T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

HATİCE ÖĞÜLMÜŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA

DÜZCE, 2021

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Hatice ÖĞÜLMÜŞ tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi _______________

Doç. Dr. Fuat USTA
Düzce Üniversitesi _______________

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi _______________

Dr. Öğr. Üyesi Gülhan AYAR
Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi _______________

Dr. Öğr. Üyesi Elif Segâh ÖZTAŞ
Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi _______________

Tez Savunma Tarihi: 24/12/2021

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

24 Aralık 2021

Hatice ÖĞÜLMÜŞ

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca bana rehberlik eden, akademik desteğini esirgemeyen; bilgisi, çalışkanlığı ve hoşgörüsüyle örnek aldığım değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten duygularımla teşekkür ederim. Tez çalışma sürecinde deneyimlerini aktaran, beni motive eden ve akademik olarak da yol gösteren değerli hocalarım Doç. Dr. Hüseyin BUDAK'a ve Dr. Öğr. Üyesi Tuba TUNÇ'a en içten duygularımla teşekkür ederim. Eğitim yaşamım boyunca maddi-manevi desteğini esirgemeyen, her zaman yanımda olan, doktora sürecimi tamamlamamda büyük emeği bulunan annem Ayşe ÖĞÜLMÜŞ'e, babam İbrahim ÖĞÜLMÜŞ'e ve ablalarıma en içten duygularımla teşekkür ederim.

24 Aralık 2021 **Hatice ÖĞÜLMÜŞ**

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

SİMGELER

$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
I^o	I kümesinin içi
$J^{\alpha}F$	F fonksiyonunun α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali
$L[m,n]$	$[m,n]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	$n-$boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi

ÖZET

İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Hatice ÖĞÜLMÜŞ
Düzce Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Aralık 2021, 113 sayfa

Bu tez iki ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, $h-$konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard eşitsizlikleri elde edilmiş ve elde edilen sonuçların bazı özel ortalamalar için uygulaması yapılmıştır. Ayrıca konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren yeni Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler ispatlanmış ve bu eşitsizliklerin bazı özel ortalamalar için uygulaması yapılmıştır. İkinci bölümde, öncelikle yeni bir konvekslik sınıfı olan $(p,\varphi_h)-$konvekslik tanımlanmış ve özellikleri verilmiştir. Ardından $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejér, Ostrowski, Jensen ve Jensen-Mercer tipli eşitsizlikler ispatlanmıştır. Son olarak Riemann-Liouville kesirli integralleri aracılığıyla $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar sözcükler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Jensen-Mercer eşitsizliği, Konveks fonksiyonlar, Ostrowski eşitsizliği, Riemann-Liouville kesirli integrali.

ABSTRACT

INTEGRAL INEQUALITIES AND THEIR APPLICATIONS

Hatice ÖĞÜLMÜŞ
Düzce University
Institute of Graduate Studies, Department of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
December 2021, 113 pages

This thesis consists of two main parts. In the first part, new Hermite-Hadamard inequalities for $h-$convex functions are obtained and the applications of obtained results to some special means are provided. Besides that, new Hermite-Hadamard-Mercer type inequalities involving Riemann-Liouville fractional integrals for convex functions are proved, and their applications to some special means are got. In the second part, a new kind of convexity called $(p, \varphi_h)-$convexity is defined and its properties are established. Then, new Hermite-Hadamard,Hermite-Hadamard-Fejér, Ostrowski, Jensen and Jensen-Mercer types inequalities for $(p, \varphi_h)-$convex functions are proved. Finally, new Hermite-Hadamard type inequalities for $(p, \varphi_h)-$convex functions via Riemann-Liouville fractional integrals are obtained.

Keywords: Convex functions, Hermite-Hadamard inequality, Jensen-Mercer inequality, Ostrowski inequality, Riemann-Liouville fractional integrals.

EXTENDED ABSTRACT

INTEGRAL INEQUALITIES AND THEIR APPLICATIONS

Hatice ÖĞÜLMÜŞ
Düzce University
Institute of Graduate Studies, Department of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
December 2021, 113 pages

1. INTRODUCTION

The theory of inequalities has great importance in establishing the foundations for approximation methods. This theory has also been an important subject of study in fields such as mathematical economics, game theory, mathematical programming, probability and statistics, thus it has become a rapidly growing discipline. Due to the better understanding of the usefulness of mathematical inequalities in other branches of science as well as in various branches of mathematics, the theory of inequalities has attracted the attention of many researchers in recent years and this theory has improved continuously by new studies. Many of these studies have concentrated on Jensen, Hermite-Hadamard, Čebyšev, Grüss, Ostrowski inequalities.

One of the topics that has an important role in the theory of inequalities is the convex functions. According to the researchers, the theory of convex functions developed rapidly after the two papers published by Jensen in 1905 and 1906. Since convex functions, whose definition is also an inequality, are closely related to the theory of inequalities, many studies involving these two theories have been entered the literature.

In the light of these two theories, new integral inequalities are proved in this thesis. Moreover a new class of $(p,\varphi_h)-$convex functions is introduced and new integral inequalities for $(p,\varphi_h)-$convex functions are obtained.

2. MATERIAL AND METHODS

An extensive literature search is made for important definitions and theorems that guide the thesis. First of all, the Riemann-Liouville fractional integral and its properties are researched. Then, the definitions, histories and properties of convex, $s-$convex, $h-$convex, $\varphi-$convex and φ_h-convex, $p-$convex and $(p,h)-$convex functions are investigated, respectively. In addition, Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejér, Ostrowski, Jensen, Jensen-Mercer inequalities are searched in the literature. By way of this information, new integral inequalities are proved, and a new kind of convexity is defined in this thesis.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

Firstly new integral inequalities of Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard-Mercer types are obtained for $h-$convex and convex functions, respectively, and their applications to some special means are provided.

Then a new class of $(p,\varphi_h)-$ convex functions is defined and the properties of this new convexity class are proved. New integral inequalities of Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejér, Ostrowski, Jensen and Jensen-Mercer types are established for $(p,\varphi_h)-$convex functions. Finally, new Hermite-Hadamard type inequalities for $(p,\varphi_h)-$convex functions with Riemann-Liouville fractional integrals are obtained.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK

In this thesis, a new class of convex functions called $(p,\varphi_h)-$convex functions is defined. Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejér, Ostrowski, Jensen and Jensen-Mercer type inequalities are obtained for convex, $h-$convex and $(p,\varphi_h)-$convex functions. Some obtained results' applications to some special means are provided.

In the further studies, new inequalities for $(p,\varphi_h)-$convex functions can be got by using different fractional intragral operators and other important inequalities in the literature.

1. GİRİŞ

Eşitsizlik teorisi, yaklaşım yöntemlerinin temellerini oluşturmada büyük öneme sahiptir. 19. yüzyılın sonlarından itibaren günümüze kadar matematik ve diğer bilim dallarında sayısız eşitsizlik keşfedilmiş, geliştirilmiş ve kullanılmıştır. Matematiksel eşitsizliklerin, matematiğin çeşitli dallarının yanı sıra diğer bilim dallarındaki yararlılığının daha da iyi anlaşılmasıyla, eşitsizlik teorisi, son yıllarda birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve yapılan yeni çalışmalarla bu teori sürekli gelişim göstermiştir. Birçok araştırmacıya göre eşitsizlikleri formüller yığınından sistematik bir disipline dönüştürdüğü kabul edilen Hardy ve ark. tarafından 1934'te yayınlanan "Inequalities" kitabı bu alanda çalışan matematikçilere yararlı bir referans olmuştur [1]. Bu kitabın ardından, yayınlandıkları zamana kadar eşitsizlikler alanında yapılmış birçok çalışmayı derleyerek okuyucuya sunan Beckenbach ve Bellman'ın [2] kaleme aldığı "Inequalities" kitabı ve Mitrinović'in [3] "Analytic Inequalities" kitabı araştırmacılar için önemli kaynak kitaplar arasında yerini almışlardır.

Eşitsizlik teorisi, matematiksel ekonomi, oyun teorisi, matematiksel programlama, olasılık ve istatistik gibi alanlarda da önemli bir çalışma konusu olmuş, böylece hızla büyüyen bir disiplin haline gelmiştir. Matematiksel analiz ve uygulamalarının çeşitli yönlerini etkileyen bu teori üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların birçoğu özellikle Jensen, Hermite-Hadamard, Čebyšev, Grüss, Ostrowski eşitsizlikleri üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu eşitsizlikler ile ilgili günümüze kadar geçen sürede pek çok çalışma yapılmış, bu eşitsizliklerin birçok genelleştirmesi, iyileştirmeleri, uygulamaları araştırmacılar tarafından ispat edilmiştir.

Eşitsizlik teorisinde önemli bir yere sahip konulardan biri de konveks (dışbükey) fonksiyonlardır. Pečarić ve ark., [4]'te konveks fonksiyonlarla ilgili şöyle demiştir: "Ünlü Danimarkalı matematikçi Jensen tarafından 1905 ve 1906'da iki makalenin yayınlanmasından bu yana, konveks fonksiyonlar teorisi hızlı bir gelişme yaşadı. Bu, birkaç nedene bağlanabilir: İlk olarak, modern analizdeki birçok alan, doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların uygulamasını içerir; ikincisi, konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisi ile yakından ilişkilidir ve birçok önemli eşitsizlik konveks fonksiyonların uygulamalarının sonuçlarıdır." Bu çalışmada Pečarić ve ark. konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizliklerin oynadığı rolü vurgulamış ve konveks fonksiyonların tanımının da aslında bir eşitsizlik olduğuna dikkat çekmiştir [4].

Konveks fonksiyonların sistematik çalışmasının başlangıcı kabul edilen Jensen'in yukarıda bahsedilen eserinden önce de konveks fonksiyonlara atıfta bulunan sonuçlar mevcuttur. Jensen [5]'te konveks fonksiyonlarla ilgili olarak, "Bana öyle geliyor ki dışbükey fonksiyon kavramı, pozitif fonksiyon veya artan fonksiyon kadar temeldir. Bunda yanılmıyorsam, nosyon, gerçek fonksiyonlar teorisinin temel açıklamalarında yerini bulmalıdır." diyerek konveks fonksiyon kavramının önemine vurgu yapmıştır. Cristescu ve Lupşa, [6]'da konvekslik fikrinin antik çağlardan beri insan zihninde belirdiğini ve doğurganlığının, çok çeşitli kavram ve uygulamalara yol açtığını belirtmiştir. Bununla ilgili olarak Niculescu ve Persson da, [7]'de "konvekslik, π nin değerine ilişkin ünlü tahminiyle bağlantılı olarak, Arşimet'e (yaklaşık MÖ 250) kadar geri götürülebilen basit ve doğal bir kavramdır. Arşimet bir dışbükey şeklin çevresinin, onu çevreleyen diğer herhangi bir dışbükey şeklin çevresinden daha küçük olduğu önemli gerçeğini fark etti" demiştir. [8]'de Pachpatte, konveks fonksiyonların köklerinin Hölder (1889), Stolz (1893) ve Hadamard'ın (1893) temel katkılarında bulunabileceğini belirtmiştir. Ayrıca konveks fonksiyon ifadesine Hermite'in 22 Kasım 1881 yılında Mathesis Dergisi'ne gönderdiği mektupta da rastlanmaktadır. Günümüze kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde, konveks fonksiyonlarla ilgili birçok çalışmaya rastlanmaktadır. Ayrıca bu çalışmalarda yeni konvekslik türleri de literatüre kazandırılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16] numaralı referanslardır.

Aşağıda bu tez çalışmasına yön veren bazı önemli kavramlar ve tezde kullanılacak bazı tanım ve teoremlere değinilmiştir. Bunun için ilk olarak tezde elde edilen sonuçlarda yararlanılan Riemann-Louville kesirli integrali tanıtılmıştır. Daha sonra konveks fonksiyon ve özellikleri verilmiştir. Ardından konveks fonksiyonlar ile ilişkili bazı önemli eşitsizlikler ve tezde kullanılacak bazı genel eşitsizlikler tanıtılmıştır. Son olarak da konvekslik çeşitlerinden $s-$konvekslik, $h-$konvekslik, $\varphi-$konvekslik, φ_h-konvekslik, $p-$konvekslik ve $(p,h)-$konvekslik tanımları, özellikleri ve bu konvekslik türleri ile elde edilmiş bazı eşitsizlikler verilmiştir.

1.1. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALİ

Bu alt bölümde Euler gamma fonksiyonu ve Riemann-Liouville kesirli integralinin tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir. Kesirli hesap (kesirli integral ve kesirli türev kavramlarını içermektedir) keyfi mertebeden integrallerin ve türevlerin araştırılması ve uygulamalarıyla ilgilenen matematiksel analiz alanıdır. Mertebesi tamsayı olmayan türev ve integrallerin araştırılması ile ilgilenen bu alanın tarihi oldukça eskiye dayanmaktadır. Araştırmalara göre, yarım mertebeden türevin ilk kez tartışıldığı Leibniz'in L'Hospital'e yazdığı 30 Eylül 1695 tarihli mektup kesirli hesabın başlangıcı olarak kabul edilmektedir ([17], [18]). Bu konuya katkı sağlayan bazı önemli matematikçiler arasında Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Grünwald, Hadamard, Hardy ve Littlewood gibi isimler bulunmaktadır [17]. Kesirli analiz; fonksiyon teorisi, integral, diferansiyel denklemler ve diğer analiz dallarının çeşitli problemleriyle bağlantılarının yanında fizik ve mühendislikte de uygulama alanı olan karmaşık bir konudur ve bu çoklu yönüyle son zamanlarda birçok araştırmacının dikkatini çekmektedir.

Kesirli hesabın temel işlevlerinden biri, $n \in \mathbb{Z}^+$ için tanımlı $n! = n.(n-1)...2.1$ işlemini tamsayı olmayan değerler ve hatta karmaşık değerler için genişletebilmeye olanak sağlayan Euler gamma fonksiyonudur. $\mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere Euler gamma fonksiyonu

$$\Gamma(\mu) := \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{\mu-1}d\tau, \qquad \mathrm{Re}\mu > 0 \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır [19].

Gamma fonksiyonun bazı özellikleri aşağıdaki gibidir [20]:

i) $\Gamma(1) = 1$

ii) $\Gamma(\mu+1) = \mu\Gamma(\mu)$, $\mathrm{Re}\mu > 0$

iii) $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{Z}^+$

iv) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

n-kat integralin ilkelinin hesaplanması için bilinen meşhur formül aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\tau}\int_0^{\xi_1}\int_0^{\xi_2}\cdots\int_0^{\xi_{n-1}} F(\xi_n)\,d\xi_n d\xi_{n-1} d\xi_{n-2}\ldots d\xi_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\tau} F(\xi_n)(\tau-\xi_n)^{n-1}\,d\xi_n, \qquad \tau>0,\ n\in\mathbb{Z}^+ \end{aligned} \tag{1.2}$$

α $(\alpha > 0)$ mertebesindeki Riemann-Liouville kesirli integral kavramı; $F(\tau)$ fonksiyonunun n-kat ilkelinin hesaplanmasını konvolüsyon (evrişim) tipinin tek katlı integraline indirgeyen (1.2) formülünün bir sonucudur. (1.2) eşitliğinde $(n-1)! = \Gamma(n)$ olarak alınırsa formülün n nin keyfi bir pozitif reel sayı değeri için genişletilmesi sağlanmış olur [17]. Böylece α pozitif bir reel sayı olmak üzere sırasıyla α mertebeden $J^{\alpha}_{m^+}F$ ve $J^{\alpha}_{n^-}F$ Riemann-Liouville kesirli integralleri aşağıdaki gibi tanımlanır [21]:

Tanım 1.1. $F \in L(m,n)$ olsun.

$$J^{\alpha}_{m^+}F(\tau) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_m^{\tau} F(\xi)(\tau-\xi)^{\alpha-1}\,d\xi, \qquad \tau > m \tag{1.3}$$

ve

$$J^{\alpha}_{n^-}F(\tau) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau}^{n} F(\xi)(\xi-\tau)^{\alpha-1}\,d\xi, \qquad \tau < n \tag{1.4}$$

integrallerine sırasıyla α mertebeden sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri denir.

Riemann-Liouville kesirli integralleri şu özellikleri sağlar ([21]):

i) $J^{\alpha}_{m^+}J^{\beta}_{m^+}F = J^{\alpha+\beta}_{m^+}F, J^{\alpha}_{n^-}J^{\beta}_{n^-}F = J^{\alpha+\beta}_{n^-}F$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

ii) $J^{0}_{m^+}F(\chi) = J^{0}_{n^-}F(\chi) = F(\chi)$, $\alpha > 0$

iii) $F(\chi) = (\chi - m)^{\beta-1}$ ve $F(\chi) = (n-\chi)^{\beta-1}$, $\beta > 0$ kuvvet fonksiyonları için Riemann-Liouville kesirli integralleri sırasıyla

$$J_{m^+}^{\alpha} F = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\chi - m)^{\alpha+\beta-1}, \qquad \alpha > 0 \tag{1.5}$$

ve

$$J_{n^-}^{\alpha} F = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (n-\chi)^{\alpha+\beta-1}, \qquad \alpha > 0 \tag{1.6}$$

şeklinde bulunur.

1.2. KONVEKS FONKSİYONLAR

Bu alt bölümde ilk olarak konveks fonksiyon tanımı ve özellikleri verilmiştir. Ardından konveks fonksiyonların sürekliliği ve diferansiyellenebilirliği ile ilgili teoremlere değinilmiştir.

Tanım 1.2. I, $\mathbb{R}$ üzerinde bir aralık olsun. $F : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\chi, \mathcal{Y} \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$F(\lambda\chi + (1-\lambda)\mathcal{Y}) \leq \lambda F(\chi) + (1-\lambda) F(\mathcal{Y}) \tag{1.7}$$

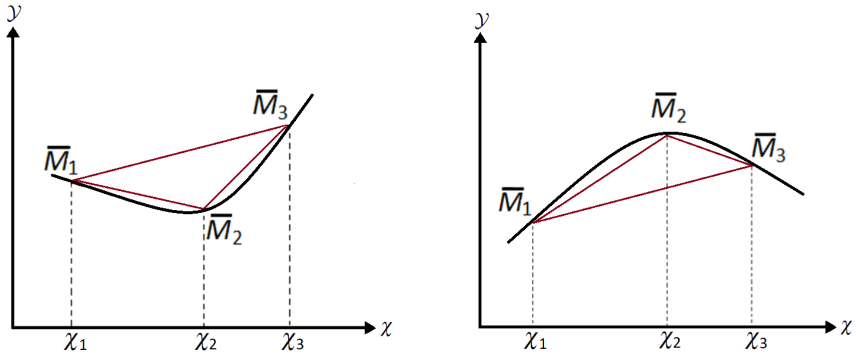
şartını sağlıyorsa F fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. (1.7) eşitsizliği her $\chi \neq \mathcal{Y}$ ve $\lambda \in (0,1)$ için kesin küçük ise F ye kesin konveks fonksiyon denir. (1.7) eşitsizliği yön değiştirirse F fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. Burada her $\chi \neq \mathcal{Y}$ ve $\lambda \in (0,1)$ için kesin küçük ise F ye kesin konkav fonksiyon denir [22].

Geometrik olarak (1.7) eşitsizliği şu anlama gelmektedir:

$\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ ve $\overline{M}_3$, F fonksiyonunun grafiği üzerinde keyfi üç nokta olsun ve $\overline{M}_2$ noktası $\overline{M}_1$ ve $\overline{M}_3$ noktalarının arasında bulunsun. O halde $\overline{M}_2$ noktası $\overline{M}_1\overline{M}_3$ kirişinin üzerinde veya altında kalır. Eğim olarak ifade edilirse

$$Eğim\overline{M}_1\overline{M}_2 \leq Eğim\overline{M}_1\overline{M}_3 \leq Eğim\overline{M}_2\overline{M}_3 \tag{1.8}$$

şeklinde yazılır. Eğer F fonksiyonu kesin konveks ise (1.8) eşitsizliği kesin küçük olur. F fonksiyonu konkav ise (1.8) eşitsizliği yön değiştirir [23].



(a) (b)

Şekil 1.1. Kiriş eğimleri a) Konveks fonksiyonda b) Konkav fonksiyonda.

1.2.1. Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Özellikler

Sonuç 1.3. Bir F fonksiyonunun I aralığı üzerinde konveks olması olması için gerek ve yeter şart her χ, $\mathcal{Y} \in I$ ve $\varepsilon + \eta > 0$ şartını sağlayan her ε, $\eta \in \mathbb{R}$ için

$$F\left(\frac{\varepsilon\chi + \eta\mathcal{Y}}{\varepsilon + \eta}\right) \leq \frac{\varepsilon F(\chi) + \eta F(\mathcal{Y})}{\varepsilon + \eta} \tag{1.9}$$

sağlanmasıdır [3].

Sonuç 1.4. $F : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun I üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart her χ_1, χ_2, $\chi_3 \in I$ $(\chi_1 < \chi_2 < \chi_3)$ için

$$\begin{vmatrix} \chi_1 & F(\chi_1) & 1 \\ \chi_2 & F(\chi_2) & 1 \\ \chi_3 & F(\chi_3) & 1 \end{vmatrix} = (\chi_3 - \chi_2) F(\chi_1) + (\chi_1 - \chi_3) F(\chi_2) + (\chi_2 - \chi_1) F(\chi_3) \geq 0 \tag{1.10}$$

eşitsiziliğinin, diğer bir ifadeyle

$$F(\chi_2) \leq \frac{\chi_2 - \chi_3}{\chi_1 - \chi_3} F(\chi_1) + \frac{\chi_1 - \chi_2}{\chi_1 - \chi_3} F(\chi_3) \tag{1.11}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [4].

Sonuç 1.5. Köşeleri $(\chi_1, F(\chi_1))$, $(\chi_2, F(\chi_2))$, $(\chi_3, F(\chi_3))$ olan üçgenin alanı

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \chi_1 & F(\chi_1) & 1 \\ \chi_2 & F(\chi_2) & 1 \\ \chi_3 & F(\chi_3) & 1 \end{vmatrix} \tag{1.12}$$

olarak bulunur. Şekil 1.1 (a) da temsil edilen grafiğin fonksiyonu konveks olduğu için $A > 0$ bulunur. Şekil 1.1 (b) de grafik konkav olduğundan $A < 0$ bulunur [3].

Sonuç 1.6. $\mathcal{F}$ nin hem konveks hem de konkav olması için gerek ve yeter şart β, $c \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{F}(\chi) = \beta x + c$ olmasıdır.

(1.11) eşitsizliği

$$\frac{\mathcal{F}(\chi_1) - \mathcal{F}(\chi_2)}{\chi_1 - \chi_2} \leq \frac{\mathcal{F}(\chi_2) - \mathcal{F}(\chi_3)}{\chi_2 - \chi_3} \qquad (\chi_1 < \chi_2 < \chi_3) \tag{1.13}$$

şeklinde yeniden düzenlenirse aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 1.7. $\mathcal{F}$ nin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\eta \in I$ için $\chi \to \frac{\mathcal{F}(\chi)-\mathcal{F}(\eta)}{\chi-\eta}$ fonksiyonunun I üzerinde azalmayan olmasıdır ($\chi \neq \eta$) [22].

Tanım 1.8. (Jensen Konveks Fonksiyon) $\mathcal{F} : [m,n] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her χ, $\mathcal{Y} \in [m,n]$ için

$$\mathcal{F}\left(\frac{\chi + \mathcal{Y}}{2}\right) \leq \frac{\mathcal{F}(\chi) + \mathcal{F}(\mathcal{Y})}{2} \tag{1.14}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $\mathcal{F}$ ye Jensen anlamında konveks ya da $J-$konveks fonksiyon denir [3].

Teorem 1.9. $\mathcal{F}$ fonksiyonu I üzerinde $J-$konveks olsun. Her χ_1, $\chi_2, ...,$ $\chi_n \in I$ ve $r_1 + r_2 + ... + r_n = 1$ olacak şekilde her r_1, $r_2, ...,$ $r_n \in \mathbb{Q}^+$ için

$$\mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \chi_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} r_i \mathcal{F}(\chi_i) \tag{1.15}$$

vardır [3].

1.2.2. Konveks Fonksiyonların Sürekliliği ve Diferansiyellenebilirliği

Tanım 1.10. (Lipschitz Şartı) $\mathcal{F} : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $K \in \mathbb{R}$ sayısı her χ, $\mathcal{Y} \in I$ için

$$|\mathcal{F}(\mathcal{Y}) - \mathcal{F}(\chi)| \leq K |\chi - \mathcal{Y}| \tag{1.16}$$

olacak şekilde varsa $\mathcal{F}$ fonksiyonuna K sabiti için I aralığı üzerinde Lipschitz şartını sağlar denir [23].

Teorem 1.11. I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve $\mathcal{F}: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks olsun. O halde $\mathcal{F}$ fonksiyonu I üzerindeki her kapalı $[m,n]$ aralığı üzerinde Lipschitz şartını sağlar [23].

Teorem 1.12. $\mathcal{F}'_{-}(\chi)$ ve $\mathcal{F}'_{+}(\chi)$ sırasıyla $\mathcal{F}$ fonksiyonunun sol ve sağ türevleri olmak üzere, $\mathcal{F}: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks (kesin konveks) ise $\mathcal{F}'_{-}(\chi)$ ve $\mathcal{F}'_{+}(\chi)$ vardır ve I^o üzerinde artandır (kesin artandır) [23].

Konveks fonksiyon, genel tanımının dışında türevin veya grafiğin geometrik özelliklerine göre integral gösterimiyle de tanımlanırlar.

Teorem 1.13. $\mathcal{F}: [m,n] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart artan (kesin artan) bir $\mathcal{G}: [m,n] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ve c $(m < c < n)$ reel sayısının her χ $(m < \chi < n)$ için

$$\mathcal{F}(\chi) = \mathcal{F}(c) + \int_c^{\chi} \mathcal{G}(\tau)\, d\tau \tag{1.17}$$

olacak şekilde var olmasıdır [22].

Teorem 1.14. $\mathcal{F}$, (m,n) aralığında diferansiyellenebilir olsun. $\mathcal{F}$ nin konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{F}'$ nin artan (kesin artan) olmasıdır [22].

Teorem 1.15. $\mathcal{F}''$, (m,n) aralığında var olsun. $\mathcal{F}$ nin konveks olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{F}''(\chi) \geq 0$ olmasıdır. $\mathcal{F}''(\chi) > 0$ ise $\mathcal{F}$ kesin konvekstir [22].

Geometrik olarak bakılacak olursa, konveks bir fonksiyonun grafiği üzerindeki herhangi bir nokta boyunca, grafiğin üzerinde veya altında uzanan bir doğru vardır [23].

1.3. KONVEKS FONKSİYONLARLA İLİŞKİLİ ÖNEMLİ BAZI EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde konveks fonksiyonlar teorisinde birçok uygulaması bulunan bazı önemli eşitsizliklere değinilmiştir.

Bunlardan ilki Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Bu eşitsizliğe ilk olarak Hermite'in Mathesis Dergisi'ne gönderdiği mektuptan bir bölümün dergide 1883 yılında yayınlanması ile rastlanmaktadır ancak Hermite'in bu kısa notundaki önemli eşitsizlik Hermite'in sonucu olarak uzun süre anılmamştır. Kompleks fonksiyonların tarihi ve teorisi konusunda önde gelen bir uzman olan Beckenbach nottaki ilk eşitsizliğin 1893'te Hadamard tarafından ispatlandığını yazmıştır ve o da Hermite'in sonucunun farkında değildir. Literatüre Hermite tarafından kazandırılan ve Hadamard'ın da ispatladığı, günümüzde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak anılan eşitsizlik aşağıdaki gibidir [24].

Teorem 1.16. (Hermite- Hadamard Eşitsizliği) $\mathcal{F} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu reel sayıların bir I aralığında konveks fonksiyon, $m, n \in I$ ve $m < n$ ise

$$\mathcal{F}\left(\frac{m+n}{2}\right) \leq \frac{1}{n-m}\int_{m}^{n} \mathcal{F}(\chi)\, d\chi \leq \frac{\mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)}{2} \tag{1.18}$$

sağlanır. $\mathcal{F}$ konkav ise her iki eşitsizlik yön değiştirir. Bu eşitsizlik sürekli konveks bir fonksiyonun ortalama değerinin tahminini sağlar.

(1.18) eşitsizliğinin geneleştirilmesi Fejér tarafından 1906 yılında trigonometrik polinomları çalışırken aşağıdaki şekilde elde edilmiştir [25].

Teorem 1.17. (Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği) $\int_{m}^{n} \mathcal{F}(\chi)\mathcal{G}(\chi)\, d\chi$ integrali göz önüne alınsın. Burada $\mathcal{F}$, (m,n) aralığında konveks bir fonksiyon ve $\mathcal{G}$, aynı aralıkta pozitif bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$\mathcal{G}(m+\tau) = \mathcal{G}(n-\tau) \qquad 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}(m+n) \tag{1.19}$$

sağlansın, yani $\mathcal{Y} = \mathcal{G}(\chi)$ fonksiyonu, $\left(\frac{1}{2}(m+n), 0\right)$ noktasını içeren ve $\chi-$eksenine dik olan doğruya göre simetrik olsun. Bu şartlar altında aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\mathcal{F}\left(\frac{m+n}{2}\right)\int_{m}^{n} \mathcal{G}(\chi)\, d\chi \leq \int_{m}^{n} \mathcal{F}(\chi)\mathcal{G}(\chi)\, d\chi \leq \frac{\mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)}{2}\int_{m}^{n} \mathcal{G}(\chi)\, d\chi. \tag{1.20}$$

(1.20) eşitsizliğinde $\chi \in (m,n)$ için $\mathcal{G}(\chi) = 1$ olarak alınırsa Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

1938 yılında Ostrowski, literatürde konveks fonksiyonlar için pek çok uygulaması yapılan aşağıdaki kullanışlı eşitsizliği ispatlamıştır [26].

Teorem 1.18. (Ostrowski Eşitsizliği) $F : [m,n] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığında sürekli, (m,n) aralığında türevlenebilen bir fonksiyon ve türev fonksiyonu $F' : (m,n) \to \mathbb{R}$, (m,n) aralığında sınırlı, yani $\|F'\|_\infty = \sup_{\chi\in[m,n]} |F'(\chi)| < \infty$ olsun O halde her $\chi \in [m,n]$ için

$$\left| F(\chi) - \frac{1}{n-m} \int_m^n F(\tau)\, d\tau \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(\chi - \frac{m+n}{2}\right)^2}{(n-m)^2} \right] (n-m) \left\| F' \right\|_\infty \tag{1.21}$$

eşitsizliği vardır.

(1.21) eşitsizliği $\chi \in [m,n]$ noktasındaki $F(\chi)$ değerinin $\frac{1}{n-m}\int_m^n F(\tau)\, d\tau$ integral ortalamasına yaklaşımı için bir üst sınır verir.

Konveksliğin alternatif bir tanımı olarak da kullanılabilen, matematik ve istatistikteki uygulamalarıyla önemli eşitsizliklerden biri olarak literatürde yerini alan Jensen eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.19. (Jensen Eşitsizliği) I, reel sayılarda bir aralık ve $F : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks olsun. $\chi = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n) \in I^n$ $(n \geq 2)$, $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ pozitif sıralı n li (yani $p_i \geq 0$) ve $P_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$ $(k = 1, 2, ..., n)$ ise

$$F\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{k} p_i \chi_i \right) \leq \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{k} p_i F(\chi_i) \tag{1.22}$$

sağlanır. F kesin konveks ise (1.22) eşitsizliği $\chi_1 = \chi_2 = ... = \chi_n$ dışında kesin küçüktür [4].

