



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KONVEKSE YAKIN FONKSİYONLARIN GENELLEŞTİRİLMESİ

OYA MERT

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. İSMET YILDIZ**

DÜZCE, 2018

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKSE YAKIN FONKSİYONLARIN GENELLEŞTİRİLMESİ

Oya MERT tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. İsmet YILDIZ

Düzce Üniversitesi

Eş Danışman

Yrd. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU

İstanbul Kültür Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. İsmet YILDIZ

Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ

Uşak Üniversitesi

Doç. Dr. İlhame AMİRALİ

Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Emrah Evren KARA

Düzce Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Arzu YEMİŞÇİ ŞEN

İstanbul Kültür Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 15/01/2018

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

15 Ocak 2018

Oya MERT

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. İsmet Yıldız'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyen eş danışmanım Yrd. Doç. Dr. Yaşar Polatoğlu'na bana yardımlarından dolayı şükranlarımı sunarım. Sizin öğrenciniz olma gururunu bana yaşattığınız ve birikimlerinizi benimle paylaştığınız için size her zaman minnettar kalacağım.

Ayrıca, bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen Düzce Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Matematik Bölümünde çalışan tüm araştırma görevlisi arkadaşlarım ve değerli hocalarıma teşekkür ederim. Çalıştığım kurum olan Altınbaş Üniversitesine bana sunduğu tam destek için teşekkür ederim. İlaveten, her koşulda yanımda olduğunu bildiğim dostlarım Hülya Özçađlar Erođlu, Burhan Alverođlu, Güliz Yavuz, Banu Kılıçarslan, Gülsemay Yiđit ve Asena Çetinkaya'ya sonsuz teşekkür ederim.

Son olarak her zaman yanımda duran ve her umutsuz anımda yeni bir güçle beni çalışmalarına bağlayan sevgili Mert ailesine teşekkür ederim. Bir kez daha ne kadar şanslı olduğumu bu tez süresi boyunca anladım.

15 Ocak 2018

Oya MERT

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ.....	VII
SİMGELER.....	VIII
ÖZET	IX
ABSTRACT.....	X
EXTENDED ABSTRACT	XI
1. GİRİŞ.....	1
2. KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR.....	4
2.1. TANIM BÖLGELERİ	4
2.1.1. Basit Bağlantılı Bölge	4
2.1.2. Çok Bağlantılı Bölge.....	4
2.2. ANALİTİK FONKSİYONLAR.....	5
2.2.1. Yalınkat Fonksiyonlar	6
2.2.2. Yalınkat Fonksiyon Sınıfları.....	7
2.2.3. Yalınkat Fonksiyonların Temel Özellikleri.....	11
3. HARMONİK FONKSİYONLAR	14
3.1. GENEL BİLGİLER.....	14
3.2. BAZI TEMEL ÖZELLİKLER.....	16
3.3. HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLARIN S_H VE S_H^0 SINIFLARI..	20
3.4. HARMONİK YILDIZIL FONKSİYONLAR	22
3.5. HARMONİK KONVEKS FONKSİYONLAR.....	23
4. KONVEKSE YAKIN FONKSİYONLAR.....	24
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	43

6. KAYNAKLAR..... 44

ÖZGEÇMİŞ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. Basit bağlantılı bölge.	7
Şekil 2.2. Çok bağlantılı bölge.....	8
Şekil 2.3. $f(z)$ dönüşümünün resmi	20



SİMGELER

\mathbb{A}	$\left\{ f : f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, z \in \mathbb{D} \right\}$ kümesi
\mathbb{C}	Kompleks düzlem
C	Konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı
\mathbb{D}	Açık birim disk
D	Basit bağlantılı bölge
D_f	f fonksiyonunun genişlemesi
$f^{(n)}$	Bir f fonksiyonun n . dereceden türevi
F	Normal aile
$f \prec g$	f 'nin g ile sabordinasyonu
$f = h + \overline{g}$	f fonksiyonunun standart (kanonik) gösterimi
J_f	f fonksiyonunun Jakobiyeni
$k(z)$	Koebe fonksiyonu
$k_{\theta}(z)$	Koebe fonksiyonunun rotasyon fonksiyonu
K	Konveks fonksiyonlar sınıfı
K_H	Harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı
$K_H(\alpha)$	α Mertebeli konveks harmonik fonksiyonlar sınıfı
P	Pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı
S	Yalınkat fonksiyonlar sınıfı
S^*	Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
S_H^*	Harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
S_H	Yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonlar sınıfı
S_H^0	Yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların alt sınıfı
$S^*(\alpha)$	α Mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$S_H^*(\alpha)$	α Mertebeli harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$S_H^{*0}(\alpha)$	α Mertebeli harmonik yıldızıl fonksiyonların alt sınıfı
S_H^0	$g'(0) = b_1 = 0$ koşulu ile normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar sınıfı
ν	İkinci dilatasyon fonksiyonu
γ	\mathbb{C} düzleminde bir eğri
λ	Spirallike (sarmal) fonksiyon
Ω	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
ϕ	Schwarz fonksiyonu
μ_f	f fonksiyonunun birinci genişlemesi
ν_f	f fonksiyonunun ikinci genişlemesi
Δ	Laplace operatörü

ÖZET

KONVEKSE YAKIN FONKSİYONLARIN GENELLEŞTİRİLMESİ

Oya MERT
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Ocak 2018, 46 sayfa

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, kompleks değişkenli fonksiyonların tanım bölgeleri hakkında genel tanımlar şekilsel olarak gösterilmiştir. Analitik ve yalınkat fonksiyonlar için tanım ve teoremler verildikten sonra yalınkat fonksiyonların temel özellikleri ve alt sınıflarından da kısaca bahsedilmiştir. İkinci bölümde, harmonik fonksiyonlar ile ilgili temel kavram, tanım ve teoremlerden bahsedildikten sonra harmonik yalınkat fonksiyonların bazı alt sınıfları ve bu sınıfların temel özellikleri verilmiştir. Yapılan çalışmanın üçüncü bölümü ise tez çalışmasının esas bölümünü oluşturmaktadır. $f = h(z) + \overline{g(z)}$ şeklinde tanımlanan harmonik fonksiyonların genel özellikleri kuantum matematiğinin temel özelliklerinden faydalanarak analitik kısmı q -yıldızlı olan harmonik fonksiyonlar için bu özellikleri gerçeklediği gösterilmeye çalışılmaktadır. Ayrıca q -konvekse yakın fonksiyonlar da söz konusu özelliklerle ifade edilmeye çalışılmıştır.

Anahtar sözcükler: Analitik, Harmonik fonksiyonlar, Harmonik yalınkat fonksiyonlar, Yalınkat, Yıldızlı.

ABSTRACT

A GENERALIZATION OF CLOSE TO CONVEX FUNCTIONS

Oya MERT

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Ismet YILDIZ

January 2018, 46 pages

This work consists of three chapters. In the first chapter, common definitions about domain of complex variable functions are shown in shape. After basic definitions and theorems are given for analytic and univalent function theory, fundamental properties of univalent functions and their subclasses are mentioned shortly in this chapter. In the second chapter, after harmonic functions and the related basic concepts, definitions and theorems are mentioned. Some subclasses of harmonic univalent functions and the fundamental properties of its subclasses are given. The third chapter, performed in this study, is the main part of this thesis. Our aim is to show that common properties of harmonic functions defined by $f = h(z) + \overline{g(z)}$ form are satisfied by q -starlike harmonic functions as used general properties of quantum calculus. Also, q -close to convex functions are tried to be expressed with these properties.

Keywords: Analytic, Harmonic functions, Harmonic univalent functions, Starlike, Univalent.

EXTENDED ABSTRACT

A GENERALIZATION OF CLOSE TO CONVEX FUNCTIONS

Oya MERT

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Ismet YILDIZ

January 2018, 46 pages

1. INTRODUCTION

Let's show set \mathbb{A} as the class of functions normalized by $f(0)=0$ and $f'(0)=1$ in the unit disk $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$. The functions $f(z)$ in \mathbb{A} have the power series representation $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$, $z\in\mathbb{D}$. The images of the functions defined in this form indicate starlike, close to starlike, convex or close to convex sets. In this way, images of functions shown in different sets are also called as univalent functions when they are analytical and one to one. This class is indicated by S . Close to convex functions within these sets are among the most interesting sets in recent period.

Let take a f function is analytic in $|z|<1$ domain, $f(z)\in\mathbb{A}$ is said to be close-to-convex if there exists $g(z)\in K$ such that $\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)>0$, $z\in\mathbb{D}$ or $g(z)\in S^*$ such that $\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right)>0$, $z\in\mathbb{D}$. Class of close to convex functions is shown as C .

There are some reports related to close to convex functions such that one of them is the study of Goodman and Saff [1]. The standard definition of the close to convex function includes a complex numeric factor that is occasionally mistakenly replaced by 1. Experts in the field know that this change can not be done without actually changing the class, but obvious reasons for it actually seem to be missing in the literature. Their goal

is to fill this void, and in doing so we lead to a new coefficient problem solved for $n = 2$ but open for $n > 2$.

The study performed by Kowalczyk and Leś- Bomba consider the subclass of close to convex classes [2]. They show the relationship between their class and the appropriate subordination. Moreover, they provide sufficient conditions for the coefficient estimates and the functions to which the investigated class belongs. After all, they get the distortion and growth theorems. The results obtained are a generalization of the results previously obtained by Gao and Zhou [3].

Another study is based on close to convex univalent functions. It was done by O. R. Maxwell [4]. He shows that the normalized functions of class K have coefficients that validate the Biberbach hypothesis and that we will have Study-type theory that is similar to a theoretical one because of Caratheodory. In addition to introducing a function class, he can call it near the star functions; They carry the same relation because it is close to the convex functions of Kaplan and because the analytic functions of Robertson seem to be a star in one direction, convex to a certain extent in their analytical functions. [5], [6].

