gösterilecektir.

Tanım 2.20.

$$U^\alpha = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \forall u = (u_k) \in U, \sum_{k=1}^{\infty} |t_k u_k| < \infty \right\}, \quad (2.13)$$

$$U^\beta = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \forall u = (u_k) \in U, \sum_{k=1}^{\infty} t_k u_k \text{ yakınsaktır} \right\}, \quad (2.14)$$

$$U^\gamma = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \forall u = (u_k) \in U, \sup_n \left| \sum_{k=1}^n t_k u_k \right| < \infty \right\}, \quad (2.15)$$

uzayları sırasıyla U dizi uzayının α -, β -, γ -dualleri olarak adlandırılır [11].

Tanım 2.21. B kümesi bir U normlu uzayının sınırlı bir alt kümesi olsun. B kümesinin Hausdorff nonkompaktlık ölçüsü $\chi(B)$ ile gösterilir ve

$$\chi(B) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset \cup_{i=1}^n B(u_i, r_i), u_i \in U, r_i < \varepsilon, n \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $B(u_i, r_i)$ kümesi her bir $i = 1, 2, \dots, n$ için u_i merkezli ve r_i yarıçaplı açık yuvardır [30].

Tanım 2.22. Bir U Banach uzayından bir V Banach uzayına tanımlı L lineer operatörü için U kümesinin ve U kümesinin sınırlı her alt kümesinin L altındaki görüntüsü V kümesinin tamamen (total) sınırlı bir alt kümesi ise ya da buna denk olarak U uzayındaki sınırlı her $u = (u_n)$ dizisi için $(L(u_n))$ dizisinin V uzayında yakınsak bir alt dizisi varsa L operatörü kompakttır denir [30].

Kompakt operatörler ve Hausdorff nonkompaktlık ölçüsü arasında bir ilişki vardır.

$$\|L\|_{\chi} = \chi(L(B_U))$$

değerine L operatörünün Hausdorff nonkompaktlık ölçüsü denir [30].

Bir operatörün kompakt olabilmesi için gerek ve yeter şart $\|L\|_{\chi} = 0$ olmasıdır [30].

2.3. EULER TOTIENT FONKSİYONU VE JORDAN TOTIENT FONKSİYONU

Bu tez çalışması boyunca φ , J_r ve μ sırasıyla Euler totient fonksiyonunu, Jordan totient fonksiyonunu ve Möbius fonksiyonunu gösterecektir.

Euler totient fonksiyonu $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\varphi(n) = \sum_{k=1, (k,n)=1}^n 1$$

şeklinde tanımlanır [31]. Burada (k, n) ifadesi k ve n sayılarının en büyük ortak bölenini göstermektedir. Yani $\varphi(n)$ değeri n ile aralarında asal olan n sayısından küçük pozitif tam sayıların sayısını vermektedir. Bu fonksiyonun bazı değerleri

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(5) = 4, \quad (2.16)$$

$$\varphi(6) = 2, \varphi(7) = 6, \varphi(8) = 4, \varphi(9) = 6, \varphi(10) = 4, \dots$$

şeklinde dir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $n = \sum_{k|n} \varphi(k)$ eşitliği sağlanır [31].

Jordan totient fonksiyonu $J_r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ Euler totient fonksiyonunu genelleleyen aritmetik bir fonksiyodur. Burada r pozitif bir tam sayıdır. $r = 1$ için bu fonksiyon Euler totient fonksiyonunu vermektedir. Bu fonksiyonun özellikleri ve birçok uygulaması için [32] nolu çalışma incelenebilir.

Jordan fonksiyonu J_r çarpımsaldır, yani $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sayılarının en büyük ortak böleni 1 olmak üzere $J_r(n_1 n_2) = J_r(n_1) J_r(n_2)$ dir.

$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}$ ifadesi $n \in \mathbb{N}$ sayısının tek asal ayrışımı ise

$$J_r(n) = n^r \left(1 - \frac{1}{p_1^r}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2^r}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_l^r}\right)$$

olur.

Ayrıca aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\sum_{k|n} J_r(k) = n^r.$$

$$\sum_{k|n} \frac{\mu(k)}{k^r} = \frac{J_r(n)}{n^r}.$$

Möbius fonksiyonu $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$

$$\mu(1) = 1$$

ve $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}$ için

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_l = 1 \text{ ise } \mu(n) = (-1)^l$$

$$\text{en az bir } k \in \{1, 2, \dots, l\} \text{ için } \alpha_k \neq 1 \text{ ise } \mu(n) = 0$$

şeklinde tanımlanır. Burada p_1, p_2, \dots, p_l farklı asal sayılar ve $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}$ değeri $n > 1$ sayısının asal çarpanlara ayrılmış halidir. Yani $\mu(n) = 0$ ancak ve ancak n sayısının 1 den

büyük kare çarpanı vardır.

$$\begin{aligned}\mu(1) = 1, \mu(2) = -1, \mu(3) = -1, \mu(4) = 0, \mu(5) = -1, \\ \mu(6) = 1, \mu(7) = -1, \mu(8) = 0, \mu(9) = 0, \mu(10) = 1, \dots\end{aligned}\quad (2.17)$$

Bir doğal sayının birden büyük pozitif bölenlerinin Möbius fonksiyon değerleri toplamı sıfırdır. Yani

$$\sum_{k|n} \mu(k) = 0 (n \neq 1) \quad (2.18)$$

dır.

Φ -toplanabilme olarak adlandırılan özel tipte toplanabilme methodu Schoenberg tarafından $[0, 1]$ aralığında genelleştirilmiş Dirichlet fonksiyonunun Riemann integralini çalışmak amacıyla tanıtılmıştır. Bu methoda alışılmış yakınsama kavramından daha zayıf bir özellik olarak φ -yakınsama adı verilmiştir. Her $i \in \mathbb{N}$ için

$$v_i = \frac{1}{i} \sum_{j|i} \varphi(j) u_j \quad (2.19)$$

olmak üzere $\lim_{i \rightarrow \infty} v_i = L$ oluyorsa (u_i) dizisi L sayısına φ -yakınsaktır denir [33]. Φ – $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = L$ ile gösterilir. Eğer $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = L$ ise Φ – $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = L$ dir.

3. $c(R_{\Upsilon^r})$ VE $c_0(R_{\Upsilon^r})$ UZAYLARI

Bu bölümde Riesz matrisi ve Jordan totient matrisi kullanılarak üretilmiş R_{Υ^r} matrisin c ve c_0 uzaylarındaki matris etki alanı olarak yeni Banach uzayları $c(R_{\Upsilon^r})$ ve $c_0(R_{\Upsilon^r})$ tanıtılacaktır.