Jensen'in orjinal çalışmaları $J-$konveks fonksiyonlar ile ilgilidir ((1.14) eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar). Fakat, (1.14) eşitsizliği farklı varsayımlar altında daha erken dönemlerde ortaya çıkmıştır . Örneğin, Jensen'in 1905 yılında makalesinin ekinde belirttiği gibi Hölder 1889 yılında (1.14) eşitsizliğini F fonksiyonunun $[m,n]$ aralığında iki kez türevlenebildiği ve bu aralıkta $F''(\chi) \geq 0$ şartını sağladığını varsayarak ispatlamıştır. F fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde iki kez türevlenebilirse o halde $\chi \in [m,n]$ için $F''(\chi) \geq 0$ olması F nin $[m,n]$ üzerinde konveks olmasına eşdeğerdir. Daha sonra Henderson 1895-1896 yıllarında, Hölder tarafından ortaya atılan aynı varsayımlar altında (1.22) eşitsizliğini ispatlamıştır. 1875'e kadar geri gidilirse (1.22) eşitsizliğinin $p_1 = ... = p_n$ için özel durumu olan

$$F\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F\left(\chi_i\right) \tag{1.23}$$

formu Grolous tarafından ispatlanmıştır [4].

2003 yılında Mercer tarafından Jensen eşitsizliğinin bir çeşidi olarak yeni bir eşitsizlik ispatlanmıştır. Bu eşitsizlik literatüre Jensen-Mercer eşitsizliği olarak girmiştir. İlk olarak eşitsizliğin ispatında kullanılacak, Mercer tarafından elde edilmiş Lemma, ardından Jensen-Mercer eşitsizliği verilmiştir [27].

$0 < \chi_1 \leq \chi_2 \leq ... \leq \chi_n$, ω_k $(1 \leq k \leq n)$ pozitif reel sayılar ve $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k = 1$ olsun.

Lemma 1.20. F konveks fonksiyon ise

$$F\left(\chi_1+\chi_n-\chi_k\right) \leq F\left(\chi_1\right)+F\left(\chi_n\right)-F\left(\chi_k\right) \qquad (1 \leq k \leq n) \tag{1.24}$$

sağlanır.

Teorem 1.21. (Jensen-Mercer Eşitsizliği) F fonksiyonu χ_k yı içeren bir aralıkta konveks fonksiyon ise

$$F\left(\chi_1+\chi_n-\sum_{k=1}^{n}\omega_k\chi_k\right) \leq F\left(\chi_1\right)+F\left(\chi_n\right)-\sum_{k=1}^{n}\omega_k F\left(\chi_k\right) \tag{1.25}$$

eşitsizliği vardır.

1.4. GENEL EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde tez için gerekli olan bazı temel eşitsizlikler verilecektir. Bunun için ilk olarak basit ortalamalar tanıtılıp özellikleri verilecektir. Ardından üst (alt) çarpımsal fonksiyon tanımı ve integraller için üçgen eşitsizliği verilip, son olarak Hölder ve Power-mean eşitsizliği sunulacaktır.

1.4.1. Basit ortalamalar

Tanım 1.22. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ pozitif sayıların bir dizisi olsun. $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sayılarının harmonik ortalaması $H_n(\alpha)$

$$H_n(\alpha) = \frac{n}{\frac{1}{\alpha_1} + ... + \frac{1}{\alpha_n}}, \tag{1.26}$$

geometrik ortalaması $G_n(\alpha)$

$$G_n(\alpha) = (\alpha_1 ... \alpha_n)^{\frac{1}{n}}, \tag{1.27}$$

ve aritmetik ortalaması $A_n(\alpha)$

$$A_n(\alpha) = \frac{\alpha_{1+} ... + \alpha_n}{n} \tag{1.28}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.23. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ pozitif sayıların keyfi sonlu dizisi için

$$\min(\alpha_1, ..., \alpha_n) \leq H_n(\alpha) \leq G_n(\alpha) \leq A_n(\alpha) \leq \max(\alpha_1, ..., \alpha_n) \tag{1.29}$$

sağlanır. Eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $\alpha_1 = ... = \alpha_n$ olmasıdır [3].

Tanım 1.24. χ ve $\mathcal{Y}$ pozitif sayılar olmak üzere χ ve $\mathcal{Y}$ nin logaritmik ortalaması $\overline{L}(\chi, \mathcal{Y})$

$$\overline{L}(\chi, \mathcal{Y}) = \frac{\mathcal{Y} - \chi}{\log \mathcal{Y} - \log \chi}, \ \chi \neq \mathcal{Y} \tag{1.30}$$

$$\overline{L}(\chi, \chi) = \chi \tag{1.31}$$

olarak tanımlanır.

Logaritmik ortalamanın aritmetik ve geometrik ortalamayı ayırdığı

$$(\chi\mathcal{Y})^{\frac{1}{2}} \leq \overline{L}(\chi, \mathcal{Y}) \leq \frac{\chi + \mathcal{Y}}{2} \tag{1.32}$$

bağıntısı vardır. $\chi \neq \mathcal{Y}$ olması durumunda eşitsizlik kesindir [28].

Tanım 1.25. χ ve $\mathcal{Y}$ pozitif sayılar, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere χ ve $\mathcal{Y}$ nin $p-$logaritmik ortalaması

$$L_p(\chi, \mathcal{Y}) := \begin{cases} \chi & , \chi = \mathcal{Y} \\ \left[\frac{\mathcal{Y}^{p+1} - \chi^{p+1}}{(p+1)(\mathcal{Y} - \chi)}\right]^{\frac{1}{p}} & , \chi \neq \mathcal{Y} \end{cases} \tag{1.33}$$

olarak tanımlanır. L_p ortalaması $p \in \mathbb{R}$ de monoton artandır, $L_0 = I$ ve $L_{-1} = \overline{L}$ dir [24].

Bu ortalamalar

$$H \leq G \leq \overline{L} \leq A \tag{1.34}$$

eşitsizliğini sağlar [24].

Tanım 1.26. $J \subseteq (0, \infty)$ reel sayılarda bir aralık olmak üzere $\digamma : J \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $\chi, \mathcal{Y} \in J$ için

$$\digamma(\chi\mathcal{Y}) \leq \digamma(\chi)\digamma(\mathcal{Y}) \tag{1.35}$$

eşitsizliğini sağlanıyorsa $\digamma$ fonksiyonuna alt çarpımsal fonksiyon denir. (1.35) eşitsizliği yön değiştirirse $\digamma$ fonksiyonuna üst çarpımsal fonksiyon denir [29].

Teorem 1.27. (Üçgen Eşitsizliği) $\digamma$, reel sayıların $[m,n]$ alt aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. O halde $m < n$ olmak üzere

$$\left| \int_m^n \digamma(\chi)\, d\chi \right| \leq \int_m^n |\digamma(\chi)|\, d\chi \tag{1.36}$$

eşitsizliği sağlanır [22].

Analizdeki en önemli eşitsizliklerden biri de Hölder eşitsizliğidir [3].

Teorem 1.28. (Hölder Eşitsizliği) $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ve $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ pozitif sıralı $n-$liler, r ve q sıfırdan farklı sayılar ve $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$, $r > 1$ ise

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \tag{1.37}$$

sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart A, B negatif olmayan reel sabitler ve $A^2 + B^2 > 0$ olmak üzere $k = 1, ..., n$ için $A\alpha_k^r = B\beta_k^q$ olmasıdır.

İntegral için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibidir [22].

Teorem 1.29. $r > 1$ ve $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ fonksiyonları $[m,n]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $|\mathcal{F}|^r$ ve $|\mathcal{G}|^q$, $[m,n]$ aralığında integrallenebilir ise

$$\int_m^n |\mathcal{F}(\chi)\mathcal{G}(\chi)|\,d\chi \leq \left(\int_m^n |\mathcal{F}(\chi)|^r d\chi\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_m^n |\mathcal{G}(\chi)|^q d\chi\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.38}$$

sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart A ve B sabitler olmak üzere $A|\mathcal{F}(\chi)|^r = B|\mathcal{G}(\chi)|^q$ eşitliğinin hemen hemen her yerde sağlanmasıdır.

Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan Power-mean eşitsizliği aşağıdaki gibidir [30]:

Teorem 1.30. (Power-Mean Eşitsizliği) $q \geq 0$ olsun. $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$, $[m,n]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|\mathcal{F}|$ ve $|\mathcal{G}|^q$, $[m,n]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_m^n |\mathcal{F}(\chi)\mathcal{G}(\chi)|\,d\chi \leq \left(\int_m^n |\mathcal{F}(\chi)|\,d\chi\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_m^n |\mathcal{F}(\chi)|\,|\mathcal{G}(\chi)|^q d\chi\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.39}$$

eşitsizliği geçerlidir.

1.5. FARKLI KONVEKSLİK SINIFLARI

Bu alt bölümde tezde yaralanılan veya genelleştirilen bazı konvekslik sınıfları tanıtılmıştır. Bunlar $s-$konvekslik, $h-$konvekslik, $\varphi-$konvekslik, φ_h-konvekslik, $p-$konveksllik ve $(p,h)-$konveksliktir. Sırasıyla bu konvekslik sınıflarının tanımı, özellikleri ve literatürde bu konvekslik çeşidi ile ilgili yapılmış çalışmalar verilmiştir.

1.5.1. $s-$Konvekslik

Literatürde reel fonksiyonlar için $s-$konveksliğin $(0 < s \leq 1)$ bilinen iki tanımı vardır [31].

Tanım 1.31. $\mathcal{F} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her χ, $\mathcal{Y} \in [0,\infty)$ ve her α, $\beta \geq 0$, $\alpha^s + \beta^s = 1$ için

$$\mathcal{F}(\alpha\chi + \beta\mathcal{Y}) \leq \alpha^s\mathcal{F}(\chi) + \beta^s\mathcal{F}(\mathcal{Y}) \tag{1.40}$$

şartını sağlıyorsa $\mathcal{F}$ ye birinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir. Bu $\mathcal{F} \in K_s^1$ ile gösterilir.

Tanım 1.32. $\mathcal{F} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\chi, \mathcal{Y} \in [0,\infty)$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha+\beta = 1$ için (1.40) şartını sağlıyorsa $\mathcal{F}$ ye ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir. Bu $\mathcal{F} \in K_s^2$ ile gösterilir.

Her iki $s-$konvekslikte de $s = 1$ alınırsa $\mathcal{F}$ fonksiyonu konveks fonksiyon olur.

$s-$konveks fonksiyonların bazı temel özellikleri aşağıdaki gibidir [31].

Teorem 1.33. $0 < s < 1$ olsun

a) $\mathcal{F} \in K_s^1$ ise $\mathcal{F}$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığı üzerinde azalmayandır ve $\mathcal{F}(0^+) := \lim\limits_{\chi\to 0^+} \mathcal{F}(\chi) \leq \mathcal{F}(0)$ sağlanır.

b) $\mathcal{F} \in K_s^2$ ise $\mathcal{F}$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığı üzerinde negatif olmayan bir fonksiyondur.

Sonuç 1.34. Yukarıdaki sonuçlar, genel olarak konveks fonksiyonlar (yani $s = 1$) için geçerli değildir. Çünkü $\mathcal{F} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonunun azalmayan ya da negatif olmayan olması gerekmez.

Sonuç 1.35. $0 < s < 1$ ise $\mathcal{F} \in K_s^2$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığı üzerinde azalmayandır fakat $[0,\infty)$ aralığı üzerinde azalmayan olması gerekmez.

Örnek 1.36. $0 < s < 1$ ve $m, n, c \in \mathbb{R}$ olsun. $\chi \in [0,\infty)$ için

$$\mathcal{F}(\chi) = \begin{cases} m & ,\chi = 0 \\ n\chi^s + c & ,\chi > 0 \end{cases} \tag{1.41}$$

olarak tanımlansın. O halde aşağıdakiler sağlanır:

i) $n \geq 0$ ve $c \leq m$ ise $\mathcal{F} \in K_s^1$ olur.

ii) $n \geq 0$ ve $c < m$ ise $\mathcal{F}$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında azalmayandır ama $[0,\infty)$ aralığında değildir.

iii) $n \geq 0$ ve $0 \leq c \leq m$ ise $\mathcal{F} \in K_s^2$ olur.

iv) $n > 0$ ve $c < 0$ ise $\mathcal{F} \notin K_s^2$ olur.

Teorem 1.37. a) $\digamma \in K_s^1$ olsun. (1.40) eşitsizliğinin her χ, $\mathcal{Y} \in [0,\infty)$, α, $\beta \geq 0$ ve $\alpha^s + \beta^s \leq 1$ durumunda sağlanması için gerek ve yeter şart $\digamma(0) \leq 0$ olmasıdır.

b) $\digamma \in K_s^2$ olsun. (1.40) eşitsizliğinin her $\chi, \mathcal{Y} \in [0,\infty)$, $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ durumunda sağlanması için gerek ve yeter şart $\digamma(0) = 0$ olmasıdır.

Teorem 1.38. a) $0 < s \leq 1$ olsun. $\digamma \in K_s^2$ ve $\digamma(0) = 0$ ise $\digamma \in K_s^1$ dir.

b) $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. $\digamma \in K_{s_2}^2$ ve $\digamma(0) = 0$ ise $\digamma \in K_{s_1}^2$ dir.

c) $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. $\digamma \in K_{s_2}^1$ ve $\digamma(0) \leq 0$ ise $\digamma \in K_{s_1}^1$ dir.

Literatürde $s-$konveks fonksiyonlar için elde edilmiş bazı eşitsizliklere değinilecektir.

Dragomir ve Fitzpatrick tarafından $s-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki şekilde elde edilmiştir [32] .

Teorem 1.39. $\digamma$ fonksiyonu $I \subset [0,\infty)$ aralığında ikinci anlamda $s-$konveks olsun. m, $n \in I$ ve $m < n$ alınsın. O halde

$$2^{s-1}\digamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \leq \frac{1}{n-m}\int_m^n \digamma(\chi)\,d\chi \leq \frac{\digamma(m)+\digamma(n)}{s+1} \tag{1.42}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kırmacı ve ark., [33]'te konveks ve ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonların çarpımı için bazı Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler, Alomari ve ark., [12]'de $s-$konveks fonsiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı ile ilgili bazı yeni eşitsizlikler elde etmiştir. Benzer şekilde Özdemir ve ark., [34]'te ikinci türevlerinin mutlak değeri $s-$konveks olan fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ispatlamıştır. İşcan, [35]'te Riemann-Liouville kesirli integraller yoluyla $s-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli ve Simpson tipli yeni eşitsizlikler elde etmiştir. Wang ve Qi tarafından [36]'da n kez diferansiyellenebilen fonksiyonu içeren Riemann-Liouville kesirli integral özdeşliği kurulmuş ve bu özdeşlik yardımıyla $s-$konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. [37]'de Usta ve ark. genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerinin yardımıyla birinci ve ikinci türevlerinin mutlak değeri $s-$konveks olan fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiştir. [38]'de Özcan ve İşcan, daha önce İşcan tarafından ispatlanmış Hölder-İşcan eşitsizliğini kullanarak $s-$konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde etmiştir. [39]'da Set ve ark., Riemann-Liouville kesirli integraller yardımıyla ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizikler ispatlamıştır.

[40]'ta Alomari ve ark., ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için Ostrowski eşitsizliğini aşağıdaki şekilde elde etmiştir:

Teorem 1.40. $\digamma : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferansiyellenebilir ve m, $n \in I$ ve $m < n$ olmak üzere $\digamma' \in L[m,n]$ olsun. $|\digamma'|$ fonksiyonu $[m,n]$ üzerinde $s \in (0,1)$ sabitleri için ikinci anlamda $s-$konveks ve $|\digamma'(\chi)| \leq M$ ise her $\chi \in [m,n]$ için

$$\left| \digamma(\chi) - \frac{1}{n-m} \int_m^n \digamma(u)\,du \right| \leq \frac{M}{n-m} \left[\frac{(\chi-m)^2 + (n-\chi)^2}{s+1} \right] \tag{1.43}$$

sağlanır.

Benzer şekilde [40]'ta çalışma boyunca $s-$konveks fonksiyonlar için çeşitli Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilmiş ve elde edilen sonuçlar bazı özel ortalamalar için uygulanmıştır.

[41]'de Set ve ark., türevlerinin mutlak değeri ikinci anlamda $s-$konveks olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler elde etmiştir. Ayrıca Set, 2011 yılında Riemann-Liouville kesirli integraler yardımıyla ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar içn yeni Ostrowski tipli eşitsizlikler ispatlamıştır [42].

2000 yılında Dragomir ve Fitzpatrick ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğini aşağıdaki şekilde elde etmiştir [43]:

Teorem 1.41. $\digamma$, I üzerinde reel değerli ikinci anlamda $s-$konveks bir fonksiyon ve $s > 0$ olsun. O halde $p_i \geq 0$, $\chi_i \in I$ ve $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ için

$$\digamma\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \chi_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^s \digamma(\chi_i) \tag{1.44}$$

eşitsizliği vardır.

1.5.2. $h-$Konvekslik

$h-$konveks fonksiyonlar sınıfı ilk olarak 2005 yılında Varošanec tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [44]:

Tanım 1.42. I ve J, reel sayılarda aralıklar, $(0,1) \subseteq J$ ve $h : J \to \mathbb{R}$ sıfırdan farklı negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $\digamma : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan fonksiyon ve her χ, $\mathcal{Y} \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$\digamma(\alpha\chi + (1-\alpha)\mathcal{Y}) \leq h(\alpha)\digamma(\chi) + h(1-\alpha)\digamma(\mathcal{Y}) \tag{1.45}$$

sağlanıyorsa $\digamma$ ye $h-$konveks fonksiyon denir ve $\digamma \in SX(h,I)$ şeklinde gösterilir. Eğer (1.45) eşitsizliği yön değiştirirse $\digamma$ ye $h-$konkav fonksiyon denir ve $\digamma \in SV(h,I)$ ile gösterilir.

Varošanec tarafından $h-$konveksliğin bazı özellikleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Sonuç 1.43. h, negatif olmayan fonksiyon ve her $\alpha \in (0,1)$ için $h(\alpha) \geq \alpha$ olsun. Örneğin $\varepsilon \leq 1$ ve $\chi > 0$ için $h_\varepsilon(\chi) = \chi^\varepsilon$ bunu sağlar. Eğer $\digamma$, I üzerinde negatif olmayan konveks fonksiyon ise χ, $\mathcal{Y} \in I$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} \digamma(\alpha\chi + (1-\alpha)\mathcal{Y}) &\leq \alpha\digamma(\chi) + (1-\alpha)\digamma(\mathcal{Y}) \\ &\leq h(\alpha)\digamma(\chi) + h(1-\alpha)\digamma(\mathcal{Y}) \end{aligned} \tag{1.46}$$

sağlanır. Yani $\digamma \in SX(h,I)$ olur. Benzer şekilde, her $\alpha \in (0,1)$ için $h(\alpha) \leq \alpha$ ise negatif olmayan her konkav $\digamma$ fonksiyonu $SV(h,I)$ sınıfına aittir.

Örnek 1.44. $\digamma$ ve h_ε fonksiyonları $h_\varepsilon(\chi) = \chi^\varepsilon$, $\digamma(\chi) = \chi^\theta$, $\chi > 0$, ε, $\theta \in \mathbb{R}$ olarak tanımlansın. Sonuç 1.43'den ve $\tau > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için $F(\tau) = \alpha^\varepsilon\tau^\theta + (1-\alpha)^\varepsilon - (\alpha\tau + 1 - \alpha)^\theta$ fonksiyonunun incelenmesiyle; i) $\theta \in (-\infty, 0] \cup [1,\infty)$ ve $\varepsilon \leq 1$ veya ii) $\theta \in (0,1)$ ve $\varepsilon \leq \theta$ şartlarından biri sağlanıyorsa $\digamma$ fonksiyonu $h_\varepsilon-$konveks, iii) $\theta \in (0,1)$ ve $\varepsilon \geq 1$ veya iv) $\theta > 1$ ve $\varepsilon \geq \theta$ şartlarından biri sağlanıyorsa $\digamma$ fonksiyonu $h_\varepsilon-$konkav fonksiyon olur.

Önerme 1.45. h_1 ve h_2 bir J aralığında tanımlı negatif olmayan fonksiyonlar ve $\tau \in (0,1)$ için $h_2(\tau) \leq h_1(\tau)$ olsun.

i) $\digamma \in SX(h_2, I)$ ise $\digamma \in SX(h_1, I)$ olur.

ii) $\digamma \in SV(h_1, I)$ ise $\digamma \in SV(h_2, I)$ olur.

Önerme 1.46. $\digamma$, $\mathcal{G} \in SX(h,I)$ ve $\theta > 0$ ise $\digamma + \mathcal{G}$, $\theta\digamma \in SX(h,I)$ olur. $\digamma$, $\mathcal{G} \in SV(h,I)$ ve $\theta > 0$ ise $\digamma + \mathcal{G}$, $\theta\digamma \in SV(h,I)$ olur.

[44]'te Varošanec $h-$konveksliğin başka özelliklerini de ispatlamış ve $h-$konveks fonksiyonlar için Schur tipli ve Jensen tipli eşitsizlikler elde etmiştir.

[45]'te Sarıkaya ve ark. tarafından, $h-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

Teorem 1.47. $\digamma \in SX(h,I)$ ve $m < n$ olacak şekilde m, $n \in I$ için $\digamma \in L[m,n]$ olsun. O halde

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}\digamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \leq \frac{1}{n-m}\int\limits_m^n \digamma(\chi)\,d\chi \leq [\digamma(m)+\digamma(n)]\int\limits_0^1 h(\tau)\,d\tau \tag{1.47}$$

sağlanır.

Ayrıca aynı çalışmada Sarıkaya ve ark. iki $h-$konveks fonksiyon çarpımı için yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiştir.

[46]'da Tunç, Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla $h-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliği aşağıdaki şekilde elde etmiştir:

Teorem 1.48. $\digamma \in SX(h,I)$ ve $m < n$ olacak şekilde m, $n \in I$ için $\digamma \in L[m,n]$ olsun. $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere kesirli integraller yardımıyla $h-$konveks fonksiyonlar için

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha)}{(n-m)^{\alpha}}\left[J_{m^+}^{\alpha}(n) + J_{n^-}^{\alpha}(m)\right] \\
\leq\ & [\digamma(m)+\digamma(n)]\int\limits_0^1 \tau^{\alpha-1}[h(\tau)+h(1-\tau)]\,d\tau
\end{aligned} \tag{1.48}$$

$$\leq \frac{2\left[F(m)+F(n)\right]}{\left[\alpha r-r+1\right]^{\frac{1}{r}}}\left(\int_{0}^{1}(h(\tau))^{q}\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği vardır.

[14]'te Ali ve ark., genelleştirilmiş kesirli integralleri kullanarak $h-$konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler kurmuştur. Ayrıca aynı çalışmada birinci türevinin mutlak değeri $h-$konveks olan fonsiyonlar için bazı genelleştirilmiş trapezoid ve midpoint tipli eşitsizlikler ispatlanmıştır. [47]'de Latif ve Alomari , $\mathbb{R}^2$ düzleminden bir dikdörtgen üzerindeki koordinatlarda $h-$konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler kurmuştur. [48]'de Latif, [49]'da Xi ve Qi, [50]'de Sarıkaya ve ark. ve [51]'de Tunç ve ark. $h-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Lazhar ve Simpson tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir. Ayrıca [52]'de Bombardelli ve Varošanec, $h-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlikleri ispatlamıştır.

[53]'te Tunç, türevinin mutlak değeri $h-$konveks olan fonksiyonlar için Ostrowski eşitsizliğini şu şekilde elde etmiştir:

Teorem 1.49. $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan ve üst çarpımsal fonksiyon olsun. $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferansiyellenebilir, $m < n$ olacak şekilde $m,\ n \in I$ için $F \in L[m,n]$ ve $h(\alpha) \geq \alpha$ olsun. Eğer $|F'|$ fonksiyonu I üzerinde $h-$konveks ve $\chi \in [m,n]$ için $|F'(\chi)| \leq K$ ise o halde

$$\begin{aligned} &\left|F(\chi)-\frac{1}{n-m}\int_{m}^{n}F(u)\,du\right| \\ \leq\ & \frac{K\left[(\chi-m)^{2}+(n-\chi)^{2}\right]}{n-m}\int_{0}^{1}\left[h\left(\tau^{2}\right)+h\left(1-\tau^{2}\right)\right]d\tau \end{aligned} \tag{1.49}$$

sağlanır.

[54]'te Matloka, kesirli integraller yardımıyla türevleri $h-$konveks olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler elde etmiştir.

[13]'te Cortez ve Hernández, $h-$konveks fonksiyonlar ve operatör $h-$konveks fonksiyonlar için Jensen-Mercer eşitsizliğiyle ilgili yeni sonuçlar elde etmiştir.

1.5.3. $\varphi-$Konvekslik ve φ_h-Konvekslik

$\varphi-$konvekslik tanımına ilk olarak 1999 yılında Youness'un çalışmasında $E-$konvekslik adı ile rastlanmaktadır [55].

Tanım 1.50. ($E-$Konveks Kümeler) $M \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer bir $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü, her $\chi, \mathcal{Y} \in M$ ve $0 \leq \tau \leq 1$ için

$$(1-\tau) E(\chi) + \tau E(\mathcal{Y}) \in M \tag{1.50}$$

olacak şekilde varsa M kümesine $E-$konveks küme denir.

Tanım 1.51. $M \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer bir $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü M kümesi $E-$konveks küme olacak şekilde var ve $\digamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve her $\chi, \mathcal{Y} \in M$ ve $0 \leq \tau \leq 1$ için

$$\digamma(\tau E(\chi) + (1-\tau) E(\mathcal{Y})) \leq \tau f(E(\chi)) + (1-\tau) \digamma(E(\mathcal{Y})) \tag{1.51}$$

sağlıyorsa, $\digamma$ ye $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde $E-$konveks denir. (1.51) eşitsizliği yön değiştirirse $\digamma$ ye $E-$konkav denir.

[6]'da Cristescu ve Lupşa "Non-Connected Convexities and Applications" kitabında, Youness'un $E-$konveks küme tanımına göre $m \in M \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü her $\chi \in M$ için $E(\chi) = m$ olarak alınırsa, boştan farklı her M kümesinin $E-$konveks olacağına ve bu nedenle bu tanımın çok geniş bir tanım olduğuna dikkat çekmiştir. Bu yüzden $E-$konveks küme tanımını aşağıdaki şekilde yeniden ifade etmişlerdir [6]:

Tanım 1.52. $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu verilsin. $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesi, her $\chi, \mathcal{Y} \in M$ ve $0 \leq \tau \leq 1$ için

$$(1-\tau) E(\chi) + \tau E(\mathcal{Y}) \in M \tag{1.52}$$

sağlıyorsa M kümesine $E-$konveks küme denir.

Bu tanımlamaların ardından [56]'da Cristescu, reel düzlemde $\varphi-$konvekslik adı ile Youness'un [55]'te verdiği tanımı, [6]'ya göre yeniden düzenleyerek aşağıdaki şekilde vermiştir:

Tanım 1.53. $[m,n] \subseteq \mathbb{R}$ olsun ve $\varphi : [m,n] \to [m,n]$ fonksiyonu verilsin. Bir $\mathcal{F} : [m,n] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\chi, \mathcal{Y} \in [m,n]$ ve $0 \leq \tau \leq 1$ için

$$\mathcal{F}\left(\tau\varphi(\chi) + (1-\tau)\varphi(\mathcal{Y})\right) \leq \tau\mathcal{F}\left(\varphi(\chi)\right) + (1-\tau)\mathcal{F}\left(\varphi(\mathcal{Y})\right) \tag{1.53}$$

şartını sağlıyorsa $\mathcal{F}$ ye $[m,n]$ üzerinde $\varphi-$konveks fonksiyon denir.

φ fonksiyonu birim fonksiyon seçilirse yukarıdaki tanım klasik konveksliğe dönüşür.

Aynı çalışmada Cristescu, $\varphi-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki şekilde elde etmiştir.

Teorem 1.54. $\varphi : [m,n] \to [m,n]$ sürekli fonksiyonu için $\mathcal{F} : [m,n] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\varphi-$konveks ise

$$\mathcal{F}\left(\frac{\varphi(m)+\varphi(n)}{2}\right) \leq \frac{1}{\varphi(n)-\varphi(m)}\int\limits_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \mathcal{F}(\chi)\,d\chi \leq \frac{\mathcal{F}(\varphi(m))+\mathcal{F}(\varphi(n))}{2} \tag{1.54}$$

eşitsizliği vardır.

[57]'de Sarıkaya ve ark. türevlerinin mutlak değeri $\varphi-$konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiştir. [58]'de Set ve ark. koordinatlar üzerinde $\varphi-$konveks fonksiyonları tanımlamış ve bu fonksiyonlar sınıfının bazı özelliklerini vermiştir. Ardından bu fonksiyon sınıfı için yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiştir.

[59]'da Sarıkaya φ_h-konveksliği şöyle tanımlamıştır. $\varphi : [m,n] \to [m,n]$ fonksiyonu verilsin.

Tanım 1.55. I, $\mathbb{R}$ de bir aralık olsun ve $h : (0,1) \to (0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. $\mathcal{F} : I \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $\chi, \mathcal{Y} \in I$ ve $\tau \in (0,1)$ için

$$\mathcal{F}\left(\tau\varphi(\chi) + (1-\tau)\varphi(\mathcal{Y})\right) \leq h(\tau)\mathcal{F}\left(\varphi(\chi)\right) + h(1-\tau)\mathcal{F}\left(\varphi(\mathcal{Y})\right) \tag{1.55}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $\digamma$ ye φ_h-konveks fonksiyon denir. (1.55) eşitsizliği yön değiştirirse $\digamma$ ye φ_h-konkav fonksiyon denir.

[59]'da Sarıkaya φ_h-konveksliğin özelliklerini sunmuş ve φ_h-konvekslik için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiştir. Ayrıca [60]'ta Sarıkaya $c > 0$ a göre güçlü φ_h-konveks fonksiyonları tanımlamış ve özelliklerini vermiştir. Aynı çalışmada Sarıkaya iç çarpım uzaylarında güçlü φ_h-konveks fonksiyonların gösterimini elde etmiştir. [61]'de Sarıkaya ve Özçelik türevlerinin mutlak değeri $c > 0$ sabiti ile güçlü φ_h-konveks fonksiyonları kullanarak yeni integral eşitsizlikleri elde etmiştir.

1.5.4. $p-$Konvekslik

Konveks fonksiyonlar sınıfının bir genelleştirmesi olan $p-$konveks fonksiyonlar ilk olarak Zhang ve Wan tarafından [62]'de tanımlanmıştır. Bu tanımda p sayısı tek doğal sayı ya da payı ve paydası tek doğal sayı olan bir rasyonel sayı olarak alınmıştır. Zhang ve Wan'ın tanımı $p \neq -1$ olduğu için harmonik fonksiyonları içermemektedir.

İşcan tarafından $p-$konveks fonksiyonlar, harmonik konveks fonksiyonlar sınıfını da içerecek şekilde p sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere tanım kümesi pozitif reel sayılar kümesinin bir aralığına kısıtlanarak aşağıdaki şekilde yeniden tanımlanmıştır [63].

Sonuç 1.56. $I \subset (0,\infty)$ bir reel aralık ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ise her $\chi, \mathcal{Y} \in I$ ve $\tau \in [0,1]$ için

$$[\tau\chi^p + (1-\tau)\mathcal{Y}^p]^{\frac{1}{p}} \in I \tag{1.56}$$

sağlanır.

Tanım 1.57. $I \subset (0,\infty)$ bir reel aralık ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. $\digamma : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her χ, $\mathcal{Y} \in I$ ve $\tau \in [0,1]$ için

$$\digamma\left([\tau\chi^p + (1-\tau)\mathcal{Y}^p]^{\frac{1}{p}}\right) \leq tf(\chi) + (1-\tau)\digamma(\mathcal{Y}) \tag{1.57}$$

sağlıyorsa $\digamma$ ye $p-$konveks fonksiyon denir. (1.57) eşitsizliği yön değiştirirse $\digamma$ ye $p-$konkav fonksiyon denir.

[63]'te İşcan $p-$konveks fonksiyon örneklerini aşağıdaki şekilde sunmuştur.

Örnek 1.58. $\mathcal{F} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\chi) = \chi^p, p \neq 0$ ve $\mathcal{G} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{G}(\chi) = c$, $c \in \mathbb{R}$ olsun. $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ fonksiyonları hem $p-$konveks hem de $p-$konkavdır.