Next study is that Janowski type close-to-convex functions are associated with conic regions. This related study with close to convex functions of analytic functions was introduced by Noor and Malik [7]. This study includes some geometric features such as sufficiency criteria, coefficient estimates, arc length, growth rate of coefficients of the Taylor series, and integral preservation properties of these functions for defined families [8].

Finally, Pran Nath Chicra introduced new subclasses of class close to convex functions. It has been proven that all α close to convex functions are close to convex and there are a few coefficient inequalities for α close to convex functions and an integral formula for forming these functions [9].

In this thesis, new definitions were made using q - calculus for close to convex functions and auxiliary theorems and theorems were reached in the light of these new definitions.

2. MATERIAL AND METHODS

We used the Duren's book for harmonic functions in the plane [10]. In addition, the studies about harmonic mappings where the order of co-analytical part is close to convex function of order $b, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ q -Harmonic Mappings for which Analytic Part is q -Convex Functions and many other studies of Yaşar Polatoğlu are used in main materials of thesis. Also, a great deal of the basic aspects of quantum calculus was followed up the book of Kac and Cheung [11]. Most of these properties are used for given class.

We benefit from the coefficient inequality, the growth theorem, distortion theorem and subordination principal for harmonic mappings with analytic parts close to convex functions.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

Main results obtained in this dissertation are given Section 3. We introduce the definition of q -calculus and give some properties of it. New definitions for the theory of univalent analytic functions have been reported by considering q -calculus methods. We reported that common properties of harmonic functions defined by $f = h(z) + \overline{g(z)}$ form were satisfied by q -close to convex functions as used general properties of quantum calculus.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK

The goal of this dissertation is to apply the theory of q -calculus for the close to convex functions. In this PhD study, subclasses of planar harmonic transformations are also studied in detail.

1. GİRİŞ

Schlicht (Yalınkat) fonksiyonlar teorisi, kompleks değişkenli fonksiyonların en önemli konularından biri olmuştur. Bu teoride geliştirilen yöntemler ve bulunan sonuçlar matematiğin birçok alanında uygulamaya sahiptir. Özellikle uygulamalı matematikte ters sınır değer problemlerin çözümünde, nükleer fizikte, akışkanlar mekaniğinde ve olasılık-istatistik gibi birçok alanda uygulamaya sahiptir.

Bu teorinin temelleri, Riemann Dönüşüm Teoremi ile birlikte Koebe'nin normalize edilmiş yalınkat bir fonksiyonun kendisinin ve birinci türevinin modülleri üzerindeki sınırların varlığını ispatladığı 1907 yılındaki çalışması ve Biebach'ın bu tür fonksiyonların ikinci katsayıları için 1916 yılında elde ettiği katsayılar kestirimine dayanır [12-14]. Bu tahmin S sınıfındaki her bir fonksiyonun ($f \in S$),

$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ şeklinde Taylor açılımı var ise, fonksiyonun herbir terimindeki

katsayılar için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğini sağladığını iddia eder. Uzun yıllar boyunca matematikçileri uğraştıran bu problem, 1984 yılında Louis de Branges tarafından tüm a_n katsayıları için ispat yapılmıştır ancak bu çözümle birlikte birtakım yeni problemlerde ortaya çıkmıştır. Bu yüzden, günümüz araştırmaları için hala bu teoriden aktif olarak yararlanılmaktadır.

Yalınkat fonksiyonlar teorisi çok ve geniş karmaşık olduğundan bazı kolaylaştırıcı kısıtlamalar yapmak gerekir. “Her basit bağlantılı bölgesini, birim diski üzerine birebir olarak resmeden bir tek f analitik fonksiyonunun var olduğunu” ifade eden ünlü Riemann Dönüşüm Teoremi ile D bölgesi yerine \mathbb{D} birim diskini alabiliriz [12].

Genelde \mathbb{D} birim diskinde analitik, yalınkat ve normalleştirilmiş yani $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulları sağlanıyor ise f fonksiyonuna normalize edilmiş fonksiyon denir [15]. Bu koşullar ile belirtilen fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. S olarak gösterilen yalınkat fonksiyonlar sınıfının bazı alt sınıfları üzerine de çalışmalar yapılmıştır. Bu sınıflar $f \in S$ ve $f(D)$ orjine göre yıldızlı bölge ise bu tür fonksiyonlar yıldızlı fonksiyonlar

olarak adlandırılır ve S^* ile gösterilir. Eğer $f \in S$ ve $f(D)$ konveks bir bölge ise bu tür fonksiyonlara konveks fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir [16].

S^* sınıfını kapsayan ve basit bir geometrik tanıma sahip S sınıfının ilginç bir alt sınıfı da konvekse-yakın fonksiyonlardır. $f \in S$ olmak üzere $\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{g(z)} \right) > 0, z \in \mathbb{D}$ olacak şekilde bir $g \in C$ varsa $f \in S$ fonksiyonuna konvekse-yakın fonksiyon adı verilir ve bu tür fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir. Bu sınıf, 1952 yılında W. Kaplan tarafından geliştirilmiştir [5]. Aynı zamanda, Kaplan bütün konvekse yakın fonksiyonların yalınkat olduğunu da kanıtlamıştır.

Ayrıca konvekse yakın fonksiyonların çözümünde kullanılan q -kalkülüs (calculus) yöntemi şu şekilde izah edilebilir. $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}$ ifadesinde fonksiyondaki değişimin, değişkendeki değişime oranı göz önüne alınsın. Eğer x sayısı x_0 sayısına yaklaşırken bu oranın limiti (eğer varsa) f fonksiyonunun $x=x_0$ noktasındaki $\frac{df}{dx}$ türev tanımını verdiği görülür. Bununla beraber, eğer $x=qx_0$ ya da $x=x_0+h$ ise limit alınamaz. Burada $q, 1$ sayısından h ise 0 sayısından farklı sabit sayılardır. Bu tanım bizi kuantum kalkülüse yönlendiren bir araçtır.

Kuantum kalkülüs (q -analiz) bazen limitsiz kalkülüs anlamına gelir, limit notasyonu olmaksızın geleneksel infinitesimal (sonsuz küçük veya ölçülemeyecek kadar küçük) kalkülüse eşdeğer bir anlama sahiptir. Kuantum kalkülüs genel olarak q -kalkülüs ve h -kalkülüs olarak tanımlanır [11]. q -kuantum sabitini ifade ederken h da Planck sabitini temsil eder. Son zamanlarda q -kalkülüs (analiz) çok sayıda matematikçinin dikkatini çekmiştir. Bu ilgi, fizik ve matematiğin çeşitli alanlarında uygulanabilir olmasından kaynaklanmaktadır. q -kalkülüsün uygulanması Jackson tarafından başlatılmıştır [17], [18]. İlk olarak q -integral ve q -türevi sistematik bir yoldan elde etmiştir ve daha sonra q -analizin geometrik uygulamalarını kuantum gruplar üzerindeki çalışmaya uygulamıştır. q -kalkülüsün uygulamalarına yönelik detaylı çalışmalar de bulunabilir [11]. Bu tez çalışmasında sadece q -kalkülüs ile ilgileneceğiz.

Bu tanımlardan yola çıkarak q - fark operatörünün (çoğunlukla hipergeometrik serilerde ve kuantum fiziğinde önemli rol oynamaktadır) $D_q f(z) = \frac{f(z) - f(qz)}{(1-q)z}, z \in B - \{0\}$ özelliğini kullanarak konveks fonksiyonlar sınıfını genelleştirmeye çalışacağız. Bu çalışmada hedeflediğimiz nokta kuantum kalkülüsü kullanarak yeni bir yalınkat fonksiyon sınıfı tanımlamak ve o sınıf üzerinde bazı özelliklerin sağlandığını göstererek onu genelleştirmeye çalışmaktır. Bunu yaparken growth (genişleme), distortion (büzülme) teoremlerini ve Sabordinasyon prensibi gibi temel teoremlerden ve tanımlardan faydalanacağız.



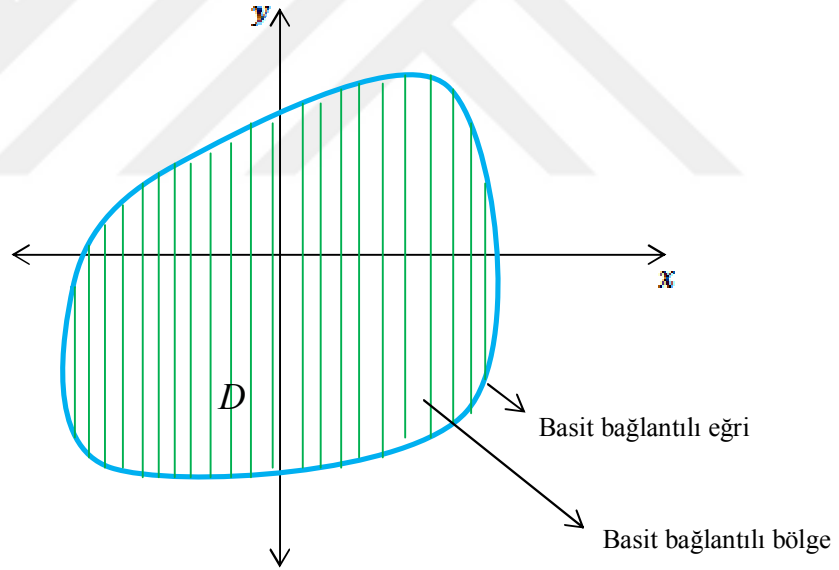
2. KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

Bu bölümde kompleks değişkenli fonksiyonların tanım bölgeleri ile ilgili temel tanımlar verilecektir.