$Q_n = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ olmak üzere $R_{\Upsilon^r} = (v_{nk})$ matrisi $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$v_{nk} = \begin{cases} \frac{q_k J_r(k)}{Q_n} & , k \mid n \text{ ise} \\ 0 & , k \nmid n \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$r = 1$ ve her k için $q_k = 1$ ise bu matris [18] nolu çalışmada

$$\phi_{ij} = \begin{cases} \frac{\varphi(j)}{i} & , j \mid i \text{ ise} \\ 0 & , j \nmid i \text{ ise} \end{cases} \quad (3.1)$$

olarak tanımlı $\Phi = (\phi_{nk})$ Euler totient matrisini verir.

$r = 1$ ise bu matris [34] nolu çalışmada

$$r_{nk} = \begin{cases} \frac{q_k \varphi(k)}{Q_n} & , k \mid n \text{ ise} \\ 0 & , k \nmid n \text{ ise} \end{cases} \quad (3.2)$$

olarak tanımlı $R_\Phi = (r_{nk})$ Riesz Euler totient matrisini verir.

Her k için $q_k = 1$ ise bu matris [26] nolu çalışmada her bir $r \in \mathbb{N}$ için

$$v_{nk}^r = \begin{cases} \frac{J_r(k)}{n^r} & , k \mid n \text{ ise} \\ 0 & , k \nmid n \text{ ise} \end{cases} \quad (3.3)$$

olarak tanımlı $\Upsilon^r = (v_{nk}^r)$ Jordan totient matrisini verir.

Bu matrisin tersi $R_{\Upsilon^r}^{-1} = (v_{nk}^{-1})$ her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$v_{nk}^{-1} = \begin{cases} \frac{\mu(\frac{n}{k}) Q_k^r}{J_r(n) q_n} & , k | n \text{ ise} \\ 0 & , k \nmid n \text{ ise} \end{cases}$$

olarak hesaplanmıştır.

Böylece $c(R_{\Upsilon^r})$ ve $c_0(R_{\Upsilon^r})$ uzayları

$$c(R_{\Upsilon^r}) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \lim_n \left(\frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) u_k \right) \text{ mevcuttur} \right\}$$

ve

$$c_0(R_{\Upsilon^r}) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \lim_n \left(\frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) u_k \right) = 0 \right\}$$

olur.

$r = 1$ ve her k için $q_k = 1$ ise $c(R_{\Upsilon^r})$ ve $c_0(R_{\Upsilon^r})$ uzayları [19] nolu çalışmada tanımlanan

$$c(\Phi) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \lim_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k|n} \varphi(k) u_k \right) \text{ mevcuttur} \right\}$$

ve

$$c_0(\Phi) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \lim_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k|n} \varphi(k) u_k \right) = 0 \right\}$$

uzaylarına dönüşmektedir.

$r = 1$ ise $c(R_{\Upsilon^r})$ ve $c_0(R_{\Upsilon^r})$ uzayları

$$c(R_{\Phi}) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \lim_n \left(\frac{1}{Q_n} \sum_{k|n} q_k \varphi(k) u_k \right) \text{ mevcuttur} \right\}$$

ve

$$c_0(R_{\Phi}) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \lim_n \left(\frac{1}{Q_n} \sum_{k|n} q_k \varphi(k) u_k \right) = 0 \right\}$$

uzaylarına dönüşmektedir.

Her k için $q_k = 1$ ise $c(R_{\Upsilon^r})$ ve $c_0(R_{\Upsilon^r})$ uzayları [27] nolu çalışmada tanımlanan

$$c(\Upsilon^r) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \lim_n \left(\frac{1}{n^r} \sum_{k|n} J_r(k) u_k \right) \text{ mevcuttur} \right\}$$

ve

$$c_0(\Upsilon^r) = \left\{ u = (u_n) \in \omega : \lim_n \left(\frac{1}{n^r} \sum_{k|n} J_r(k) u_k \right) = 0 \right\}$$

uzaylarına dönüşmektedir.

Aksi söylenmedikçe $v = (v_n)$ ile bir $u = (u_n)$ dizisinin R_{Υ^r} -dönüşümü, yani her $n \in \mathbb{N}$ için

$$v_n = (R_{\Upsilon^r} u)_n = \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) u_k \quad (3.4)$$

olmak üzere $v = (v_n)$ gösterilecektir.

Teorem 3.1. $c(R_{\Upsilon^r})$ ve $c_0(R_{\Upsilon^r})$ uzayları

$$\|u\|_{c(R_{\Upsilon^r})} = \|u\|_{c_0(R_{\Upsilon^r})} = \sup_n \left| \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) u_k \right|$$

şeklinde tanımlı norma göre birer Banach uzaylarıdır.

Sonuç 3.2. $c(R_{\Upsilon^r})$ ve $c_0(R_{\Upsilon^r})$ uzayları BK-uzaylarıdır.

Teorem 3.3. $U \in \{c, c_0\}$ olmak üzere $U(R_{\Upsilon^r})$ uzayı U uzayına lineer olarak izomorfiktir.

İspat. $U \in \{c, c_0\}$ olmak üzere $U(R_{\Upsilon^r})$ uzayından U uzayına f dönüşümü her $u \in U(R_{\Upsilon^r})$ için $f(u) = R_{\Upsilon^r} u$ olarak tanımlansın. Bu dönüşümün lineer olduğu açıktır. Ayrıca f dönüşümünün çekirdeği sadece sıfır vektöründen oluştuğu için bire-bir bir dönüşümdür. f dönüşümünün örten olduğunu ispat edebilmek için $v = (v_k)$ dizisi U uzayında herhangi bir dizi olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için terimleri

$$u_n = \sum_{k|n} \frac{\mu\left(\frac{n}{k}\right) Q_k^r}{J_r(n) q_n} v_k$$

şeklinde tanımlı $u = (u_n)$ dizisi ele alınsın. (3.4) eşitliğinden

$$(R_{\Upsilon^r} u)_n = \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) u_k = \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} q_k J_r(k) \sum_{j|k} \frac{\mu\left(\frac{k}{j}\right) Q_j^r}{J_r(k) q_k} v_j$$

$$= \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} \sum_{j|k} \mu\left(\frac{k}{j}\right) Q_j^r v_j = \frac{1}{Q_n^r} \sum_{k|n} \left(\sum_{j|k} \mu(j) \right) Q_k^r v_k = \frac{1}{Q_n^r} \mu(1) Q_n^r v_n = v_n$$

elde edilir ve dolayısıyla $u = (u_n) \in U(R_{\Gamma^r})$ olur. Son olarak $\|u\|_{U(R_{\Gamma^r})} = \|f(u)\|_U$ olduğundan f dönüşümü normu korur. Böylece ispat tamamlanır. \square

Tanımlanan uzayların duallerini belirlemek ve bazı matris sınıflarını karakterize etmek için aşağıdaki sonuca ihtiyaç duyulmaktadır. Burada ve çalışma boyunca \mathcal{N} ile \mathbb{N} doğal sayılar kümesinin tüm sonlu alt kümelerinin ailesi gösterilecektir.