Örnek 1.59. $\mathcal{F} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\chi) = \chi$ olsun. $p \leq 1$ için $\mathcal{F}$ fonksiyonu $p-$konveks, $p \geq 1$ için $p-$konkav olur.

Örnek 1.60. $\mathcal{F} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\chi) = \chi^{-p}$ ve $p \geq 1$ olsun. O halde $\mathcal{F}$ fonksiyonu $p-$konveks fonksiyondur.

Örnek 1.61. $\mathcal{F} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\chi) = \ln \chi$ ve $p \geq 1$ olsun. O halde $\mathcal{F}$ fonksiyonu $p-$konveks fonksiyondur.

[64]'te Noor ve ark., Zhang ve Wan'ın [62]'deki tanımını kullanarak diferansiyellenebilir $p-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard ve Simpson tipli eşitsizlikler elde etmiştir. Bunun için ispatladığı iki yeni integral özdeşliğinden faydalanmıştır. [65]'te İşcan, $p-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili yeni eşitsizlikler elde etmiştir.

[66]'da Kunt ve İşcan, kesirli integraller için Hermite Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki şekilde elde etmiştir.

Teorem 1.62. $\mathcal{F} : I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $p-$konveks, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha > 0$ ve $m < n$ olmak üzere m, $n \in I$ olsun. $\mathcal{F} \in L[m,n]$ ise Riemann-Liouville kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

1) $p > 0$ ise

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\left[\frac{m^p+n^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(n^p-m^p)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\frac{m^p+n^p}{2}+}(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})(n^p)+J^{\alpha}_{\frac{m^p+n^p}{2}-}(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})(m^p)\right] \\ &\leq \frac{\mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)}{2} \end{aligned} \tag{1.58}$$

olur. Burada $\mathcal{G}(\chi) = \chi^{\frac{1}{p}}$, $\chi \in [m^p, n^p]$ dir.

2) $p < 0$ ise

$$\mathcal{F}\left(\left[\frac{m^p+n^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(m^p-n^p)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\frac{m^p+n^p}{2}+}(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})(m^p)+J^{\alpha}_{\frac{m^p+n^p}{2}-}(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})(n^p)\right]$$

$$\leq \quad \frac{F(m)+F(n)}{2} \tag{1.59}$$

olur. Burada $\mathcal{G}(\chi)=\chi^{\frac{1}{p}}$, $\chi\in[n^p,m^p]$ dir.

[15]'te Kunt ve İşcan, $p-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliğini kurmuştur. Bunun için öncelikle $m,\ n\in(0,\infty)$ ve $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ için $\left[\frac{m^p+n^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ye göre $p-$simetrik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 1.63. $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ olsun. Bir $\omega:[m,n]\subseteq(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, her $\chi\in[m,n]$ için $\omega(\chi)=\omega\left([m^p+n^p-\chi^p]^{\frac{1}{p}}\right)$ sağlıyorsa ω ya $\left[\frac{m^p+n^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ye göre $p-$simetrik fonksiyon denir.

Örnek 1.64. $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ olsun. $\omega_1,\ \omega_2:[m,n]\subseteq(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $c\in\mathbb{R}$ için $\omega_1(\chi)=c$ ve $\omega_2(\chi)=\left(\chi^p-\frac{m^p+n^p}{2}\right)^2$ olarak tanımlansın. O halde $\omega_1,\ \omega_2$ fonksiyonları $\left[\frac{m^p+n^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ye göre simetriktir.

Ardından [15]'te $p-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

Teorem 1.65. $F:I\subseteq(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $p-$konveks, $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $m,\ n\in I$ ve $m<n$ olsun. $F\in L[m,n]$ ve $\omega:[m,n]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilir ve $\left[\frac{m^p+n^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ye göre $p-$simetrik ise o halde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} F\left(\left[\frac{m^p+n^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_m^n \omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi &\leq \int_m^n F(\chi)\,\omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi \\ &\leq \frac{F(m)+F(n)}{2}\int_m^n \omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi. \end{aligned} \tag{1.60}$$

Kunt ve İşcan [16]'da kesirli integral formunda $p-$konveks fonksiyonların Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizliklerini elde etmiştir.

[67]'de Latif, diferansiyellenebilir bir dönüşümü içeren ağırlıklı yeni bir özdeşlik ispatlamış ve bu özdeşlik yardımıyla $p-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli

eşitsizlikler elde etmiştir. [68]'de Mehreen ve Anwar ilk olarak üstel $p-$konveks fonksiyonlar ile ikinci anlamda üstel $s-$konveks fonksiyonları tanımlamış ve ardından bu konvekslik sınıfları için Hermite-Hadamard tipli yeni integral eşitsizlikleri elde etmiştir.

1.5.5. $(p,h)-$Konvekslik

Fang ve Shi, yeni bir konvekslik sınıfı olan $(p,h)-$konveksliği aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır [69].

Tanım 1.66. $(0,1)\subseteq J$ olmak üzere $h:J\to\mathbb{R}$ negatif olmayan, sıfırdan farklı bir fonksiyon olsun. Eğer $\mathcal{F}:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyon ve her $\chi,\ \mathcal{Y}\in I$ ve $\alpha\in(0,1)$ için

$$\mathcal{F}\left([\alpha\chi^{p}+(1-\alpha)\mathcal{Y}^{p}]^{\frac{1}{p}}\right)\leq h(\alpha)\mathcal{F}(\chi)+h(1-\alpha)\mathcal{F}(\mathcal{Y}) \tag{1.61}$$

sağlanıyorsa $\mathcal{F}$ ye $(p,h)-$konveks fonksiyon denir. Benzer şekide (1.61) eşitsizliğinde eşitsizlik yön değiştirirse $\mathcal{F}$ ye $(p,h)-$konkav fonksiyon denir.

Örnek 1.67. $h_{\varepsilon}(\alpha)=\alpha^{\varepsilon}$, $\varepsilon\leq 1$ ve $\alpha>0$ olsun. Eğer p bir tek sayı ve $\chi\geq 0$ olmak üzere $\mathcal{F}(\chi)=\chi^{p}$ olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left([\alpha\chi^{p}+(1-\alpha)\mathcal{Y}^{p}]^{\frac{1}{p}}\right) &\leq \alpha\mathcal{F}(\chi)+(1-\alpha)\mathcal{F}(\mathcal{Y}) \\ &\leq h_{\varepsilon}(\alpha)\mathcal{F}(\chi)+h_{\varepsilon}(1-\alpha)\mathcal{F}(\mathcal{Y})\end{aligned} \tag{1.62}$$

olur ve böylece $\mathcal{F}$ fonksiyonu $(p,h)-$konveks fonksiyondur [69].

[69]'da Fang ve Shi, $(p,h)-$konveks fnksiyonların özelliklerini vermiş ardından bu konvekslik sınıfı için Schur, Jensen ve Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir.

[70]'te Wengui Yang $\Delta=[m,n]\times[c,d]\in\mathbb{R}^{2}$ olmak üzere Δ üzerindeki koordinatlarda $(p_1,h_1)-(p_2,h_2)-$konveks fonksiyonları tanımlamış ve bu konvekslik sınıfı için Hermite-Hadamard eşitsizlikleri kurmuştur. Benzer şekilde Raees ve Anwar, Katugampola kesirli integrallerini kullanarak koordinat $(p_1,h_1)-(p_2,h_2)-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler oluşturmuşlardır [71].

Dinh ve Vo operatör $(p,h)-$konveks fonksiyonlar sınıfını tanımlamış, bu fonksiyon sınıfı için Jensen tipli eşitsizlikler elde etmiştir [72]. Awan ve ark. , [73]'te güçlü $(p,h)-$konveks fonksiyonları tanımlayıp, bu sınıfa ait fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında, bizlere ilham olan bu tanım ve teoremlerin ışığında, ikinci bölümde $h-$konveks ve konveks fonksiyonlar için sırasıyla Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Mercer tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiş ve bazı özel ortalamalar için uygulamaları yapılmıştır.

Üçüncü bölümde ilk olarak yeni bir konvekslik sınıfı olan $(p,\varphi_h)-$konvekslik sınıfı tanımlanmış ve bu yeni konvekslik sınıfının özellikleri verilmiştir. Ardından $(p,\varphi_h)-$konvekslik için sırasıyla Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer, Ostrowski, Jensen ve Jensen-Mercer tipli yeni integral eşitsizlikleri ispatlanmıştır. Son olarak Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise yapılan çalışmalar özetlenmiş ve yeni çalışmalar için öneriler sunulmuştur.

2. HERMITE-HADAMARD VE HERMITE-HADAMARD-MERCER TİPLİ YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Bu bölümde önce $h-$konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiş ve bazı özel ortalamalar için uygulamalar yapılmıştır. Daha sonra Jensen-Mercer eşitsizliği ve Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanılarak, konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Mercer tipli yeni eşitsizlikler ispatlanmış ve uygulamaları yapılmıştır.

2.1. $h-$KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN YENİ HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde ilk olarak iki lemma ispatlanmış ve bu lemmalar yardımıyla $h-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Son olarak bu eşitsizliklerin bazı özel ortalamalar için uygulaması verilmiştir.

Lemma 2.1. $\digamma$, $w : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonları I^o üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar, $m,\ n \in I^o$ ve $m < n$ olsun. Eğer w', $\digamma' \in L[m,n]$ ise aşağıdaki eşitlik vardır:

$$
\begin{aligned}
& [w(1) - w(0)] \frac{\digamma(m) + \digamma(n)}{2} \\
& - \frac{1}{2(n-m)} \int_m^n \left[w'\left(\frac{\chi - m}{n - m} \right) + w'\left(\frac{n - \chi}{n - m} \right) \right] \digamma(\chi) \, d\chi \qquad (2.1) \\
= \; & \frac{n-m}{2} \int_0^1 [w(1-\tau) - w(\tau)] \digamma'(\tau m + (1-\tau) n) \, d\tau.
\end{aligned}
$$

İspat. Kısmi integrasyon uygulanarak

$$
\int_0^1 [w(1-\tau) - w(\tau)] \digamma'(\tau m + (1-\tau) n) \, d\tau
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left.\frac{[w(1-\tau)-w(\tau)]\,F(\tau m+(1-\tau)n)}{m-n}\right|_0^1 \\
&\quad +\int_0^1 \frac{[w'(1-\tau)-w'(\tau)]\,F(\tau m+(1-\tau)n)}{m-n}d\tau \qquad (2.2) \\
&= [w(1)-w(0)]\,\frac{F(m)+F(n)}{n-m} \\
&\quad -\frac{1}{(n-m)^2}\int_m^n \left[w'\left(\frac{\chi-m}{n-m}\right)+w'\left(\frac{n-\chi}{n-m}\right)\right]F(\chi)\,d\chi
\end{aligned}
$$

elde edilir. (2.2) eşitliğinin her iki tarafı $\frac{n-m}{2}$ ile çarpılırsa (2.1) özdeşliği bulunmuş olur.

$\square$

Sonuç 2.2. Lemma 2.1'de $w(\tau)=\tau$ olarak alınırsa (2.1) eşitliği [9]'da Dragomir ve Agarwal tarafından ispatlanan (2.1) eşitliğine dönüşür.

Sonuç 2.3. Lemma 2.1'de $w(\tau)=\frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$ olarak alınırsa (2.1) eşitliği [74]' te Sarıkaya ve ark. tarafından elde edilen (3.1) eşitliğine indirgenir.

Bu lemma kullanılarak aşağıdaki integral eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.4. $F,w:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonları I^o üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar, $m,\ n\in I^o$, $m<n$ ve w monoton artan bir fonksiyon olsun. Eğer $|F'|$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde $h-$konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$
\begin{aligned}
&\left|[w(1)-w(0)]\,\frac{F(m)+F(n)}{2}\right. \\
&\quad \left.-\frac{1}{2(n-m)}\int_m^n \left[w'\left(\frac{\chi-m}{n-m}\right)+w'\left(\frac{n-\chi}{n-m}\right)\right]F(\chi)\,d\chi\right| \qquad (2.3) \\
&\leq \frac{n-m}{2}\left(\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|\right)R_{w,h}.
\end{aligned}
$$

Burada

$$
R_{w,h}=\int_0^{\frac{1}{2}}[w(1-\tau)-w(\tau)]\,[h(\tau)+h(1-\tau)]\,d\tau \qquad (2.4)
$$

olarak alınır.

İspat. Lemma 2.1'in yardımıyla

$$\left| [w(1)-w(0)]\frac{F(m)+F(n)}{2} - \frac{1}{2(n-m)}\int_m^n \left[w'\left(\frac{\chi-m}{n-m}\right)+w'\left(\frac{n-\chi}{n-m}\right)\right]F(\chi)\,d\chi\right| \tag{2.5}$$
$$= \left|\frac{n-m}{2}\int_0^1 [w(1-\tau)-w(\tau)]F'(\tau m+(1-\tau)n)\,d\tau\right|$$
$$\leq \frac{n-m}{2}\int_0^1 |w(1-\tau)-w(\tau)|\left|F'(\tau m+(1-\tau)n)\right|d\tau$$

olarak bulunur. $|F'|$ fonksiyonu $h-$konveks fonksiyon olduğundan

$$\left| [w(1)-w(0)]\frac{F(m)+F(n)}{2} - \frac{1}{2(n-m)}\int_m^n \left[w'\left(\frac{\chi-m}{n-m}\right)+w'\left(\frac{n-\chi}{n-m}\right)\right]F(\chi)\,d\chi\right| \tag{2.6}$$
$$\leq \frac{n-m}{2}\int_0^1 |w(1-\tau)-w(\tau)|\left[h(\tau)\left|F'(m)\right|+h(1-\tau)\left|F'(n)\right|\right]d\tau$$

elde edilir. w fonksiyonu monoton artan olduğu için

$$\left| [w(1)-w(0)]\frac{F(m)+F(n)}{2} - \frac{1}{2(n-m)}\int_m^n \left[w'\left(\frac{\chi-m}{n-m}\right)+w'\left(\frac{n-\chi}{n-m}\right)\right]F(\chi)\,d\chi\right|$$
$$\leq \frac{n-m}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} [w(1-\tau)-w(\tau)]\left[h(\tau)\left|F'(m)\right|+h(1-\tau)\left|F'(n)\right|\right]d\tau\right.$$

$$
\left. + \int_{\frac{1}{2}}^{1} [w(\tau) - w(1-\tau)] \left[h(\tau) \left| F'(m) \right| + h(1-\tau) \left| F'(n) \right| \right] d\tau \right\} \tag{2.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n-m}{2} \left(\left| F'(m) \right| + \left| F'(n) \right| \right) \\
&\quad \times \left[\int_{0}^{\frac{1}{2}} [w(1-\tau) - w(\tau)] h(\tau) d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^{1} [w(\tau) - w(1-\tau)] h(\tau) d\tau \right] \\
&= \frac{n-m}{2} \left(\left| F'(m) \right| + \left| F'(n) \right| \right) \int_{0}^{\frac{1}{2}} [w(1-\tau) - w(\tau)] [h(\tau) + h(1-\tau)] d\tau
\end{aligned}
$$

sağlanır. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 2.5. Teorem 2.4'ün varsayımları altında $w(\tau) = \tau$ olarak alınırsa (2.3) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür:

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{F(m) + F(n)}{2} - \frac{1}{(n-m)} \int_{m}^{n} F(\chi) d\chi \right| \\
&\leq \frac{n-m}{2} \left(\left| F'(m) \right| + \left| F'(n) \right| \right) \int_{0}^{\frac{1}{2}} (1-2\tau) [h(\tau) + h(1-\tau)] d\tau.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Sonuç 2.6. Sonuç 2.5'te $h(\tau) = \tau$ olarak alınırsa (2.8) eşitsizliği [9]'da Dragomir ve Agarwal tarafından ispatlanan (2.3) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 2.7. Teorem 2.4'in varsayımları altında $w(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{F(m) + F(n)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(n-m)^\alpha} \left[J_{m^+}^{\alpha} F(n) + J_{n^-}^{\alpha} F(m) \right] \right| \\
&\leq \frac{n-m}{2\Gamma(\alpha+1)} \left(\left| F'(m) \right| + \left| F'(n) \right| \right) \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left((1-\tau)^\alpha - \tau^\alpha \right) [h(\tau) + h(1-\tau)] d\tau
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

elde edilir.

Sonuç 2.8. Sonuç 2.7'de $h(\tau) = \tau$ olarak alınırsa (2.9) eşitsizliği [74]'te Sarıkaya ve ark. tarafından elde edilen Teorem 3'deki (3.5) eşitsizliğine dönüşür.

Lemma 2.9. $\digamma, w : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonları I^o üzerinde diferansiyellenebilir dönüşümler, $m,\ n \in I^o$ ve $m < n$ olsun. Eğer $w',\ \digamma' \in L[m,n]$ ise aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
& w(0)\left[\digamma(m)+\digamma(n)\right]-2w\left(\frac{1}{2}\right)\digamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \\
& +\frac{1}{n-m}\left[\int_{\frac{m+n}{2}}^{n} w'\left(\frac{n-\chi}{n-m}\right)\digamma(\chi)\,d\chi+\int_{m}^{\frac{m+n}{2}} w'\left(\frac{\chi-m}{n-m}\right)\digamma(\chi)\,d\chi\right] \qquad (2.10)\\
= \;& (n-m)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} w(\tau)\digamma'(\tau m+(1-\tau)n)\,d\tau-\int_{\frac{1}{2}}^{1} w(1-\tau)\digamma'(\tau m+(1-\tau)n)\,d\tau\right].
\end{aligned}
$$

İspat.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{1}{2}} w(\tau)\digamma'(\tau m+(1-\tau)n)\,d\tau-\int_{\frac{1}{2}}^{1} w(1-\tau)\digamma'(\tau m+(1-\tau)n)\,d\tau \\
&= I_1-I_2 \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

olarak alınsın. Kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} w(\tau)\digamma'(\tau m+(1-\tau)n)\,d\tau \\
&= \left.\frac{w(\tau)\digamma(\tau m+(1-\tau)n)}{m-n}\right|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{w'(\tau)\digamma(\tau m+(1-\tau)n)}{m-n}\,d\tau \qquad (2.12)\\
&= -\frac{w\left(\frac{1}{2}\right)\digamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{n-m}+\frac{w(0)\digamma(n)}{n-m}+\frac{1}{(n-m)^2}\int_{\frac{m+n}{2}}^{n} w'\left(\frac{n-\chi}{n-m}\right)\digamma(\chi)\,d\chi
\end{aligned}
$$

bulunur ve benzer şekilde

$$
I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} w(1-\tau)\digamma'(\tau m+(1-\tau)n)\,d\tau
$$

$$= \left.\frac{w(1-\tau)F(\tau m+(1-\tau)n)}{m-n}\right|_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{w'(1-\tau)F(\tau m+(1-\tau)n)}{m-n}d\tau \quad (2.13)$$

$$= -\frac{w(0)F(m)}{n-m} + \frac{w\left(\frac{1}{2}\right)F\left(\frac{m+n}{2}\right)}{n-m} - \frac{1}{(n-m)^2}\int_{m}^{\frac{m+n}{2}} w'\left(\frac{\chi-m}{n-m}\right)F(\chi)\,d\chi$$

elde edilir. (2.12) ve (2.13)'te elde edilen sonuçlar (2.11)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} I &= \frac{w(0)[F(m)+F(n)]}{n-m} - \frac{2w\left(\frac{1}{2}\right)F\left(\frac{m+n}{2}\right)}{n-m} \\ &\quad + \frac{1}{(n-m)^2}\left[\int_{\frac{m+n}{2}}^{n} w'\left(\frac{n-\chi}{n-m}\right)F(\chi)\,d\chi + \int_{m}^{\frac{m+n}{2}} w'\left(\frac{\chi-m}{n-m}\right)F(\chi)\,d\chi\right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

bulunur. Son olarak (2.14) eşitliğinin her iki tarafı $(n-m)$ ile çarpılırsa (2.10) özdeşliği elde edilir. □

Sonuç 2.10. Lemma 2.9'da $w(\tau)=\tau$ olarak seçilirse (2.10) eşitliği [11]'de Kırmacı tarafından elde edilen Lemma 2.1 özdeşliğini verir.

Sonuç 2.11. Lemma 2.9'da $w(\tau)=\frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$ olarak seçilirse (2.10) eşitliği [75]'te Sarıkaya ve Yıldırım'ın elde ettiği (3.1) eşitliğini verir.

Teorem 2.12. $F, w : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonları I^o üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar, $m,\ n \in I^o$, $m<n$ olsun. Eğer $|F'|$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde $h-$konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} &\left| w(0)[F(m)+F(n)] - 2w\left(\frac{1}{2}\right)F\left(\frac{m+n}{2}\right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{n-m}\left[\int_{\frac{m+n}{2}}^{n} w'\left(\frac{n-\chi}{n-m}\right)F(\chi)\,d\chi + \int_{m}^{\frac{m+n}{2}} w'\left(\frac{\chi-m}{n-m}\right)F(\chi)\,d\chi\right]\right| \quad (2.15) \\ &\le (n-m)\left(\left|F'(m)\right| + \left|F'(n)\right|\right)\int_{0}^{\frac{1}{2}} |w(\tau)|\left(h(1-\tau)+h(\tau)\right)d\tau. \end{aligned}$$

İspat. Lemma 2.9 ve $|F'|$ fonksiyonunun $h-$konveksliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
& \left| w(0)F(m)+F(n)-2w\left(\frac{1}{2}\right)F\left(\frac{m+n}{2}\right) \right. \\
& \left. +\frac{1}{n-m}\left[\int_{\frac{m+n}{2}}^{n} w'\left(\frac{n-\chi}{n-m}\right)F(\chi)\,d\chi+\int_{m}^{\frac{m+n}{2}} w'\left(\frac{\chi-m}{n-m}\right)F(\chi)\,d\chi\right]\right| \\
\leq \quad & (n-m)\left[\int_{0}^{\frac{1}{2}} |w(\tau)|\left|F'(\tau m+(1-\tau)n)\right|d\tau\right. \\
& \left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1} |w(1-\tau)|\left|F'(\tau m+(1-\tau)n)\right|d\tau\right] \qquad (2.16) \\
\leq \quad & (n-m)\left[\int_{0}^{\frac{1}{2}} |w(\tau)|\left[h(\tau)\left|F'(m)\right|+h(1-\tau)\left|F'(n)\right|\right]d\tau\right. \\
& \left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1} |w(1-\tau)|\left[h(\tau)\left|F'(m)\right|+h(1-\tau)\left|F'(n)\right|\right]d\tau\right] \\
= \quad & (n-m)\left(\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|\right)\int_{0}^{\frac{1}{2}} |w(\tau)|\left(h(1-\tau)+h(\tau)\right)d\tau
\end{aligned}
$$

elde edilir. İspat tamamlanır. □

Sonuç 2.13. Teorem 2.12'nin varsayımları altında $w(\tau)=\tau$ olarak alınırsa (2.15) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür:

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{(n-m)}\int_{m}^{n} F(\chi)\,d\chi-F\left(\frac{m+n}{2}\right)\right| \\
\leq \quad & (n-m)\left(\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|\right)\int_{0}^{\frac{1}{2}} \tau\left[h(\tau)+h(1-\tau)\right]d\tau.
\end{aligned} \qquad (2.17)
$$

Sonuç 2.14. Sonuç 2.13'te $h(\tau)=\tau$ alınırsa (2.17) eşitsizliği [11]'de Kırmacı'nın ispatladığı Teorem 2.2.'deki eşitsizliğe indirgenir.

Sonuç 2.15. Teorem 2.12'nin varsayımları altında $w(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ alınırsa (2.15) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(n-m)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{m+n}{2}\right)^+}F(n) + J^\alpha_{\left(\frac{m+n}{2}\right)^-}F(m)\right] - F\left(\frac{m+n}{2}\right)\right| \\ \leq\ & 2^{\alpha-1}(n-m)\left[\left|F'(m)\right| + \left|F'(n)\right|\right]\int_0^{\frac{1}{2}}\tau^\alpha\left(h(\tau)+h(1-\tau)\right)d\tau.\end{aligned} \tag{2.18}$$

İspat. Teorem 2.12'de $w(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ alınır ve eşitsizliğin her iki tarafı $2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)$ ile çarpılırsa (2.18) eşitsizliği elde edilir. □

2.1.1. Bazı Özel Ortalamalar İçin Uygulamalar

Önerme 2.16. $m,n \in \mathbb{R}$, $0 \notin [m,n]$ ve $k \in (-\infty,-2)\cup(-1,1]$ olsun. O halde

$$\left|H^{-1}(m,n) - \overline{L}^{-1}(m,n)\right| \leq \frac{(n-m)A\left(|m|^{-2},|n|^{-2}\right)}{(k+1)(k+2)}\left(k+\frac{1}{2^k}\right) \tag{2.19}$$

eşisizliği vardır.

İspat. Eğer Teorem 2.4'te $F(\chi) = \frac{1}{\chi}$, $\chi > 0$, $w(\chi) = \chi$ ve $h(\tau) = \tau^k$ olarak seçilirse (burada, giriş bölümündeki Örnek 1.44'e göre f fonksiyonunun $h-$konveks olduğu açıktır)

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{2} - \frac{1}{2(n-m)}\int_m^n\frac{2}{\chi}d\chi\right| \\ \leq\ & \frac{n-m}{2}\left(\left|\frac{1}{m^2}\right| + \left|\frac{1}{n^2}\right|\right)\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2\tau)\left(\tau^k+(1-\tau)^k\right)d\tau\end{aligned} \tag{2.20}$$

olup, gerekli matematiksel işlemler yapıldığında (2.19) eşitsizliği elde edilir. □

Sonuç 2.17. Eğer (2.19) eşitsizliğinde $k = 1$ olarak alınırsa Önerme 2.16, [9]'daki Önerme (3.3)'e indirgenir.

Önerme 2.18. $m,n \in \mathbb{R}$, $0 \notin [m,n]$ ve $k \in (-2,-1)\cup(-1,1]$ olsun. O halde

$$\left|\overline{L}^{-1}(m,n) - A^{-1}(m,n)\right| \leq \frac{(n-m)A\left(|m|^{-2},|n|^{-2}\right)}{(k+1)(k+2)}\left(2-\frac{1}{2^k}\right) \tag{2.21}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Teorem 2.12'de $F(\chi)=\frac{1}{\chi}$, $\chi>0$, $w(\chi)=\chi$ ve $h(\tau)=\tau^k$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} &\left|-\frac{2}{m+n}+\frac{1}{n-m}\left(\int_m^n \frac{1}{\chi}d\chi\right)\right| \\ \leq\ & (n-m)\left(\left|\frac{1}{m^2}\right|+\left|\frac{1}{n^2}\right|\right)\int_0^{\frac{1}{2}}\tau\left(\tau^k+(1-\tau)^k\right)d\tau \end{aligned} \tag{2.22}$$

elde edilir. Gerekli matematiksel işlemler yapıldığında (2.21) eşitsizliği bulunur. □

Sonuç 2.19. Eğer (2.21) eşitsizliğinde $k=1$ olarak alınırsa Önerme 2.18, [11]'deki Önerme (3.4)'e dönüşür.

Önerme 2.20. $m,n\in\mathbb{R}$, $m<n$, $k\in(-2,-1)\cup(-1,1]$ ve $p\in[1,\infty)$ olsun. O halde

$$\left|L_p^p(m,n)-A^p(m,n)\right|\leq\frac{(n-m)\,pA\left(|m|^{p-1},|n|^{p-1}\right)}{(k+1)(k+2)}\left(2-\frac{1}{2^k}\right) \tag{2.23}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 2.12'de $F(\chi)=\chi^p$, $\chi>0$, $w(\chi)=\chi$ ve $h(\tau)=\tau^k$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} &\left|-\left(\frac{m+n}{2}\right)^p+\frac{1}{n-m}\left(\int_m^n \chi^p d\chi\right)\right| \\ \leq\ & (n-m)\,p\left(|m|^{p-1}+|n|^{p-1}\right)\int_0^{\frac{1}{2}}\tau\left(\tau^k+(1-\tau)^k\right)d\tau \end{aligned} \tag{2.24}$$

olup, gerekli matematiksel işlemler yapıldığında (2.23) eşitsizliği elde edilir. □

Sonuç 2.21. Eğer (2.23) eşitsizliğinde $k=1$ olarak alınırsa Önerme 2.20, [11]'deki Önerme (3.1)'e dönüşür.

2.2. KESİRLİ İNTEGRALLER YARDIMIYLA KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD-MERCER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde ilk olarak, kesirli integraller yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Mercer eşitsizlikleri ispatlanmıştır. Ardından iki lemma ispatlanmış ve bu lemmalar kullanılarak yeni Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Son olarak elde edilen sonuçların bazı özel ortalamalar için uygulaması yapılmıştır.

Teorem 2.22. $\mathcal{F}:[m,n]\to\mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. O halde her $\chi,\ \mathcal{Y}\in[m,n]$ ve $\alpha>0$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right) &\leq \mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J_{\chi^{+}}^{\alpha}\mathcal{F}(\mathcal{Y})+J_{\mathcal{Y}^{-}}^{\alpha}\mathcal{F}(\chi)\right] \\ &\leq \mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)-\mathcal{F}\left(\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)\end{aligned} \tag{2.25}$$

ve

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right) \\ &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J_{(m+n-\mathcal{Y})^{+}}^{\alpha}\mathcal{F}(m+n-\chi)+J_{(m+n-\chi)^{-}}^{\alpha}\mathcal{F}(m+n-\mathcal{Y})\right] \qquad (2.26) \\ &\leq \frac{\mathcal{F}(m+n-\chi)+\mathcal{F}(m+n-\mathcal{Y})}{2}\leq \mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)-\frac{\mathcal{F}(\chi)+\mathcal{F}(\mathcal{Y})}{2}\end{aligned}$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat. Jensen-Mercer eşitsizliği kullanılarak her $\chi_1,\ \mathcal{Y}_1\in[m,n]$ için

$$\mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi_1+\mathcal{Y}_1}{2}\right) \leq \mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)-\frac{\mathcal{F}(\chi_1)+\mathcal{F}(\mathcal{Y}_1)}{2} \tag{2.27}$$

yazılır. $\chi,\mathcal{Y}\in[m,n]$ ve $\tau\in[0,1]$ için $\chi_1=\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y}$ ve $\mathcal{Y}_1=(1-\tau)\chi+\tau\mathcal{Y}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right) \tag{2.28}$$

$$\leq \mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)-\frac{\mathcal{F}(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y})+\mathcal{F}((1-\tau)\chi+\tau\mathcal{Y})}{2}$$

elde edilir. (2.28) eşitsizliğinin her tarafı $\tau^{\alpha-1}$ ile çarpılır ve elde edilen eşitsizlik için $[0,1]$ üzerinde τ ya göre integral alınır ve uygun değişken değiştirme yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha}\mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)\\
\leq\ &\frac{1}{\alpha}[\mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)]\\
&-\frac{1}{2}\int_0^1\tau^{\alpha-1}[\mathcal{F}(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y})+\mathcal{F}((1-\tau)\chi+\tau\mathcal{Y})]\,d\tau\\
=\ &\frac{1}{\alpha}[\mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)]-\frac{1}{2(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\\
&\times\left[\int_{\chi}^{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}-u)^{\alpha-1}\mathcal{F}(u)\,du+\int_{\chi}^{\mathcal{Y}}(u-\chi)^{\alpha-1}\mathcal{F}(u)\,du\right]\\
=\ &\frac{1}{\alpha}[\mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)]-\frac{\Gamma(\alpha)}{2(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J_{\chi^+}^{\alpha}\mathcal{F}(\mathcal{Y})+J_{\mathcal{Y}^-}^{\alpha}\mathcal{F}(\chi)\right]
\end{aligned} \tag{2.29}$$

yani

$$\mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)\leq\mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J_{\chi^+}^{\alpha}\mathcal{F}(\mathcal{Y})+J_{\mathcal{Y}^-}^{\alpha}\mathcal{F}(\chi)\right] \tag{2.30}$$

olur ve böylece (2.25)'in birinci eşitsizliği ispatlanır. (2.25)'te ikinci eşitsizliğin ispatı için, ilk olarak $\mathcal{F}$ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa $\tau\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right) &= \mathcal{F}\left(\frac{\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y}+(1-\tau)\chi+\tau\mathcal{Y}}{2}\right)\\
&\leq \frac{\mathcal{F}(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y})+\mathcal{F}((1-\tau)\chi+\tau\mathcal{Y})}{2}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

olur. (2.31) eşitsizliğinin her iki tarafı $\tau^{\alpha-1}$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığı üzerinde τ ya göre integral alınırsa

$$\frac{1}{\alpha}\mathcal{F}\left(\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\int_0^1\tau^{\alpha-1}[\mathcal{F}(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y})+\mathcal{F}((1-\tau)\chi+\tau\mathcal{Y})]\,d\tau$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{2(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\chi^{+}}\mathcal{F}(\mathcal{Y})+J^{\alpha}_{\mathcal{Y}^{-}}\mathcal{F}(\chi)\right] \tag{2.32}$$

elde edilir ve

$$-\mathcal{F}\left(\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right) \geq -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\chi^{+}}\mathcal{F}(\mathcal{Y})+J^{\alpha}_{\mathcal{Y}^{-}}\mathcal{F}(\chi)\right] \tag{2.33}$$

bulunur. (2.33) eşitsizliğinin her iki tarafına $\mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)$ eklenerek (2.25) eşitsizliğinin ikinci kısmı bulunur.