2.1. TANIM BÖLGELERİ

2.1.1. Basit Bağlantılı Bölge

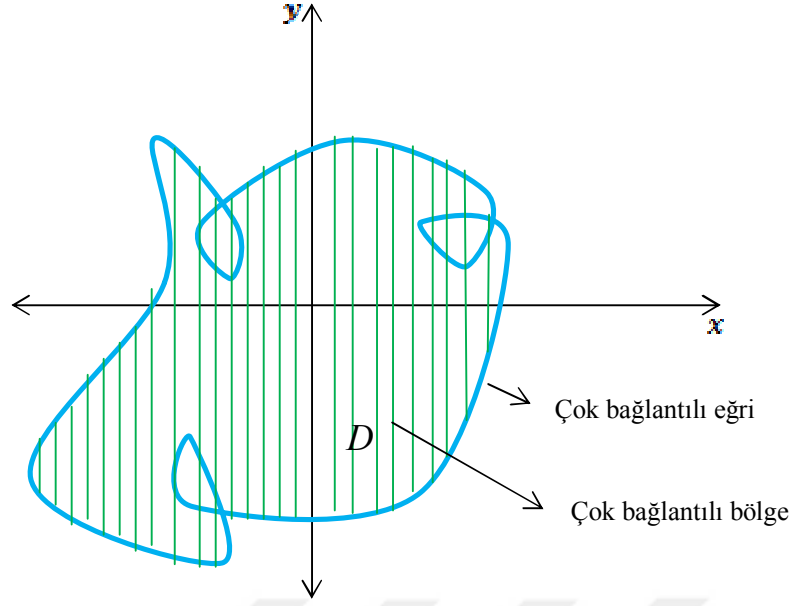
Tanım 2.1.1. Başlangıç ve bitim noktaları aynı olan ve kendi kendini kesmeyen bir eğriye basit bağlantılı kapalı eğri denir. Bu eğrinin kapattığı bölgeye de basit bağlantılı bölge denir.



Şekil 2.1. Basit bağlantılı bölge.

2.1.2. Çok Bağlantılı Bölge

Tanım 2.1.2. Başlangıç ve bitim noktaları aynı olan ve kendi kendini kesen eğriye çok bağlantılı kapalı eğri denir. Bu eğrinin kapattığı bölgeye de çok bağlantılı bölge denir.



Şekil 2.2. Çok bağlantılı bölge.

2.2. ANALİTİK FONKSİYONLAR

Tanım 2.2.1. Kompleks değerli bir f fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

türevine sahipse diferansiyellenebilir. Aynı f fonksiyonu z_0 noktasının komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ise z_0 noktasında analitiktir. (Yani z_0 noktasında türevi varsa analitiktir). Bölgenin her z_0 noktası için analitik ise fonksiyon bölgede analitiktir denir [15].

Teorem 2.2.2. $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlanmış bir fonksiyon, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonları da birinci mertebeden kısmi türevleri olan sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda $f(z)$ nin D bölgesinde analitik olması için gerek ve yeter koşul D bölgesinin tüm noktalarında

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

denklemlerini sağlamasıdır [17]. Bu denklemlere Cauchy-Riemann denklemleri denilmektedir.

Teorem 2.2.3. (Cauchy-Türev Formülü) f pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer z_0 , γ eğrisinin içinde bir nokta ise

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

'dır [19].

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri; Eğer f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilir ise her mertebeden türeve sahiptir (Reel değişkenli fonksiyonlardan ayrılan en büyük özellik) ve z_0 merkezli açık diskinde yakınsak olan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

şeklinde Taylor Serisi'ne sahiptir.

2.2.1. Yalınkat Fonksiyonlar

Tanım 2.2.4. Basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesindeki her $z_1, z_2 \in D$ için $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ (ya da $z_1 = z_2 \Leftrightarrow f(z_1) = f(z_2)$) bire bir olma koşulu gerçekleşiyor ise f fonksiyonuna D bölgesinde yalınkat fonksiyon denir [15]. Böylece $w = f(z)$ fonksiyonu bir D bölgesinde yalınkat ise D yi birebir olarak başka bir bölgeye dönüştürür. Yalınkat fonksiyon sınıfı S ile gösterilmektedir.

D bölgesinde yalınkat olan bir $f(z)$ fonksiyonu, D nin her alt bölgesinde de yalınkattır.

Eğer f , z_0 noktasının bir komşuluğunda yalınkat ise f ye yerel yalınkat fonksiyon denir.

Teorem 2.2.5. Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel yalınkat olması için gerekli ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır [20].

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ koşulu $f(z)$ fonksiyonunun yalınkatlığı için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani f analitik fonksiyonu yalınkat ise $f'(z_0) \neq 0$. Tersisi daima doğru değildir.

Tanım 2.2.6. (Konform Dönüşüm) $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$ olan analitik bir f fonksiyonu için $f'(z_0) \neq 0$ koşulu sağlansın. Eğer bir dönüşüm $z_0 \in D$ noktasından geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü, açısını ve yönünü koruyorsa bu dönüşüme bu

noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise f fonksiyonu A bölgesinde konformdur denir [20].

Teorem 2.2.7. f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z_0) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, $f(z)$ fonksiyonu konformdur [15].

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve yalınkat bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere;

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

Genişletilmiş kompleks düzlemi $(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

z düzlemindeki D bölgesini w düzlemindeki D_1 bölgesi üzerine resmeden f fonksiyonunun varlığı Riemann tarafından ortaya atılmıştır ancak Koebe tarafından genişletilerek analitik ve yalınkat fonksiyonlar için aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

Teorem 2.2.8. $B \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölge ve $z_0 \in B$ olsun. Bu durumda $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve B yi \mathbb{D} birim diski üzerine resmeden tek bir $B \rightarrow D$ konform dönüşümü vardır [13].

2.2.2. Yalınkat Fonksiyon Sınıfları

Bu bölümde, yalınkat fonksiyonlarının bazı özel alt sınıflarını oluşturan yıldızıl, konveks, konvekse yakın fonksiyonlar ve λ - spirallike (λ - sarmal) fonksiyonların genel özelliklerini vereceğiz.

Tanım 2.2.9. Basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde ve bu bölge içerisinde bir $z_0 \in D$ noktası ele alalım. Eğer z_0 noktasını her $z \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası bölgenin sınırını bir noktada kesiyorsa D bölgesine z_0 noktasına göre yıldızıldır denir.

Tanım 2.2.10. f fonksiyonu yalınkat ve $F = f(D)$ görüntü bölgesi orjine göre yıldızıl bölge ise yani $w \in F$ için $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $tw \in F$ ise $f(z)$ fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. Yıldızıl fonksiyon sınıfı S^* ile gösterilmektedir [16].

Tanım 2.2.11. Basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamen D bölgesi içinde kalıyorsa D bölgesine konvekstir denir [16].

f fonksiyonu yalınkat ve $F = f(D)$ görüntü bölgesi konveks bölge ise yani $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $w_1, w_2 \in F$ için $tw_1 + (1-t)w_2 \in F$ koşulu gerçekleşiyor ise f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonlar sınıfı K ile gösterilmektedir.

Tanım 2.2.12. $p(0) = 1$ ve $p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots$ \mathbb{D} birim diskinde analitik olmak üzere $\operatorname{Re} p(z) > 0$ şartını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar denir. Bu sınıf P sembolü ile gösterilir.

P sınıfına ait önemli bir fonksiyon örneği $z \in D$ için $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$ dir. Bu fonksiyon, \mathbb{D} birim diskini sağ yarım düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Bu fonksiyon sınıfına ait tüm eşitsizliklerde eşitliği veren fonksiyon olduğundan ekstremal fonksiyon olarak adlandırılır.

Teorem 2.2.13. $w = p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots$ fonksiyonu P sınıfına ait ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $0 \leq t \leq 2\pi$ olmak üzere $p(e^{it}z)$ fonksiyonu da P sınıfına aittir.

(ii) $|p_n| \leq 2$ dir.

(iii) $|p'(z)| \leq \frac{2}{(1-|z|)^2}$ eşitsizliği gerçekleşir.

Teorem 2.2.14. (Maksimum Modül Prensibi) Kompleks düzlemde sınırlı bir \mathbb{A} bölgesi ve sabit olmayan f fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini \mathbb{A} bölgesinin sınırında alır [21].

Maksimum modül prensibi $\frac{1}{f}$ fonksiyonu için düşünüldüğünde minimum modül prensibi elde edilir.

Teorem 2.2.15. (Minimum Prensibi) Kompleks düzlemde sınırlı bir \mathbb{A} bölgesi $f(z)$ de bu bölge de sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun \mathbb{A}

bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu varsayalım. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini \mathbb{A} bölgesinin sınırında alır [21].

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.

Tanım 2.2.16. ϕ fonksiyonu $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik $\phi(0) = 0$ ve $\forall z \in \mathbb{D}$ için $|\phi(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen fonksiyonların cümlesi Schwarz fonksiyon sınıfı olarak adlandırılır ve Ω ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 2.2.17. (Schwarz lemması) ϕ fonksiyonu $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik, $\phi(0) = 0$ olsun. Eğer \mathbb{D} birim diskinde $|\phi(z)| \leq 1$ ise bu durumda $|\phi'(0)| \leq 1$ ve $|\phi(z)| \leq |z|$ dir [22]. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\phi(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu için sağlanır.

Geometrik fonksiyonlar teorisinin önemli prensiplerinden biri de Sabordinasyon ilkesidir. Sabordinasyon kavramı ilk olarak Lindelöf tarafından oluşturulmasına rağmen terim olarak ilk kez kullananlar Littlewood ve Rogosinski olmuştur [23-27]. Sabordinasyon üzerine yapılan çalışmalar özellikle Miller ve Mocanu'nun makalesiyle birlikte kompleks analize önemli katkılar sunmuştur [28].

Tanım 2.2.18. $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları \mathbb{D} birim diskinde analitik iki fonksiyon ve $w(z) \in \Omega$ olsun. Her $z \in D$ için $f(z) = g(w(z))$ eşitliği gerçekleşiyor ise $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna sabordinedir denir ve $f \prec g$ veya $f(z) \prec g(z)$ şeklinde gösterilir [19].