Yardımcı Teorem 3.4. $p > 1$ ve $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris olsun.

1. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell_\infty, \ell_\infty) \iff$

$$\sup_i \sum_j |\lambda_{ij}| < \infty \quad (3.5)$$

2. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (c, \ell_\infty) \iff$ (3.5) sağlanır.

3. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (c_0, \ell_\infty) \iff$ (3.5) sağlanır.

4. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell_p, \ell_\infty) \iff$

$$\sup_i \sum_j |\lambda_{ij}|^q < \infty \quad (3.6)$$

5. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell, \ell_\infty) \iff$

$$\sup_{i,j} |\lambda_{ij}| < \infty \quad (3.7)$$

6. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell_\infty, c) \iff$

$$\text{her bir } j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_i \lambda_{ij} \text{ mevcuttur} \quad (3.8)$$

$$\lim_i \sum_j |\lambda_{ij}| = \sum_j \left| \lim_i \lambda_{ij} \right|$$

7. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (c, c) \iff (3.5), (3.8)$ ve

$$\lim_i \sum_j \lambda_{ij} \text{ mevcuttur.}$$

8. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (c_0, c) \iff (3.5)$ ve (3.8) sağlanır.

9. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell_p, c) \iff (3.6)$ ve (3.8) sağlanır.

10. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell, c) \iff (3.7)$ ve (3.8) sağlanır.

11. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell_\infty, c_0) \iff$

$$\lim_i \sum_j |\lambda_{ij}| = 0$$

12. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (c, c_0) \iff (3.5)$ ve

$$\text{her bir } j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_i \lambda_{ij} = 0 \quad (3.9)$$

$$\lim_i \sum_j \lambda_{ij} = 0$$

13. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (c_0, c_0) \iff (3.5)$ ve (3.9) sağlanır.

14. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell_p, c_0) \iff (3.6)$ ve (3.9) sağlanır.

15. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell, c_0) \iff (3.7)$ ve (3.9) sağlanır.

16. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell_\infty, \ell_p) \iff$

$$\sup_{K \in \mathcal{N}} \sum_i \left| \sum_{j \in K} \lambda_{ij} \right|^p < \infty \quad (3.10)$$

17. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (c, \ell_p) \iff (3.10)$ sağlanır.

18. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (c_0, \ell_p) \iff (3.10)$ sağlanır.

19. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell, \ell_p) \iff$

$$\sup_j \sum_i |\lambda_{ij}|^p < \infty$$

20. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell_\infty, \ell) \iff$

$$\sup_{N, K \in \mathcal{N}} \left| \sum_{i \in N} \sum_{j \in K} \lambda_{ij} \right| < \infty \iff \sup_{N \in \mathcal{N}} \sum_j \left| \sum_{i \in N} \lambda_{ij} \right| < \infty \iff \sup_{K \in \mathcal{N}} \sum_i \left| \sum_{j \in K} \lambda_{ij} \right| < \infty \quad (3.11)$$

21. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (c, \ell) \iff (3.11)$ sağlanır.

22. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (c_0, \ell) \iff (3.11)$ sağlanır.

23. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell_p, \ell) \iff$

$$\sup_{N \in \mathcal{N}} \sum_j \left| \sum_{i \in N} \lambda_{ij} \right|^q < \infty$$

24. $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (\ell, \ell) \iff$

$$\sup_j \sum_i |\lambda_{ij}| < \infty$$

[35].

Şimdi $c(R_{\Upsilon r})$ ve $c_0(R_{\Upsilon r})$ uzaylarının α -, β - ve γ -dualleri hesaplanacaktır.

Teorem 3.5. $c(R_{\Upsilon r})$ ve $c_0(R_{\Upsilon r})$ uzaylarının α -duali

$$(c(R_{\Upsilon r}))^\alpha = (c_0(R_{\Upsilon r}))^\alpha = \left\{ t = (t_n) \in \omega : \sup_{N, M \in \mathcal{N}} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in M, k|n} \frac{\mu(\frac{n}{k}) Q_k^r}{J_r(k) q_n} t_n \right| < \infty \right\}$$

uzayıdır.

İspat. ω uzayından alınan bir $t = (t_n)$ dizisi için $\Delta = (\delta_{nk})$ matrisi

$$\delta_{nk} = \begin{cases} \frac{\mu(\frac{n}{k}) Q_k^r}{J_r(k) q_n} t_n & , k | n \\ 0 & , k \nmid n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $U \in \{c, c_0\}$ olsun. $u = (u_n) \in U(R_{\Upsilon r})$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n u_n = (\Delta v)_n$ olur. Buradan $u \in U(R_{\Upsilon r})$ iken $tu \in \ell$ olması için gerek ve yeter şartın $v \in U$ iken $\Delta v \in \ell$ olması gerektiği sonucuna varılır. Dolayısıyla $t \in (U(R_{\Upsilon r}))^\alpha$ ancak ve ancak $\Delta \in (U, \ell)$ olur. Yardımcı Teorem 3.4 de 21. ve 22. ifadeler kullanılarak

$$(c(R_{\Upsilon r}))^\alpha = (c_0(R_{\Upsilon r}))^\alpha = \left\{ t = (t_n) \in \omega : \sup_{N, M \in \mathcal{N}} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in M, k|n} \frac{\mu(\frac{n}{k}) Q_k^r}{J_r(k) q_n} t_n \right| < \infty \right\}$$

bulunur. □

Yardımcı Teorem 3.6. [36, Teorem 3.1] Bir $t = (t_k) \in \omega$ dizisi ve bir üçgensel $\Pi = (\pi_{nk})$ matrisinin tersi $(\Pi)^{-1} = ((\pi)_{nk}^{-1})$ yardımıyla $\Xi = (\xi_{nk})$ matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\xi_{nk} = \sum_{j=k}^n t_j (\pi)_{jk}^{-1}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda U herhangi bir dizi uzayı olmak üzere

$$U_{\Pi}^{\beta} = \{t = (t_k) \in \omega : \Xi \in (U, c)\},$$

ve

$$U_{\Pi}^{\gamma} = \{t = (t_k) \in \omega : \Xi \in (U, \ell_{\infty})\}.$$

olur.