Şimdi (2.26) eşitsizliğinin ispatı için ilk olarak $\mathcal{F}$ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa her $\chi_1, \mathcal{Y}_1 \in [m,n]$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi_1+\mathcal{Y}_1}{2}\right) &= \mathcal{F}\left(\frac{m+n-\chi_1+m+n-\mathcal{Y}_1}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}(m+n-\chi_1)+\mathcal{F}(m+n-\mathcal{Y}_1)\right] \end{aligned} \tag{2.34}$$

yazılır. (2.34) eşitsizliğinde $\chi, \mathcal{Y} \in [m,n]$ ve $\tau \in [0,1]$ için $m+n-\chi_1 = \tau(m+n-\chi)+(1-\tau)(m+n-\mathcal{Y})$ ve $m+n-\mathcal{Y}_1 = (1-\tau)(m+n-\chi)+\tau(m+n-\mathcal{Y})$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}(\tau(m+n-\chi)+(1-\tau)(m+n-\mathcal{Y})) \right. \\ &\left. +\mathcal{F}((1-\tau)(m+n-\chi)+\tau(m+n-\mathcal{Y}))\right] \end{aligned} \tag{2.35}$$

bulunur. (2.35) eşitsizliğinin her iki tarafı $\tau^{\alpha-1}$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığı üzerinde τ ya göre integral alınırsa

$$\frac{1}{\alpha}\mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \tau^{\alpha-1} F\left(\tau(m+n-\chi)+(1-\tau)(m+n-\mathcal{Y})\right) d\tau\right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \tau^{\alpha-1} F\left(\tau(m+n-\chi)+(1-\tau)(m+n-\mathcal{Y})\right) d\tau\right] \\
&= \frac{1}{2(\mathcal{Y}-\chi)^\alpha}\left[\int_{m+n-\mathcal{Y}}^{m+n-\chi} (u-(m+n-\mathcal{Y}))^{\alpha-1} F(u)\, du\right. \\
&\quad \left. + \int_{m+n-\mathcal{Y}}^{m+n-\chi} ((m+n-\chi)-u)^{\alpha-1} F(u)\, du\right] \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{2(\mathcal{Y}-\chi)^\alpha}\left[J^\alpha_{(m+n-\mathcal{Y})^+} F(m+n-\chi) + J^\alpha_{(m+n-\chi)^-} F(m+n-\mathcal{Y})\right]
\end{aligned} \tag{2.36}$$

elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned}
& F\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right) \\
&\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\mathcal{Y}-\chi)^\alpha}\left[J^\alpha_{(m+n-\mathcal{Y})^+} F(m+n-\chi) + J^\alpha_{(m+n-\chi)^-} F(m+n-\mathcal{Y})\right]
\end{aligned} \tag{2.37}$$

eşitsizliği bulunurak (2.26) eşitsizliğinin ilk kısmı ispatlanır. Diğer yandan F nin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& F\left(\tau(m+n-\chi)+(1-\tau)(m+n-\mathcal{Y})\right) \\
&\leq \tau F(m+n-\chi)+(1-\tau) F(m+n-\mathcal{Y})
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
& F\left((1-\tau)(m+n-\chi)+\tau(m+n-\mathcal{Y})\right) \\
&\leq (1-\tau) F(m+n-\chi)+\tau F(m+n-\mathcal{Y})
\end{aligned} \tag{2.39}$$

yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve Jensen-Mercer eşitsizliği uygulanırsa

$$F\left(\tau(m+n-\chi)+(1-\tau)(m+n-\mathcal{Y})\right)+F\left((1-\tau)(m+n-\chi)+\tau(m+n-\mathcal{Y})\right)$$

$$\leq \mathcal{F}(m+n-\chi)+\mathcal{F}(m+n-\mathcal{Y}) \tag{2.40}$$

$$\leq 2[\mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)]-[\mathcal{F}(\chi)+\mathcal{F}(\mathcal{Y})]$$

eşitsizlikleri elde edilir. (2.40)'ın her tarafı $\tau^{\alpha-1}$ ile çarpılıp, $[0,1]$ aralığı üzerinde τ ya göre integral alınırsa (2.26)'nın ikinci ve üçüncü eşitsizlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 2.23. Teorem 2.22'nin varsayımları altında $\alpha = 1$ alınırsa her $\chi, \mathcal{Y} \in [m,n]$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right) &\leq \mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)-\int_0^1 \mathcal{F}(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y})\,d\tau \\ &\leq \mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)-\mathcal{F}\left(\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.41}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right) &\leq \frac{1}{(\mathcal{Y}-\chi)}\int_\chi^{\mathcal{Y}} \mathcal{F}(m+n-\tau)\,d\tau \\ &\leq \mathcal{F}(m)+\mathcal{F}(n)-\frac{\mathcal{F}(\chi)+\mathcal{F}(\mathcal{Y})}{2} \end{aligned} \tag{2.42}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler [76]'da Kian ve Moslehian tarafından ispatlanan Teorem 2.1'i verir.

Benzer şekilde, kesirli integraller için aşağıdaki Hermite-Hadamard-Mercer eşitsizlikleri de elde edilir:

Teorem 2.24. $\mathcal{F} : [m,n] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks olsun. O halde her $\chi, \mathcal{Y} \in [m,n]$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right) \\ \leq\ &\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}} \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\times\left[J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{+}}\mathcal{F}\left(m+n-\chi\right)+J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{-}}\mathcal{F}\left(m+n-\mathcal{Y}\right)\right]$$

$$\leq\quad \mathcal{F}\left(m\right)+\mathcal{F}\left(n\right)-\frac{\mathcal{F}\left(\chi\right)+\mathcal{F}\left(\mathcal{Y}\right)}{2}$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat. (2.43) eşitsizliklerinin ilk kısmını ispatlamak için (2.34) eşitsizliğinde $\chi,\mathcal{Y}\in[m,n]$ için $\chi_1=\frac{\tau}{2}\chi+\frac{2-\tau}{2}\mathcal{Y}$ ve $\mathcal{Y}_1=\frac{2-\tau}{2}\chi+\frac{\tau}{2}\mathcal{Y}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}&2\mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)\\ \leq\quad&\left[\mathcal{F}\left(m+n-\left(\frac{\tau}{2}\chi+\frac{2-\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right)+\mathcal{F}\left(m+n-\left(\frac{2-\tau}{2}\chi+\frac{\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right)\right]\end{aligned}\tag{2.44}$$

elde edilir. Ardından (2.44) eşitsizliğinin her iki tarafı $\tau^{\alpha-1}$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığı üzerinde τ ya göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\alpha}\mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)\\ \leq\quad&\int_0^1\tau^{\alpha-1}\mathcal{F}\left(m+n-\left(\frac{\tau}{2}\chi+\frac{2-\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right)d\tau\\ &+\int_0^1\tau^{\alpha-1}\mathcal{F}\left(m+n-\left(\frac{2-\tau}{2}\chi+\frac{\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right)d\tau\\ =\quad&\frac{2^{\alpha}}{(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[\int_{m+n-\mathcal{Y}}^{m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}}\left(u-\left(m+n-\mathcal{Y}\right)\right)^{\alpha-1}\mathcal{F}\left(u\right)du\right.\\ &\left.+\int_{m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}}^{m+n-\chi}\left(\left(m+n-\chi\right)-u\right)^{\alpha-1}\mathcal{F}\left(u\right)du\right]\\ =\quad&\frac{2^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{-}}\mathcal{F}\left(m+n-\mathcal{Y}\right)+J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{+}}\mathcal{F}\left(m+n-\chi\right)\right]\end{aligned}\tag{2.45}$$

olur ve

$$\mathcal{F}\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)\tag{2.46}$$

$$\leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{-}}F(m+n-\mathcal{Y})+J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{+}}F(m+n-\chi)\right]$$

bulunur. Böylece (2.43)'ün ilk kısmı ispatlanır. (2.43)'ün ikinci kısmının ispatı için ilk olarak Jensen-Mercer eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &F\left(m+n-\left(\frac{\tau}{2}\chi+\frac{2-\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right) \\ \leq\ & F(m)+F(n)-\left[\frac{\tau}{2}F(\chi)+\frac{2-\tau}{2}F(\mathcal{Y})\right] \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} &F\left(m+n-\left(\frac{2-\tau}{2}\chi+\frac{\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right) \\ \leq\ & F(m)+F(n)-\left[\frac{2-\tau}{2}F(\chi)+\frac{\tau}{2}F(\mathcal{Y})\right] \end{aligned} \tag{2.48}$$

yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} &F\left(m+n-\left(\frac{\tau}{2}\chi+\frac{2-\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right)+F\left(m+n-\left(\frac{2-\tau}{2}\chi+\frac{\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right) \\ \leq\ & 2\left[F(m)+F(n)\right]-F(\chi)+F(\mathcal{Y}) \end{aligned} \tag{2.49}$$

bulunur. (2.49) eşitsizliğinin her iki tarafı $\tau^{\alpha-1}$ ile çarpılıp ardından $[0,1]$ aralığı üzerinde τ ya göre integral alınırsa (2.43)'ün ikinci eşitsizliği de elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

□

Sonuç 2.25. Teorem 2.24'te $\alpha = 1$ olarak alınırsa (2.43) eşitsizliği (2.42) eşitsizliğine indirgenir.

Şimdi de Hermite-Hadamard-Mercer tipli yeni eşitsizliklerin ispatında kullanılacak olan aşağıdaki lemmalar verilsin.

Lemma 2.26. $F : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° aralığı üzerinde diferansiyellenebilir, $m,\ n \in I^{\circ}$ ve $m < n$ olsun. Eğer $F' \in L[m,n]$ ise her $\chi,\ \mathcal{Y} \in [m,n]$, $\alpha > 0$ ve $\tau \in [0,1]$ için aşağıdaki kesirli integral içeren eşitlik vardır:

$$\begin{aligned}
&\frac{F(m+n-\chi)+F(m+n-\mathcal{Y})}{2} \\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(m+n-\mathcal{Y})^{+}}F(m+n-\chi)+J^{\alpha}_{(m+n-\chi)^{-}}F(m+n-\mathcal{Y})\right] \qquad (2.50)\\
=\ &\frac{\mathcal{Y}-\chi}{2}\int_0^1\left(\tau^{\alpha}-(1-\tau)^{\alpha}\right)F'(m+n-(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y}))\,d\tau
\end{aligned}$$

İspat.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1\left(\tau^{\alpha}-(1-\tau)^{\alpha}\right)F'(m+n-(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y}))\,d\tau \\
&= \int_0^1\tau^{\alpha}F'(m+n-(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y}))\,d\tau \\
&\quad -\int_0^1(1-\tau)^{\alpha}F'(m+n-(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y}))\,d\tau \qquad (2.51)\\
&= I_1-I_2
\end{aligned}$$

olarak alalım. Kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1\tau^{\alpha}F'(m+n-(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y}))\,d\tau \\
&= \left.\frac{\tau^{\alpha}F(m+n-(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y}))}{\mathcal{Y}-\chi}\right|_0^1 \\
&\quad -\frac{\alpha}{\mathcal{Y}-\chi}\int_0^1\tau^{\alpha-1}F(m+n-(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y}))\,d\tau \qquad (2.52)\\
&= \frac{F(m+n-\chi)}{\mathcal{Y}-\chi}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{(m+n-\chi)^{-}}F(m+n-\mathcal{Y})
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$I_2 = \int_0^1(1-\tau)^{\alpha}F'(m+n-(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y}))$$

$$
\begin{aligned}
&= \left.\frac{(1-\tau)^{\alpha} F(m+n-(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y}))}{\mathcal{Y}-\chi}\right|_0^1 \\
&\quad +\frac{\alpha}{\mathcal{Y}-\chi}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} F(m+n-(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y}))\,d\tau \qquad (2.53)\\
&= -\frac{F(m+n-\mathcal{Y})}{\mathcal{Y}-\chi}+\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha+1}} J^{\alpha}_{(m+n-\mathcal{Y})^+} F(m+n-\chi)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
I &= I_1+I_2 \\
&= \frac{F(m+n-\chi)+F(m+n-\mathcal{Y})}{\mathcal{Y}-\chi} \qquad (2.54)\\
&\quad -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha+1}}\left[J^{\alpha}_{(m+n-\mathcal{Y})^+} F(m+n-\chi)+J^{\alpha}_{(m+n-\chi)^-} F(m+n-\mathcal{Y})\right]
\end{aligned}
$$

olarak yazılır. (2.54) eşitliğinin her iki tarafı $\frac{\mathcal{Y}-\chi}{2}$ ile çarpılırsa istenen elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 2.27. Lemma 2.26'da $\alpha = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&\frac{F(m+n-\chi)+F(m+n-\mathcal{Y})}{2}-\frac{1}{(\mathcal{Y}-\chi)}\int_{m+n-\mathcal{Y}}^{m+n-\chi} F(u)\,du \\
&= \frac{\mathcal{Y}-\chi}{2}\int_0^1 (2\tau-1) F'(m+n-(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y}))\,d\tau. \qquad (2.55)
\end{aligned}
$$

Sonuç 2.28. Sonuç 2.27'de $\chi = m$ ve $\mathcal{Y} = n$ olarak seçilirse (2.55) eşitliği [9]'da Dragomir ve Agarwal tarafından ispatlanan aşağıdaki eşitliğe dönüşür:

$$
\begin{aligned}
&\frac{F(m)+F(n)}{2}-\frac{1}{n-m}\int_m^n F(u)\,du \\
&= \frac{n-m}{2}\int_0^1 (2\tau-1) F'((1-\tau)m+\tau b)\,d\tau. \qquad (2.56)
\end{aligned}
$$

Lemma 2.29. $\digamma : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° aralığı üzerinde diferansiyellenebilir, $m,\, n \in I^{\circ}$ ve $m < n$ olsun. Eğer $\digamma' \in L[m,n]$ ise her $\chi,\, \mathcal{Y} \in [m,n]$, $\alpha > 0$ ve $\tau \in [0,1]$ için aşağıdaki kesirli integral içeren eşitlik vardır:

$$\begin{aligned} &\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{+}}\digamma\,(m+n-\chi)+J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{-}}\digamma\,(m+n-\mathcal{Y})\right] \\ &-\digamma\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right) \\ = &\ \frac{\mathcal{Y}-\chi}{4} \\ &\times\int_0^1 \tau^{\alpha}\left[\digamma'\left(m+n-\left(\frac{2-\tau}{2}\chi+\frac{\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right)-\digamma'\left(m+n-\left(\frac{\tau}{2}\chi+\frac{2-\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right)\right]d\tau. \end{aligned} \tag{2.57}$$

İspat. Lemma 2.26'ya benzer şekilde ispatlanır. □

Sonuç 2.30. Lemma 2.29'da $\chi = m$ ve $\mathcal{Y} = n$ olarak alınırsa (2.57) eşitliği [75]'te Sarıkaya ve Yıldırım tarafından ispatlanan Lemma 3'e indirgenir.

Teorem 2.31. $\digamma : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° aralığı üzerinde diferansiyellenebilir, $m,\, n \in I^{\circ}$ ve $m < n$ olsun. $|\digamma'|$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde konveks ise her $\chi,\, \mathcal{Y} \in [m,n]$ ve $\alpha > 0$ için aşağıdaki kesirli integral içeren eşitsizlik vardır:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\digamma\,(m+n-\chi)+\digamma\,(m+n-\mathcal{Y})}{2}\right. \\ &\left.-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(m+n-\mathcal{Y})^{+}}\digamma\,(m+n-\chi)+J^{\alpha}_{(m+n-\chi)^{-}}\digamma\,(m+n-\mathcal{Y})\right]\right| \\ \le &\ \frac{\mathcal{Y}-\chi}{(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[\left|\digamma'(m)\right|+\left|\digamma'(n)\right|-\frac{|\digamma'(\chi)|+|\digamma'(\mathcal{Y})|}{2}\right]. \end{aligned} \tag{2.58}$$

İspat. Lemma 2.26'nın ve Jensen-Mercer eşitsizliğinin yardımıyla

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\digamma\,(m+n-\chi)+\digamma\,(m+n-\mathcal{Y})}{2}\right. \\ &\left.-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(m+n-\mathcal{Y})^{+}}\digamma\,(m+n-\chi)+J^{\alpha}_{(m+n-\chi)^{-}}\digamma\,(m+n-\mathcal{Y})\right]\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\mathcal{Y}-\chi}{2}\int_0^1 \left|\tau^\alpha-(1-\tau)^\alpha\right|\left|F'(m+n-(\tau\chi+(1-\tau)\mathcal{Y}))\right|d\tau \\
&\leq \frac{\mathcal{Y}-\chi}{2} \\
&\quad\times\int_0^1 \left|\tau^\alpha-(1-\tau)^\alpha\right|\left[\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|-\left(\tau\left|F'(\chi)\right|+(1-\tau)\left|F'(\mathcal{Y})\right|\right)\right]d\tau \\
&= \frac{\mathcal{Y}-\chi}{2} \\
&\quad\times\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\left((1-\tau)^\alpha-\tau^\alpha\right)\left[\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|-\left(\tau\left|F'(\chi)\right|+(1-\tau)\left|F'(\mathcal{Y})\right|\right)\right]d\tau\right. \\
&\quad\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\tau^\alpha-(1-\tau)^\alpha\right)\left[\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|-\left(\tau\left|F'(\chi)\right|+(1-\tau)\left|F'(\mathcal{Y})\right|\right)\right]d\tau\right\} \\
&= \frac{\mathcal{Y}-\chi}{2}\left(A_1+A_2\right).
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

bulunur. A_1 ve A_2 hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left(\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|\right)\int_0^{\frac{1}{2}}\left((1-\tau)^\alpha-\tau^\alpha\right)d\tau \\
&\quad-\left\{\left|F'(\chi)\right|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\tau(1-\tau)^\alpha d\tau-\int_0^{\frac{1}{2}}\tau^{\alpha+1}d\tau\right]\right. \\
&\quad\left.+\left|F'(\mathcal{Y})\right|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^{\alpha+1}d\tau-\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\tau)\tau^\alpha d\tau\right]\right\} \\
&= \left(\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|\right)\left(\frac{1}{\alpha+1}-\frac{\frac{1}{2^\alpha}}{\alpha+1}\right) \\
&\quad-\left\{\left|F'(\chi)\right|\left(\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{\frac{1}{2^{\alpha+1}}}{\alpha+1}\right)+\left|F'(\mathcal{Y})\right|\left(\frac{1}{\alpha+2}-\frac{\frac{1}{2^{\alpha+1}}}{\alpha+1}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

ve

$$
A_2 = \left(\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|\right)\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\tau^\alpha-(1-\tau)^\alpha\right)d\tau
$$

$$-\left\{\left|F'(\chi)\right|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\tau^{\alpha+1}d\tau-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\tau(1-\tau)^{\alpha}d\tau\right]\right.$$

$$\left.+\left|F'(\mathcal{Y})\right|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\tau)\tau^{\alpha}d\tau-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\tau)^{\alpha+1}d\tau\right]\right\} \tag{2.61}$$

$$= \left(\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|\right)\left(\frac{1}{\alpha+1}-\frac{\frac{1}{2^{\alpha}}}{\alpha+1}\right)$$

$$-\left\{\left|F'(\chi)\right|\left(\frac{1}{\alpha+2}-\frac{\frac{1}{2^{\alpha+1}}}{\alpha+1}\right)+\left|F'(\mathcal{Y})\right|\left(\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{\frac{1}{2^{\alpha+1}}}{\alpha+1}\right)\right\}$$

olarak elde edilir. Son olarak A_1 ve A_2 toplandığında (2.58) eşitsizliği bulunur. □

Sonuç 2.32. Teorem 2.31'de $\chi = m$ ve $\mathcal{Y} = n$ olarak alınırsa Teorem 2.31, [74]'te Sarıkaya ve ark. tarafından ispatlanan Teorem 3'ü verir.

Sonuç 2.33. Teorem 2.31'de $\alpha = 1$, $\chi = m$ ve $\mathcal{Y} = n$ olarak alınırsa Teorem 2.31, [9]'da elde edilen Teorem 2.2'yi verir.

Teorem 2.34. $F : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° aralığı üzerinde diferansiyellenebilir, m, $n \in I^{\circ}$ ve $m < n$ olsun. $|F'|$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde konveks ise her χ, $\mathcal{Y} \in [m,n]$ ve $\alpha > 0$ için aşağıdaki kesirli integral içeren eşitsizlik vardır:

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{+}}F(m+n-\chi)+J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{-}}F(m+n-\mathcal{Y})\right]\right.$$

$$\left.-F\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)\right| \tag{2.62}$$

$$\leq \frac{\mathcal{Y}-\chi}{2(\alpha+1)}\left[\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|-\frac{|F'(\chi)|+|F'(\mathcal{Y})|}{2}\right].$$

İspat. Lemma 2.29 ve Jensen-Mercer eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{+}}F(m+n-\chi)+J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{-}}F(m+n-\mathcal{Y})\right]\right.$$

$$\left.-F\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{\mathcal{Y}-\chi}{4}\left\{\int_{0}^{1}\tau^{\alpha}\left|F'\left(m+n-\left(\frac{2-\tau}{2}\chi+\frac{\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right)\right|d\tau\right.$$

$$+\int_0^1 \tau^\alpha \left|F'\left(m+n-\left(\frac{\tau}{2}\chi+\frac{2-\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right)\right| d\tau\Bigg\} \tag{2.63}$$

$$\leq \frac{\mathcal{Y}-\chi}{4}\left\{\int_0^1 \tau^\alpha \left[\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|-\left(\frac{2-\tau}{2}\left|F'(\chi)\right|+\frac{\tau}{2}\left|F'(\mathcal{Y})\right|\right)\right] d\tau\right.$$

$$\left.+\int_0^1 \tau^\alpha \left[\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|-\left(\frac{\tau}{2}\left|F'(\chi)\right|+\frac{2-\tau}{2}\left|F'(\mathcal{Y})\right|\right)\right] d\tau\right\}$$

$$= \frac{\mathcal{Y}-\chi}{2(\alpha+1)}\left[\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|-\frac{\left|F'(\chi)\right|+\left|F'(\mathcal{Y})\right|}{2}\right]$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 2.35. Eğer Teorem 2.34'te $\alpha = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{1}{(\mathcal{Y}-\chi)}\int_{m+n-\mathcal{Y}}^{m+n-\chi} F(u)\,du - F\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{\mathcal{Y}-\chi}{4}\left[\left|F'(m)\right|+\left|F'(n)\right|-\frac{\left|F'(\chi)\right|+\left|F'(\mathcal{Y})\right|}{2}\right]. \tag{2.64}$$

Teorem 2.36. $F : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° aralığı üzerinde diferansiyellenebilir, $m, n \in I^\circ$ ve $m < n$ olsun. $q > 1$ olmak üzere $|F'|^q$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde konveks ise her $\chi, \mathcal{Y} \in [m,n]$ ve $\alpha > 0$ için aşağıdaki kesirli integral içeren eşitsizlik vardır:

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\mathcal{Y}-\chi)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^+}F(m+n-\chi)+J^\alpha_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^-}F(m+n-\mathcal{Y})\right]\right.$$
$$\left.-F\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{\mathcal{Y}-\chi}{4(\alpha r+1)^{\frac{1}{r}}}\left[\left(\left|F'(m)\right|^q+\left|F'(n)\right|^q-\frac{3\left|F'(\chi)\right|^q+\left|F'(\mathcal{Y})\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\left|F'(m)\right|^q+\left|F'(n)\right|^q-\frac{\left|F'(\chi)\right|^q+3\left|F'(\mathcal{Y})\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]. \tag{2.65}$$

Burada $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$ dir.

İspat. Lemma 2.29'dan ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{+}}F\,(m+n-\chi)+J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{-}}F\,(m+n-\mathcal{Y})\right]\right.\\
&\left.-F\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)\right|\\
\leq\ &\frac{\mathcal{Y}-\chi}{4}\left\{\int_0^1\tau^{\alpha}\left|F'\left(m+n-\left(\frac{2-\tau}{2}\chi+\frac{\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right)\right|d\tau\right.\\
&\left.+\int_0^1\tau^{\alpha}\left|F'\left(m+n-\left(\frac{\tau}{2}\chi+\frac{2-\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right)\right|d\tau\right\}
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ &\frac{\mathcal{Y}-\chi}{4}\left(\int_0^1\tau^{\alpha r}d\tau\right)^{\frac{1}{r}}\left\{\left(\int_0^1\left|F'\left(m+n-\left(\frac{2-\tau}{2}\chi+\frac{\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right)\right|^{q}d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\int_0^1\left|F'\left(m+n-\left(\frac{\tau}{2}\chi+\frac{2-\tau}{2}\mathcal{Y}\right)\right)\right|^{q}d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}
$$

bulunur. $|F'|^{q}$ fonksiyonunun konveksliğinden dolayı Jensen-Mercer eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\mathcal{Y}-\chi)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{+}}F\,(m+n-\chi)+J^{\alpha}_{\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{-}}F\,(m+n-\mathcal{Y})\right]\right.\\
&\left.-F\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)\right|\\
\leq\ &\frac{\mathcal{Y}-\chi}{4}\left(\frac{1}{(\alpha r+1)}\right)^{\frac{1}{r}}\\
&\times\left\{\left(\int_0^1\left(|F'(m)|^{q}+|F'(n)|^{q}-\left(\frac{2-\tau}{2}|F'(\chi)|^{q}+\frac{\tau}{2}|F'(\mathcal{Y})|^{q}\right)\right)d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\int_0^1\left(|F'(m)|^{q}+|F'(n)|^{q}-\left(\frac{\tau}{2}|F'(\chi)|^{q}+\frac{2-\tau}{2}|F'(\mathcal{Y})|^{q}\right)\right)d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\\
=\ &(\mathcal{Y}-\chi)\left(\frac{1}{(\alpha r+1)}\right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

$$\times\left[\left(\left|F'(m)\right|^q+\left|F'(n)\right|^q-\frac{3\left|F'(\chi)\right|^q+\left|F'(\mathcal{Y})\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\left|F'(m)\right|^q+\left|F'(n)\right|^q-\frac{\left|F'(\chi)\right|^q+3\left|F'(\mathcal{Y})\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 2.37. Teorem 2.36'da $\chi = m$ ve $\mathcal{Y} = n$ olarak alınırsa (2.65) eşitsizliği [75]'te Sarıkaya ve ark. tarafından elde edilen (3.6) eşitsizliğinin ilk kısmına dönüşür.

Sonuç 2.38. Teorem 2.36'da $\alpha = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\mathcal{Y}-\chi}\int_{m+n-\mathcal{Y}}^{m+n-\chi}F(u)\,du-F\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)\right| \\
\leq\ &\frac{\mathcal{Y}-\chi}{4(r+1)^{\frac{1}{r}}}\left[\left(\left|F'(m)\right|^q+\left|F'(n)\right|^q-\frac{3\left|F'(\chi)\right|^q+\left|F'(\mathcal{Y})\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\left|F'(m)\right|^q+\left|F'(n)\right|^q-\frac{\left|F'(\chi)\right|^q+3\left|F'(\mathcal{Y})\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}\tag{2.68}$$

2.2.1. Bazı Özel Ortalamalar İçin Uygulamalar

Önerme 2.39. $\chi,\ \mathcal{Y}\in[m,n]$, $p\in\mathbb{N}$ ve $p\geq 2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
&\left|L_p^p(m+n-\mathcal{Y},m+n-\chi)-A^p(m+n-\mathcal{Y},m+n-\chi)\right| \\
\leq\ &\frac{\mathcal{Y}-\chi}{4}pA\left(\left|m^{p-1}\right|+\left|n^{p-1}\right|-\left|\mathcal{Y}^{p-1}\right|,\left|m^{p-1}\right|+\left|n^{p-1}\right|-\left|\chi^{p-1}\right|\right).
\end{aligned}\tag{2.69}$$

İspat. $F(\chi)=\chi^p$, $\chi\in\mathbb{R}$ için Sonuç 2.35 uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(\mathcal{Y}-\chi)}\int_{m+n-\mathcal{Y}}^{m+n-\chi}u^p\,du-\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^p\right| \\
\leq\ &\frac{\mathcal{Y}-\chi}{4}\left[p\left|m^{p-1}\right|+\left|n^{p-1}\right|-\frac{\left|\chi^{p-1}\right|+\left|\mathcal{Y}^{p-1}\right|}{2}\right]
\end{aligned}\tag{2.70}$$

olup buradan basit matematiksel işlemlerle

$$\begin{aligned}
&\left|L_p^p(m+n-\mathcal{Y},m+n-\chi)-A^p(m+n-\mathcal{Y},m+n-\chi)\right| \\
\leq\;& \frac{\mathcal{Y}-\chi}{4}pA\left(\left|m^{p-1}\right|+\left|n^{p-1}\right|-\left|\mathcal{Y}^{p-1}\right|,\left|m^{p-1}\right|+\left|n^{p-1}\right|-\left|\chi^{p-1}\right|\right)
\end{aligned} \tag{2.71}$$

olduğu ispatlanır. □

Önerme 2.40. $\chi,\,\mathcal{Y}\in[m,n]$, $p\in\mathbb{N}$ ve $p\geq 2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\begin{aligned}
&\left|L_p^p(m+n-\mathcal{Y},m+n-\chi)-A^p(m+n-\mathcal{Y},m+n-\chi)\right| \\
\leq\;& \frac{(\mathcal{Y}-\chi)\,p}{4(r+1)^{\frac{1}{r}}}\left[\left(|m|^{(p-1)q}+|n|^{(p-1)q}-\frac{3|\chi|^{(p-1)q}+|\mathcal{Y}|^{(p-1)q}}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(|m|^{(p-1)q}+|n|^{(p-1)q}-\frac{|\chi|^{(p-1)q}+3|\mathcal{Y}|^{(p-1)q}}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned} \tag{2.72}$$

İspat. $\digamma(\chi)=\chi^p$, $\chi\in\mathbb{R}$ fonksiyonuna Sonuç 2.38 uygulanırsa (2.72) eşitsizliği elde edilir. □

Önerme 2.41. $\chi,\mathcal{Y}\in[m,n]$, $0\notin[m,n]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\left|\overline{L}^{-1}(m+n-\mathcal{Y},m+n-\chi)-A^{-1}(m+n-\mathcal{Y},m+n-\chi)\right| \\
\leq\;& \frac{\mathcal{Y}-\chi}{4}A\left(|m|^{-2}+|n|^{-2}-|\mathcal{Y}|^{-2},|m|^{-2}+|n|^{-2}-|\chi|^{-2}\right)
\end{aligned} \tag{2.73}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\digamma(\chi)=\frac{1}{\chi}$, $\chi\in\mathbb{R}$ için Sonuç 2.35 uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(\mathcal{Y}-\chi)}\int_{m+n-\mathcal{Y}}^{m+n-\chi}\frac{1}{u}du-\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{-1}\right| \\
=\;& \left|\frac{1}{(\mathcal{Y}-\chi)}\ln|m+n-\chi|-\ln|m+n-\mathcal{Y}|-\left(m+n-\frac{\chi+\mathcal{Y}}{2}\right)^{-1}\right|
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\leq \quad \frac{\mathcal{Y}-\chi}{4}\left[|m|^{-2}+|n|^{-2}-\frac{|\chi|^{-2}+|\mathcal{Y}|^{-2}}{2}\right]$$

bulunur. Bu eşitsizlikte uygun ortalamalar yerine yazılarak ispat tamamlanır. □

3. $(p,\varphi_h)-$KONVEKSLİK

Bu bölümde ilk olarak yeni bir konvekslik türü olan $(p,\varphi_h)-$konvekslik tanımlanmış ve bazı özellikleri ispatlanmıştır. Daha sonra $(p,\varphi_h)-$konvekslik için Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejér, Ostrowski, Jensen ve Jensen-Mercer tipli eşitsizliler elde edilmiştir. Son olarak Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli yeni integral eşitsizlikleri bulunmuştur. Bölüm boyunca J reel sayılarda bir aralık olmak üzere $(0,1)\subseteq J$, ve $\varphi:[m,n]\to[m,n]$ fonksiyonu $[m,n]\subset\mathbb{R}$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olarak varsayılmıştır.