Yardımcı Teorem 2.2.19. $f \prec g$ ise $f(0) = g(0)$ ve $f(D) \subset g(D)$ dir [20].

Yalınkat fonksiyonlarının bazı özel alt sınıfları pozitif gerçel kısmı fonksiyonlar yardımıyla aşağıdaki teoremlerle verilebilir.

Teorem 2.2.20. $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analitik $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ olsun. Bu durumda,

$$f(z) \in S^* \Leftrightarrow z \frac{f'(z)}{f(z)} \in P$$

gerçeklenir.

Teorem 2.2.21. $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analitik $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ olsun. Bu durumda,

$$f(z) \in K \Leftrightarrow 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \in P$$

gerçeklenir.

$$K = \{f, D \text{ de analitik}, f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > 0\} [16].$$

Tanım 2.2.22. Bir f fonksiyonu $|z| < 1$ bölgesinde analitik olmak üzere $\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{g'(z)} \right\} > 0$

olacak şekilde konveks bir g fonksiyonu veya $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{g(z)} \right\} > 0$ eşitsizliğini sağlayan yıldızlı bir g fonksiyonu varsa f fonksiyonuna konvekse-yakın fonksiyon adı verilir [20]. Konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı C ile gösterilmektedir.

Tanım 2.2.23. $f(z)$ fonksiyonu $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ koşullarını sağlıyorsa ve $f(z)$, $|z| < 1$ dairesinde konvekse yakın ise $f(z) \in C$ dir.

Yalınkat fonksiyonların alt sınıfları için aşağıdaki kapsama bağıntısı yazılabilir.

$$K \subset S^* \subset C \subset S$$

Bu bağıntıdan anlaşılacağı üzere, her konveks fonksiyon yıldızlıdır. Her yıldızlı fonksiyon konvekse-yakındır. Her konvekse yakın fonksiyon yalınkattır. Bu şartları sağlayan en tipik örnek olan $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyon yıldızlı olduğu gibi aynı zamanda konvekse-yakın fonksiyondur.

Tanım 2.2.24. $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu \mathbb{D} birim diskinde tanımlı analitik bir fonksiyon olsun. $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ ve $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere;

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\lambda} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D}$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyona λ -spirallike (λ -sarmal) fonksiyon denir.

Tanım 2.2.25. $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ fonksiyonu \mathbb{D} birim diskinde tanımlı analitik bir

fonksiyon olsun.

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha$$

koşulunu sağlıyorsa, bu fonksiyona α mertebeli yıldızlı fonksiyon denir [16]. Bu şekildeki fonksiyonların kümesi $S^*(\alpha)$ ile gösterilir.

Aynı f fonksiyonu için

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha$$

koşulu sağlanıyorsa, bu fonksiyona α mertebeli konveks fonksiyon denir [16]. Bu şekildeki fonksiyonların kümesi $K(\alpha)$ ile gösterilir.

2.2.3. Yalınkat Fonksiyonların Temel Özellikleri

S sınıfına ait önemli fonksiyonlardan biri de Koebe fonksiyonu olarak adlandırılan

$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonudur. Koebe fonksiyonunun rotasyon fonksiyonu $\theta \in R$ olmak

üzere $k_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$ şeklinde tanımlanır.

Şimdi 1916 yılında Bieberbach tarafından ortaya atılmış ancak 1984 yılında De Branges tarafından ispatlanan önemli bir teoremi verelim [29].

Teorem 2.2.26. (Bieberbach – Brange Teorem) Eğer $f \in S$ fonksiyonu $z \in D$ için

$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, $z \in D$ ise $k=2,3,\dots$ için $|a_k| \leq k$ dir. f Koebe fonksiyonunun bir

rotasyonu ancak ve ancak $k \geq 2$ için $|a_k| = k$ eşitliğiyle verilir [14].

$|a_2| \leq 2$ eşitsizliği S sınıfına ait fonksiyonlarda önemli teoremlerin elde edilmesine zemin hazırlamıştır. Bu teoremlerden biri 1/4 Koebe teoremidir.

Teorem 2.2.27. (Koebe Dörtte Bir Teoremi) $f \in S$ ise $f(D) \supseteq D_{1/4}$ dir. Yani S sınıfının içindeki her fonksiyonun değer kümesi $\left\{k : |k| \leq \frac{1}{4}\right\}$ dairesini kapsar. Bu sonuç Koebe fonksiyonunun rotasyonları için kesindir. Ayrıca, $\bigcap_{f \in S} f(D) = D_{1/4}$ dır [13].

Teorem 2.2.28. (Bükülme Teoremi) Her bir $f \in S$ ve $z \in D$ için

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

eşitsizliği sağlanır [20].

Teorem 2.2.29. (Büyüme Teoremi) Her bir $f \in S$ ve $z \in D$ için ;

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

eşitsizliği sağlanır [20].

Büyüme ve bükülme teoremlerinin birleştirilmesi ile elde edilen aşağıdaki teorem bazı durumlar için daha kullanışlı olmaktadır.

Teorem 2.2.30. Her bir $f \in S$ ve $z \in D$ için;

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

Yukarıdaki ifade, Teorem 2.2.27, Teorem 2.2.28, Teorem 2.2.29 ve Teorem 2.2.30 için eşitlik hali $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonunda geçerlidir.

Teorem 2.2.31. Eğer $f(z) = z + a_2z^2 + \dots \in \mathbb{D}$ birim diskinde yıldızlı fonksiyon ise o zaman;

$$|a_n| \leq n, (n = 2, 3, \dots)$$

Eğer $f(z) = z + a_2z^2 + \dots \in \mathbb{D}$ birim diskinde tek yıldızlı fonksiyon veya konveks fonksiyon ise o zaman;

$$|a_n| \leq 1, (n = 2, 3, \dots)$$

dir. Eşitliklerin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2}, f(z) = \frac{z}{1-e^{2i\beta}z^2}, f(z) = \frac{z}{1-e^{i\beta}z} \quad (\beta \in \mathfrak{R})$$

olmasıdır.

$\sqrt{f(z^2)}$ tek fonksiyonunun yıldızlı fonksiyon olmasından dolayı, eğer $f(z) \prec g(z)$ ve $g(z) = z + a_2z^2 + \dots$ \mathbb{D} birim diskinde yıldızlı fonksiyon ise o zaman $|a_n| \leq n, (n = 2, 3, \dots)$ yazılabilir [30].

Teorem 2.2.32. Eğer $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ \mathbb{D} birim diskinde konvekse yakın fonksiyon ise o zaman;

$$|a_n| \leq n, (n = 2, 3, \dots)$$

dir.

Tanım 2.2.33. F, S sınıfının boş olmayan bir alt sınıfı olsun. F sınıfında her fonksiyon $D_{r^*(F)}$ dairesinde yıldızlı olacak şekilde en büyük $r^*(F)$ pozitif sayısı olsun. Bu sayıya, F sınıfının yıldızlılık yarıçapı denir.

Tanım 2.2.34. F sınıfındaki her fonksiyon $D_{r_K(F)}$ dairesinde konveks olacak şekilde en büyük $r_K(F)$ pozitif sayısı olsun. Bu sayıya, F sınıfının konvekslik yarıçapı denir. $\mu \leq 2 - \sqrt{3}$ pozitif sayısı için alınan her $f \in S$ fonksiyonu $|z| < \mu$ diskini konveks bir bölgeye dönüştürür ancak $\mu > 2 - \sqrt{3}$ için bu durum yanlıştır [16]. Buradaki $r_K(S) = 2 - \sqrt{3} = 0,267\dots$ sayısı S sınıfının konvekslik yarıçapıdır. S sınıfında konvekse yakın fonksiyonlar için konvekse yakınlık yarıçapı 0.80 olduğu bilinmektedir [31]. Ayrıca, $r^*(S) = \tanh \frac{\pi}{4} = 0,655\dots$ sayısı da S sınıfının yıldızlılık yarıçapı olarak bilinmektedir.

3. HARMONİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde reel ve kompleks harmonik fonksiyonları tanımlayıp, harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfları ve bu sınıflara ait bazı önemli özellikleri vereceğiz. Bu bölümde verilen bilgiler kaynağında bulunabilir [10].

3.1. GENEL BİLGİLER

Tanım 3.1.1. D , \mathbb{C} kompleks düzleminde bir bölge ve $u(z) = u(x, y)$ fonksiyonu D bölgesinde ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $z \in D$ noktası için $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ile verilen Laplace denklemini sağlayan $u(x, y)$ fonksiyonuna D de reel değerli harmonik fonksiyon denir. $u(z) = u(x, y)$ ve $v(z) = v(x, y)$ fonksiyonları bir D bölgesinde reel harmonik ise yani $\Delta(u) = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ve $\Delta(v) = v_{xx} + v_{yy} = 0$ Laplace denklemlerini sağlıyorsa $f(z) = u(z) + iv(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde kompleks değerli harmonik fonksiyon ya da kısaca harmoniktir denir. $f = u + iv$ kompleks harmonik fonksiyonu xy -düzlemindeki bir D bölgesini, uv -düzlemindeki bir Ω bölgesine bire bir olarak dönüştürüyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde harmonik dönüşüm (harmonik yalınkat fonksiyon) denir. Bu tanıma göre, kompleks değerli harmonik yalınkat bir fonksiyon reel ve imajiner kısımları harmonik olan ve bir bölgeyi bire bir harmonik olarak dönüştüren bir fonksiyondur. Bu fonksiyonlar analitik olmak zorunda değildir. Bu yüzden analitik yalınkat fonksiyonlar için geçerli olan bazı özellikler harmonik yalınkat fonksiyonlar için geçerli değildir.