Bu sonuç yardımıyla uzayların β ve γ -dualleri hesaplanmıştır.

Teorem 3.7.

$$A_1 = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=k, k|j}^n \frac{\mu(\frac{j}{k}) Q_k^r}{J_r(j) q_j} t_j \text{ mevcuttur} \right\},$$

$$A_2 = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \sup_n \sum_k \left| \sum_{j=k, k|j}^n \frac{\mu(\frac{j}{k}) Q_k^r}{J_r(j) q_j} t_j \right| < \infty \right\},$$

$$A_3 = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \lim_n \sum_k \left(\sum_{j=k, k|j}^n \frac{\mu(\frac{j}{k}) Q_k^r}{J_r(j) q_j} t_j \right) \text{ mevcuttur} \right\}.$$

$c(R_{Yr})$ ve $c_0(R_{Yr})$ uzaylarının β ve γ -dualleri

$$(c(R_{Yr}))^{\beta} = A_1 \cap A_2 \cap A_3, (c_0(R_{Yr}))^{\beta} = A_1 \cap A_2$$

$$(c(R_{Yr}))^{\gamma} = (c_0(R_{Yr}))^{\gamma} = A_2 \text{ olur.}$$

İspat. $t = (t_k) \in \omega$, $U \in \{c, c_0\}$ ve $\Xi = (\xi_{nk})$ matrisi

$$\xi_{nk} = \begin{cases} \sum_{j=k, k|j}^n t_j \frac{\mu(\frac{j}{k}) Q_k^r}{J_r(j) q_j} & , 1 \leq k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases}$$

olsun. Böylece bir $u = (u_n) \in U(R_{\Upsilon r})$ dizisi için

$$\sum_{k=1}^n t_k u_k = \sum_{k=1}^n t_k \left(\sum_{j|k} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} v_j \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=k, k|j}^n t_j \frac{\mu(\frac{j}{k}) Q_k^r}{J_r(j) q_j} \right) v_k = (\Xi v)_n$$

elde edilir. Bu eşitlikten $u \in U(R_{\Upsilon r})$ iken $tu \in cs$ olması için gerek ve yeter koşulun $v \in U$ iken $Xiv \in c$ olması gerektiği sonucuna varılır. Yani $t \in (U(R_{\Upsilon r}))^\beta$ ancak ve ancak $\Xi \in (U, c)$. Böylece, Yardımcı Teorem 3.4 de 7. ve 8. ifadeler kullanılarak $(c(R_{\Upsilon r}))^\beta = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $(c_0(R_{\Upsilon r}))^\beta A_1 \cap A_2$ bulunur.

Benzer şekilde bu son eşitlikten $u \in U(R_{\Upsilon r})$ iken $tu \in bs$ olması için gerek ve yeter koşulun $v \in U$ iken $\Xi v \in \ell_\infty$ olması gerektiği sonucuna varılır. Yani $t \in (U(R_{\Upsilon r}))^\gamma$ ancak ve ancak $\Xi \in (U, \ell_\infty)$. Böylece, Yardımcı Teorem 3.4 de 2. ve 3. ifadeler kullanılarak $(c(R_{\Upsilon r}))^\gamma = (c_0(R_{\Upsilon r}))^\gamma = A_2$ bulunur.

□

4. BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde $c(R_{Yr})$ ve $c_0(R_{Yr})$ uzaylarından $\ell_\infty, c, c_0, \ell$ uzaylarına matris dönüşümleri karakterize edilecektir.

Teorem 4.1. $U \in \{c, c_0\}$ ve $V \subset \omega$ olsun. Bu durumda $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in (U_{R_{Yr}}, V)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\theta_{lj}^{(i)} = \begin{cases} \sum_{k=j, j|k}^l \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} & , 1 \leq j \leq l \\ 0 & , j > l \end{cases}$$

ve

$$\theta_{ij} = \sum_{k=j, j|k}^{\infty} \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k}$$

olmak üzere her bir sabit $i \in \mathbb{N}$ için $\Theta^{(i)} = (\theta_{lj}^{(i)}) \in (U, c)$ ve $\Theta = (\theta_{ij}) \in (U, V)$ olmasıdır.

İspat. $\Lambda \in (U_{R_{Yr}}, V)$ ve $u \in U_{R_{Yr}}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l \lambda_{ij} u_j &= \sum_{j=1}^l \lambda_{ij} \left(\sum_{k|j} \frac{\mu(\frac{j}{k}) Q_k^r}{J_r(j) q_j} v_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^l \left(\sum_{k=j, j|k}^l \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} \right) v_j = \sum_{j=1}^l \theta_{lj}^{(i)} v_j \end{aligned} \quad (4.1)$$

eşitliği sağlanır. Λu mevcut olduğundan her bir sabit $i \in \mathbb{N}$ için $\Theta^{(i)} \in (U, c)$ bulunur. Buradan (4.1) de $l \rightarrow \infty$ iken $\Lambda u = \Theta v$ elde edilir. Böylece $\Lambda u \in V$ olması $\Theta v \in V$ olmasını; yani $\Theta \in (U, V)$ olmasını gerektirir.

Karşıt olarak her bir sabit $i \in \mathbb{N}$ için $\Theta^{(i)} = (\theta_{lj}^{(i)}) \in (U, c)$ ve $\Theta = (\theta_{ij}) \in (U, V)$ olsun. $u \in U_{R_{Yr}}$ seçilsin. Bu durumda her bir sabit $i \in \mathbb{N}$ için $(\theta_{ij}) \in U^\beta$ olması her bir sabit $i \in \mathbb{N}$ için $(\lambda_{ij}) \in U_{R_{Yr}}^\beta$ olmasını gerektirir. Böylece Λu mevcut olur. (4.1) eşitliğinden $l \rightarrow \infty$ iken $\Lambda u = \Theta v$ elde edilir. Bu ise $\Lambda \in (U_{R_{Yr}}, V)$ olduğunu gösterir. \square

Teorem 4.2. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $\Lambda \in (c(R_{\Gamma^r}), \ell_\infty) \iff$

$$\text{her bir } i, j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=j, j|k}^l \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} \text{ mevcuttur,} \quad (4.2)$$

$$\sup_i \sum_j \left| \sum_{k=j, j|k}^{\infty} \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} \right| < \infty \quad (4.3)$$

$$\text{her bir } i \in \mathbb{N} \text{ için } \sup_{l \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^l \left| \sum_{k=j, j|k}^l \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} \right| < \infty, \quad (4.4)$$

$$\text{her bir } i \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l \sum_{k=j, j|k}^l \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} \text{ mevcuttur.} \quad (4.5)$$