3.1. $(p,\varphi_h)-$KONVEKSLİK VE ÖZELLİKLERİ

Bu alt bölümde önce $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyonun tanımı ve daha sonra sağladığı özellikler verilmiştir.

Tanım 3.1. $h:J\to\mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan sıfırdan farklı bir fonksiyon ve $I\subseteq(0,\infty)$ reel sayılarda bir aralık ve $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ olsun. $\mathcal{F}:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyon ve her $\chi,\mathcal{Y}\in I$, $\tau\in(0,1)$ için

$$\mathcal{F}([\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(\mathcal{Y})]^{\frac{1}{p}})\leq h(\tau)\mathcal{F}(\varphi(\chi))+h(1-\tau)\mathcal{F}(\varphi(\mathcal{Y})) \tag{3.1}$$

şartını sağlıyorsa $\mathcal{F}$ fonksiyonuna $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyon denir ve $\mathcal{F}\in fsx(p,\varphi_h,I)$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde 3.1 eşitsizliğinin işareti ters çevrilirse, bu durumda $\mathcal{F}$ fonksiyonuna $(p,\varphi_h)-$konkav fonksiyon denir ve $\mathcal{F}\in fsv(p,\varphi_h,I)$ şeklinde gösterilir.

Sonuç 3.2. (3.1) eşitsizliğinde $\mathcal{F}$ fonksiyonu; $p=1$ alınırsa φ_h-konveks fonksiyona, $h(\tau)=\tau^s$ ve $p=1$ alınırsa φ_s-konveks fonksiyona,$h(\tau)=\frac{1}{\tau}$ ve $p=1$ alınırsa $\varphi-$Godunova-Levin fonksiyonuna, $h(\tau)=1$ ve $p=1$ alınırsa $\varphi-P-$fonksiyonuna, $\varphi(\chi)=\chi$ alınırsa $(p,h)-$konveks fonksiyona indirgenecektir.

Lemma 3.3. $h:(0,1)\to(0,\infty)$ olsun. Eğer $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ için $\mathcal{F},\mathcal{G}\in fsx(p,\varphi_h,I)$ ve $\lambda>0$ ise o halde $\mathcal{F}+\mathcal{G}$, $\lambda\mathcal{F}\in fsx(p,\varphi_h,I)$ bulunur. Benzer şekilde $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}\in fsv(p,\varphi_h,I)$ ve $\lambda>0$ ise o halde $\mathcal{F}+\mathcal{G}$, $\lambda\mathcal{F}\in fsv(p,\varphi_h,I)$ bulunur.

İspat. $\mathcal{F},\mathcal{G}\in fsx(p,\varphi_h,I)$ olsun. $\psi(\chi)=\mathcal{F}(\chi)+\mathcal{G}(\chi)$ olarak alınsın. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
&\psi\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(\mathcal{Y})\right]^{\frac{1}{p}}\right)\\
=\;&\mathcal{F}\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(\mathcal{Y})\right]^{\frac{1}{p}}\right)+\mathcal{G}\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(\mathcal{Y})\right]^{\frac{1}{p}}\right)\\
\leq\;&h(\tau)\mathcal{F}(\varphi(\chi))+h(1-\tau)\mathcal{F}(\varphi(\mathcal{Y}))\\
&+h(\tau)\mathcal{G}(\varphi(\chi))+h(1-\tau)\mathcal{G}(\varphi(\mathcal{Y}))\\
=\;&h(\tau)\left[\mathcal{F}(\varphi(\chi))+\mathcal{G}(\varphi(\chi))\right]+h(1-\tau)\left[\mathcal{F}(\varphi(\mathcal{Y}))+\mathcal{G}(\varphi(\mathcal{Y}))\right]\\
=\;&h(\tau)\psi(\varphi(\chi))+h(1-\tau)\psi(\varphi(\mathcal{Y}))
\end{aligned}\tag{3.2}$$

olur ve buradan $\mathcal{F}+\mathcal{G}\in fsx(p,\varphi_h,I)$ elde edilir. $\lambda\mathcal{F}\in fsx(p,\varphi_h,I)$ olduğu da benzer şekilde ispat edilir. □

Lemma 3.4. $h_1,h_2:(0,1)\to(0,\infty)$ fonksiyonları her $\tau\in(0,1)$ için $h_2(\tau)\leq h_1(\tau)$ olacak şekilde verilsin. $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ olsun. Eğer $\mathcal{F}$ fonksiyonu $(p,\varphi_{h_2})-$konveks fonksiyon ise $\mathcal{F}$ fonksiyonu $(p,\varphi_{h_1})-$konveks fonksiyondur.

İspat. $\mathcal{F}\in fsx(p,\varphi_{h_2},I)$ olsun. Her $\chi,\mathcal{Y}\in I$ ve $\tau\in(0,1)$ için

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(\mathcal{Y})\right]^{\frac{1}{p}}\right)\\
\leq\;&h_2(\tau)\mathcal{F}(\varphi(\chi))+h_2(1-\tau)\mathcal{F}(\varphi(\mathcal{Y}))\\
\leq\;&h_1(\tau)\mathcal{F}(\varphi(\chi))+h_1(1-\tau)\mathcal{F}(\varphi(\mathcal{Y}))
\end{aligned}\tag{3.3}$$

elde edilir. Bu da $\mathcal{F}\in fsx(p,\varphi_{h_1},I)$ demektir. □

Lemma 3.5. I bir aralık ve $0 \in I$ ve $p > 0$ olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

a) $\digamma \in fsx(p, \varphi_h, I),\ \digamma(0) = 0,\ \varphi(0) = 0$ ve h fonksiyonu üst çarpımsal ise her $\chi, \mathcal{Y} \in I$, $\alpha, \beta > 0$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ için

$$\digamma\left([\alpha\varphi^p(\chi) + \beta\varphi^p(\mathcal{Y})]^{\frac{1}{p}}\right) \leq h(\alpha)\digamma(\varphi(\chi)) + h(\beta)\digamma(\varphi(\mathcal{Y})) \tag{3.4}$$

sağlanır.

b) $\digamma \in fsv(p, \varphi_h, I), \digamma(0) = 0, \varphi(0) = 0$ ve h fonksiyonu alt çarpımsal ise her $\chi, \mathcal{Y} \in I$, $\alpha, \beta > 0$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ için

$$\digamma\left([\alpha\varphi^p(\chi) + \beta\varphi^p(\mathcal{Y})]^{\frac{1}{p}}\right) \geq h(\alpha)\digamma(\varphi(\chi)) + h(\beta)\digamma(\varphi(\mathcal{Y})) \tag{3.5}$$

sağlanır.

İspat. a) $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = \theta < 1$ olsun. m ve n sayıları $m = \frac{\alpha}{\theta}$ ve $n = \frac{\beta}{\theta}$ olacak şekilde alınsın. Bu durumda $m + n = 1$ olur ve

$$\begin{aligned}
& \digamma\left([\alpha\varphi^p(\chi) + \beta\varphi^p(\mathcal{Y})]^{\frac{1}{p}}\right) \\
= \quad & \digamma\left([m\theta\varphi^p(\chi) + n\theta\varphi^p(\mathcal{Y})]^{\frac{1}{p}}\right) \\
\leq \quad & h(m)\digamma\left(\theta^{\frac{1}{p}}\varphi(\chi)\right) + h(n)\digamma\left(\theta^{\frac{1}{p}}\varphi(\mathcal{Y})\right) \\
= \quad & h(m)\digamma\left([\theta\varphi^p(\chi) + (1-\theta)\varphi^p(0)]^{\frac{1}{p}}\right) \qquad (3.6) \\
& + h(n)\digamma\left([\theta\varphi^p(\mathcal{Y}) + (1-\theta)\varphi^p(0)]^{\frac{1}{p}}\right) \\
\leq \quad & h(m)h(\theta)\digamma(\varphi(\chi)) + h(n)h(\theta)\digamma(\varphi(\mathcal{Y})) \\
\leq \quad & h(m\theta)\digamma(\varphi(\chi)) + h(n\theta)\digamma(\varphi(\mathcal{Y}))
\end{aligned}$$

$$= \quad h(\alpha)\mathcal{F}(\varphi(\chi)) + h(\beta)\mathcal{F}(\varphi(\mathcal{Y}))$$

bulunur ve böylece (3.4) eşitsizliği ispatlanır.

b) (3.5) eşitsizliğinin ispatı benzer şekilde yapılır. □

Lemma 3.6. $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olsun. $\mathcal{F} : [m,n] \to \mathbb{R}$, $h : (0,1) \to (0,\infty)$ ve $\varphi : [m,n] \to [m,n]$ fonksiyonları verilsin. O halde aşağıdaki durumlar eşdeğerdir:

i) $\mathcal{F}$ fonksiyonu $[m,n]$ üzerinde $(p,\varphi_h)-$konvekstir.

ii) Her $\chi, \mathcal{Y} \in [m,n]$ için, $\mathcal{G} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{G}(\tau) = \mathcal{F}\left([\tau\varphi^p(\chi) + (1-\tau)\varphi^p(\mathcal{Y})]^{\frac{1}{p}}\right)$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde $h-$konvekstir.

İspat. $\mathcal{F}$ fonksiyonunun $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyon olsun ve $\chi, \mathcal{Y} \in [m,n]$, $\lambda \in (0,1)$ ve $\tau_1, \tau_2 \in [0,1]$ noktaları alınsın. O halde

$$\begin{aligned}
& \mathcal{G}(\lambda\tau_1 + (1-\lambda)\tau_2) \\
= \; & \mathcal{F}\left([(\lambda\tau_1 + (1-\lambda)\tau_2)\varphi^p(\chi) + (1-\lambda\tau_1 - (1-\lambda)\tau_2)\varphi^p(\mathcal{Y})]^{\frac{1}{p}}\right) \\
= \; & \mathcal{F}\left([\lambda(\tau_1\varphi^p(\chi) + (1-\tau_1)\varphi^p(\mathcal{Y}))\right. \\
& \left. + (1-\lambda)(\tau_2\varphi^p(\chi) + (1-\tau_2)\varphi^p(\mathcal{Y}))]^{\frac{1}{p}}\right) \qquad (3.7) \\
\leq \; & h(\lambda)\mathcal{F}\left([(\tau_1\varphi^p(\chi) + (1-\tau_1)\varphi^p(\mathcal{Y}))]^{\frac{1}{p}}\right) \\
& + h(1-\lambda)\mathcal{F}\left([\tau_1\varphi^p(\chi) + (1-\tau_1)\varphi^p(\mathcal{Y})]^{\frac{1}{p}}\right) \\
= \; & h(\lambda)\mathcal{G}(\tau_1) + h(1-\lambda)\mathcal{G}(\tau_2)
\end{aligned}$$

bulunur ve bu $\mathcal{G}$ fonksiyonunun $h-$konveks fonksiyon olduğunu verir.

Tersine $\mathcal{G}$ fonksiyonu $h-$konveks fonksiyon ise $\chi, \mathcal{Y} \in [m,n]$, $\lambda \in (0,1)$ ve $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 0$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\left[\lambda\varphi^p(\chi) + (1-\lambda)\varphi^p(\mathcal{Y})\right]^{\frac{1}{p}}\right) &= \mathcal{G}(\lambda 1 + (1-\lambda)0) \\
&\leq h(\lambda)\mathcal{G}(1) + h(1-\lambda)\mathcal{G}(0) \\
&= h(\lambda)\mathcal{F}\left(\left[\varphi^p(\chi)\right]^{\frac{1}{p}}\right) + h(1-\lambda)\mathcal{F}\left(\left[\varphi^p(\mathcal{Y})\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
&= h(\lambda)\mathcal{F}(\varphi(\chi)) + h(1-\lambda)\mathcal{F}(\varphi(\mathcal{Y}))
\end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir. Bu ise $\mathcal{F}$ fonksiyonunun $(p, \varphi_h)-$konveks fonksiyon olması demektir. Böylece ispat tamamlanır. □

3.2. $(p, \varphi_h)-$KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde $(p, \varphi_h)-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ispatlanmıştır.

Teorem 3.7. $h : (0,1) \to (0,\infty)$ ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $\mathcal{F} \in fsx(p, \varphi_h, I)$ fonksiyonları verilsin. $\varphi : [m,n] \to [m,n]$ fonksiyonu monoton olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}\mathcal{F}\left(\left[\frac{\varphi^p(m) + \varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) &\leq \frac{p}{\varphi^p(n) - \varphi^p(m)}\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \chi^{p-1}\mathcal{F}(\chi)\,d\chi \\
&\leq \left[\mathcal{F}(\varphi(m)) + \mathcal{F}(\varphi(n))\right]\int_0^1 h(\tau)\,d\tau.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

İspat. $\mathcal{F}$ fonksiyonunun $(p, \varphi_h)-$konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(\left[\frac{\varphi^p(m) + \varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
&= \mathcal{F}\left(\left[\frac{\tau\varphi^p(m) + (1-\tau)\varphi^p(n)}{2} + \frac{(1-\tau)\varphi^p(m) + \tau\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[F\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right.$$

$$\left.+F\left(\left[(1-\tau)\varphi^{p}(m)+\tau\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right]$$

elde edilir. (3.10) eşitsizliğinin her iki tarafının τ ya göre $[0,1]$ aralığı üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & F\left(\left[\frac{\varphi^{p}(m)+\varphi^{p}(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\ \leq\ & h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\int_0^1 F\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau\right. \\ & \left.+\int_0^1 F\left(\left[(1-\tau)\varphi^{p}(m)+\tau\varphi^{p}(n)\right]\right)^{\frac{1}{p}}d\tau\right] \end{aligned} \tag{3.11}$$

bulunur. (3.11) eşitsizliğinin birinci integralinde, $\chi=\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}$ ve ikinci integralinde $\chi=\left[(1-\tau)\varphi^{p}(m)+\tau\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}$ değişken değiştirme yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}F\left(\left[\frac{\varphi^{p}(m)+\varphi^{p}(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\ \leq\ & \frac{p}{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\chi^{p-1}F(\chi)\,d\chi \end{aligned} \tag{3.12}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.9) eşitsizliğinin ikinci kısmını ispat etmek için, F fonksiyonunun $(p,\varphi_h)-$ konveksliği kullanılırsa, her $\tau\in(0,1)$ için

$$F\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\leq h(\tau)F(\varphi(m))+h(1-\tau)F(\varphi(n)) \tag{3.13}$$

bulunur. (3.13) eşitsizliğinin her iki tarafının τ ya göre $[0,1]$ aralığı üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 F\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau \\ \leq\ & F(\varphi(m))\int_0^1 h(\tau)\,d\tau+F(\varphi(n))\int_0^1 h(1-\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{3.14}$$

eşitsizliğine dönüşür. (3.14) eşitsizliğin birinci kısmında $\chi = [\tau\varphi^p(m) + (1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}$ değişken değiştirme yapılırsa

$$\frac{p}{\varphi^p(n) - \varphi^p(m)} \int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \chi^{p-1} \mathcal{F}(\chi)\, d\chi \leq [\mathcal{F}(\varphi(m)) + \mathcal{F}(\varphi(n))] \int_0^1 h(\tau)\, d\tau \tag{3.15}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.8. (3.9) eşitsizliğinde $p=1$ alınırsa Sarıkaya tarafından ispatlanan φ_h-konveks fonksiyon için Hermite- Hadamard tipli eşitsizlik elde edilir [59].

Sonuç 3.9. (3.9) eşitsizliğinde $p=1$ ve $\tau \in (0,1)$ için $h(\tau) = \tau$ alınırsa, (1.54) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.10. (3.9) eşitsizliğinde $p=1$ ve $h(\tau) = \tau^s\,(s \in (0,1))\,,\ \tau \in (0,1)$ olarak alınırsa Sarıkaya tarafından ispatlanan φ_s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik elde edilir [59].

Sonuç 3.11. (3.9) eşitsizliğinde $p=1,\ \varphi(\chi) = \chi$ ve $\tau \in (0,1)$ için $h(\tau) = \frac{1}{\tau}$ alınırsa Dragomir ve ark. tarafından elde edilen Godunova-Levin fonksiyonları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğin sol tarafı elde edilir [77].

Sonuç 3.12. (3.9) eşitsizliğinde $p=1,\ \varphi(\chi) = \chi$ ve $h(\tau) = \tau^s\,(s \in (0,1))\,,\ \tau \in (0,1)$ alınırsa (1.42) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.13. $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ fonksiyonları için $\mathcal{F} \in fsx(p, \varphi_{h_1}, I)$, $\mathcal{G} \in fsx(p, \varphi_{h_2}, I)$ olsun ve $m,n \in I$, $m<n$ olmak üzere $\mathcal{F}\mathcal{G} \in L([m,n])$ olacak şekilde var olsun. φ fonksiyonu monoton ve $h_1 h_2 \in L([0,1])$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} &\frac{p}{\varphi^p(n) - \varphi^p(m)} \int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \chi^{p-1} \mathcal{F}(\chi)\mathcal{G}(\chi)\, d\chi \\ \leq\ & M_\varphi(m,n) \int_0^1 h_1(\tau) h_2(\tau)\, d\tau + N_\varphi(m,n) \int_0^1 h_1(\tau) h_2(1-\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{3.16}$$

eşitisiziği vardır. Burada

$$M_\varphi(m,n) = \mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(m)) + \mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(n)) \tag{3.17}$$

ve

$$N_\varphi(m,n) = \mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(m)) + \mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(n)) \tag{3.18}$$

olarak alınır.

İspat. $\mathcal{F} \in fsx(p, \varphi_{h_1}, I)$ ve $\mathcal{G} \in fsx(p, \varphi_{h_2}, I)$ olduğundan her $\tau \in [0,1]$ için

$$\mathcal{F}\left(\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq h_1(\tau)\mathcal{F}(\varphi(m))+h_1(1-\tau)\mathcal{F}(\varphi(n)) \tag{3.19}$$

$$\mathcal{G}\left(\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq h_2(\tau)\mathcal{G}(\varphi(m))+h_2(1-\tau)\mathcal{G}(\varphi(n)) \tag{3.20}$$

vardır. Tanım gereği $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ negatif olmadıkları için yukardaki iki eşitsizliğin çarpımından

$$\mathcal{F}\left(\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\mathcal{G}\left(\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\leq \quad h_1(\tau)h_2(\tau)\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(m))+h_1(1-\tau)h_2(\tau)\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(m)) \tag{3.21}$$

$$+h_1(\tau)h_2(1-\tau)\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(n))+h_1(1-\tau)h_2(1-\tau)\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(n))$$

bulunur. (3.21) eşitsizliğinin her iki tarafının τ ya göre $[0,1]$ aralığı üzerinde integrali alınırsa

$$\int_0^1 \mathcal{F}\left(\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\mathcal{G}\left(\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau$$

$$\begin{aligned}
\leq \quad & \mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(m))\int_0^1 h_1(\tau)h_2(\tau)d\tau \\
& +\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(m))\int_0^1 h_1(1-\tau)h_2(\tau)d\tau \\
& +\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(n))\int_0^1 h_1(\tau)h_2(1-\tau)d\tau \\
& +\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(n))\int_0^1 h_1(1-\tau)h_2(1-\tau)d\tau
\end{aligned} \tag{3.22}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.22) eşitsizliğinde $\chi = \left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}$ değişken değiştirmesi yapıldığında

$$\frac{p}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \chi^{p-1}\mathcal{F}(\chi)\mathcal{G}(\chi)d\chi$$

$$
\leq \quad M_{\varphi}(m,n)\int_0^1 h_1(\tau)h_2(\tau)d\tau + N_{\varphi}(m,n)\int_0^1 h_1(\tau)h_2(1-\tau)d\tau \tag{3.23}
$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.14. (3.16) eşitsizliğinde $h(\chi)=\chi$ ve $p=1$ alınırsa [56]'da Cristescu tarafından ispatlanan (3) eşitsizliği elde edilir [56].

Teorem 3.15. $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ olsun. $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ fonksiyonları $\mathcal{F}\in fsx(p,\varphi_h,I)$, $\mathcal{G}\in fsx(p,\varphi_h,I)$ ve $\mathcal{F}\mathcal{G}\in L([m,n])$, $(m,n\in I, m<n)$ olacak şekilde var olsun. $h\in L([0,1])$ ve φ fonksiyonu monoton olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2h^2\left(\frac{1}{2}\right)}\mathcal{F}\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\mathcal{G}\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\\
&-\frac{p}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\chi^{p-1}\mathcal{F}(\chi)\mathcal{G}(\chi)d\chi \qquad (3.24)\\
\leq\quad & N_{\varphi}(m,n)\int_0^1 h^2(\tau)d\tau + M_{\varphi}(m,n)\int_0^1 h(\tau)h(1-\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}=\frac{\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)}{2}+\frac{(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)}{2}$ eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\mathcal{G}\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\\
=\quad&\mathcal{F}\left(\left[\frac{\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)}{2}+\frac{(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \qquad (3.25)\\
&\times\mathcal{G}\left(\left[\frac{\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)}{2}+\frac{(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)
\end{aligned}
$$

yazılır. $\mathcal{F}\in fsx(p,\varphi_h,I)$, $\mathcal{G}\in fsx(p,\varphi_h,I)$ olduğundan

$$
\mathcal{F}\left(\left[\frac{\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)}{2}+\frac{(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
& \times \mathcal{G}\left(\left[\frac{\tau \varphi^p(m)+(1-\tau) \varphi^p(n)}{2}+\frac{(1-\tau) \varphi^p(m)+\tau \varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
\leq\; & h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\mathcal{F}\left([\tau \varphi^p(m)+(1-\tau) \varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)+\mathcal{F}\left([(1-\tau) \varphi^p(m)+\tau \varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)\right] \\
& \times h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\mathcal{G}\left([\tau \varphi^p(m)+(1-\tau) \varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)+\mathcal{G}\left([(1-\tau) \varphi^p(m)+\tau \varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)\right] \\
\leq\; & h^2\left(\frac{1}{2}\right) \mathcal{F}\left([\tau \varphi^p(m)+(1-\tau) \varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right) \mathcal{G}\left([\tau \varphi^p(m)+(1-\tau) \varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right) \\
& +h^2\left(\frac{1}{2}\right) \mathcal{F}\left([(1-\tau) \varphi^p(m)+\tau \varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right) \mathcal{G}\left([(1-\tau) \varphi^p(m)+\tau \varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right) \\
& +h^2\left(\frac{1}{2}\right)[h(\tau) \mathcal{F}(\varphi(m))+h(1-\tau) \mathcal{F}(\varphi(n))] \\
& \times[h(1-\tau) \mathcal{G}(\varphi(m))+h(\tau) \mathcal{F}(\varphi(n))] \\
& +h^2\left(\frac{1}{2}\right)[h(1-\tau) \mathcal{F}(\varphi(m))+h(\tau) \mathcal{F}(\varphi(n))] \\
& \times[h(\tau) \mathcal{G}(\varphi(m))+h(1-\tau) \mathcal{F}(\varphi(n))] \\
=\; & h^2\left(\frac{1}{2}\right) \mathcal{F}\left([\tau \varphi^p(m)+(1-\tau) \varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right) \mathcal{G}\left([\tau \varphi^p(m)+(1-\tau) \varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right) \\
& +h^2\left(\frac{1}{2}\right) \mathcal{F}\left([(1-\tau) \varphi^p(m)+\tau \varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right) \mathcal{G}\left([(1-\tau) \varphi^p(m)+\tau \varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right) \\
& +h^2\left(\frac{1}{2}\right)[h(\tau) h(1-\tau)+h(1-\tau) h(\tau)] M_{\varphi}(m, n) \\
& +h^2\left(\frac{1}{2}\right)\left[h^2(\tau)+h^2(1-\tau)\right] N_{\varphi}(m, n)
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizliğin τ ya göre $[0,1]$ aralığı üzerinde integrali alınırsa ve gerekli değişken değiştirme yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2h^2\left(\frac{1}{2}\right)}\mathcal{F}\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\mathcal{G}\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
& -\frac{p}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\chi^{p-1}\mathcal{F}(\chi)\mathcal{G}(\chi)\,d\chi \\
\leq\ & [\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(m))+\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(n))]\int_0^1 h^2(\tau)\,d\tau \\
& +[\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(m))+\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(n))]\int_0^1 h(\tau)h(1-\tau)\,d\tau
\end{aligned} \tag{3.27}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.16. (3.24) eşitsizliğinde $h(\chi)=\chi$ ve $p=1$ alınırsa [56]'da Cristescu tarafından ispatlanan (4) eşitsizliği elde edilir [56].

3.3. $(p,\varphi_h)-$KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD -FEJÉR TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde ilk olarak $\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ye göre φ-p-simetrik fonksiyon tanımı verilmiştir ve ardından $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlikler ispatlanmıştır.

Tanım 3.17. $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ olsun. $\omega:[m,n]\subset(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $\chi\in[m,n]$ için $\omega(\varphi(\chi))=\omega\left([\varphi^p(m)+\varphi^p(n)-\varphi^p(\chi)]^{\frac{1}{p}}\right)$ şartını sağlıyorsa ω fonksiyonuna $\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ye göre φ-p-simetrik fonksiyon denir.

Örnek 3.18. $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ olsun. $\omega:[m,n]\subseteq(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $s\in\mathbb{R}$ için $\omega(\chi)=s$ olarak tanımlansın. O halde ω fonksiyonu $\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ye göre φ-p-simetriktir.

Örnek 3.19. $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ olsun. $\omega:[m,n]\subseteq(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\omega(\chi)=\left(\chi^p-\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right)^2$ olarak tanımlansın. Bu durumda ω fonksiyonu $\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ye göre φ-p-simetriktir.

Sonuç 3.20. Tanım 3.17'da $\varphi(\chi)=\chi$ olarak alınırsa Tanım 1.63 elde edilir.

Teorem 3.21. $h:(0,1)\to(0,\infty)$ fonksiyonu ve $\varphi:[m,n]\to[m,n]$ monoton artan fonksiyonu verilsin. $F:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $m,n\in I$ ve $m<n$ olacak şekilde (p,φ_h)-konveks fonksiyon olsun. Eğer $F\in L[m,n]$ ve $\omega:[m,n]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilir ve $\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ye göre φ-p-simetrik fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}F\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi \\
\leq\;& \int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)F(\chi)\chi^{p-1}d\chi \\
\leq\;& \frac{[F(\varphi(m))+F(\varphi(n))]}{2} \\
&\times\left\{\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\left[h\left(\frac{\varphi^p(n)-\chi^p}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}\right)+h\left(\frac{\chi^p-\varphi^p(m)}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}\right)\right]\omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi\right\}
\end{aligned}\tag{3.28}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. $p>0$ olsun. $F:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (p,φ_h)-konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
&F\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
=\;& F\left(\left[\frac{\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)}{2}+\frac{(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
\leq\;& h\left(\frac{1}{2}\right)\left[F\left([\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)+F\left([(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)\right]
\end{aligned}\tag{3.29}$$

yazılır. ω fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilir ve $\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ye göre φ-p-simetrik fonksiyon olduğu için

$$\omega\left([\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)=\omega\left([(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)\tag{3.30}$$

eşitliği vardır. (3.29) eşitsizliğinin her iki tarafı $\omega\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)$ ile çarpılır ve τ ya göre $[0,1]$ aralığı üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} &\int_0^1 F\left(\left[\frac{\varphi^{p}(m)+\varphi^{p}(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\omega\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau \\ \leq\ & h\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\int_0^1\left[\omega\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right.\right. \\ &\left.\times F\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right]d\tau \qquad (3.31) \\ &+\int_0^1\left[\omega\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right. \\ &\left.\left.\times F\left(\left[(1-\tau)\varphi^{p}(m)+\tau\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right]d\tau\right\} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki eşitsizliğin birinci ve ikinci integralinde $\chi = \left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}$ değişken değiştirmesi ve üçüncü integralinde (3.30) özdeşliği kullanılıp, $\chi=\left[(1-\tau)\varphi^{p}(m)+\tau\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}$ değişken değiştimesi yapılır ve eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}F\left(\left[\frac{\varphi^{p}(m)+\varphi^{p}(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi \\ \leq\ & \int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)F(\chi)\chi^{p-1}d\chi \end{aligned} \qquad (3.32)$$

elde edilir. Böylece (3.28) eşitsizliğinin birinci kısmı ispatlanır.

(3.28) eşitsizliğinin ikinci kısmını ispatlamak için ilk olarak F fonksiyonunun (p,φ_h) −konveksiği kullanılmıştır. Buna göre her $\tau\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned} &F\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)+F\left(\left[(1-\tau)\varphi^{p}(m)+\tau\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\ \leq\ & h(\tau)F(\varphi(m))+h(1-\tau)F(\varphi(n)) \end{aligned} \qquad (3.33)$$

$$+h(1-\tau)F(\varphi(m))+h(\tau)F(\varphi(n))$$

$$= [h(\tau)+h(1-\tau)][F(\varphi(m))+F(\varphi(n))]$$

yazılır. ω fonksiyonunun $\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ye göre φ-p-simetrik olmasından dolayı (3.33) eşitsizliğinin her iki tarafı $\omega\left([\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& F\left([\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)\omega\left([\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right) \\
& +F\left([(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)\omega\left([\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right) \\
= \; & F\left([\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)\omega\left([\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right) \qquad (3.34) \\
& +F\left([(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)\omega\left([(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right) \\
\leq \; & [h(\tau)+h(1-\tau)][F(\varphi(m))+F(\varphi(n))]\,\omega\left([\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. (3.34) eşitsizliğinin her iki tarafının τ ye göre $[0,1]$ aralığı üzerinde integrali alınır, gerekli değişken değiştirme işlemi yapılır ve ardından eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}{p}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \omega(\chi)F(\chi)\chi^{p-1}d\chi \\
\leq \; & \frac{[F(\varphi(m))+F(\varphi(n))]}{2} \qquad (3.35) \\
& \times\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\left[h\left(\frac{\varphi^p(n)-\chi^p}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}\right)+h\left(\frac{\chi^p-\varphi^p(m)}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}\right)\right]\omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.28) eşitsizliğinin ikinci kısmı da ispatlanmış olur ve ispat tamamlanır.

$p<0$ için de benzer işlemler yapılırsa aynı sonuç elde edilir. □

Sonuç 3.22. (3.28) eşitsizliğinde $h(\chi)=\chi$, $\varphi(\chi)=\chi$, $p=1$ ve $\omega(\chi)=1$ alınırsa (1.18) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.23. (3.28) eşitsizliğinde $h(\chi)=\chi$, $\varphi(\chi)=\chi$ ve $p=1$ alınırsa Fejér tarafından ispatlanan (1.20) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.24. (3.28) eşitsizliğinde $h(\chi)=\chi$ ve $\varphi(\chi)=\chi$ alınırsa (1.60) eşitsizliği elde edilir.