Kısaca özetlersek, analitik fonksiyonlar bileşke altında korunmasına rağmen, harmonik fonksiyonlar korunmaz. Yani, f harmonik, φ analitik fonksiyonu için $f \circ \varphi$ harmonik olmasına rağmen, $\varphi \circ f$ harmonik olması gerekmez. Analitik fonksiyonların sınıfı cebir oluşturmasına rağmen, harmonik fonksiyonların sınıfı cebir oluşturmaz. Harmonik bir dönüşümün tersi harmonik olmak zorunda değildir. Harmonik dönüşümlerin sınır davranışları konform dönüşümlerin sınır davranışından çok daha karmaşıktır. Bunlara

ilaveten, konform dönüşümlerin bilinen teorisi harmonik dönüşümlere uygulanabilir.

Tanım 3.1.2. D , \mathbb{C} kompleks düzleminde bir bölge ve $f = u + iv$ bu bölgede diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun Jakobiyen matrisi

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

şeklinde tanımlanır. Eğer f fonksiyonu analitik ise f fonksiyonunun Jakobiyesi

$$J_f(z) = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2$$

formunda elde edilir.

Teorem 3.1.3. Harmonik bir fonksiyonunun z_0 noktasının bir komşuluğunda yerel yalınkat olması için gerek ve yeter şart $J_f(z_0) \neq 0$ olmasıdır [32].

Lewy teoremine göre, bir harmonik fonksiyon ya yön- koruyan ya da yön-değiştiren olur. f fonksiyonunun yalınkat olduğu D bölgesi boyunca harmonik dönüşüm $J_f(z) > 0$ ise yön koruyan ya da $J_f(z) < 0$ ise yön değiştirendir denir. Konform fonksiyonlar yön koruyan fonksiyonlardır.

Sonuç 3.1.4. $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun yerel yalınkat ve yön-koruyan olması için gerekli ve yeterli koşul

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 > 0 \quad (z \in D)$$

eşitsizliği ile verilir [33]. Benzer şekilde,

$$\frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|} = \frac{|g'(z)|}{|h'(z)|} < 1 \quad (z \in D)$$

eşitsizliği sağlanır. Konform olması gerekmeyen harmonik dönüşümlerin en basit örnekleri $|\alpha| \neq |\beta|$ olmak üzere,

$$f(z) = \alpha z + \gamma + \beta \bar{z}$$

şeklindeki afin dönüşümlerdir. $\gamma = 0$ olduğunda afin dönüşümler doğrusal dönüşüm haline gelir. Harmonik dönüşümler bir afin dönüşüm olduğundan onların her bileşkesi harmoniktir, yani eğer f harmonik ise $\alpha f + \gamma + \beta \bar{f}$ şeklinde yazılabilir.

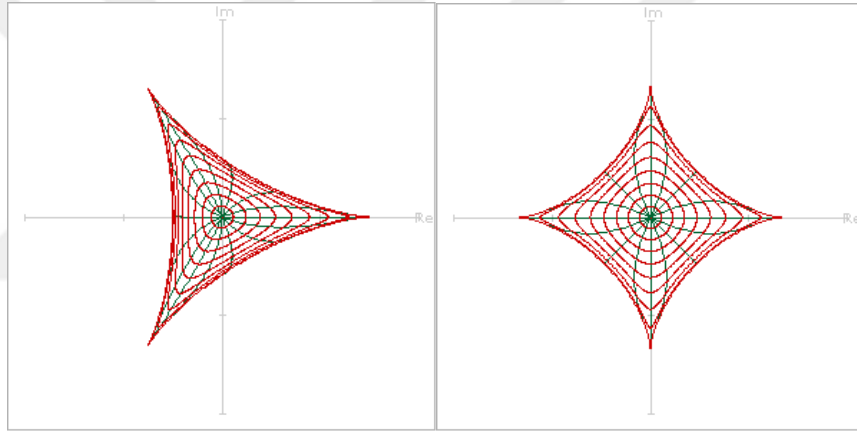
Diğer önemli bir örnek $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon \mathbb{D} açık birim

diskini $|w| = \frac{3}{2}$ çemberi ile çevrelenmiş üç uçlu bir eğrisel üçgen (hiposikloid) içine resmeder. Bu fonksiyonun yalınkatlığını doğrulamak için \mathbb{D} birim diski içerisinde alın z_1 ve z_2 noktaları için $f(z_1) = f(z_2)$ olduğunu farzedelim. Bu durumda

$$(\overline{z_1 + z_2})(\overline{z_1 - z_2}) = 2(z_2 - z_1)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, $|z_1 + z_2| < 2$ olduğundan dolayı $z_1 = z_2$ olmadıkça imkânsızdır. Böylece $f(z) = z + \frac{1}{n}\overline{z}^n$ fonksiyonu her $n \geq 2$ için yalınkat olur.

$n = 2$ ve $n = 3$ için $f(z) = z + \frac{1}{n}\overline{z}^n$ dönüşümü altında birim diskin görüntüleri Şekil 2.3 ile gösterilmiştir. Şekildeki eğriler eşmerkezli çemberler ve merkezli ışınların görüntülerinden oluşmaktadır.



Şekil 2.3. $f(z) = z + \frac{1}{n}\overline{z}^n$ dönüşümünün sırasıyla $n = 2$ ve $n = 3$ için resmi.

3.2. BAZI TEMEL ÖZELLİKLER

Tanım 3.1.5. Kompleks analizde, $z = x + iy$ olmak üzere,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ ve } \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

ile gösterilen iki basit diferansiyel operatörler sıkça kullanılacaktır. Kompleks değerli $f(z)$ fonksiyonu için $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ eşitliği Cauchy-Riemann denklemlerini yazmanın başka bir yoludur. f fonksiyonu için Laplace denklemi

$$\Delta f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece sürekli ikinci kısmi türevlere sahip f fonksiyonları için

$$f \text{ harmoniktir} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} \text{ analitiktir}$$

önermesinin doğruluğu açıktır. Eğer $f(z)$ fonksiyonu analitik ise $\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$ bilinen

türevdir. $\frac{\partial}{\partial z}$ ve $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ operatörleri lineerdir ve onlar diferansiyel operatörlerin genel

özelliklerine sahiptirler. Örneğin, çarpım ve bölüm kurallarını sağlarlar.

$$\frac{\partial}{\partial z}(fg) = f \frac{\partial g}{\partial z} + g \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f}{g} \right) = g^{-2} \left(g \frac{\partial f}{\partial z} - f \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

şeklinde ve $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ operatörü için de benzer eşitlikler yazılabilir. Özel bir eşitlik olan

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^{\bar{}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

eşitliği iki türevi birbirine bağlar. Ayrıca,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

diferansiyeli,

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

olarak yazılabilir. $\frac{\partial f}{\partial z}$ ve $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ notasyonları yerine sırasıyla f_z ve $f_{\bar{z}}$ gösterimlerini

kullanmak daha uygundur. Bileşke fonksiyonların türevleri için zincir kuralı aşağıdaki gibi türetilebilir. Eğer $w = f(z)$ ve $z = g(\zeta)$ şeklinde ise o zaman $h = f \circ g$ olmak üzere

$w = h(\zeta)$ şeklinde olur.

$$dz = \frac{\partial g}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta}$$

ve

$$d\bar{z} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} = \overline{\frac{\partial g}{\partial \zeta}} d\zeta + \overline{\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}} d\bar{\zeta}$$

eşitlikleri yerlerine yazıldıktan sonra,

$$dh = \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right)$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{\partial h}{\partial \zeta} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \zeta} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \zeta} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\zeta}}$$

elde edilir.

$f = u + iv$, D bölgesinde diferansiyellenebilir fonksiyonu için

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \quad \text{ve} \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$$

eşitlikleri düşünülerek,

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y), \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y)$$

olur. O zaman, f fonksiyonunun Jakobiyesi

$$J_f(z) = u_x v_y - u_y v_x = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç olarak, f fonksiyonu $|f_z| > |f_{\bar{z}}|$ olduğunda f yerel yalınkat ve yön-koruyan ve $|f_z| < |f_{\bar{z}}|$ olduğunda ise yalınkat ve yön-değiştirendir. $J_f(z) > 0$ iken $f_z(z) \neq 0$ dir.

$w = f(z)$ yön koruyan dönüşümleri için

$$(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)|dz| \leq |dw| \leq (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)|dz|$$

eşitsizliği yazılır. Bu kesin eşitsizlik, f nin sonsuz küçük bir çemberi büyük eksenin küçük eksene oranı

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

olan sonsuz küçük elipslere dönüştürdüğünü geometrik olarak belirtir. $D = D_f(z)$, z noktasında f fonksiyonu dilatasyonu (genişlemesi) olarak adlandırılır. Açık bir şekilde görülür ki $1 \leq D_f(z) < \infty$ dir.

Tanım 3.1.6. K , $1 \leq K < \infty$ olacak şekilde bir sabit sayı olmak üzere ve eğer verilen bir bölgenin tümünde $D_f(z) \leq K$ eşitsizliğini sağlıyor ise yön koruyan f homeomorfizması-na kuazi (hemen hemen) konformal ya da K -kuazi konformal dönüşüm denir.

Tanım 3.1.7. $\mu_f = f_{\bar{z}}/f_z$ oranına f nin birinci kompleks dilatasyonu (genişlemesi) denir. Buradan, eğer f yön koruyan ise $0 \leq |\mu_f(z)| < 1$ olur. $D_f(z) \leq K$ olması için gerekli ve yeterli koşul $|\mu_f(z)| \leq (K-1)/(K+1)$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda, yön koruyan bir homeomorfizmanın kuazi (hemen hemen) konformal olması için gerekli ve yeterli koşul $|\mu_f| \leq k < 1$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır. f dönüşümünün konformal olması için $\mu_f = 0$ olması gerekli ve yeterlidir [34], [35].