2. $\Lambda \in (c(R_{\Gamma^r}), c) \iff (4.2), (4.4), (4.5), (4.3),$

$$\text{her bir } j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_i \sum_{k=j, j|k}^{\infty} \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} \text{ mevcuttur,} \quad (4.6)$$

$$\lim_i \sum_j \sum_{k=j, j|k}^{\infty} \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} \text{ mevcuttur.}$$

3. $\Lambda \in (c(R_{\Gamma^r}), c_0) \iff (4.2), (4.4), (4.5), (4.3)$

$$\text{her bir } j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_i \sum_{k=j, j|k}^{\infty} \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} = 0, \quad (4.7)$$

$$\lim_i \sum_j \sum_{k=j, j|k}^{\infty} \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} = 0.$$

4. $\Lambda \in (c(R_{\Upsilon^r}), \ell) \iff (4.2), (4.4), (4.5),$

$$\sup_{N, K \in \mathcal{N}} \left| \sum_{i \in N} \sum_{j \in K} \sum_{k=j, |j|k}^{\infty} \lambda_{ik} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} \right| < \infty. \quad (4.8)$$

İspat. Bu teoremin ispatı Yardımcı Teorem 3.4 ve Teorem 4.1 kullanılarak elde edilir. \square

Teorem 4.3. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon^r}), \ell_{\infty}) \iff (4.2), (4.4), (4.3).$
2. $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon^r}), c) \iff (4.2), (4.4), (4.3), (4.6).$
3. $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon^r}), c_0) \iff (4.2), (4.4), (4.3), (4.7).$
4. $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon^r}), \ell) \iff (4.2), (4.4), (4.8).$

İspat. Bu teoremin ispatı Yardımcı Teorem 3.4 ve Teorem 4.1 kullanılarak elde edilir. \square

Bu teoremler yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.4. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $\Lambda \in (c(R_{\Upsilon^r}), bs) \iff (4.2), (4.4), (4.5),$

$$\sup_i \sum_j \left| \sum_{l=1}^i \sum_{k=j, |j|k}^{\infty} \lambda_{lk} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} \right| < \infty. \quad (4.9)$$

2. $\Lambda \in (c(R_{\Upsilon^r}), cs) \iff (4.2), (4.4), (4.5), (4.9),$

$$\text{her bir } j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_i \sum_{l=1}^i \sum_{k=j, |j|k}^{\infty} \lambda_{lk} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} \text{ mevcuttur} \quad (4.10)$$

$$\lim_i \sum_j \sum_{l=1}^i \sum_{k=j, |j|k}^{\infty} \lambda_{lk} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} \text{ mevcuttur.}$$

3. $\Lambda \in (c(R_{\Upsilon^r}), cs_0) \iff (4.2), (4.4), (4.5), (4.9),$

$$\text{her bir } j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_i \sum_{l=1}^i \sum_{k=j, |j|k}^{\infty} \lambda_{lk} \frac{\mu(\frac{k}{j}) Q_j^r}{J_r(k) q_k} = 0, \quad (4.11)$$

$$\lim_i \sum_j \sum_{l=1}^i \sum_{k=j, j|k}^{\infty} \lambda_{lk} \frac{\mu\left(\frac{k}{j}\right) Q_j^r}{J_r(k) q_k} = 0.$$

Sonuç 4.5. $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $\Lambda \in (c_0(R_{\Gamma^r}), bs) \iff (4.2), (4.4), (4.9)$.
2. $\Lambda \in (c_0(R_{\Gamma^r}), cs) \iff (4.2), (4.4), (4.9), (4.10)$.
3. $\Lambda \in (c_0(R_{\Gamma^r}), cs_0) \iff (4.2), (4.4), (4.9), (4.11)$.



5. $c_0(R_{Yr})$ UZAYINDA KOMPAKT OPERATÖRLER

$U \supset \sigma$ bir BK-uzayı ve $x = (x_j) \in \omega$ olsun. Supremum sonlu olmak şartıyla

$$\|x\|_U^* = \sup_{u \in B_U} \left| \sum_j x_j u_j \right|$$

notasyonu kullanılacaktır. Bu durumda $x \in U^\beta$ olur.

Yardımcı Teorem 5.1. [37, Lemma 6] $\ell_\infty^\beta = c^\beta = c_0^\beta = \ell$ ve $U \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ için $\|x\|_U^* = \|x\|_\ell$.

Yardımcı Teorem 5.2. [30, Teorem 1.23 (a)] U ve V birer BK-uzayı olsun. Bu durumda her $\Lambda \in (U, V)$ için $u \in U$ iken $L_\Lambda(u) = \Lambda u$ şartını sağlayan bir $L_\Lambda \in B(X, Y)$ operatörü vardır.

Yardımcı Teorem 5.3. [30] $U \supset \sigma$ bir BK-uzayı ve $V \in \{c_0, c, \ell_\infty\}$ olsun. Eğer $\Lambda \in (U, V)$ ise

$$\|L_\Lambda\| = \|\Lambda\|_{(U, V)} = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|\Lambda_i\|_U^* < \infty$$

olur.

c_0 uzayında non-kompaktlık Hausdorff ölçüsünü hesaplayabilmek için aşağıdaki sonuç yararlıdır.

Teorem 5.4. [38, Teorem 2.8] B kümesi c_0 uzayında sınırlı bir küme ve $P_r : c_0 \rightarrow c_0$ operatörü her $u = (u_j) \in c_0$ ve her bir $r \in \mathbb{N}$ için $P_r(u) = (u_1, u_2, \dots, u_r, 0, 0, \dots)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\chi(B) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sup_{u \in B} \|(I - P_r)(u)\|_\infty \right)$$

olur. Burada I fonksiyonu c_0 üzerinde özdeşlik fonksiyonudur.

Yardımcı Teorem 5.5. $x = (x_j) \in (c_0(R_{\Upsilon r}))^\beta$ olsun. Her $u = (u_j) \in c_0(R_{\Upsilon r})$ için

$$\tilde{x}_j = \sum_{k=j, j|k}^{\infty} \frac{\mu\left(\frac{k}{j}\right) Q_j^r}{J_r(k) q_k} x_k \quad (j \in \mathbb{N}) \quad (5.1)$$

olmak üzere

$$\sum_j x_j u_j = \sum_j \tilde{x}_j v_j \quad (5.2)$$

ve $\tilde{x} = (\tilde{x}_j) \in \ell$ olur.

Yardımcı Teorem 5.6. $x = (x_j) \in (c_0(R_{\Upsilon r}))^\beta$ olsun. $\tilde{x} = (\tilde{x}_j)$ dizisi (5.1) ile tanımlanmak üzere $\|x\|_{c_0(R_{\Upsilon r})}^* = \sum_j |x_j| < \infty$ olur.