Lemma 3.25. $\digamma : I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, φ fonksiyonu monoton artan olsun ve $m,n\in I^{\circ}$, $m<n$, $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ olarak alınsın. Eğer $\digamma'\in L[m,n]$ ve $\omega:[m,n]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir ise

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)\digamma(\chi)\chi^{p-1}d\chi-\digamma\left(\left[\frac{\varphi^{p}(m)+\varphi^{p}(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int\limits_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi\\
=&\left(\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}\right)^{2} \qquad (3.36)\\
&\times\int_{0}^{1}\frac{s(\tau)}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}\digamma'\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau
\end{aligned}$$

eşitliği vardır. Burada

$$s(\tau)=\begin{cases}\int_{0}^{\tau}\omega\left(\left[\lambda\varphi^{p}(m)+(1-\lambda)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\lambda, & \tau\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\[2ex] -\int_{\tau}^{1}\omega\left(\left[\lambda\varphi^{p}(m)+(1-\lambda)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\lambda, & \tau\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases} \qquad (3.37)$$

olarak alınır.

İspat.

$$\begin{aligned}
I=&\left(\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}\right)^{2}\\
&\times\int_{0}^{1}\frac{s(\tau)}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}\digamma'\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau\\
=&\left(\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}\right)^{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\int_0^{\tau} \omega\left([\lambda \varphi^p(m) + (1-\lambda)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}} \right) d\lambda}{[\tau\varphi^p(m) + (1-\tau)\varphi^p(n)]^{1-\frac{1}{p}}} \right. \\
&\left. \times F'\left([\tau\varphi^p(m) + (1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}} \right) \right] d\tau \qquad (3.38) \\
&- \left(\frac{\varphi^p(n) - \varphi^p(m)}{p} \right)^2 \\
&\times \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\frac{\int_{\tau}^{1} \omega\left([\lambda \varphi^p(m) + (1-\lambda)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}} \right) d\lambda}{[\tau\varphi^p(m) + (1-\tau)\varphi^p(n)]^{1-\frac{1}{p}}} \right. \\
&\left. \times F'\left([\tau\varphi^p(m) + (1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}} \right) \right] d\tau \\
= \;& I_1 - I_2.
\end{aligned}
$$

ifadesi göz önüne alınsın. I_1 ve I_2 eşitliklerine kısmi integrasyon yöntemi uygulanır ve uygun değişken değiştirme yapılırsa

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\left(\frac{\varphi^p(n) - \varphi^p(m)}{p} \right) F\left([\tau\varphi^p(m) + (1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}} \right) \\
&\quad \times \left(\int_0^{\tau} \omega\left([\lambda \varphi^p(m) + (1-\lambda)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}} \right) d\lambda \right) \Bigg\} \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\frac{\varphi^p(n) - \varphi^p(m)}{p} \right) \\
&\quad \times \int_0^{\frac{1}{2}} \omega\left([\tau\varphi^p(m) + (1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}} \right) F\left([\tau\varphi^p(m) + (1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}} \right) d\tau \\
&= -\left(\frac{\varphi^p(n) - \varphi^p(m)}{p} \right) \qquad (3.39) \\
&\quad \times F\left(\left[\frac{\varphi^p(m) + \varphi^p(n)}{2} \right]^{\frac{1}{p}} \right) \int_0^{\frac{1}{2}} \omega\left([\lambda \varphi^p(m) + (1-\lambda)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}} \right) d\lambda
\end{aligned}
$$

$$+\left(\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}\right)$$

$$\times\int_{0}^{\frac{1}{2}}\omega\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\digamma\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau$$

$$=\quad -\digamma\left(\left[\frac{\varphi^{p}(m)+\varphi^{p}(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\times\int_{\left[\frac{\varphi^{p}(n)+\varphi^{p}(m)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}}^{\varphi(n)}\omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi+\int_{\left[\frac{\varphi^{p}(n)+\varphi^{p}(m)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}}^{\varphi(n)}\omega(\chi)\digamma(\chi)\chi^{p-1}d\chi$$

ve benzer şekilde

$$I_2 \quad = \quad \left\{-\left(\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}\right)\digamma\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\int_{\tau}^{1}\omega\left(\left[\lambda\varphi^{p}(m)+(1-\lambda)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\lambda\right)\right\}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$-\left(\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}\right)$$

$$\times\int_{\frac{1}{2}}^{1}\omega\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\digamma\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau$$

$$=\quad\left(\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}\right)\tag{3.40}$$

$$\times\digamma\left(\left[\frac{\varphi^{p}(m)+\varphi^{p}(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\omega\left(\left[\lambda\varphi^{p}(m)+(1-\lambda)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\lambda$$

$$-\left(\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}\right)$$

$$\times\int_{0}^{\frac{1}{2}}\omega\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\digamma\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau$$

$$=\quad\digamma\left(\left[\frac{\varphi^{p}(m)+\varphi^{p}(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\times \int_{\varphi(m)}^{\left[\frac{\varphi^p(n)+\varphi^p(m)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}} \omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi - \int_{\varphi(m)}^{\left[\frac{\varphi^p(n)+\varphi^p(m)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}} \omega(\chi)F(\chi)\chi^{p-1}d\chi$$

olarak bulunur. Buradan I_1 ifadesinden I_2 ifadesi çıkarılırsa

$$\begin{aligned} I &= I_1 - I_2 \\ &= \int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \omega(\chi)F(\chi)\chi^{p-1}d\chi - F\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi \end{aligned} \tag{3.41}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.26. Lemma 3.25'te $\varphi(\chi)=\chi$ olarak alınırsa (3.36) eşitliği [15]'te Kunt ve İşcan tarafından ispatlanan eşitliğe dönüşür.

Sonuç 3.27. Lemma 3.25'te $\varphi(\chi)=\chi$, $p=1$ ve $\omega(\chi)=1$ olarak alınırsa (3.36) eşitliği [11]'de Kırmacı tarafından ispatlanan eşitliği verir.

Sonuç 3.28. Lemma 3.25'te $\varphi(\chi)=\chi$ ve $p=1$ olarak alınırsa (3.36) eşitliği [78]'da Sarıkaya'nın ispatladığı eşitliğe dönüşür.

Teorem 3.29. $F: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, φ fonksiyonu monoton artan, $m,n \in I^\circ$, $m<n$ ve $F' \in L[m,n]$ olsun. Eğer $|F'|$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyon, $p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ve $\omega:[m,n]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \omega(\chi)F(\chi)\chi^{p-1}d\chi - F\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi\right| \\ &\leq \left(\frac{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}{p}\right)^2 \|\omega\|_\infty \left[\Omega_1(p,\varphi,h)\left|F'(\varphi(m))\right| + \Omega_2(p,\varphi,h)\left|F'(\varphi(n))\right|\right]. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Burada $\|\omega\|_{\infty}=\sup_{\chi\in[m,n]}|\omega(\chi)|,$

$$\begin{aligned}\Omega_1(p,\varphi,h) &= \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\tau h(\tau)}{\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right. \\ &\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1-\tau)h(\tau)}{\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right],\end{aligned} \tag{3.43}$$

ve

$$\begin{aligned}\Omega_2(p,\varphi,h) &= \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\tau h(1-\tau)}{\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right. \\ &\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1-\tau)h(1-\tau)}{\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right]\end{aligned} \tag{3.44}$$

olarak alınır.

İspat. Lemma 3.25'ten

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \omega(\chi)F(\chi)\chi^{p-1}d\chi - F\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi\right| \\ \leq\ & \left(\frac{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}{p}\right)^2 \\ &\times\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\int_0^{\tau}\left|\omega\left(\left[\lambda\varphi^p(m)+(1-\lambda)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|ds}{\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}\right. \\ &\times\left|F'\left(\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|d\tau \\ &+\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\int_{\tau}^{1}\left|\omega\left(\left[\lambda\varphi^p(m)+(1-\lambda)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|ds}{\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}} \\ &\left.\times\left|F'\left(\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|d\tau\right]\end{aligned} \tag{3.45}$$

elde edilir. Ardından $|F'|$ fonksiyonunun $(p,\varphi_h)-$ konveksliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \omega(\chi) F(\chi) \chi^{p-1} d\chi - F\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \int\limits_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \omega(\chi) \chi^{p-1} d\chi\right| \\
\leq\ & \left(\frac{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}{p}\right)^2 \|\omega\|_\infty \\
& \times\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\tau\left[h(\tau)\left|F'(\varphi(m))\right|+h(1-\tau)\left|F'(\varphi(n))\right|\right]}{\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}} d\tau\right. \\
& \left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-\tau)\left[h(\tau)\left|F'(\varphi(m))\right|+h(1-\tau)\left|F'(\varphi(n))\right|\right]}{\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}} d\tau\right\} \\
=\ & \left(\frac{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}{p}\right)^2 \|\omega\|_\infty\left\{\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\tau h(\tau)}{\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}} d\tau\right.\right. \qquad (3.46)\\
& \left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-\tau)h(\tau)}{\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}} d\tau\right]\left|F'(\varphi(m))\right| \\
& +\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\tau h(1-\tau)}{\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}} d\tau\right. \\
& \left.\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-\tau)h(1-\tau)}{\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}} d\tau\right]\left|F'(\varphi(n))\right|\right\} \\
=\ & \left(\frac{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}{p}\right)^2 \|\omega\|_\infty\left[\Omega_1(p,\varphi,h)\left|F'(\varphi(m))\right|+\Omega_2(p,\varphi,h)\left|F'(\varphi(n))\right|\right]
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 3.30. Teorem 3.29'da $h(\chi)=\chi$ ve $\varphi(\chi)=\chi$ olarak alınırsa (3.42) eşitsizliği [15]'te Kunt ve İşcan tarafından ispatlanan eşitsizliğe dönüşür.

Sonuç 3.31. Teorem 3.29'da $h(\chi)=\chi$, $\varphi(\chi)=\chi$, $p=1$ ve $\omega(\chi)=1$ olarak alınırsa (3.42) eşitsizliği [11]'de Kırmacı'nın ispatladığı eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 3.32. $F: I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, φ fonksiyonu monoton artan, $m,n\in I^\circ$, $m<n$ ve $F'\in L[m,n]$ olsun. Eğer $|F'|^q$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyon, $q\geq 1$, $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $\omega:[m,n]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

sürekli ise aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \omega(\chi) F(\chi)\chi^{p-1}d\chi - F\left(\left[\frac{\varphi^{p}(m)+\varphi^{p}(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi\right| \\
\leq\ & \left(\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}\right)^{2}\|\omega\|_{\infty} \\
&\times\left\{\Omega_3(p,\varphi,h)^{1-\frac{1}{q}}\left[\Omega_4(p,\varphi,h)\left|F'(\varphi(m))\right|^{q}+\Omega_5(p,\varphi,h)\left|F'(\varphi(n))\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\Omega_6(p,\varphi,h)^{1-\frac{1}{q}}\left[\Omega_7(p,\varphi,h)\left|F'(\varphi(m))\right|^{q}+\Omega_8(p,\varphi,h)\left|F'(\varphi(n))\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Burada $\|\omega\|_{\infty}=\sup_{\chi\in[m,n]}|\omega(\chi)|$,

$$\Omega_3(p,\varphi,h) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau, \tag{3.48}$$

$$\Omega_4(p,\varphi,h) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\tau h(\tau)}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau, \tag{3.49}$$

$$\Omega_5(p,\varphi,h) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\tau h(1-\tau)}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau, \tag{3.50}$$

$$\Omega_6(p,\varphi,h) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau, \tag{3.51}$$

$$\Omega_7(p,\varphi,h) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1-\tau)h(\tau)}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau, \tag{3.52}$$

ve

$$\Omega_8(p,\varphi,h) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1-\tau)h(1-\tau)}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau \tag{3.53}$$

olarak alınır.

İspat. Lemma 3.25'ten

$$\left|\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)F(\chi)\chi^{p-1}d\chi-F\left(\left[\frac{\varphi^{p}(m)+\varphi^{p}(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi\right|$$

$$\leq \left(\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}\right)^{2}\|\omega\|_{\infty}$$

$$\times\left\{\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}\left|F'\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|d\tau\right. \tag{3.54}$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1-\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}\left|F'\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|d\tau\right\}$$

bulunur. $|F'|^{q}$ fonksiyonunun $(p,\varphi_{h})-$konveksliği ve Power-mean eşitsizliği kulanılırsa,

$$\left|\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)F(\chi)\chi^{p-1}d\chi-F\left(\left[\frac{\varphi^{p}(m)+\varphi^{p}(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi\right|$$

$$\leq \left(\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}\right)^{2}\|\omega\|_{\infty}\left\{\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$

$$\times\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\tau\left[\left|F'\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|^{q}\right]}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1-\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left.\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{(1-\tau)\left[\left|F'\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|^{q}\right]}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{3.55}$$

$$\leq \left(\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}\right)^{2}\|\omega\|_{\infty}\left\{\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$

$$\times\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\tau\left[h(\tau)\left|F'(\varphi(m))\right|^{q}+h(1-\tau)\left|F'(\varphi(n))\right|^{q}\right]}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1-\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left.\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{(1-\tau)\left[h(\tau)|F'(\varphi(m))|^{q}+h(1-\tau)|F'(\varphi(n))|^{q}\right]}{\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

olup

$$\left|\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)F(\chi)\chi^{p-1}d\chi-F\left(\left[\frac{\varphi^{p}(m)+\varphi^{p}(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi\right|$$

$$\leq\left(\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}\right)^{2}\|\omega\|_{\infty}$$

$$\times\left\{(\Omega_{3}(p,\varphi,h))^{1-\frac{1}{q}}\left[\Omega_{4}(p,\varphi,h)\left|F'(\varphi(m))\right|^{q}+\Omega_{5}(p,\varphi,h)\left|F'(\varphi(n))\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right. \tag{3.56}$$

$$\left.+(\Omega_{6}(p,\varphi,h))^{1-\frac{1}{q}}\left[\Omega_{7}(p,\varphi,h)\left|F'(\varphi(m))\right|^{q}+\Omega_{8}(p,\varphi,h)\left|F'(\varphi(n))\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.33. Teorem 3.32'te $h(\chi)=\chi$ ve $\varphi(\chi)=\chi$ olarak alınırsa (3.47) eşitsizliği [15]'te Kunt ve İşcan tarafından ispatlanan eşitsizliğe dönüşür.

Teorem 3.34. $F:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, φ fonksiyonu monoton artan, $m,n\in I^{\circ}$, $m<n$ ve $F'\in L[m,n]$ olsun. Eğer $|F'|^{q}$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde $(p,\varphi_{h})-$konveks fonksiyon, $q>1$, $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $\omega:[m,n]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\left|\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)F(\chi)\chi^{p-1}d\chi-F\left(\left[\frac{\varphi^{p}(m)+\varphi^{p}(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi\right|$$

$$\leq\left(\frac{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}{p}\right)^{2}\|\omega\|_{\infty} \tag{3.57}$$

$$\times\left[\Omega_{9}(p,\varphi,h)\left(\left|F'(\varphi(m))\right|^{q}\int_{0}^{\frac{1}{2}}h(\tau)d\tau+\left|F'(\varphi(n))\right|^{q}\int_{0}^{\frac{1}{2}}h(1-\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\Omega_{10}(p,\varphi,h)\left(\left|F'(\varphi(m))\right|^q\int_{\frac{1}{2}}^{1}h(\tau)\,d\tau+\left|F'(\varphi(n))\right|^q\int_{\frac{1}{2}}^{1}h(1-\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg].$$

Burada $\|\omega\|_\infty=\sup_{\chi\in[m,n]}|\omega(\chi)|$,

$$\Omega_9(p,\varphi,h) = \left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau}{[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{1-\frac{1}{p}}}\right)^r d\tau\right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.58}$$

$$\Omega_{10}(p,\varphi,h) = \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1-\tau}{[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{1-\frac{1}{p}}}\right)^r d\tau\right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.59}$$

ve $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$ olarak alınır.

İspat. Lemma 3.25 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)F(\chi)\chi^{p-1}d\chi-F\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}\omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi\right| \\
\leq\ &\left(\frac{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}{p}\right)^2\|\omega\|_\infty \\
&\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau}{[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{1-\frac{1}{p}}}\right)^r d\tau\right)^{\frac{1}{r}}\right. \\
&\times\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|F'\left([\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)\right|^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1-\tau}{[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{1-\frac{1}{p}}}\right)^r d\tau\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\left.\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|F'\left([\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)\right|^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned} \tag{3.60}$$

bulunur. Ardından $|F'|^q$ fonksiyonunun $(p,\varphi_h)-$konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \omega(\chi) F(\chi)\chi^{p-1}d\chi - F\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \omega(\chi)\chi^{p-1}d\chi\right| \\
\leq\ & \left(\frac{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}{p}\right)^2 \|\omega\|_\infty \\
&\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau}{[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{1-\frac{1}{p}}}\right)^r d\tau\right)^{\frac{1}{r}}\right. \\
&\times\left(\int_0^{\frac{1}{2}} h(\tau)\left|F'(\varphi(m))\right|^q + h(1-\tau)\left|F'(\varphi(n))\right|^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1-\tau}{[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{1-\frac{1}{p}}}\right)^r d\tau\right)^{\frac{1}{r}} \qquad (3.61)\\
&\left.\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 h(\tau)\left|F'(\varphi(m))\right|^q + h(1-\tau)\left|F'(\varphi(n))\right|^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
=\ & \left(\frac{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}{p}\right)^2 \|\omega\|_\infty \\
&\times\left[\Omega_9(p,\varphi,h)\left(\left|F'(\varphi(m))\right|^q\int_0^{\frac{1}{2}} h(\tau)d\tau + \left|F'(\varphi(n))\right|^q\int_0^{\frac{1}{2}} h(1-\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\,\Omega_{10}(p,\varphi,h)\left(\left|F'(\varphi(m))\right|^q\int_{\frac{1}{2}}^1 h(\tau)d\tau + \left|F'(\varphi(n))\right|^q\int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 3.35. Teorem 3.34'da $h(\chi)=\chi$ ve $\varphi(\chi)=\chi$ olarak alınırsa (3.57) eşitsizliği [15]'te Kunt ve İşcan tarafından ispatlanan eşitsizliği verir.

Sonuç 3.36. Teorem 3.34'da $h(\chi)=\chi$, $\varphi(\chi)=\chi$, $p=1$ ve $\omega(\chi)=1$ olarak alınırsa (3.57) eşitsizliği [11]'de Kırmacı' nın elde ettiği eşitsizliğe dönüşür.

3.4. $(p,\varphi_h)-$KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKI TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde ilk olarak teoremlerde kullanılacak lemma ispatlanmış ardından $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Lemma 3.37. $F : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, φ fonksiyonu monoton artan olsun ve $m,n \in I^{\circ}$, $m<n$, $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olarak alınsın. Eğer $F' \in L[m,n]$ ise

$$
\begin{aligned}
& F(\varphi(\chi)) - \frac{p}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)} \int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} F(u)\,u^{p-1}du \\
&= \frac{1}{p(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))} \\
&\quad \times \left\{ (\varphi^p(\chi)-\varphi^p(m))^2 \int_0^1 \frac{\tau F'\left([\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(m)]^{\frac{1}{p}}\right)}{[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(m)]^{1-\frac{1}{p}}} d\tau \right. \\
&\quad \left. - (\varphi^p(n)-\varphi^p(\chi))^2 \int_0^1 \frac{\lambda F'\left([\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)}{[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{1-\frac{1}{p}}} d\tau \right\}
\end{aligned} \tag{3.62}
$$

eşitliği vardır.

İspat. Kısmi integrasyon uygulanarak

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{p(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))} \\
& \times \left\{ (\varphi^p(\chi)-\varphi^p(m))^2 \int_0^1 \frac{\tau F'\left([\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(m)]^{\frac{1}{p}}\right)}{[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(m)]^{1-\frac{1}{p}}} d\tau \right. \\
& \left. - (\varphi^p(n)-\varphi^p(\chi))^2 \int_0^1 \frac{\tau F'\left([\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right)}{[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{1-\frac{1}{p}}} d\tau \right\}
\end{aligned} \tag{3.63}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \frac{1}{(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))} \{ (\varphi^p(\chi)-\varphi^p(m)) F(\varphi(\chi)) + (\varphi^p(n)-\varphi^p(\chi)) F(\varphi(\chi)) \\
& - (\varphi^p(\chi)-\varphi^p(m)) \int_0^1 F\left([\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(m)]^{\frac{1}{p}}\right) d\tau
\end{aligned}
$$

$$-\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(\chi)\right)\int_{0}^{1}F\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau\Bigg\}$$

bulunur. Ardından $u=\left[\tau\varphi^{p}(\chi)-(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{\frac{1}{p}}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)\right)}\Big\{F\left(\varphi(\chi)\right)\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)\right)\\
&-\left(\varphi^{p}(\chi)-\varphi^{p}(m)\right)\int_{0}^{1}F\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)-(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau\\
&-\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(\chi)\right)\int_{0}^{1}F\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)-(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau\Bigg\} \qquad (3.64)\\
=\;&\frac{1}{\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)\right)}\\
&\times\left\{F\left(\varphi(\chi)\right)\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)\right)-\int_{\varphi(m)}^{\varphi(\chi)}F(u)\,pu^{p-1}du-\int_{\varphi(\chi)}^{\varphi(n)}F(u)\,pu^{p-1}du\right\}
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.38. Lemma 3.37'de $\varphi(\chi)=\chi$ ve $p=1$ olarak alınırsa (3.62) eşitliği [10]'da Cerone ve Dragomir tarafından ispatlanan (2.1) eşitliğine indirgenir.

Sonuç 3.39. Lemma 3.37'de $\varphi(\chi)=\chi$ olarak alınırsa (3.62) eşitliği [63]'te İşcan'ın elde ettiği Lemma 1'deki eşitliğe dönüşür.

Teorem 3.40. $F:I\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, φ fonksiyonu monoton artan, $m,n\in I^{\circ}$, $m<n$ ve $F'\in L[m,n]$ olsun. Eğer $|F'|$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde $(p,\varphi_{h})-$konveks fonksiyon ve $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ise aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\begin{aligned}
&\left|F\left(\varphi(\chi)\right)-\frac{p}{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}F(u)\,u^{p-1}du\right|\\
\leq\;&\frac{1}{p\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)\right)} \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

$$\times\left\{(\varphi^{p}(\chi)-\varphi^{p}(m))^{2}\left[\left|F'(\varphi(\chi))\right|\Psi_{1}(\chi,m;\varphi,h)+\left|F'(\varphi(m))\right|\Psi_{2}(\chi,m;\varphi,h)\right]\right.$$

$$\left.+(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(\chi))^{2}\left[\left|F'(\varphi(\chi))\right|\Psi_{1}(\chi,n;\varphi,h)+\left|F'(\varphi(n))\right|\Psi_{2}(\chi,n;\varphi,h)\right]\right\}.$$

Burada

$$\Psi_{1}(\chi,m;\varphi,h)=\int_{0}^{1}\frac{\tau h(\tau)}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau \tag{3.66}$$

$$\Psi_{2}(\chi,m;\varphi,h)=\int_{0}^{1}\frac{\tau h(1-\tau)}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau \tag{3.67}$$

$$\Psi_{1}(\chi,n;\varphi,h)=\int_{0}^{1}\frac{\tau h(\tau)}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau \tag{3.68}$$

ve

$$\Psi_{2}(\chi,n;\varphi,h)=\int_{0}^{1}\frac{\tau h(1-\tau)}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau \tag{3.69}$$

olarak alınır.

İspat. Lemma 3.37 kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|F(\varphi(\chi))-\frac{p}{(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m))}\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}F(u)u^{p-1}du\right| \\
=\ &\left|\frac{1}{p(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m))}\right. \\
&\left\{(\varphi^{p}(\chi)-\varphi^{p}(m))^{2}\int_{0}^{1}\frac{\tau F'\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right. \\
&\left.\left.-(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(\chi))^{2}\int_{0}^{1}\frac{\tau F'\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right\}\right| \qquad (3.70) \\
\leq\ &\frac{1}{p(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m))}
\end{aligned}$$

$$\times\left\{\left(\varphi^{p}(\chi)-\varphi^{p}(m)\right)^{2}\int_{0}^{1}\frac{\tau\left|F'\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right.$$

$$\left.+\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(\chi)\right)^{2}\int_{0}^{1}\frac{\tau\left|F'\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right\}$$

yazılır. $|F'|$ fonksiyonunun (p,φ_h) $-$konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|F(\varphi(\chi))-\frac{p}{\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)\right)}\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}F(\tau)\,\tau^{p-1}d\tau\right| \\
\leq\ & \frac{1}{p\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)\right)} \\
&\times\left\{\left(\varphi^{p}(\chi)-\varphi^{p}(m)\right)^{2}\int_{0}^{1}\frac{\tau\left[h(\tau)\left|F'(\varphi(\chi))\right|+h(1-\tau)\left|F'(\varphi(m))\right|\right]}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right. \\
&\left.+\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(\chi)\right)^{2}\int_{0}^{1}\frac{\tau\left[h(\tau)\left|F'(\varphi(\chi))\right|+h(1-\tau)\left|F'(\varphi(n))\right|\right]}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right\} \\
=\ & \frac{1}{p\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)\right)} \\
&\times\left\{\left(\varphi^{p}(\chi)-\varphi^{p}(m)\right)^{2}\left[\left|F'(\varphi(\chi))\right|\int_{0}^{1}\frac{\tau h(\tau)}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right.\right. \\
&\left.+\left|F'(\varphi(m))\right|\int_{0}^{1}\frac{\tau h(1-\tau)}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right] \\
&+\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(\chi)\right)^{2}\left[\left|F'(\varphi(\chi))\right|\int_{0}^{1}\frac{\tau h(\tau)}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right. \\
&\left.\left.+\left|F'(\varphi(n))\right|\int_{0}^{1}\frac{\tau h(1-\tau)}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right]\right\} \\
=\ & \frac{1}{p\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)\right)}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

$$\times\left\{(\varphi^p(\chi)-\varphi^p(m))^2\left[\left|F'(\varphi(\chi))\right|\Psi_1(\chi,m;\varphi,h)+\left|F'(\varphi(m))\right|\Psi_2(\chi,m;\varphi,h)\right]\right.$$

$$\left.+(\varphi^p(n)-\varphi^p(\chi))^2\left[\left|F'(\varphi(\chi))\right|\Psi_1(\chi,n;\varphi,h)+\left|F'(\varphi(n))\right|\Psi_2(\chi,n;\varphi,h)\right]\right\}$$

elde edilir. İspat tamamlanır. □

Sonuç 3.41. Teorem 3.40'ta $\varphi(\chi)=\chi$, $h(\chi)=\chi^s$ $(s\in(0,1])$, $|F'(\chi)|\le M$ $(\chi\in[m,n])$ ve $p=1$ olarak alınırsa (3.65) eşitsizliği [40]'ta Alomari ve ark. tarafından elde edilen (2.1) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.42. $F:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, φ fonksiyonu monoton artan olsun. $m,n\in I^\circ$, $m<n$ olmak üzere $F'\in L[m,n]$ olarak verilsin. $h:J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan, üst çarpımsal fonksiyon ve $h(\chi)\ge\chi$ olsun. Eğer $|F'|$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde $(p,\varphi_h)-$konveks, $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ve $|F'(\chi)|\le M$ ise aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\begin{aligned}
&\left|F(\varphi(\chi))-\frac{p}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}F(u)u^{p-1}du\right| \\
\le\ &\frac{M}{p(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))} \\
&\times\left\{(\varphi^p(\chi)-\varphi^p(m))^2\left[\Psi_3(\chi,m;\varphi,h)+\Psi_4(\chi,m;\varphi,h)\right]\right. \\
&\left.+(\varphi^p(n)-\varphi^p(\chi))^2\left[\Psi_3(\chi,n;\varphi,h)+\Psi_4(\chi,n;\varphi,h)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Burada

$$\Psi_3(\chi,m;\varphi,h)=\int_0^1\frac{h(\tau^2)}{[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(m)]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau \tag{3.73}$$

$$\Psi_4(\chi,m;\varphi,h)=\int_0^1\frac{h(\tau-\tau^2)}{[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(m)]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau \tag{3.74}$$

$$\Psi_3(\chi,n;\varphi,h)=\int_0^1\frac{h(\tau^2)}{[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau \tag{3.75}$$

ve

$$\Psi_4(\chi,n;\varphi,h)=\int_0^1 \frac{h\left(\tau-\tau^2\right)}{\left[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau \tag{3.76}$$

olarak alınır.

Sonuç 3.43. Yukarıdaki (3.72) eşitsizliğinde $\varphi(\chi)=\chi$ ve $p=1$ olarak alınırsa eşitsizlik, [53]'te Tunç tarafından bulunan (2.1) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 3.44. $F: I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, φ fonksiyonu monoton artan ve $m,n\in I^\circ$, $m<n$ olacak şekilde $F'\in L[m,n]$ olsun. Eğer $|F'|^q$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyon, $q\geq 1$ ve $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ise aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\begin{aligned}
&\left|F(\varphi(\chi))-\frac{p}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}F(u)u^{p-1}du\right|\\
\leq\;&\frac{1}{p(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))}\Big\{(\varphi^p(\chi)-\varphi^p(m))^2(\Psi_1(\chi,m;\varphi,1))^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left[\left|F'(\varphi(\chi))\right|^q\Psi_1(\chi,m;\varphi,h)+\left|F'(\varphi(m))\right|^q\Psi_2(\chi,m;\varphi,h)\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (3.77)\\
&+\left((\varphi^p(n)-\varphi^p(\chi))^2\right)(\Psi_1(\chi,n;\varphi,1))^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left[\left|F'(\varphi(\chi))\right|^q\Psi_1(\chi,n;\varphi,h)+\left|F'(\varphi(n))\right|^q\Psi_2(\chi,n;\varphi,h)\right]^{\frac{1}{q}}\Big\}.
\end{aligned}$$

İspat. Lemma 3.37 yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\left|F(\varphi(\chi))-\frac{p}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}F(u)u^{p-1}du\right|\\
\leq\;&\frac{1}{p(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))} \qquad (3.78)\\
&\times\left\{(\varphi^p(\chi)-\varphi^p(m))^2\int_0^1\frac{\tau\left|F'\left(\left[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(m)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|}{\left[\tau\varphi^p(\chi)-(1-\tau)\varphi^p(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right.
\end{aligned}$$

$$+\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(\chi)\right)^{2}\int_{0}^{1}\frac{\tau\left|F'\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)-(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\Bigg\}$$

yazılır. (3.78)'de Power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|F(\varphi(\chi))-\frac{p}{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}F(u)\,u^{p-1}du\right| \\
\leq\ & \frac{1}{p\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)\right)} \\
& \times\left\{\left(\varphi^{p}(\chi)-\varphi^{p}(m)\right)^{2}\left(\int_{0}^{1}\frac{\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{1-\frac{1}{q}}\right. \\
& \times\left(\int_{0}^{1}\frac{\tau\left|F'\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|^{q}}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right) \\
& +\left(\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(\chi)\right)^{2}\right)\left(\int_{0}^{1}\frac{\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \left.\times\left(\int_{0}^{1}\frac{\tau\left|F'\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned} \tag{3.79}$$

bulunur. (3.79) eşitsizliğinde $|F'|^{q}$ fonksiyonunun $(p,\varphi_{h})-$konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|F(\varphi(\chi))-\frac{p}{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}F(u)\,u^{p-1}du\right| \\
\leq\ & \frac{1}{p\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)\right)} \\
& \times\left\{\left(\varphi^{p}(\chi)-\varphi^{p}(m)\right)^{2}\left(\int_{0}^{1}\frac{\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.
\end{aligned}$$

$$\times\left(\int_0^1 \frac{\tau h(\tau)\left|F'(\varphi(\chi))\right|^q+\tau h(1-\tau)\left|F'(\varphi(m))\right|^q}{\left[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left((\varphi^p(n)-\varphi^p(\chi))^2\right)\left(\int_0^1 \frac{\tau}{\left[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left.\times\left(\int_0^1 \frac{\tau h(\tau)\left|F'(\varphi(\chi))\right|^q+\tau h(1-\tau)\left|F'(\varphi(n))\right|^q}{\left[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$= \frac{1}{p\left(\varphi^p(n)-\varphi^p(m)\right)} \tag{3.80}$$

$$\times\left\{(\varphi^p(\chi)-\varphi^p(m))^2\left(\int_0^1 \frac{\tau}{\left[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$

$$\times\left(\left|F'(\varphi(\chi))\right|^q\int_0^1 \frac{\tau h(\tau)}{\left[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right.$$

$$\left.+\left|F'(\varphi(m))\right|^q\int_0^1 \frac{\tau h(1-\tau)}{\left[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left((\varphi^p(n)-\varphi^p(\chi))^2\right)\left(\int_0^1 \frac{\tau}{\left[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\left|F'(\varphi(\chi))\right|^q\int_0^1 \frac{\tau h(\tau)}{\left[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right.$$

$$\left.\left.+\left|F'(\varphi(n))\right|^q\int_0^1 \frac{\tau h(1-\tau)}{\left[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.45. Teorem 3.44'da $\varphi(\chi)=\chi$, $h(\chi)=\chi^s$ $(s\in(0,1])$, $|F'(\chi)|\le M$ $(\chi\in[m,n])$ ve $p=1$ alınırsa (3.77) eşitsizliği [40]'ta Alomari ve ark. elde ettiği (2.3) eşitsizliğini verir.