Tanım 3.1.8. $\nu_f = \overline{f_{\bar{z}}}/f_z$ oranına f nin ikinci kompleks dilatasyonu (genişlemesi) denir. Harmonik dönüşümler teorisinde ν_f ikinci kompleks dilatasyonu (genişlemesi), μ_f birinci kompleks dilatasyonuna (genişlemesine) göre daha kullanışlıdır. $|\nu_f| = |\mu_f|$ olduğundan dolayı, f nin kuazi (hemen hemen) konformal olması için gerekli ve yeterli koşul $|\nu_f(z)| \leq k < 1$ olmasıdır.

Teorem 3.1.9. f fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip kompleks değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $J_f(z) > 0$ olacak şekilde D bölgesinde yerel yalınkat olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, f fonksiyonunun harmonik olması için gerekli ve yeterli koşul $w = \nu_f = \frac{\overline{f_{\bar{z}}}}{f_z}$ fonksiyonunun D bölgesinde analitik olmasıdır [36].

İspat: f fonksiyonunun $J_f(z) > 0$ olacak şekilde D bölgesinde yerel yalınkat olduğunu kabul edelim. $w = \frac{\overline{f_{\bar{z}}}}{f_z} \Rightarrow \overline{f_{\bar{z}}} = w f_z$ eşitliğinin \bar{z} e göre diferansiyeli

$$\overline{f_{\bar{z}\bar{z}}} = f_{\bar{z}\bar{z}} w + f_z w_{\bar{z}}$$

şeklinde dir. Eğer f , D bölgesinde harmonik ise,

$$f_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \Delta f = 0$$

eşitliği elde edilir. Böylece $w_{\bar{z}} = 0$ sonucu bulunur. Bu ise w fonksiyonunun D bölgesinde analitik olduğunu gösterir.

Tersine, eğer w , D bölgesinde analitik ise $w_{\bar{z}} = 0$ olup $\overline{f_{z\bar{z}}} = f_{z\bar{z}}w$ olur. f fonksiyonunun $J_f(z) > 0$ olacak şekilde D bölgesinde yerel yalınkat olduğundan her $z \in D$ için $|w(z)| < 1$ dir. $\overline{f_{z\bar{z}}} = f_{z\bar{z}}w$ eşitliği ancak $f_{z\bar{z}} = 0$ olması durumunda gerçekleşir. Bu ise f fonksiyonunun D bölgesinde harmonik olduğu anlamına gelmektedir.

Bu teorem yön koruyan f harmonik yalınkat dönüşümün ikinci kompleks dilatasyonu (genişlemesi) olan $w = \frac{\overline{f_{\bar{z}}}}{f_z}$ fonksiyonunun modülünün 1 den daha küçük bir analitik fonksiyon olduğunu belirtir. Bu nedenle $w = \frac{\overline{f_{\bar{z}}}}{f_z}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun analitik dilatasyonu (genişlemesi) veya kısaca genişlemesi de denilir. Ayrıca $w(z) \equiv 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul f fonksiyonunun analitik olmasıdır.

3.3. HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLARIN \mathcal{S}_H VE \mathcal{S}_H^0 SINIFLARI

Bu kısımda harmonik yalınkat fonksiyonların alt sınıfları ve bu sınıflara ait bazı temel özellikler verilecektir.

Basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde, kompleks değerli f harmonik fonksiyonu, h ve g fonksiyonları D bölgesinde analitik olmak üzere $f = h + \bar{g}$ biçiminde yazılır ve tek olan bu yazılışa f fonksiyonunun standart gösterimi denir [33].

Eğer f harmonik ise f_z nin analitik olduğunu biliyoruz. D bölgesinde analitik bir h fonksiyonu için $h' = f_z$ dir. $g = \bar{f} - \bar{h}$ olsun ve h fonksiyonunun tanımı gereği D bölgesinde

$$g_{\bar{z}} = \overline{f_z} - \overline{h_z} = 0$$

olur. Böylece g fonksiyonu D bölgesinde analitiktir. Bu gösterimin tekliği hem analitik hem de anti analitik yani analitik fonksiyonun eşleniği olan fonksiyonunun sabit olması gerçeğine bağlıdır. Eğer f reel değerli ise $2h$, f fonksiyonunun analitik tamamlayıcısı olmak üzere, gösterim imajiner bir ek sabite kadar yani $f = h + \bar{h} = \text{Re}\{2h\}$ eşitliğine kadar indirgenir.

\mathbb{D} birim diskinde h ve g analitik fonksiyonlarının seri açılımları

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

olmak üzere, \mathbb{D} birim diskinde yön koruyan harmonik $f = h + \bar{g}$ harmonik yalınkat fonksiyonu için $|g'(z)| < |h'(z)|$ dir. Bu durum $h'(z) \neq 0$ olduğunu gösterir. Bu sebepten ötürü, $h(0) = 0$ ve $h'(0) = 1$ almak genelliği bozmayacaktır. Böylece \mathbb{D} birim diskinde

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$$

özelliğinde yön koruyan $f = h + \bar{g}$ harmonik yalınkat dönüşümlerin sınıfı S_H ile gösterilir. $g'(0) = 0$ koşulunu sağlayan $f = h + \bar{g} \in S_H$ fonksiyonlarının sınıfı da S_H^0 ile gösterilir.

Yukarıda verilen tanımlamalar altında fonksiyon alt sınıfları arasında

$$S \subset S_H^0 \subset S_H$$

kapsama bağıntısı yazılabilir.

Tanım 3.1.10. F, D bölgesinde tanımlı analitik fonksiyonların bir ailesi olsun. F ailesindeki her $\{f_n\}$ dizisi D bölgesinin her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsak bir alt diziye sahip ise F ailesine normal aile denir.

Tanım 3.1.11. F, D bölgesinde tanımlı fonksiyonların bir ailesi olsun. F ailesindeki her yakınsak $\{f_n\}$ dizisi yine F ailesinde bir fonksiyona yakınsıyor ise F ailesine kompakttır denir.

Teorem 3.1.12. S_H^0 sınıfı normal ve kompakttır [33].

Teorem 3.1.13. $f = h + \bar{g} \in S_H^0$ fonksiyonları için $|b_2| \leq \frac{1}{2}$ dir [33].

3.4. HARMONİK YILDIZIL FONKSİYONLAR

Tanım 3.1.14. $f \in S_H$ yön- koruyan harmonik bir dönüşüm olsun. Eğer f dönüşümünün görüntü bölgesi orijine göre yıldızıl olan fonksiyona yıldızıldır denilir ve bu fonksiyonların sınıfı S_H^* ile gösterilir. S_H^* sınıfına ait bir f fonksiyonu \mathbb{D} birim diski içinde ise harmonik yıldızıl fonksiyon adı verilir. Bu tanım, geometrik olarak, görüntünün tamamının orijinden görülebilir olduğu anlamına gelmektedir. Harmonik yıldızıl fonksiyon analitik olarak

$$f \in S_H^* \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} (\arg f(re^{i\theta})) > 0$$

gösterimine sahiptir.

Tanım 3.1.15. \mathbb{D} birim diski içinde yön koruyan harmonik yalınkat $f = h + \bar{g}$ yıldızıl fonksiyonu için $z = re^{i\theta}$, $|z| = r > 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\arg f(re^{i\theta})) = \text{Im} \frac{\partial}{\partial \theta} (\log f(re^{i\theta})) = \text{Re} \frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + g(z)} \geq \alpha,$$

bağıntısı sağlanıyorsa f fonksiyonuna α mertebeli harmonik yıldızıl fonksiyon denir.

α mertebeli harmonik yıldızıl fonksiyon sınıfı $S_H^*(\alpha)$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.16. $f \in S_H^0$ ise $f = h + \bar{g}$ yıldızıl fonksiyonunun katsayıları $n = 2, 3, \dots$ için

$$|a_n| \leq \frac{(2n+1)(n+1)}{6}$$

$$|b_n| \leq \frac{(2n-1)(n-1)}{6}$$

$$\left| |a_n| - |b_n| \right| \leq n$$

eşitsizlikleri sağlanır [6].

Teorem 3.1.17. $f \in S_H$ ise $f = h + \bar{g}$ yıldızıl fonksiyonları için katsayı bağıntıları $n = 2, 3, \dots$ için

$$|a_n| < \frac{1}{3}(2n^2 + 1)$$

$$|b_n| < \frac{1}{3}(2n^2 + 1)$$

eşitsizlikleri sağlanır [10]. Bu sınırlar en iyi sınırlardır ve eşitlik hali hiçbir fonksiyon için mümkün değildir.

Teorem 3.1.18. Her yıldızlı $f \in S_H^0$ fonksiyonu için

$$|f(z)| \leq \frac{1}{3} \frac{3r + r^3}{(1-r)^3}, \quad (|z| = r < 1)$$

eşitsizliği sağlanır [10]. Bu sınırlar en iyi sınırlardır ve eşitlik hali harmonik Koebe fonksiyonu k_0 olması durumunda mümkündür.

3.5. HARMONİK KONVEKS FONKSİYONLAR

Tanım 3.1.19. Eğer $f \in S_H$ ise f dönüşümünün görüntü bölgesi konveks olan fonksiyon K_H ile gösterilir. K_H sınıfına ait f fonksiyonu \mathbb{D} birim diski içinde ise harmonik konveks fonksiyon adı verilir. Harmonik konveks fonksiyon analitik olarak

$$f \in K_H \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \arg \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) \right) > 0, \quad z = re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1$$

gösterimine sahiptir.

Tanım 3.1.20. \mathbb{D} birim diski içinde yön koruyan harmonik yalınkat $f = h + \bar{g}$ konveks fonksiyonu için $z = re^{i\theta}, |z| = r > 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \arg \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) \right) \right\} = \operatorname{Re} \frac{z^2 h''(z) + zh'(z) + \overline{z^2 g''(z) + zg'(z)}}{zh'(z) - \overline{zg'(z)}} \geq \alpha,$$

bağıntısı sağlanıyorsa f fonksiyonuna α mertebeli harmonik konveks fonksiyon denir.