İspat. $x = (x_j) \in (c_0(R_{\Upsilon r}))^\beta$ ise Yardımcı Teorem 5.5 den $\tilde{x} = (\tilde{x}_j) \in \ell$ olur ve (5.2) eşitliği sağlanır. $\|u\|_{c_0(R_{\Upsilon r})} = \|v\|_{\ell_\infty}$ eşitliğinden $u \in B_{c_0(R_{\Upsilon r})}$ olması için gerek ve yeter şartın $v \in B_{c_0}$ olması gerektiği sonucuna varılır. Böylece $\|x\|_{c_0(R_{\Upsilon r})}^* = \sup_{u \in B_{c_0(R_{\Upsilon r})}} \left| \sum_j x_j u_j \right| = \sup_{v \in B_{c_0}} \left| \sum_j \tilde{x}_j v_j \right| = \|\tilde{x}\|_{c_0}^*$ elde edilir. Yardımcı Teorem 5.1 kullanılarak $\|x\|_{c_0(R_{\Upsilon r})}^* = \|\tilde{x}\|_{c_0}^* = \|\tilde{x}\|_\ell = \sum_j |\tilde{x}_j| < \infty$ bulunur. \square

Çalışmanın devamında $\tilde{\Lambda} = (\tilde{\lambda}_{ij})$ matrisi $\Lambda = (\lambda_{ij})$ matrisi yardımıyla serinin yakınsak olması şartıyla aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır:

$$\tilde{\lambda}_{ij} = \sum_{k=j, j|k}^{\infty} \frac{\mu\left(\frac{k}{j}\right) Q_j^r}{J_r(k) q_k} \lambda_{ik}.$$

Yardımcı Teorem 5.7. V herhangi bir dizi uzayı ve $\Lambda = (\lambda_{ij})$ sonsuz bir matris olsun.

Eğer $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon r}), V)$ ise bu durumda $\tilde{\Lambda} \in (c_0, V)$ ve her $u \in c_0(R_{\Upsilon r})$ için $\Lambda u = \tilde{\Lambda} v$ olur.

İspat. İspat Yardımcı Teorem 5.5 den kolayca elde edilir. \square

Yardımcı Teorem 5.8. $V \in \{c_0, c, \ell_\infty\}$ olsun. Eğer $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon r}), V)$ ise bu durumda

$$\|L_\Lambda\| = \|\Lambda\|_{(c_0(R_{\Upsilon r}), V)} = \sup_i \left(\sum_j |\tilde{\lambda}_{ij}| \right) < \infty$$

olur.

Yardımcı Teorem 5.9. [39, Teorem 3.7] $U \supset \sigma$ bir BK-uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(a) Eğer $\Lambda \in (U, \ell_\infty)$ ise $0 \leq \|L_\Lambda\|_\chi \leq \limsup_i \|\Lambda_i\|_U^*$ olur ve eğer $\lim_i \|\Lambda_i\|_U^* = 0$ ise L_Λ kompakttır.

(b) Eğer $\Lambda \in (U, c_0)$ ise $\|L_\Lambda\|_\chi = \limsup_i \|\Lambda_i\|_U^*$ olur ve L_Λ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart $\lim_i \|\Lambda_i\|_U^* = 0$ olmasıdır.

(c) Eğer U uzayı AK özelliğine sahip yada $U = \ell_\infty$ ve $\Lambda \in (U, c)$ ise

$$\frac{1}{2} \limsup_i \|\Lambda_i - \lambda\|_U^* \leq \|L_\Lambda\|_\chi \leq \limsup_i \|\Lambda_i - \lambda\|_U^*$$

olur ve

$$L_\Lambda \text{ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart } \lim_i \|\Lambda_i - \lambda\|_U^* = 0$$

olmasıdır. Burada $\lambda = (\lambda_j)$ ve her bir $j \in \mathbb{N}$ için $\lambda_j = \lim_i \lambda_{ij}$ olur.

Yardımcı Teorem 5.10. [39, Teorem 3.11] $U \supset \sigma$ bir BK-uzayı olsun. Eğer $\Lambda \in (U, \ell)$ ise

$$\lim_r \left(\sup_{N \in \mathcal{N}_r} \left\| \sum_{i \in N} \Lambda_i \right\|_U^* \right) \leq \|L_\Lambda\|_\chi \leq 4 \lim_r \left(\sup_{N \in \mathcal{N}_r} \left\| \sum_{i \in N} \Lambda_i \right\|_U^* \right)$$

olur ve L_Λ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart $\lim_r \left(\sup_{N \in \mathcal{N}_r} \left\| \sum_{i \in N} \Lambda_i \right\|_U^* \right) = 0$ olmasıdır. Burada \mathcal{N}_r sınıfı \mathbb{N} küesinin r den daha büyük elemanlı alt kümelerinden oluşan \mathcal{N} nin alt sınıfıdır.

Tüm bu sonuçlar verildikten sonra $c_0(R_{\Upsilon r})$ uzayında kompakt operatörler karakterize edilebilir.

Teorem 5.11.

- 1 Eğer $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon r}), \ell_\infty)$ ise $0 \leq \|L_\Lambda\|_\chi \leq \limsup_i \sum_j |\tilde{\lambda}_{ij}|$ olur.
- 2 Eğer $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon r}), c)$ ise $\frac{1}{2} \limsup_i \sum_j |\tilde{\lambda}_{ij} - \tilde{\lambda}_j| \leq \|L_\Lambda\|_\chi \leq \limsup_i \sum_j |\tilde{\lambda}_{ij} - \tilde{\lambda}_j|$ olur.
- 3 Eğer $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon r}), c_0)$ ise $\|L_\Lambda\|_\chi = \limsup_i \sum_j |\tilde{\lambda}_{ij}|$ olur.
- 4 Eğer $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon r}), \ell)$ ise $\lim_r \|\Lambda\|_{(c_0(R_{\Upsilon r}), \ell)}^{(r)} \leq \|L_\Lambda\|_\chi \leq 4 \lim_r \|\Lambda\|_{(c_0(R_{\Upsilon r}), \ell)}^{(r)}$ olur.
Burada $\|\Lambda\|_{(c_0(R_{\Upsilon r}), \ell)}^{(r)} = \sup_{N \in \mathcal{N}_r} \left(\sum_j \left| \sum_{i \in N} \tilde{\lambda}_{ij} \right| \right)$ ($r \in \mathbb{N}$) dir.