Sonuç 3.46. Teorem 3.44'da $\varphi(\chi)=\chi$ ve $h(\chi)=\chi$ alınırsa (3.77) eşitsizliği [63]'te İşcan'ın ispatladığı (6) eşitsizliğini verir.

Sonuç 3.47. $\mathcal{F}: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, φ fonksiyonu monoton artan ve $m,n \in I^{\circ}$, $m < n$ olacak şekilde $\mathcal{F}' \in L[m,n]$ olsun. $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun negatif olmayan, üst çarpımsal fonksiyon ve $h(\chi) \geq \chi$ olduğu varsayılsın. Eğer $|\mathcal{F}'|^q$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde $(p,\varphi_h)-$konveks, $q \geq 1,\ p \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ve $|\mathcal{F}'(\chi)| \leq M$ ise aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\left| \mathcal{F}(\varphi(\chi)) - \frac{p}{\varphi^p(n) - \varphi^p(m)} \int\limits_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \mathcal{F}(u) u^{p-1} du \right|$$

$$\begin{aligned} \leq \quad & \frac{M}{p(\varphi^p(n) - \varphi^p(m))} \Big\{ (\varphi^p(\chi) - \varphi^p(m))^2 (\Psi_1(\chi,m;\varphi,1))^{1-\frac{1}{q}} \\ & \times [\Psi_3(\chi,m;\varphi,h) + \Psi_4(\chi,m;\varphi,h)]^{\frac{1}{q}} \\ & + \left((\varphi^p(n) - \varphi^p(\chi))^2 \right) (\Psi_1(\chi,n;\varphi,1))^{1-\frac{1}{q}} \\ & \times [\Psi_3(\chi,n;\varphi,h) + \Psi_4(\chi,n;\varphi,h)]^{\frac{1}{q}} \Big\} \end{aligned} \tag{3.81}$$

Sonuç 3.48. Sonuç (3.47)'da $\varphi(\chi) = \chi$ ve $p = 1$ alınırsa (3.81) eşitsizliği [53]'te Tunç tarafından ispatlanan (2.4) eşitsizliğini verir.

Teorem 3.49. $\mathcal{F}: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, φ fonksiyonu monoton artan, $m,n \in I^{\circ}$, $m < n$ ve $\mathcal{F}' \in L[m,n]$ olsun. Eğer $|\mathcal{F}'|^q$ fonksiyonu $[m,n]$ aralığı üzerinde $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyon, $q > 1$ ve $p \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ise aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\left| \mathcal{F}(\varphi(\chi)) - \frac{p}{\varphi^p(n) - \varphi^p(m)} \int\limits_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} \mathcal{F}(u) u^{p-1} du \right|$$

$$\begin{aligned} \leq \quad & \frac{1}{p(\varphi^p(n) - \varphi^p(m))} \Big\{ (\varphi^p(\chi) - \varphi^p(m))^2 (\Psi_5(\chi,m;\varphi,1))^{\frac{1}{r}} \\ & \times \left(\left[|\mathcal{F}'(\varphi(\chi))|^q + |\mathcal{F}'(\varphi(m))|^q \right] \int\limits_0^1 h(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{3.82}$$

$$+\left(\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(\chi)\right)^{2}\right)\left(\Psi_{5}(\chi,n;\varphi,1)\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\left.\times\left(\left[\left|F'(\varphi(\chi))\right|^{q}+\left|F'(\varphi(n))\right|^{q}\right]\int_{0}^{1}h(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Burada $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$ ve

$$\Psi_{5}(\chi,m;\varphi,1)=\int_{0}^{1}\left(\frac{\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}\right)^{r}d\tau \tag{3.83}$$

$$\Psi_{5}(\chi,n;\varphi,1)=\int_{0}^{1}\left(\frac{\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}\right)^{r}d\tau \tag{3.84}$$

olarak alınır.

İspat. İlk olarak Lemma (3.37) ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
&\left|F(\varphi(\chi))-\frac{p}{\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)}\int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)}F(u)\,u^{p-1}du\right| \\
\leq\ & \frac{1}{p\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)\right)} \\
&\times\left\{\left(\varphi^{p}(\chi)-\varphi^{p}(m)\right)^{2}\left(\int_{0}^{1}\left(\frac{\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{1-\frac{1}{p}}}\right)^{r}d\tau\right)^{\frac{1}{r}}\right. \\
&\times\left(\int_{0}^{1}\left|F'\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(m)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|^{q}d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(\chi)\right)^{2}\left(\int_{0}^{1}\left(\frac{\tau}{\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{1-\frac{1}{p}}}\right)^{r}d\tau\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\left.\times\left(\int_{0}^{1}\left|F'\left(\left[\tau\varphi^{p}(\chi)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|^{q}d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned} \tag{3.85}$$

elde edilir. Ardından $|F'|^q$ fonksiyonunun $(p,\varphi_h)-$konveksliği kullanılır ve değişken değiştirme yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left| F(\varphi(\chi)) - \frac{p}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)} \int_{\varphi(m)}^{\varphi(n)} F(u)\,u^{p-1}du \right| \\
\leq\ & \frac{1}{p(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))} \\
&\times \Bigg\{ (\varphi^p(\chi)-\varphi^p(m))^2 \left(\int_0^1 \left(\frac{\tau}{[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(m)]^{1-\frac{1}{p}}} \right)^r d\tau \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\times \left(\left[|F'(\varphi(\chi))|^q + |F'(\varphi(m))|^q \right] \int_0^1 h(\tau)\,d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ (\varphi^p(n)-\varphi^p(\chi))^2 \left(\int_0^1 \left(\frac{\tau}{[\tau\varphi^p(\chi)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{1-\frac{1}{p}}} \right)^r d\tau \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\times \left(\left[|F'(\varphi(\chi))|^q + |F'(\varphi(n))|^q \right] \int_0^1 h(\tau)\,d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{3.86}
$$

bulunur. İspat tamamlanır. □

Sonuç 3.50. Teorem 3.49'da $\varphi(\chi)=\chi$, $h(\chi)=\chi^s$ $(s\in(0,1])$, $|F'(\chi)|\leq M$ $(\chi\in[m,n])$ ve $p=1$ alınırsa (3.82) eşitsizliği [40]'ta Alomari ve ark. tarafından elde edilen (2.2) eşitsizliğini verir.

Sonuç 3.51. Teorem 3.49'da $\varphi(\chi)=\chi$ ve $h(\chi)=\chi$ alınırsa (3.82) eşitsizliği [63]'te İşcan'ın ispatladığı Teorem 6'daki eşitsizliği verir.

3.5. $(p,\varphi_h)-$KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN JENSEN VE JENSEN-MERCER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde $(p,\varphi_h)-$konvekslik yardımıyla ilk olarak Jensen tipli eşitsizlik elde edilmiştir. Ardından aynı konvekslik için Jensen-Mercer tipli eşitsizlikler ispatlanmıştır.

Teorem 3.52. $w_1, w_2, ..., w_k$ $(k \geq 2)$ pozitif reel sayılar olsun. Eğer h negatif olmayan üst çarpımsal fonksiyon ve $\digamma \in fsx(p, \varphi_h, I)$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\digamma\left(\left[\frac{1}{W_k}\sum_{i=1}^{k} w_i \varphi^p(\chi_i)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq \sum_{i=1}^{k} h\left(\frac{w_i}{W_k}\right) \digamma(\varphi(\chi_i)). \tag{3.87}$$

Burada $W_k = \sum\limits_{i=1}^{k} w_i$ dir. Eğer h alt çarpımsal fonksiyonsa ve $\digamma \in fsv(p, \varphi_h, I)$ ise (3.87) eşitsizliği yön değiştirir.

İspat. $\digamma \in fsx(p, \varphi_h, I)$ olduğunu varsayalım. $k = 2$ için $\tau = \frac{w_1}{W_2}$ olarak alınırsa (3.87) eşitsizliği (3.1)'deki (p, φ_h)-konvekslik tanımından sağlanır. (3.87) eşitsizliğinin $(k-1)$ için doğru olduğunu varsayalım. $(\chi_1, \chi_2, ..., \chi_k)$ ve $(w_1, w_2, ..., w_k)$ sıralı $k-$lileri için

$$\begin{aligned}
\digamma\left(\left[\frac{1}{W_k}\sum_{i=1}^{k} w_i \varphi^p(\chi_i)\right]^{\frac{1}{p}}\right) &= \digamma\left(\left[\frac{w_k}{W_k}\varphi^p(\chi_k) + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{w_i}{W_k}\varphi^p(\chi_i)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
&= \digamma\left(\left[\frac{w_k}{W_k}\varphi^p(\chi_k) + \frac{W_{k-1}}{W_k}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{w_i}{W_{k-1}}\varphi^p(\chi_i)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\leq h\left(\frac{w_k}{W_k}\right)\digamma(\varphi(\chi_k)) \\
&\quad + h\left(\frac{W_{k-1}}{W_k}\right)\digamma\left(\left[\sum_{i=1}^{k-1}\frac{w_i}{W_{k-1}}\varphi^p(\chi_i)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\leq h\left(\frac{w_k}{W_k}\right)\digamma(\varphi(\chi_k)) \\
&\quad + h\left(\frac{W_{k-1}}{W_k}\right)\sum_{i=1}^{k-1} h\left(\frac{w_i}{W_{k-1}}\right)\digamma(\varphi(\chi_i)) \\
&= h\left(\frac{w_k}{W_k}\right)\digamma(\varphi(\chi_k)) \\
&\quad + h\left(\frac{W_{k-1}}{W_k}\right) h\left(\frac{w_{k-1}}{W_{k-1}}\right)\digamma(\varphi(\chi_{k-1})) \\
&\quad + h\left(\frac{W_{k-1}}{W_k}\right) h\left(\frac{w_{k-2}}{W_{k-1}}\right)\digamma(\varphi(\chi_{k-2}))
\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$+\ldots+h\left(\frac{W_{k-1}}{W_k}\right)h\left(\frac{w_1}{W_{k-1}}\right)F\left(\varphi\left(\chi_1\right)\right)$$

olur. h fonksiyonunun üst çarpımsallığı kullanılarak

$$\begin{aligned}
& F\left(\left[\frac{1}{W_k}\sum_{i=1}^{k}w_i\varphi^p\left(\chi_i\right)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
\leq\ & h\left(\frac{w_k}{W_k}\right)F\left(\varphi\left(\chi_k\right)\right)+h\left(\frac{w_{k-1}}{W_k}\right)F\left(\varphi\left(\chi_{k-1}\right)\right) \\
& +h\left(\frac{w_{k-2}}{W_k}\right)F\left(\varphi\left(\chi_{k-2}\right)\right)+\ldots+h\left(\frac{w_1}{W_k}\right)F\left(\varphi\left(\chi_1\right)\right) \\
=\ & \sum_{i=1}^{k}h\left(\frac{w_i}{W_k}\right)F\left(\varphi\left(\chi_i\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.89}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.53. Teorem 3.52'te $W_k=1$ alınırsa (3.87) eşitsizliği

$$F\left(\left[\sum_{i=1}^{k}w_i\varphi^p\left(\chi_i\right)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\leq\sum_{i=1}^{k}h\left(w_i\right)F\left(\varphi\left(\chi_i\right)\right) \tag{3.90}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.54. Teorem 3.52'de $\varphi\left(\chi\right)=\chi$ olarak alınırsa (3.87) eşitsizliği [69]'daki (4.1) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.55. Sonuç 3.53'de $p=1,\varphi\left(\chi\right)=\chi$ ve $h\left(\chi\right)=\chi^s$ $\left(s\in(0,1]\right)$ olarak alınırsa (3.87) eşitsizliği (1.44) eşitsizliğine dönüşür.

Lemma 3.56. $0<\chi_1\leq\chi_2\leq\ldots\leq\chi_k$ ve $h:J\to(0,\infty)$ fonksiyonu J üzerinde negatif olmayan fonksiyon olsun. $\alpha+\beta=1$ ve $h(\alpha)+h(\beta)\leq1$ olacak şekilde α, $\beta\in[0,1]$ verilsin. $\varphi:[m,n]\to[m,n]$ fonksiyonu monoton olsun. I aralığı üzerinde tanımlı her $\left(p,\varphi_h\right)-$konveks F fonksiyonu için

$$F\left(\left[\varphi^p\left(\chi_1\right)+\varphi^p\left(\chi_k\right)-\varphi^p\left(\chi_i\right)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \tag{3.91}$$

$$\leq \quad F(\varphi(\chi_1)) + F(\varphi(\chi_k)) - F(\varphi(\chi_i))$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer F fonksiyonu (p, φ_h) −konkav ve $\alpha + \beta = 1$ olacak şekilde her $\alpha, \beta \in [0,1]$ için $h(\alpha) + h(\beta) \geq 1$ ise (3.91) eşitsizliği yön değiştirir.

İspat. $0 < \chi_1 \leq \chi_2 \leq ... \leq \chi_k$ olsun ve $\alpha + \beta = 1$ ve $h(\alpha) + h(\beta) \leq 1$ olacak şekilde α, $\beta \in [0,1]$ verilsin. $\varphi(\mathcal{Y}_i) = [\varphi^p(\chi_1) + \varphi^p(\chi_k) - \varphi^p(\chi_i)]^{\frac{1}{p}}$ olarak yazılsın. Bu durumda $\varphi(\mathcal{Y}_i)^p + \varphi^p(\chi_i) = \varphi^p(\chi_1) + \varphi^p(\chi_k)$ elde edilir. Bu eşitlikten $\varphi(\mathcal{Y}_i)^p$, $\varphi^p(\chi_i)$ ile $\varphi^p(\chi_1)$, $\varphi^p(\chi_k)$ çiftlerinin aynı orta noktaya sahip olduğu görülür. O halde $1 \leq i \leq k$ için $\varphi^p(\chi_i) = \alpha\varphi^p(\chi_1) + \beta\varphi^p(\chi_k)$ ve $\varphi^p(\mathcal{Y}_i) = \beta\varphi^p(\chi_1) + \alpha\varphi^p(\chi_k)$ sağlayan bir α, $\beta \in [0,1]$ vardır. F fonksiyonunun (p, φ_h) −konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
F(\varphi(\mathcal{Y}_i)) &= F\left([\beta\varphi^p(\chi_1) + \alpha\varphi^p(\chi_k)]^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\leq h(\beta) F(\varphi(\chi_1)) + h(\alpha) F(\varphi(\chi_k)) \\
&\leq (1 - h(\alpha)) F(\varphi(\chi_1)) + (1 - h(\beta)) F(\varphi(\chi_k)) \\
&= F(\varphi(\chi_1)) + F(\varphi(\chi_k)) - [h(\alpha) F(\varphi(\chi_1)) + h(\beta) F(\varphi(\chi_k))] \\
&\leq F(\varphi(\chi_1)) + F(\varphi(\chi_k)) - \left[F\left([\alpha\varphi^p(\chi_1) + \beta\varphi^p(\chi_k)]^{\frac{1}{p}}\right)\right] \\
&= F(\varphi(\chi_1)) + F(\varphi(\chi_k)) - F(\varphi(\chi_i))
\end{aligned} \tag{3.92}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.57. Lemma 3.56'da $p = 1$ ve $\varphi(\chi) = \chi$ olarak alınırsa (3.91) eşitsizliği [79]'da Alomari'nin ispatladığı (2.1) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.58. $h : J \to (0, \infty)$ fonksiyonu J üzerinde negatif olmayan, üst çarpımsal ve $\varphi : [m,n] \to [m,n]$ fonksiyonu monoton artan olsun. $0 < \chi_1 \leq \chi_2 \leq ... \leq \chi_k$, $w_1, w_2, ..., w_k$ $(k \geq 2)$ pozitif reel sayılar, $W_k = \sum_{i=1}^{k} w_i$ ve $\sum_{i=1}^{k} h\left(\frac{w_i}{W_k}\right) \leq 1$ olsun. Eğer F fonksiyonu

$(p,\varphi_h)-$konveks, $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ise her sonlu artan $(\chi_i)_{i=1}^{k}\in[m,n]$ dizisi için

$$\begin{aligned} & F\left(\left[\varphi^p(\chi_1)+\varphi^p(\chi_k)-\frac{1}{W_k}\sum_{i=1}^{k}w_i\varphi^p(\chi_i)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\ \leq\ & F(\varphi(\chi_1))+F(\varphi(\chi_k))-\sum_{i=1}^{k}h\left(\frac{w_i}{W_k}\right)F(\varphi(\chi_i)) \end{aligned} \tag{3.93}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer F fonksiyonu $(p,\varphi_h)-$konkav, h fonksiyonu alt çarpımsal ve $\sum\limits_{i=1}^{k}h\left(\frac{w_i}{W_k}\right)\geq 1$ ise (3.93) eşitsizliği yön değiştirir.

İspat. $\frac{1}{W_k}\sum\limits_{i=1}^{k}w_i=1$ olduğundan

$$\begin{aligned} & F\left(\left[\varphi^p(\chi_1)+\varphi^p(\chi_k)-\frac{1}{W_k}\sum_{i=1}^{k}w_i\varphi^p(\chi_i)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\ =\ & F\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{w_i}{W_k}\left(\varphi^p(\chi_1)+\varphi^p(\chi_k)-\varphi^p(\chi_i)\right)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \end{aligned} \tag{3.94}$$

yazılır. (3.94) eşitliğinin ikinci kısmında, ilk olarak Teorem 3.52'de verilen $(p,\varphi_h)-$konveks foksiyonlar için Jensen eşitsizliği ardından Lemma 3.56 uygulanırsa

$$\begin{aligned} & F\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{w_i}{W_k}\left(\varphi^p(\chi_1)+\varphi^p(\chi_k)-\varphi^p(\chi_i)\right)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\ \leq\ & \sum_{i=1}^{k}h\left(\frac{w_i}{W_k}\right)F\left(\left[\varphi^p(\chi_1)+\varphi^p(\chi_k)-\varphi^p(\chi_i)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\ \leq\ & \sum_{i=1}^{k}h\left(\frac{w_i}{W_k}\right)\left[F(\varphi(\chi_1))+F(\varphi(\chi_k))-F(\varphi(\chi_i))\right] \\ =\ & F(\varphi(\chi_1))+F(\varphi(\chi_k))\sum_{i=1}^{k}h\left(\frac{w_i}{W_k}\right)-\sum_{i=1}^{k}h\left(\frac{w_i}{W_k}\right)F(\varphi(\chi_i)) \\ \leq\ & F(\varphi(\chi_1))+F(\varphi(\chi_k))-\sum_{i=1}^{k}h\left(\frac{w_i}{W_k}\right)F(\varphi(\chi_i)) \end{aligned} \tag{3.95}$$

elde edilir. İspat tamamlanır. □

Sonuç 3.59. Teorem 3.58'de $W_k = 1$ alınırsa (3.93) eşitsizliği

$$\begin{aligned} &F\left(\left[\varphi^p(\chi_1)+\varphi^p(\chi_k)-\sum_{i=1}^{k} w_i\varphi^p(\chi_i)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\ &\leq F(\varphi(\chi_1))+F(\varphi(\chi_k))-\sum_{i=1}^{k} h(w_i)F(\varphi(\chi_i)) \end{aligned} \tag{3.96}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.60. Teorem 3.58'de $p = 1$ ve $\varphi(\chi) = \chi$ olarak alınırsa (3.93) eşitsizliği Alomari'nin ispatladığı

$$\begin{aligned} &F\left(\chi_1+\chi_k-\frac{1}{W_k}\sum_{i=1}^{k} w_i\chi_i\right) \\ &\leq F(\chi_1)+F(\chi_k)-\sum_{i=1}^{k} h\left(\frac{w_i}{W_k}\right)F(\chi_i) \end{aligned} \tag{3.97}$$

$h-$konveks fonksiyonlar için Jensen-Mercer eşitsizliğine indirgenir [79].

Sonuç 3.61. Sonuç 3.96'da $p = 1$, $\varphi(\chi) = \chi$ ve $h(\alpha) = \alpha$ olarak alınırsa (3.96) eşitsizliği Mercer'in ispatladığı (1.25) eşitsizliğine dönüşür.

3.6. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLER YARDIMIYLA $(p,\varphi_h)-$KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde Riemann-Liouville kesirli integraller kullanılarak, $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 3.62. $h : (0,1) \to (0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. φ fonksiyonu monoton artan, $F : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $m,n \in I$ ve $m < n$ olacak şekilde (p,φ_h)-konveks fonksiyon olsun. Eğer $F \in L[m,n]$ ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

1. $p>0$ ise $\chi \in [m^p, n^p]$ olmak üzere $\varpi(\chi) = \chi^{\frac{1}{p}}$ için

$$\begin{aligned}
& F\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
\leq\ & h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))^{\alpha}} \\
& \times\left[J^{\alpha}_{\varphi^p(m)^+}(F\circ\varpi(\chi))(\varphi^p(n))+J^{\alpha}_{\varphi^p(n)^-}(F\circ\varpi(\chi))(\varphi^p(m))\right] \\
\leq\ & h\left(\frac{1}{2}\right)\alpha\left(F(\varphi(m))+F(\varphi(n))\right)\int_0^1\tau^{\alpha-1}(h(\tau)+h(1-\tau))\,d\tau
\end{aligned} \tag{3.98}$$

eşitsizliği vardır.

2. $p<0$ ise $\chi \in [n^p, m^p]$ olmak üzere $\varpi(\chi) = \chi^{\frac{1}{p}}$ için

$$\begin{aligned}
& F\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
\leq\ & h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\varphi^p(m)-\varphi^p(n))^{\alpha}} \\
& \times\left[J^{\alpha}_{\varphi^p(n)^+}(F\circ\varpi(\chi))(\varphi^p(m))+J^{\alpha}_{\varphi^p(m)^-}(F\circ\varpi(\chi))(\varphi^p(n))\right] \\
\leq\ & h\left(\frac{1}{2}\right)\alpha\left(F(\varphi(m))+F(\varphi(n))\right)\int_0^1\tau^{\alpha-1}(h(\tau)+h(1-\tau))\,d\tau
\end{aligned} \tag{3.99}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. φ fonksiyonu monoton artan bir fonksiyon olsun. $p>0$ olduğunu kabul edelim. F fonksiyonunun (p,φ_h) $-$konveksliği kullanılarak

$$F\left(\left[\frac{\varphi^p(\chi)+\varphi^p(\mathcal{Y})}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[F(\varphi(\chi))+F(\varphi(\mathcal{Y}))\right] \tag{3.100}$$

yazılır. (3.100) eşitsizliğinde $\varphi(\chi) = [\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}$ ve $\varphi(\mathcal{Y}) = [(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}$ değişken değiştirmesi yapılır, eşitsizliğin her iki tarafı $\tau^{\alpha-1}$

ile çarpılır ve ardından $[0,1]$ aralığı üzerinde τ ya göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \tau^{\alpha-1} F\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) d\tau \\
\leq\;& h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\int_0^1 \tau^{\alpha-1} F\left(\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right) d\tau \right. \qquad (3.101)\\
&\left. + \int_0^1 \tau^{\alpha-1} F\left(\left[(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right) d\tau\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikte gerekli matematiksel işlemler yapılırsa, $\chi \in [m^p, n^p]$ olmak üzere $\varpi(\chi) = \chi^{\frac{1}{p}}$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha} F\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
\leq\;& h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\int_{\varphi^p(m)}^{\varphi^p(n)} \left[\frac{\varphi^p(n)-\chi}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}\right]^{\alpha-1} F\left(\chi^{\frac{1}{p}}\right) \frac{1}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)} d\chi \right.\\
&\left. + \int_{\varphi^p(m)}^{\varphi^p(n)} \left[\frac{\chi-\varphi^p(m)}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)}\right]^{\alpha-1} F\left(\chi^{\frac{1}{p}}\right) \frac{1}{\varphi^p(n)-\varphi^p(m)} d\chi\right] \qquad (3.102)\\
=\;& h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))^{\alpha}}\left[\int_{\varphi^p(m)}^{\varphi^p(n)} (\varphi^p(n)-\chi)^{\alpha-1} (F\circ\varpi(\chi))(\chi)\, d\chi \right.\\
&\left. + \int_{\varphi^p(m)}^{\varphi^p(n)} (\chi-\varphi^p(m))^{\alpha-1} (F\circ\varpi(\chi))(\chi)\, d\chi\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&F\left(\left[\frac{\varphi^p(m)+\varphi^p(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
\leq\;& h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))^{\alpha}} \qquad (3.103)\\
&\times\left[J^{\alpha}_{\varphi^p(m)^+}(F\circ\varpi(\chi))(\varphi^p(n)) + J^{\alpha}_{\varphi^p(n)^-}(F\circ\varpi(\chi))(\varphi^p(m))\right]
\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Böylece birinci eşitsizlik ispatlanır. Eşitsizliğin ikinci kısmının ispatı için $\digamma$ nin $(p,\varphi_h)-$konveksliğinden

$$\begin{aligned} &\digamma\left(\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)+\digamma\left(\left[(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\ \leq\ & (h(\tau)+h(1-\tau))(\digamma(\varphi(m))+\digamma(\varphi(n))) \end{aligned} \tag{3.104}$$

yazılır. (3.104) eşitsizliğinin her iki tarafı $\tau^{\alpha-1}$ ile çarpılır ve ardından $[0,1]$ aralığı üzerinde τ ya göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\digamma\left(\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau \\ &+\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\digamma\left(\left[(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau \\ \leq\ & (\digamma(\varphi(m))+\digamma(\varphi(n)))\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(h(\tau)+h(1-\tau))\,d\tau \end{aligned} \tag{3.105}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte gerekli matematiksel işlemler yapılırsa, $\chi\in[m^p,n^p]$ olmak üzere $\varpi(\chi)=\chi^{\frac{1}{p}}$ için

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))^{\alpha}} \\ &\times\left[\int_{\varphi^p(m)}^{\varphi^p(n)}(\varphi^p(n)-\chi)^{\alpha-1}(\digamma\circ\varpi)(\chi)\,d\chi\right. \\ &\left.+\int_{\varphi^p(m)}^{\varphi^p(n)}(\chi-\varphi^p(m))^{\alpha-1}(\digamma\circ\varpi)(\chi)\,d\chi\right] \\ \leq\ & (\digamma(\varphi(m))+\digamma(\varphi(n)))\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(h(\tau)+h(1-\tau))\,d\tau \end{aligned} \tag{3.106}$$

elde edilir. (3.106) eşitsizliğinin her iki tarafı $h\left(\frac{1}{2}\right)\alpha$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m)\right)^{\alpha}} \\ & \times\left[J^{\alpha}_{\varphi^{p}(m)^{+}}(\digamma\circ\varpi)(\varphi^{p}(n))+J^{\alpha}_{\varphi^{p}(n)^{-}}(\digamma\circ\varpi)(\varphi^{p}(m))\right] \\ \leq\ & h\left(\frac{1}{2}\right)\alpha\left(\digamma(\varphi(m))+\digamma(\varphi(n))\right)\int_{0}^{1}\tau^{\alpha-1}\left(h(\tau)+h(1-\tau)\right)d\tau \end{aligned} \tag{3.107}$$

olduğu görülür. Böylece (3.98) eşitsizliğinin ikinci kısmı da ispatlanmış olur.