α mertebeli harmonik konveks fonksiyon sınıfı $K_H(\alpha)$ ile gösterilir.

4. KONVEKSE YAKIN FONKSİYONLAR

Tezimizin bu bölümü analitik kısmı q -yıldızlı olan harmonik fonksiyonların gerçeklediği özellikleri araştırmaktır. Bunun için Kuantum matematiği (q -Calculus) yöntemlerini analitik fonksiyonlar teorisine yeni tanımlar vererek inşa edeceğiz. Bu yöntemleri yalınkat fonksiyonlar teorisine ilk olarak M. E. H. Ismail, E. Merkes ve D. Steyr tarafından “A Generalization of Starlike Functions (Complex Variable Theory Applications, vol. 14, pp. 77-84, 1990)” makalesinde kullanılmıştır [37]. Daha sonra ele alınmayan bu yöntem Mısırlı matematikçi M. K. Aouf ve T. M. Seoudy tarafından 2016 yılında “Coefficient Estimates of New Classes of q -Starlike and q -Convex Functions of Complex Order, (Journal of Mathematical Inequalities, vol. 10, no. 1, 2016), makalesiyle gündeme gelmiştir [38]. Daha sonra Sarita Agarwal, Meslina Darus, Yaşar Polatoğlu ve Hatice Esra Özkan bu konu üzerinde çalışmalar yapmıştır. Tezin bu bölümü Polonya’da “Conference on Analytic Functions and Related Topics” konferansından benim tarafımdan sunulup konferansa katılanlar tarafından hiç bir hata ve tenkite uğramadan tam bir onay almıştır.

Bu çalışmada, düzlemsel harmonik dönüşümlerin alt sınıflarını inceleyeceğiz. D birim diskinde $h(z)$ ve $g(z)$ analitik fonksiyonlarının seri açılımları

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

olmak üzere düzlemde harmonik tasvirler $f = h(z) + \overline{g(z)}$ şeklinde gösterilirler. Burada $h(z)$, f fonksiyonunun analitik kısmı ve $g(z)$ fonksiyonunda f fonksiyonunun ko-analitik kısmıdır. Eğer

$$w_q(z) = \frac{D_q g(z)}{D_q h(z)} = \frac{\overline{f_z}}{f_z}$$

lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin çözümü $|w_q(z)| < 1$ ve $w_q(z) < b_1 \frac{1+z}{1-qz}$ koşulları altında $f = h(z) + \overline{g(z)}$ ve $h(z)$ fonksiyonu da q -yıldızlı fonksiyon olacak

şekilde sağlanıyorsa, bu sınıf analitik kısmı q -yıldızlı olan q -harmonik dönüşüm olarak adlandırılır. Burada $D_q h(z) = \frac{h(z) - h(qz)}{(1-q)z} = f_z$ ve $D_q g(z) = \frac{g(z) - g(qz)}{(1-q)z} = \bar{f}_z, q \in (0,1)$.

Böyle fonksiyonların sınıflarını $SHS^*(q)$ ile göstereceğiz.

$$SHS^*(q) = \left\{ f = h(z) + \overline{g(z)} : h(z) \in S_q^*, w_q(z) = \frac{D_q g(z)}{D_q h(z)}, w_q(z) \prec b_1 \frac{1+z}{1-qz} \right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon sınıfını ve ayrıca

$$C_q = \left\{ g(z) \in A : \frac{D_q g(z)}{D_q f(z)} = p(z), p(z) \in P(q), f(z) \in K(q) \right\}$$

sınıfının incelenmesini ele alacağız.

Burada

$$K_q = \left\{ f(z) \in A : \frac{D_q(zD_q f(z))}{D_q f(z)} = p(z), p(z) \in P(q) \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

q - fark operatörü

$$D_q f(z) = \frac{f(z) - f(qz)}{(1-q)z}, z \in B \setminus \{0\}$$

şeklinde tanımlanır [39],[40]. Eğer $0 \in B$ ise $|q| < 1$ için sıfır noktasında tanımlanan q - türev operatörü

$$D_q f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(zq^n) - f(0)}{zq^n}, z \in B \setminus \{0\}$$

limit var olduğunda sağlanır ve z ye bağlı değildir. Ayrıca,

$$D_q f(0) = D_{q^{-1}} f(0)$$

eşitliğini yazmak mümkündür. q - fark operatörünün tanımını kullanarak aşağıdaki genel kuralları yazabiliriz [11], [40], [11].

- $f(z) = z^n$ fonksiyonu için

$$D_q f(z) = D_q z^n = \frac{1-q^n}{1-q} z^{n-1}$$

ise böylece

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots \Rightarrow D_q f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{1-q^n}{1-q} z^{n-1}$$

- $B \subset \mathbb{C}$ olmak üzere q -geometrik küme üzerinde tanımlı $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları için tüm $z \in B$ değerlerinde f ve g fonksiyonlarının q -türevleri

i) $D_q(af(z) \pm bg(z)) = aD_q f(z) \pm bD_q g(z)$, a ve b reel veya kompleks sabitler

ii) $D_q(f(z)g(z)) = g(z)D_q f(z) + f(qz)D_q g(z)$

iii) $D_q\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{g(z)D_q f(z) - f(z)D_q g(z)}{g(z)g(qz)}$, $g(z)g(qz) \neq 0$

iv) $\int_0^z f(t) d_q t = z(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(zq^n)$

- q -diferansiyel

$$d_q f(z) = f(z) - f(qz) \text{ ise}$$

$$D_q f(z) = \frac{d_q f(z)}{d_q z} = \frac{f(z) - f(qz)}{(1-q)z} \Rightarrow d_q f(z) = \frac{f(z) - f(qz)}{(1-q)z} d_q z$$

olur.

- Çok değişkenli $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ reel sürekli fonksiyonların q kısmi türevleri bir x_i değişkeni için

$$D_{q, x_i} f(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x}) - \varepsilon_{q, x_i} f(\vec{x})}{(1-q)x_i}, x_i \neq 0, q \in (0, 1)$$

$$\left[D_{q, x_i} f(\vec{x}) \right]_{x_i=0} = \lim_{x_i \rightarrow 0} D_{q, x_i} f(\vec{x})$$

$$\varepsilon_{q, x_i} f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, qx_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Burada $\frac{d_q^k}{d_q x^k}$ operatörü yerine $D_{k, x}^k$ kullanacağız.

Ω , \mathbb{D} birim diskinde bulunan $\phi(z)$ fonksiyonlar ailesi olsun. Her bir $z \in \mathbb{D}$ noktası için $\phi(0) = 0$ ve $|\phi(z)| < 1$ sağlansın. $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$ formunda yazılan fonksiyonlar ailesi $P(q)$ ile gösterilsin. $p(z) \in P(q)$ fonksiyonu aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\left| p(z) - \frac{1}{1-q} \right| < \frac{1}{1-q}, z \in \mathbb{D}$$

$q \in (0,1)$ bir reel sayıdır. \mathbb{A} , \mathbb{D} birim diskinde bulunan ve her bir $z \in \mathbb{D}$ noktası için $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ koşullarını sağlayan f fonksiyonlar ailesi olsun. $f(z)$, \mathbb{A} nın bir elemanı olsun. Eğer $f(z) \in \mathbb{A}$, $p(z) \in P(q)$ olmak üzere

$$z \frac{D_q f(z)}{f(z)} = p(z), z \in D$$

koşulunu gerçekler ise o zaman $f(z)$ fonksiyonuna q yıldızlı fonksiyon denir ve S_q^* ile gösterilir. $f_1(z)$ ve $f_2(z)$, \mathbb{A} nın elemanları olsunlar. Eğer $f_1(z) = f_2(\phi(z))$ olacak şekilde bir $\phi(z) \in \Omega$ fonksiyonu var ise $f_1(z)$, $f_2(z)$ fonksiyonuna sabordinedir denir ve $f_1(z) \prec f_2(z)$ ile gösterilir [24]. $f_1(z) \prec f_2(z)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $f_1(0) = f_2(0)$ ve $f_1(D) \subset f_2(D)$. Bu kapsama $D_r = \{z : |z| < r, 0 < r < 1\}$ bölgesinde $f_1(D_r) \subset f_2(D_r)$ olduğuna işaret etmektedir.

Teorem 4.1.1. $f(z)$ fonksiyonu q - yıldızlı fonksiyon alalım o zaman

$$\left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \leq |f(z)| \leq \left(\frac{r}{(1-qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}}$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{1-r}{1+qr} \right) \left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \leq |D_q f(z)| \leq \frac{1}{r} \left(\frac{1+r}{1-qr} \right) \left(\frac{r}{(1-qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}}$$

olur [41].

Teorem 4.1.2. Sabit olmayan kompleks değerli f fonksiyonu harmoniktir ve \mathbb{D} birim diski üzerinde yön koruyan olması için gerekli ve yeterli koşul f fonksiyonunun

$$w_q(z) f_z = \overline{f_{\bar{z}}} \quad (4.1)$$

lineer olmayan eliptik kısmi diferansiyel denkleminin çözümü olmasıdır.

İspat: \Rightarrow Burada,

$$f_z = D_q f(z) = \frac{f(z) - f(qz)}{(1-q)z}, \quad \overline{f_{\bar{z}}} = D_q g(z) = \frac{g(z) - g(qz)}{(1-q)z}$$

Denklem (3.1) in \bar{z} göre türevi alınırsa,

$$\bar{f}_{zz} = f_{z\bar{z}}w_q(z) + f_z \frac{\partial_q w}{\partial \bar{z}} \quad (4.2)$$

Eğer f , \mathbb{D} birim diski üzerinde harmonik ise o zaman

$$f_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \Delta f = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

ve $\bar{f}_{zz} = 0$ dır. Eşitlik (4.2) yeniden yazılırsa,

$$f_z \frac{\partial_q w}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (4.3)$$

elde edilir bu da gösterir ki $\frac{\partial_q w}{\partial \bar{z}} = 0$ yani $w_q(z)$ analitiktir.