İspat. (1) $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon^r}), \ell_\infty)$ olsun. Her bir $i \in \mathbb{N}$ için $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij} u_j$ serisi yakınsak olduğundan $\Lambda_i \in (c_0(R_{\Upsilon^r}))^\beta$ olur. Böylece Yardımcı Teorem 5.6 dan her bir $i \in \mathbb{N}$ için $\|\Lambda_i\|_{c_0(R_{\Upsilon^r})}^* = \|\tilde{\Lambda}_i\|_{c_0}^* = \|\tilde{\Lambda}_i\|_\ell = \left(\sum_j |\tilde{\lambda}_{ij}| \right)$ bulunur. Yardımcı Teorem 5.9 (a) kullanılarak

$$0 \leq \|L_\Lambda\|_\chi \leq \limsup_i \left(\sum_j |\tilde{\lambda}_{ij}| \right)$$

elde edilir.

(2) $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon^r}), c)$ olsun. Yardımcı Teorem 5.7 den $\tilde{\Lambda} \in (c_0, c)$ elde edilir. Böylece Yardımcı Teorem 5.9 (c) kullanılarak

$$\frac{1}{2} \limsup_i \|\tilde{\Lambda}_i - \tilde{\lambda}\|_{c_0}^* \leq \|L_\Lambda\|_\chi \leq \limsup_i \|\tilde{\Lambda}_i - \tilde{\lambda}\|_{c_0}^*$$

olur. Burada $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_j)$ ve her bir $j \in \mathbb{N}$ için $\tilde{\lambda}_j = \lim_i \tilde{\lambda}_{ij}$ dir. Ayrıca Yardımcı Teorem 5.1 her bir $i \in \mathbb{N}$ için $\|\tilde{\Lambda}_i - \tilde{\lambda}\|_{c_0}^* = \|\tilde{\Lambda}_i - \tilde{\lambda}\|_\ell = \left(\sum_j |\tilde{\lambda}_{ij} - \tilde{\lambda}_j| \right)$ olmasını gerektirir. Bu da ispatı tamamlar.

(3) $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon^r}), c_0)$ olsun. Her bir $i \in \mathbb{N}$ için $\|\Lambda_i\|_{c_0(R_{\Upsilon^r})}^* = \|\tilde{\Lambda}_i\|_{c_0}^* = \|\tilde{\Lambda}_i\|_\ell = \left(\sum_j |\tilde{\lambda}_{ij}| \right)$ holds olduğundan Yardımcı Teorem 5.9 (b) den

$$\|L_\Lambda\|_\chi = \limsup_i \left(\sum_j |\tilde{\lambda}_{ij}| \right)$$

elde edilir.

(4) $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon^r}), \ell)$ olsun. Yardımcı Teorem 5.7 den $\tilde{\Lambda} \in (c_0, \ell)$ olur. Yardımcı Teorem 5.10 dan

$$\lim_r \left(\sup_{N \in \mathcal{N}_r} \left\| \sum_{i \in N} \tilde{\Lambda}_i \right\|_{c_0}^* \right) \leq \|L_\Lambda\|_\chi \leq 4 \lim_r \left(\sup_{N \in \mathcal{N}_r} \left\| \sum_{i \in N} \tilde{\Lambda}_i \right\|_{c_0}^* \right)$$

elde edilir. Ayrıca Yardımcı Teorem 5.1 implies that

$$\left\| \sum_{i \in N} \tilde{\Lambda}_i \right\|_{c_0}^* = \left\| \sum_{i \in N} \tilde{\Lambda}_i \right\|_\ell = \left(\sum_j \left| \sum_{i \in N} \tilde{\lambda}_{ij} \right| \right)$$

olmasını gerektirir. Bu da ispatı tamamlar. \square

Yardımcı Teorem 5.9 ve Yardımcı Teorem 5.10 ile Teorem 5.11 birleştirilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.12.

1 Eğer

$$\lim_i \sum_j |\tilde{\lambda}_{ij}| = 0$$

ise $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon^r}), \ell_\infty)$ için L_Λ operatörü kompakttır.

2 $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon^r}), c)$ için L_Λ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_i \sum_j |\tilde{\lambda}_{ij} - \tilde{\lambda}_j| = 0$$

olmasıdır.

3 $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon^r}), c_0)$ için L_Λ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_i \sum_j |\tilde{\lambda}_{ij}| = 0$$

olmasıdır.

4 $\Lambda \in (c_0(R_{\Upsilon^r}), \ell)$ için L_Λ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_r \|\Lambda\|_{(c_0(R_{\Upsilon^r}), \ell_1)}^{(r)} = 0$$

olmasıdır. Burada $\|\Lambda\|_{(c_0(R_{\Upsilon^r}), \ell)}^{(r)} = \sup_{N \in \mathcal{N}_r} \left(\sum_j | \sum_{i \in N} \tilde{\lambda}_{ij} | \right)$

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tez çalışmasında kullanılan matris sonsuz alt üçgensel bir matris olduğundan bu matrisin tersinin mevcut olduğu bilinmektedir ve hesaplanmıştır. Bu sebeple uzaylar tanımlandıktan sonra uzayların duallerinin elde edileceği öngörülmüştür. Ayrıca elde edilen yeni uzayın klasik uzaya lineer izomorf olacağı bilinmektedir. Dolayısıyla normu korunacağı için bu uzay üzerindeki norma göre uzayın tam olacağı sonucuna varılır. Bu yeni uzaylar üzerinde çeşitli matris sınıfları karakterize edilmiş ve Hausdorff ölçüsü yardımıyla kompakt operatörler karakterize edilmiştir.

Tanımlanan bu uzaylardan daha genel olarak paranormlu uzaylar, hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı oluşturulabilir. Ayrıca tüm bu uzayların çeşitli geometrik özellikleri araştırılabilir.