(3.98) eşitsizliğinin ispatında, φ fonksiyonu monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $p<0$ için benzer ispat basamakları uygulanırsa $\chi\in[n^{p},m^{p}]$ olmak üzere $\varpi(\chi)=\chi^{\frac{1}{p}}$ için

$$\begin{aligned} & \digamma\left(\left[\frac{\varphi^{p}(m)+\varphi^{p}(n)}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\ \leq\ & h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\varphi^{p}(m)-\varphi^{p}(n)\right)^{\alpha}} \\ & \times\left[J^{\alpha}_{\varphi^{p}(n)^{+}}(\digamma\circ\varpi)(\varphi^{p}(m))+J^{\alpha}_{\varphi^{p}(m)^{-}}(\digamma\circ\varpi)(\varphi^{p}(n))\right] \\ \leq\ & h\left(\frac{1}{2}\right)\alpha\left(\digamma(\varphi(m))+\digamma(\varphi(n))\right)\int_{0}^{1}\tau^{\alpha-1}\left(h(\tau)+h(1-\tau)\right)d\tau \end{aligned} \tag{3.108}$$

olduğu görülür. $\square$

Benzer şekilde yukarıdaki teoremde φ fonksiyonu monoton azalan alınırsa $p>0$ için (3.99) eşitsizliği ve $p<0$ için de (3.98) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.63. $h:(0,1)\to(0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. φ fonksiyonu monoton artan, $\digamma,\mathcal{G}:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan ve $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $m,n\in I$ ve $m<n$ olacak şekilde (p,φ_{h})-konveks fonksiyonlar olsun. Eğer $\digamma,\mathcal{G}\in L[m,n]$ ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

1. $p>0$ ise $\chi \in [m^p, n^p]$ olmak üzere$\varpi(\chi)=\chi^{\frac{1}{p}}$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha)}{(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))^{\alpha}} \\
& \times\left[J^{\alpha}_{\varphi^p(m)^+}(\mathcal{F}\circ\varpi)(\varphi^p(n))(\mathcal{G}\circ\varpi)(\varphi^p(n))\right. \\
& \left.+J^{\alpha}_{\varphi^p(n)^-}(\mathcal{F}\circ\varpi)(\varphi^p(m))(\mathcal{G}\circ\varpi)(\varphi^p(m))\right] \qquad (3.109) \\
\leq\; & [\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(m))+\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(n))]\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\left[h^2(\tau)+h^2(1-\tau)\right]d\tau \\
& +2[\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(n))+\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(m))]\int_0^1 \tau^{\alpha-1}h(\tau)h(1-\tau)d\tau
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

2. $p<0$ ise $\chi \in [n^p, m^p]$ olmak üzere $\varpi(\chi)=\chi^{\frac{1}{p}}$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha)}{(\varphi^p(m)-\varphi^p(n))^{\alpha}} \\
& \times\left[J^{\alpha}_{\varphi^p(n)^+}(\mathcal{F}\circ\varpi)(\varphi^p(m))(\mathcal{G}\circ\varpi)(\varphi^p(m))\right. \\
& \left.+J^{\alpha}_{\varphi^p(m)^-}(\mathcal{F}\circ\varpi)(\varphi^p(n))(\mathcal{G}\circ\varpi)(\varphi^p(n))\right] \qquad (3.110) \\
\leq\; & [\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(m))+\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(n))]\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\left[h^2(\tau)+h^2(1-\tau)\right]d\tau \\
& +2[\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(n))+\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(m))]\int_0^1 \tau^{\alpha-1}h(\tau)h(1-\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

İspat. φ fonksiyonu monoton artan bir fonksiyon olsun. $p>0$ olduğunu kabul edelim. $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ fonksiyonlarının $(p,\varphi_h)-$ konveksliğinden

$$\mathcal{F}\left(\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\leq h(\tau)\mathcal{F}(\varphi(m))+h(1-\tau)\mathcal{F}(\varphi(n)) \qquad (3.111)$$

ve

$$\mathcal{G}\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\leq h(\tau)\mathcal{G}(\varphi(m))+h(1-\tau)\mathcal{G}(\varphi(n)) \tag{3.112}$$

yazılır. (3.111) ve (3.112) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\mathcal{G}\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\\
\leq\ & h^{2}(\tau)\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(m))+h^{2}(1-\tau)\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(n)) \qquad (3.113)\\
&+h(\tau)h(1-\tau)\left[\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(n))+\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(m))\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(\left[(1-\tau)\varphi^{p}(m)+\tau\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\mathcal{G}\left(\left[(1-\tau)\varphi^{p}(m)+\tau\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\\
\leq\ & h^{2}(1-\tau)\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(m))+h^{2}(\tau)\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(n)) \qquad (3.114)\\
&+h(\tau)h(1-\tau)\left[\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(m))+\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(n))\right]
\end{aligned}$$

bulunur. (3.113) ve (3.114) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\mathcal{G}\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\\
&+\mathcal{F}\left(\left[(1-\tau)\varphi^{p}(m)+\tau\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\mathcal{G}\left(\left[(1-\tau)\varphi^{p}(m)+\tau\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \qquad (3.115)\\
\leq\ & \left[h^{2}(\tau)+h^{2}(1-\tau)\right]\left[\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(m))+\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(n))\right]\\
&+2h(\tau)h(1-\tau)\left[\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(n))+\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(m))\right]
\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitsizlikte eşisizliğin her iki tarafı $\tau^{\alpha-1}$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığı üzerinde τ ya göre integral alınırsa

$$\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\mathcal{F}\left(\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\mathcal{G}\left(\left[\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau$$

$$+\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\mathcal{F}\left(\left[(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\mathcal{G}\left(\left[(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau \tag{3.116}$$

$$\leq \left[\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(m))+\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(n))\right]\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\left[h^2(\tau)+h^2(1-\tau)\right]d\tau$$

$$+2\left[\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(n))+\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(m))\right]\int_0^1 \tau^{\alpha-1}h(\tau)h(1-\tau)\,d\tau$$

elde edilir. (3.116) eşitsizliğinde uygun değişken değiştirme ve gerekli matematiksel işlemler yapılırsa $\chi\in[m^p,n^p]$ olmak üzere $\varpi(\chi)=\chi^{\frac{1}{p}}$ için

$$\frac{1}{(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))^{\alpha}}\left[\int_{\varphi^p(m)}^{\varphi^p(n)}[\varphi^p(n)-\chi]^{\alpha-1}(\mathcal{F}\circ\varpi)(\chi)(\mathcal{G}\circ\varpi)(\chi)\,d\chi\right.$$

$$\left.+\int_{\varphi^p(m)}^{\varphi^p(n)}[\chi-\varphi^p(m)]^{\alpha-1}(\mathcal{F}\circ\varpi)(\chi)(\mathcal{G}\circ\varpi)(\chi)\,d\chi\right] \tag{3.117}$$

$$\leq \left[\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(m))+\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(n))\right]\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\left[h^2(\tau)+h^2(1-\tau)\right]d\tau$$

$$+2\left[\mathcal{F}(\varphi(m))\mathcal{G}(\varphi(n))+\mathcal{F}(\varphi(n))\mathcal{G}(\varphi(m))\right]\int_0^1 \tau^{\alpha-1}h(\tau)h(1-\tau)\,d\tau$$

olup buradan

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))^{\alpha}}$$

$$\times\left[J^{\alpha}_{\varphi^p(m)^+}(\mathcal{F}\circ\varpi)(\varphi^p(n))(\mathcal{G}\circ\varpi)(\varphi^p(n))\right.$$

$$+J^{\alpha}_{\varphi^{p}(n)^{-}}\left(\mathcal{F}\circ\varpi\right)\left(\varphi^{p}\left(m\right)\right)\left(\mathcal{G}\circ\varpi\right)\left(\varphi^{p}\left(m\right)\right)\Big] \tag{3.118}$$

$$\leq \left[\mathcal{F}\left(\varphi\left(m\right)\right)\mathcal{G}\left(\varphi\left(m\right)\right)+\mathcal{F}\left(\varphi\left(n\right)\right)\mathcal{G}\left(\varphi\left(n\right)\right)\right]\int_{0}^{1}\tau^{\alpha-1}\left[h^{2}\left(\tau\right)+h^{2}\left(1-\tau\right)\right]d\tau$$

$$+2\left[\mathcal{F}\left(\varphi\left(m\right)\right)\mathcal{G}\left(\varphi\left(n\right)\right)+\mathcal{F}\left(\varphi\left(n\right)\right)\mathcal{G}\left(\varphi\left(m\right)\right)\right]\int_{0}^{1}\tau^{\alpha-1}h\left(\tau\right)h\left(1-\tau\right)d\tau$$

elde edilir ve (3.109)'un ispatı tamamlanır. (3.110)'un ispatında, φ fonksiyonu monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $p<0$ için benzer ispat basamakları uygulanırsa $\chi\in[n^{p},m^{p}]$ olacak şekilde $\varpi\left(\chi\right)=\chi^{\frac{1}{p}}$ için

$$\frac{\Gamma\left(\alpha\right)}{\left(\varphi^{p}\left(m\right)-\varphi^{p}\left(n\right)\right)^{\alpha}}$$

$$\times\Big[J^{\alpha}_{\varphi^{p}(n)^{+}}\left(\mathcal{F}\circ\varpi\right)\left(\varphi^{p}\left(m\right)\right)\left(\mathcal{G}\circ\varpi\right)\left(\varphi^{p}\left(m\right)\right)$$

$$+J^{\alpha}_{\varphi^{p}(m)^{-}}\left(\mathcal{F}\circ\varpi\right)\left(\varphi^{p}\left(n\right)\right)\left(\mathcal{G}\circ\varpi\right)\left(\varphi^{p}\left(n\right)\right)\Big] \tag{3.119}$$

$$\leq \left[\mathcal{F}\left(\varphi\left(m\right)\right)\mathcal{G}\left(\varphi\left(m\right)\right)+\mathcal{F}\left(\varphi\left(n\right)\right)\mathcal{G}\left(\varphi\left(n\right)\right)\right]\int_{0}^{1}\tau^{\alpha-1}\left[h^{2}\left(\tau\right)+h^{2}\left(1-\tau\right)\right]d\tau$$

$$+2\left[\mathcal{F}\left(\varphi\left(m\right)\right)\mathcal{G}\left(\varphi\left(n\right)\right)+\mathcal{F}\left(\varphi\left(n\right)\right)\mathcal{G}\left(\varphi\left(m\right)\right)\right]\int_{0}^{1}\tau^{\alpha-1}h\left(\tau\right)h\left(1-\tau\right)d\tau$$

olduğu elde edilir. □

Benzer şekilde yukarıdaki teoremde φ fonksiyonu monoton azalan alınırsa $p>0$ için (3.110) eşitsizliği ve $p<0$ için de (3.109) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.64. (3.109) eşitsizliğinde $\varphi\left(\chi\right)=\chi$, $p=1$ $h\left(\chi\right)=\chi$ olarak alınırsa eşitsizlik, [80]'de Chen tarafından ispatlanan Teorem 2.1'i verir.

Teorem 3.65. $h:(0,1)\rightarrow(0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. φ fonksiyonu monoton artan, $\mathcal{F}:I\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan ve $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $m,n\in I$ ve $m<n$ olacak şekilde $\left(p,\varphi_{h}\right)-$konveks fonksiyon olsun. Eğer $\mathcal{F}\in L[m,n]$ ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

1. $p>0$ ise $\chi\in[m^p,n^p]$ olmak üzere$\varpi(\chi)=\chi^{\frac{1}{p}}$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha)}{(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))^\alpha}\left[J^\alpha_{\varphi^p(m)^+}(F\circ\varpi)(\varphi^p(n))+J^\alpha_{\varphi^p(n)^-}(F\circ\varpi)(\varphi^p(m))\right]\\
\leq\ & [F(\varphi(m))+F(\varphi(n))]\int_0^1\tau^{\alpha-1}[h(\tau)+h(1-\tau)]\,d\tau \qquad (3.120)\\
\leq\ & [F(\varphi(m))+F(\varphi(n))]\frac{2}{(\alpha r-r+1)^{\frac{1}{r}}}\left(\int_0^1 h^q(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri vardır. Burada $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$ dir.

2. $p<0$ ise $\chi\in[n^p,m^p]$ olmak üzere $\varpi(\chi)=\chi^{\frac{1}{p}}$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha)}{(\varphi^p(n)-\varphi^p(m))^\alpha}\left[J^\alpha_{\varphi^p(n)^+}(F\circ\varpi)(\varphi^p(m))+J^\alpha_{\varphi^p(m)^-}(F\circ\varpi)(\varphi^p(n))\right]\\
\leq\ & [F(\varphi(m))+F(\varphi(n))]\int_0^1\tau^{\alpha-1}[h(\tau)+h(1-\tau)]\,d\tau \qquad (3.121)\\
\leq\ & [F(\varphi(m))+F(\varphi(n))]\frac{2}{(\alpha r-r+1)^{\frac{1}{r}}}\left(\int_0^1 h^q(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri vardır. Burada $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$ dir.

İspat. φ fonksiyonu monoton artan bir fonksiyon ve $p>0$ olsun. F nin $(p,\varphi_h)-$konveksliğinden

$$\begin{aligned}
&F\left([\tau\varphi^p(m)+(1-\tau)\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right) \qquad (3.122)\\
\leq\ & h(\tau)F(\varphi(m))+h(1-\tau)F(\varphi(n))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&F\left([(1-\tau)\varphi^p(m)+\tau\varphi^p(n)]^{\frac{1}{p}}\right) \qquad (3.123)\\
\leq\ & h(1-\tau)F(\varphi(m))+h(\tau)F(\varphi(n))
\end{aligned}$$

yazılır. Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa

$$
\begin{aligned}
& F\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)+F\left(\left[(1-\tau)\varphi^{p}(m)+\tau\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\
\leq\; & \left[F(\varphi(m))+F(\varphi(n))\right]\left[h(\tau)+h(1-\tau)\right]
\end{aligned}
\tag{3.124}
$$

bulunur. (3.124) eşitsizliğinde her iki taraf $\tau^{\alpha-1}$ ile çarpılıp ardından $[0,1]$ aralığı üzerinde τ ya göre integral alınırsa

$$
\begin{aligned}
& \int_{0}^{1}\tau^{\alpha-1}F\left(\left[\tau\varphi^{p}(m)+(1-\tau)\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau \\
& +\int_{0}^{1}\tau^{\alpha-1}F\left(\left[(1-\tau)\varphi^{p}(m)+\tau\varphi^{p}(n)\right]^{\frac{1}{p}}\right)d\tau \\
\leq\; & \left[F(\varphi(m))+F(\varphi(n))\right]\int_{0}^{1}\tau^{\alpha-1}\left[h(\tau)+h(1-\tau)\right]d\tau
\end{aligned}
\tag{3.125}
$$

olup bu integrallerde uygun değişken değiştirme ve gerekli matematiksel işlemler yapılırsa $\chi\in[m^{p},n^{p}]$ olmak üzere $\varpi(\chi)=\chi^{\frac{1}{p}}$ için

$$
\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha)}{(\varphi^{p}(n)-\varphi^{p}(m))^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\varphi^{p}(m)^{+}}(F\circ\varpi)(\varphi^{p}(n))+J^{\alpha}_{\varphi^{p}(n)^{-}}(F\circ\varpi)(\varphi^{p}(m))\right] \\
\leq\; & \left[F(\varphi(m))+F(\varphi(n))\right]\int_{0}^{1}\tau^{\alpha-1}\left[h(\tau)+h(1-\tau)\right]d\tau
\end{aligned}
\tag{3.126}
$$

bulunur. Böylece (3.120) eşitsizliğinin birinci kısmı ispatlanır. İkinci kısmın ispatı için Hölder eşitsizliği kullanırsa

$$
\begin{aligned}
& \left[F(\varphi(m))+F(\varphi(n))\right]\int_{0}^{1}\tau^{\alpha-1}\left[h(\tau)+h(1-\tau)\right]d\tau \\
=\; & \left[F(\varphi(m))+F(\varphi(n))\right]\left[\int_{0}^{1}\tau^{\alpha-1}h(\tau)\,d\tau+\int_{0}^{1}\tau^{\alpha-1}h(1-\tau)\,d\tau\right]
\end{aligned}
\tag{3.127}
$$

$$\leq \left[F(\varphi(m))+F(\varphi(n))\right]\left(\int_0^1 \left(\tau^{\alpha-1}\right)^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\times\left[\left(\int_0^1 h^q(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^1 h^q(1-\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

olduğu görülür. $\int_0^1 h^q(1-\tau)\,d\tau$ integralinde $u=1-\tau$ değişken değiştirmesi ve ardından basit matematiksel işlemlerle

$$\begin{aligned}&\left[F(\varphi(m))+F(\varphi(n))\right]\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\left[h(\tau)+h(1-\tau)\right]d\tau\\ \leq\ &\left[F(\varphi(m))+F(\varphi(n))\right]\frac{2}{(\alpha r-r+1)^{\frac{1}{r}}}\left(\int_0^1 h^q(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{3.128}$$

elde edilir ve (3.120) eşitsizliği ispatlanır. Benzer şekilde (3.121)'un ispatında, φ fonksiyonu monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $p<0$ için $\chi\in[n^p,m^p]$ olacak şekilde $\varpi(\chi)=\chi^{\frac{1}{p}}$ için

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\left(\varphi^p(n)-\varphi^p(m)\right)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\varphi^p(n)^+}(F\circ\varpi)(\varphi^p(m))+J^{\alpha}_{\varphi^p(m)^-}(F\circ\varpi)(\varphi^p(n))\right]$$

$$\leq \left[F(\varphi(m))+F(\varphi(n))\right]\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\left[h(\tau)+h(1-\tau)\right]d\tau \tag{3.129}$$

$$\leq \left[F(\varphi(m))+F(\varphi(n))\right]\frac{2}{(\alpha r-r+1)^{\frac{1}{r}}}\left(\int_0^1 h^q(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}$$

olduğu bulunur. □

Benzer şekilde yukarıdaki teoremde φ fonksiyonu monoton azalan alınırsa $p>0$ için (3.121) eşitsizliği ve $p<0$ için de (3.120) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.66. (3.120) eşitsizliğinde $\varphi(\chi)=\chi$ ve $p=1$ olarak alınırsa (1.48) eşitsizliği elde edilir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Günümüzde artık sistematik bir disiplin olan eşitsizlikler teorisi ve analizdeki birçok alanda uygulaması olan ve eşitsizlik teorisi ile olan yakın ilişkisi olan konveks fonksiyonlar teorisi kullanılarak geçmişten günümüze birçok çalışma yapılmıştır ve yapılmaya devam etmektedir.

Bu tezde, matematik ve diğer disiplinlerde kullanılan bu iki önemli teoriden ilham alarak geçmişte elde edilen eşitsizlikleri genelleyen yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve literatüre yeni bir konvekslik sınıfı kazandırılmıştır. Bu bağlamda, tezin temelini oluşturan ikinci ve üçüncü bölümlerde elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir:

1. İkinci bölümde, ispatlanan iki lemma kullanılarak $h-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu eşitsizliklerin bazı özel ortalamalar için uygulaması yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar literatürde daha önce elde edilmiş bazı çalışmaların genelleştirilmiş hallerini vermiştir.

2. Ayrıca, Jensen-Mercer eşitsizliği ve Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla daha önce elde edilmiş bazı eşitsizlikleri genelleştiren yeni Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler ispatlanmıştır. Elde edilen sonuçlar kullanılarak bazı özel ortalamalar için uygulamalar yapılmıştır.

3. Üçüncü bölümde, öncelikle konveks, $h-$konveks, $p-$konveks, $\varphi-$konveks, φ_h-konveks, $(p,h)-$konveks fonksiyonlar sınıfını genelleştiren yeni $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyonlar sınıfı tanımlanmıştır ve özellikleri sunulmuştur.

4. Ardından, bu yeni konvekslik sınıfına ait fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejér, Ostrowski, Jensen ve Jensen-Mercer tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Son olarak Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanılarak, $(p,\varphi_h)-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler ispatlanmıştır.

Gelecek çalışmalarda, ikinci bölümde elde edilen sonuçların farklı kesirli integral operatörleri kullanılarak genelleştirilmesi sağlanabilir. Ayrıca (p, φ_h) $-$konveks fonksiyonlar için farklı tipte yeni eşitsizlikler elde edilebilir.

5. KAYNAKLAR

[1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1934, ss. 1-314.

[2] E. F. Beckenbach ve R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Deutschland: Springer-Verlag, 1961, ss. 1-198.

[3] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Berlin, Deutschland: Springer Verlag, 1970, ss. 1-185.

[4] J. Pečarić, F. Proshhanve, Y. L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, San Diago, USA: Academic Press, 1992, ss. 1-82.

[5] J. L. W. V. Jensen, "Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes," *Acta Mathematica*, c. 30, sayı 1, ss. 175-193, 1906.

[6] G. Cristescu ve L. Lupsa, *Non-connected Convexities and Applications*, Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers, 2002, ss. 3-152.

[7] C. P. Niculescu ve L. E. Persson, *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach*, 2. baskı, Cham, Switzerland: Springer, 2018, ss. ix-xii.

[8] B. G. Pachpatte, *Mathematical Inequalities*, 1. baskı, Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 2005, ss. 1-9.

[9] S. Dragomir ve R. Agarwal, "Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula," *Applied Mathematics Letters*, c. 11, sayı 5, ss. 91-95, 1998.

[10] P. Cerone ve S. S. Dragomir, "Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives satisfy certain convexity assumptions," *Demonstratio Mathematica*, c. 37, sayı 2, ss. 299-308, 2004.

[11] U. S. Kirmaci, "Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula," *Applied Mathematics and Computation*, c. 147, sayı 1, ss. 137-146, 2004.

[12] M. W. Alomari, M. Darus ve U. S. Kirmaci, "Some inequalities of Hermite-Hadamard type for $s-$convex functions," *Acta Mathematica Scientia*, c. 31, sayı 4, ss. 1643-1652, 2011.

[13] M. J. V. Cortez ve J. E. H. Hernández, " A variant of jensen-mercer inequality for $h-$convex functions and operator $h-$convex functions," *Revista de Matemáticas de la Universidad del Atlántico,* c. 4, sayı 2, ss. 62-76, 2017.

[14] M. A. Ali, H. Budak, M. Abbas, M. Z. Sarikaya ve A. Kashuri, "Hermite-Hadamard type inequalities for $h-$convex functions via generalized fractional integrals," *Journal of Mathematical Extension*, c. 14, ss. 187-234, 2019.

[15] M. Kunt ve İ. İşcan, "Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for $p-$convex functions," *Arab Journal of Mathematical Sciences*, c. 23, sayı 2, ss. 215-230, 2017.

[16] M. Kunt ve İ. İşcan, "Hermite–Hadamard–Fejér type inequalities for $p-$convex functions via fractional integrals," *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, c. 42, sayı 4, ss. 2079-2089, 2018.

[17] R. Gorenflo ve F. Mainardi. (2008, 25 Mayıs). *Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order* [Online], Erişim: http://arXiv.org/abs/0805.3823v1?.

[18] C. Li ve F. Zeng, *Numerical Methods for Fractional Calculus*, Boca Raton, USA: CRC Press, 2019, ss. 1-27.

[19] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, San Diago, USA: Academic Press, 1999, ss. 1-40.

[20] W. W. Bell, *Special Functions for Scientists and Engineers*, London, England: Van Nostrand Company, 1968, ss. 23-41.

[21] S. G. Samko, A. A. Kilbas ve O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*, Amsterdam, The Netherlands: Gorden ve Breach Science Publishers, 1993, ss. 1-92.

[22] D. S. Mitrinović, J. Pečarić ve A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1993, ss. 1-513.

[23] A. W. Roberts ve D. E. Varberg, *Convex Functions*, New York, USA: Academic Press, 1973, ss. 1-36

[24] S. S. Dragomir ve C. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, Victoria, Australia: RGMIA Monographs, 2000, ss. 1-90.

[25] D. S. Mitrinović ve I. B. Lacković, "Hermite and convexity," *Aequationes Mathematicae*, c. 28, ss. 229-232, 1985.

[26] B. G. Pachpatte, *Analytic Inequalities: Recent Advances*, Atlantis Press, 2012, ss. 1-5.

[27] A. M. Mercer, "A variant of Jensen's inequality," *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, c. 4, sayı 4, ss. 1-2, 2003.

[28] B. Carlson, "The logarithmic mean," *The American Mathematical Monthly*, c. 79, sayı 6, ss. 615–618, 1972.

[29] C. E. Finol ve M. Wójtowicz, "Multiplicative properties of real functions with applications to classical functions," *Aequationes Mathematicae*, c. 59, sayı 1-2, ss. 134-149, 2000.

[30] H. Yaldız, "Kesirli integraller ile ilgili bazı eşitsizlikler," Doktora tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce Üniversitesi, Düzce, 2016.

[31] H. Hudzik ve L. Maligranda, "Some remarks on $s-$convex functions," *Aequationes Mathematicae*, c. 48, sayı 1, ss. 100-111, 1994.

[32] S. Dragomir ve S. Fitzpatrick, "The Hadamard inequalities for $s-$convex functions in the second sense," *Demonstratio Mathematica*, c. 32, sayı 4, ss. 687-696, 1999.

[33] U. S. Kirmaci, M. K. Bakula, M. E. Özdemir ve J. Pečarić, "Hadamard-type inequalities for $s-$convex functions," *Applied Mathematics and Computation*, c. 193, sayı 1, ss. 26-35, 2007.

[34] M. E. Özdemir, Ç. Yıldız, A. O. Akdemir ve E. Set, "On some inequalities for $s-$convex functions and applications," *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2013, sayı 1, ss. 1-11, 2013.

[35] İ. İşcan, "Generalization of different type integral inequalities for $s-$convex functions via fractional integrals," *Applicable Analysis*, c. 93, sayı 9, ss. 1846-1862, 2014.

[36] S. H. Wang ve F. Qi, "Hermite-Hadamard type inequalities for $s-$convex functions via Riemann-Liouville fractional integrals," *Journal of Computational Analysis and Applications*, c. 22, sayı 6, ss. 1124-1134, 2017.

[37] F. Usta, H. Budak, M. Z. Sarikaya ve E. Set, "On generalization of trapezoid type inequalities for $s-$convex functions with generalized fractional integral operators," *Filomat*, c. 32, sayı 6, ss. 2153-2171, 2018.

[38] S. Özcan ve İ. İşcan, "Some new Hermite-Hadamard type inequalities for $s-$convex functions and their applications," *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2019, sayı 1, ss. 1-11, 2019.

[39] E. Set, İ. İşcan ve H. H. Kara, "Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for $s-$convex function in the second sense via fractional integrals", *Filomat*, c. 30, sayı 12, ss. 3131-3138, 2016.

[40] M. Alomari, M. Darus, S. S. Dragomir ve P. Cerone, "Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are $s-$convex in the second sense," *Applied Mathematics Letters*, c. 23, sayı 9, ss. 1071-1076, 2010.

[41] E. Set, M. E. Ozdemir ve M. Z. Sarikaya, "New inequalities of Ostrowski's type for $s-$convex functions in the second sense with applications," *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, c. 27, sayı 1, ss. 67-82, 2012.

[42] E. Set, "New inequalities of Ostrowski type for mappings whose derivatives are $s-$convex in the second sense via fractional integrals," *Computers & Mathematics with Applications*, c. 63, sayı 7, ss. 1147-1154, 2012.

[43] S. Dragomir ve S. Fitzpatrick, "The Jensen inequality for $s-$Breckner convex functions in linear spaces," *Demonstratio Mathematica*, c. 33, sayı 1, ss. 43-50, 2000.

[44] S. Varošanec, "On $h-$convexity," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 326, sayı 1, ss. 303-311, 2007.

[45] M. Z. Sarikaya, A. Saglam ve H. Yildirim, "On some Hadamard-type inequalities for $h-$convex functions," *Journal of Mathematical Inequalities*, c. 2, sayı 3, ss. 335-341, 2008.

[46] M. Tunç, "On new inequalities for $h-$convex functions via Riemann-Liouville fractional integration," *Filomat*, c. 27, sayı 4, ss. 559-565, 2013.

[47] M. A. Latif ve M. Alomari, "On Hadamard-type inequalities for $h-$convex functions on the co-ordinates," *International Journal of Mathematical Analysis*, c. 3, sayı 33, ss. 1645-1656, 2009.

[48] M. A. Latif, "On some inequalities for $h-$convex functions," *International Journal of Mathematical Analysis*, c. 4, sayı 30, ss. 1473-1482, 2010.

[49] B. Y. Xi ve F. Qi, "Some inequalities of Hermite-Hadamard type for $h-$convex functions," *Advances in Inequalities and Applications*, c. 2, sayı 1, ss. 1-15, 2013.

[50] M. Z. Sarikaya, E. Set ve M. E. Ozdemir, "On some new inequalities of Hadamard type involving *h*-convex functions," *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, c. 79, sayı 2, ss. 265-272, 2010.

[51] M. Tunç, C. Yildiz ve A. Ekinci, "On some inequalities of Simpson's type via $h-$convex functions," *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, c. 42, sayı 4, ss. 309-317, 2013.

[52] M. Bombardelli ve S. Varošanec, "Properties of $h-$convex functions related to the Hermite-Hadamard-Fejér inequalities," *Computers & Mathematics with Applications*, c. 58, sayı 9, ss. 1869-1877, 2009.

[53] M. Tunç, "Ostrowski-type inequalities via $h-$convex functions with applications to special means," *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2013, sayı 1, ss. 1-10, 2013.

[54] M. Matłoka, "Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are $h-$convex via fractional integrals," *Journal of Scientific Research and Reports*, c. 3, sayı 12, ss. 1633-1641, 2014.

[55] E. A. Youness, "$E-$convex sets, $E-$convex functions, and $E-$convex programming," *Journal of Optimization Theory and Applications*, c. 102, sayı 2, ss. 439-450, 1999.

[56] G. Cristescu, "Hadamard type inequalities for $\varphi-$convex functions," *Annals of the University of Oradea. Fascicle of Management and Technological Engineering, CD-Rom Edition*, c. III (XIII), 2004.

[57] M. Z. Sarikaya, M. Büyükeken ve M. E. Kiris, "On some generalized integral inequalities for $\varphi-$convex functions," *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, c. 60, sayı 3, ss. 367-377, 2015.

[58] E. Set, M. Z. Sarikaya ve A. O. Akdemir, "Hadamard type inequalities for $\varphi-$convex functions on the co-ordinates," *Tbilisi Mathematical Journal,* c. 7, sayı 2, ss. 51-60, 2014.

[59] M. Z. Sarikaya, "On Hermite Hadamard-type inequalities for φ_h-convex functions," *Kochi Journal of Mathematics*, c. 9, ss. 83-90, 2014.

[60] M. Z. Sarikaya, "On strongly φ_h-convex functions in inner product spaces," *Arabian Journal of Mathematics*, c. 2, sayı 3, ss. 295-302, 2013.

[61] M. Z. Sarikaya ve K. Ozcelik (2012, 14 Haziran). *On Hermite-Hadamard type integral inequalities for strongly φ_h-convex functions* [Online]. Erişim: https://arxiv.org/abs/1206.3141v1.

[62] K. S. Zhang ve J. P. Wan, "$p-$convex functions and their properties," *Pure and Applied Mathematics*, c. 23, sayı 1, ss. 130-133, 2007.

[63] I. Iscan, "Ostrowski type inequalities for $p-$convex functions," *New Trends in Mathematical Sciences*, c. 4, sayı 3, ss. 140-150, 2016.

[64] M. A. Noor, M. U. Awan, K. I. Noor ve M. Postolache, "Some integral inequalities for $p-$convex functions," *Filomat*, c. 30, sayı 9, ss. 2435-2444, 2016.

[65] I. Iscan, "Hermite-Hadamard type inequalities for $p-$convex functions," *International Journal of Analysis and Applications*, c. 11, sayı 2, ss. 137-145, 2016.

[66] M. Kunt ve İ. İşcan, "Hermite-Hadamard type inequalities for $p-$convex functions via fractional integrals," *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis*, c. 3, sayı 1, ss. 22-34, 2017.

[67] M. A. Latif, "New Fejér and Hermite-Hadamard type inequalities for differentiable $p-$convex mappings," *Punjab University Journal of Mathematics*, c. 51, sayı 2, ss. 39-59, 2020.

[68] N. Mehreen ve M. Anwar, "Hermite-Hadamard type inequalities for exponentially $p-$convex functions and exponentially $s-$convex functions in the second sense with applications," *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2019, ss. 1-17, 2019.

[69] Z. B. Fang ve R. Shi, "On the $(p,h)-$convex function and some integral inequalities," *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2014, ss. 1-16, 2014.

[70] W. G. Yang, "Hermite-Hadamard type inequalities for $(p_1,h_1)-(p_2,h_2)-$convex functions on the co-ordinates," *Tamkang Journal of Mathematics*, c. 47, sayı 3, ss. 289-322, 2016.

[71] M. Raees ve M. Anwar, "On Hermite-Hadamard type inequalities of coordinated $(p_1,h_1)-(p_2,h_2)-$convex functions via Katugampola fractional integrals," *Filomat*, c. 33, sayı 15, ss. 4785-4802, 2019.

[72] T. H. Dinh ve K. T. B. Vo, "Some inequalities for operator $(p,h)-$convex functions," *Linear and Multilinear Algebra*, c. 66, sayı 3, ss. 580-592, 2018.

[73] M. U. Awan, M. A. Noor, E. Set ve M. Mihai, "On strongly $(p,h)-$convex functions," *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, c. 10, sayı 2, ss. 145-153, 2019.

[74] M. Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz ve N. Başak, "Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities," *Mathematical and Computer Modelling*, c. 57, sayı 9-10, ss. 2403-2407, 2013.

[75] M. Z. Sarikaya ve H. Yildirim, "On Hermite-Hadamard type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals," *Miskolc Mathematical Notes*, c. 17, sayı 2, ss. 1049-1059, 2016.

[76] M. Kian ve M. Moslehian, "Refinements of the operator Jensen-Mercer inequality," *The Electronic Journal of Linear Algebra*, c. 26, ss. 742-753, 2013.

[77] S. S. Dragomir, J. Pecaric ve L. E. Persson, "Some inequalities of Hadamard type," *Soochow Journal of Mathematics*, c. 21, sayı 3, ss. 335-341, 1995.

[78] M. Z. Sarikaya, "On new Hermite Hadamard Fejér type integral inequalities," *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, c. 57, sayı 3, ss. 377-386, 2012.

[79] M. W. Alomari. (2017, 19 Aralık). *Mercer's inequality for* $h-$*convex functions* [Online]. Erişim: https://arxiv.org/abs/1801.01775.

[80] F. Chen, "A note on Hermite-Hadamard inequalities for products of convex functions via Riemann-Liouville fractional integrals," *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, c. 33, ss. 299-306, 2014.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hatice ÖĞÜLMÜŞ

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	Düzce Üniversitesi	2021
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2015
Lisans	Matematik Öğrt.	Hacettepe Üniversitesi	2012
Lise		Arifiye A.Ö.L.	2006

YAYINLAR

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A1. M. Z. Sarıkaya, E. Set ve H. Ögülmüs, "Some new inequalities of Hermite-Hadamard type for mappings whose derivatives are $s-$convex in the second sense," *International Journal of Modern Mathematical Sciences*, c. 8, sayı 3, ss. 212-218, 2013.

A2. M. Z. Sarikaya, H. Öğülmüş ve T. Demircan, "On the generalized weighted integral inequality for double integrals," *International Journal of Modern Mathematical Sciences*, c. 10, sayı 1, ss. 90-102, 2014.

A3. H. Öğülmüş ve M. Z. Sarikaya, "Some Hermite–Hadamard type inequalities for $h-$convex functions and their applications", *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, c. 44, sayı 3, ss. 813-819, 2020.

A4. H. Öğülmüs ve M. Z. Sarikaya, "Hermite-Hadamard-Mercer type inequalities for fractional integrals", *Filomat*, c. 35, sayı 7, ss. 2425-2436, 2021.

A5. M. Z. Sarikaya, H. Öğülmüş ve F. Ertuğral, "On $(p,\varphi_h)-$convex functions and its applications," *Miskolc Mathematical Notes*, baskıda.

B. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan bildiriler :

B1. H. Öğülmüş, F. Usta, M. Z. Sarikaya ve H. Budak, "Some generalized Chebyshev type inequalities utilizing generalized fractional integral operators with exponential kernel," *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM2017)*, İstanbul, Türkiye, Temmuz 03-07, 2017.