7. KAYNAKLAR

- [1] H. Kızmaz, "On certain sequence spaces", *Canadian Mathematical Bulletin*, c. 24, sayı 2, ss. 169-176, 1981.
- [2] M. Et, "On some difference sequence spaces", *Turkish Journal of Mathematics*, c. 17, ss. 18–24, 1993.
- [3] M. Mursaleen, "Generalized spaces of difference sequences", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 203, sayı 3, ss. 738–745, 1996.
- [4] M. Mursaleen, & A. K. Noman, "On the spaces of λ -convergent and bounded sequences", *Thai Journal of Mathematics*, c. 8, sayı 2, ss. 311–329, 2012.
- [5] B. Altay, & F. Başar, "The matrix domain and the fine spectrum of the difference operator on the sequence space ℓ_p , $0 < p < 1$ ", *Communications in Mathematical Analysis*, c. 2, sayı 2, ss. 1–11, 2007.
- [6] B. Altay, & F. Başar, "Certain topological properties and duals of the matrix domain of a triangle matrix in a sequence space", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 336, ss. 632–645, 2007.
- [7] B. Altay, F. Başar, & M. Mursaleen, "On the Euler sequence spaces which include the spaces ℓ_p and $\ell_\infty I$ ", *Information Sciences*, c. 176, ss. 1450–1462, 2006.
- [8] C. Aydın, & F. Başar, "Some new sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ ", *Demonstratio Mathematica*, c. 38, ss. 641–656, 2005.
- [9] E. E. Kara, "Some topological and geometrical properties of new Banach sequence spaces", *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2013, sayı 38, ss. 1-15, 2013.
- [10] E. E. Kara, & M. İlhan, "Some properties of generalized Fibonacci sequence spaces", *Linear and Multilinear Algebra*, c. 64, sayı 11, ss. 2208-2223, 2016.
- [11] F. Başar, *Summability Theory and Its Applications*, İstanbul, Türkiye: Bentham Science Publishers, 2012.
- [12] M. Mursaleen, & A. K. Noman, "On σ -conservative matrices and compact operators on the space", *Applied Mathematics Letters*, c. 24, ss. 1554-1560, 2011.

- [13] M. Mursaleen, & A. K. Noman, "The Hausdorff measure of noncompactness of matrix operators on some BK spaces", *Operators and Matrices*, c. 5, ss. 473-486, 2011.
- [14] M. Mursaleen, & A. K. Noman, "Compactness of matrix operators on some new difference sequence spaces", *Linear Algebra and its Applications*, c. 436, ss. 41-52, 2012.
- [15] M. Başarır, & E.E. Kara, "On compact operators on the Riesz B^m -difference sequence space", *Iranian Journal of Science and Technology*, c. 35 (A4), ss. 279-285, 2011.
- [16] E. E. Kara, & M. Başarır, "On compact operators and some Euler B^m -difference sequence spaces", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 379, sayı 2, ss. 499-511, 2011.
- [17] M. Başarır, & E. E. Kara, "On the B-difference sequence space derived by generalized weighted mean and compact operators", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 391, sayı 1, ss. 67-81, 2012.
- [18] M. İlkan, & E. E. Kara, "A new Banach space defined by Euler totient matrix operator", *Operators and Matrices*, c. 13, sayı 2, 527-544, 2019.
- [19] M. İlkan, "Matrix domain of a regular matrix derived by Euler totient function in the spaces c_0 and c ", *Mediterranean Journal of Mathematics*, c. 17, sayı 1, ss. 1-21, 2020.
- [20] M. İlkan, S. Demiriz, & E. E. Kara, "A new paranormed sequence space defined by Euler totient matrix", *Karaelmas Science and Engineering Journal*, c. 9, sayı 2, 277-282, 2019.
- [21] S. Demiriz, & S. Erdem, "Domain of Euler-totient matrix operator in the space \mathcal{L}_p ", *Korean Journal of Mathematics*, c. 28, sayı 2, ss. 361-378, 2020.
- [22] S. Demiriz, M. İlkan, & E. E. Kara, "Almost convergence and Euler totient matrix", *Annals of Functional Analysis*, c. 11, sayı 3, ss. 604-616, 2020.
- [23] S. Erdem, & S. Demiriz, "4-dimensional Euler-totient matrix operator and some double sequence spaces", *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, c. 8, sayı 2, ss. 110-122, 2020.

- [24] G. C. Hazar Güleç, & Merve İlkhan, "A new paranormed series space using Euler totient means and some matrix transformations", *Korean Journal of Mathematics*, c. 28, sayı 2, ss. 205-221, 2020.
- [25] M. İlkhan, "Certain geometric properties and matrix transformations on a newly introduced Banach space", *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, c. 3, sayı 1, ss. 45-51, 2020.
- [26] M. İlkhan, N. Şimşek, E. E. Kara, "A new regular infinite matrix defined by Jordan totient function and its matrix domain in ℓ_p ", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, c. 44, sayı 9, ss. 7622-7633, 2021.
- [27] E.E. Kara, N. Şimşek & M. İlkhan Kara, "On new sequence spaces related to domain of the Jordan totient matrix", S. A. Mohiuddine and B. Hazarika (Editörler), *Sequence space theory with applications*. New York: Chapman and Hall/CRC, 2022, ss. 1-19.
- [28] M. İlkhan, E. E. Kara, & F. Usta, "Compact operators on the Jordan totient sequence spaces", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, c. 44, sayı 9, ss. 7666-7675, 2021.
- [29] B. Musayev & M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Kütahya, Türkiye: Balcı Yayınları, 2000.
- [30] E. Malkowsky, & V. Rakocevic, "An introduction into the theory of sequence spaces and measure of noncompactness", *Zbornik radova, Matematički Inst. SANU*, Belgrade, 9(17) (2000), ss. 143-234.
- [31] E. Kovac, "On φ convergence and φ density", *Mathematica Slovaca*, c. 55, ss. 329-351, 2005.
- [32] L.E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, New York: Chelsea Publishing Company, 1971.
- [33] I. Schoenberg, "The integrability of certain functions and related summability methods", *The American Mathematical Monthly*, c. 66, ss. 361-375, 1959.
- [34] M. İlkhan, & M. A. Bayrakdar, "A study on matrix domain of Riesz-Euler totient matrix in the space of p -absolutely summable sequences", *Communications in Advanced Mathematical Sciences*, c. 4, sayı 1, ss. 14-25, 2021.
- [35] H. Tietz, & M. Stieglitz, "Matrix transformationen von folgenraumen eine ergebnisübersicht", *Mathematische Zeitschrift*, c. 154, ss. 1-16, 1977.

- [36] B. Altay, & F. Başar, "Certain topological properties and duals of the matrix domain of a triangle matrix in a sequence space", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 336, ss. 632-645, 2007.
- [37] B. De Malafosse, "The Banach algebra $B(X)$, where X is a BK space and applications", *Matematichki Vesnik*, c. 57, sayı 1-2, ss. 41-60, 2005.
- [38] V. Rakočević, "Measures of noncompactness and some applications", *Filomat*, c. 12, ss. 87-120, 1998.
- [39] M. Mursaleen, & A. K. Noman, "Compactness by the Hausdorff measure of noncompactness", *Nonlinear Analysis*, c. 73, sayı 8, ss. 2541-2557, 2010.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hüseyin İDİN

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2023
Lisans	Matematik	Afyon Kocatepe Üniversitesi	2009
Lise		Milas Lisesi	2006

YAYINLAR

H. İdin and E.E. Kara, "Matrix domain of a regular matrix derived by Jordan totient function in the spaces c_0 and c ", yayımlanmak üzere gönderildi.