⇐ Diğer taraftan, $w_q(z)$ \mathbb{D} birim diski üzerinde analitik alalım. O zaman, $\frac{\partial_q w}{\partial \bar{z}} = 0$ dır.

Böylece, eşitlik (4.2)

$$\bar{f}_{zz} = f_{z\bar{z}}w_q(z) \quad (4.4)$$

formuna indirgenir.

$w_q(z)$ nin tanımını kullanarak ve ayrıca $|w_q(z)| < 1$ alındığında

$$1 - |w_q(z)| \neq 0 \quad (4.5)$$

elde edilir.

Eşitlik (4.4) ve (4.5) birlikte düşünüldüğünde,

$$\begin{aligned} \bar{f}_{zz} &= f_{z\bar{z}}w_q(z) = |\bar{f}_{zz}| = |f_{z\bar{z}}| |w_q(z)| \\ &= |\bar{f}_{zz}| |1 - w_q(z)| = 0 \\ &= \frac{0}{(1 - w_q(z))} = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Böylece $\bar{f}_{zz} = 0$ olur. Eşitlik (4.6), f fonksiyonunun harmonik olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.3. $p(z) \in P(q)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$p(z) \prec \frac{1+z}{1-qz}$$

dir.

İspat: $\Rightarrow p(z) \in P(q)$ ele alalım. Bu durumda,

$$\left| p(z) - \frac{1}{1-q} \right| < \frac{1}{1-q} \Rightarrow |p(z) - m| < m \quad (4.7)$$

elde edilir ki burada

$$\frac{1}{1-q} = m \Leftrightarrow 1-q = \frac{1}{m} \Rightarrow 1 - \frac{1}{m} = q$$

Böylece $\psi(z) = \frac{1}{m}p(z) - 1$, \mathbb{D} birim diskinde modülü en çok 1 dir.

$$\phi(z) = \frac{\psi(z) - \psi(0)}{1 - \overline{\psi(0)}\psi(z)} = \frac{\left(\frac{1}{m}p(z) - 1\right) - \left(\frac{1-m}{m}\right)}{1 - \left(\frac{1-m}{m}\right)\left(\frac{1}{m}p(z) - 1\right)} \quad (4.8)$$

$\phi(0) = 0$, $|\phi(z)| < 1$ dir. Schwarz yardımcı teoremini kullanarak

$$|\phi(z)| < |z| \quad (4.9)$$

yazılır. Böylece, Denklem (4.8) ve Eşitsizlik (4.9) kullanılarak,

$$\phi(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z)\left(1 - \frac{1}{m}\right) + 1} = \phi(z) \Rightarrow p(z) = \frac{1 + \phi(z)}{1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\phi(z)} \quad (4.10)$$

$$\Rightarrow p(z) \prec \frac{1+z}{1-qz}$$

elde edilmiş olur.

\Leftarrow Farzedelim ki $p(z)$ analitik olsun ve $p(0) = 1$ ve $p(z) \prec \frac{1+z}{1-qz}$ koşullarını sağlasın. O

halde,

$$p(z) \prec \frac{1+z}{1-qz} \Rightarrow p(z) = \frac{1 + \phi(z)}{1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\phi(z)}$$

$$\Rightarrow p(z) - m = \frac{1 - m + m\phi(z)}{1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\phi(z)}$$

$$\Rightarrow p(z) - m = m \frac{\frac{1-m}{m} + \phi(z)}{1 + \frac{1-m}{m}\phi(z)}$$

$$\Rightarrow |p(z) - m| = \left| m \frac{\frac{1-m}{m} + \phi(z)}{1 + \frac{1-m}{m}\phi(z)} \right| < m$$

$$\Rightarrow p(z) \in P(q)$$

Yardımcı Teorem 4.1.4. $|q| \neq 1$ olmak üzere B , q geometrik küme üzerinde $f(z)$ reel veya kompleks değerli olarak tanımlanan bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$D_q(\log f(z)) = \frac{D_q f(z)}{f(z)}$$

dir.

İspat: q – fark operatörünün tanımını kullanarak,

$$D_q(\log f(z)) = \frac{\log f(z) - \log f(qz)}{z - zq} = \frac{\log f(qz) - \log f(z)}{h} = \log \left(\frac{f(qz)}{f(z)} \right)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \log \left(1 + \frac{f(qz) - f(z)}{f(z)} \right)^{\frac{1}{h}} = \log \left(1 + h \frac{D_q f(z)}{f(z)} \right)^{\frac{1}{h}}$$

$h \rightarrow 0$ için limit alındığında, $D_q(\log f(z)) = \frac{D_q f(z)}{f(z)}$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.5. (I. S. Jack) \mathbb{D} birim diskinde $\phi(z)$, $\phi(0) = 0$ koşulunu sağlayan analitik bir fonksiyon olsun. Eğer $|\phi(z)|$ maksimum değerini bir $z_0 \in D$ noktasındaki $|z| = r$ çemberi üzerinde alırsa o zaman $m \geq 1$ olacak şekilde $z_0 D_q \phi(z_0) = m \phi(z_0)$ eşitliği yazılır [42].

İspat: q – fark operatörünün tanımını ve Jack yardımcı teoremini kullanarak,

$$D_q \phi(z) = \frac{\phi(z) - \phi(qz)}{z - qz} = \frac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0}, \quad qz = z_0$$

$z \rightarrow z_0$ için limit alındığında,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \phi(z) = D_q \phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0} = \phi'(z_0)$$

Böylece,

$$z_0 D_q \phi(z_0) = z_0 \phi'(z_0) = m \phi(z_0)$$

elde edilir. Bu da ispatın tamamlandığını gösterir.

Teorem 4.1.6. $f = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu $SHS^*(q)$ sınıfının bir elemanı olsun. Bu durumda,

$$\frac{g(z)}{h(z)} \prec b_1 \frac{1+z}{1-qz}$$

dir.

İspat:

$$\frac{g(z)}{h(z)} = b_1 \frac{1+\phi(z)}{1-q\phi(z)} \quad (4.11)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\phi(z)$ analitiktir ve

$$\frac{g(z)}{h(z)} \Big|_{z=0} = b_1 = b_1 \frac{1+\phi(0)}{1-q\phi(0)} \Rightarrow \phi(0) = 0$$

koşulunu gerçekler şimdi her $z \in D$ için $|\phi(z)| < 1$ olduğunu gösterelim.

$$w(z) = b_1 \frac{1+z}{1-qz}$$

lineer dönüşümü, merkezi

$$C(r) = \left(\frac{\alpha_1(1+qr^2)}{1-q^2r^2}, \frac{\alpha_2(1+qr^2)}{1-q^2r^2} \right)$$

ve yarıçapı

$$\rho(r) = \frac{|b_1|(1+q)r}{1-q^2r^2}$$

olan birim diskinde resmeder.

Sabordinasyon ilkesini ve $SHS^*(q)$ sınıfının tanımını kullanarak,

$$w_q(D_r) = \left\{ \frac{D_q g(z)}{D_q h(z)} \left| \frac{D_q g(z)}{D_q h(z)} - \frac{|b_1|(1+qr^2)}{1-q^2r^2} \right| \leq \frac{|b_1|(1+qr^2)}{1-q^2r^2}, q \in (0,1) \right\} \quad (4.12)$$

Denklem (4.11) in q -türevi alındığında

$$D_q \left(\frac{g(z)}{h(z)} \right) = \frac{h(qz)D_q g(z) - g(qz)D_q h(z)}{h(z)h(qz)} = D_q \left(b_1 \frac{1+\phi(z)}{1-q\phi(z)} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{D_q g(z)}{D_q h(z)} = b_1 \left(\frac{1+\phi(z)}{1-q\phi(z)} + \frac{(1+q)zD_q \phi(z)}{(1-q\phi(z))(1-q\phi(qz))} \frac{h(z)}{zD_q h(z)} \right) \quad (4.13)$$

elde edilir.

$h(z) \in S_q^*$ olduğundan dolayı S_q^* sınıfının tanımından

$$\frac{h(z)}{zD_q h(z)} = \frac{1-q}{e^{i\theta} + 1}$$

dir. Böylece Denklem (4.13)

$$D_q \left(\frac{g(z)}{h(z)} \right) = b_1 \left(\frac{1+\phi(qz)}{1-q\phi(qz)} + \frac{(1+q)zD_q \phi(z)}{(1-q\phi(z))(1-q\phi(qz))} \frac{1-q}{e^{i\theta} + 1} \right) \quad (4.14)$$

şeklinde yeniden yazılır.

Şimdi $|\phi(z_0)|=1$ olacak şekilde birim diskte bir z_0 elemanının olduğunu farz edelim.

q -Jack yardımcı teoremini kullanarak

$$\frac{D_q g(z_0)}{D_q h(z_0)} = b_1 \left(\frac{1+\phi(qz_0)}{1-q\phi(qz_0)} + \frac{(1+q)m\phi(z_0)}{(1-q\phi(z_0))(1-q\phi(qz_0))} \frac{1-q}{e^{i\theta} + 1} \right) \notin w_q(D_r)$$

Elde edilen denklem, Denklem (4.12) ile çelişki ihtiva eder. Böylece birim diskte alınan her z elemanı için $|\phi(z)| < 1$ dir. Sonuç olarak

$$\frac{g(z)}{h(z)} < b_1 \frac{1+z}{1-qz}$$

elde edilmiş olur.

Sonuç 4.1.7. $f = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu $SHS^*(q)$ sınıfının bir elemanı olsun. Bu durumda,

$$|b_1| \frac{1-r}{1+qr} \left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \leq |g(z)| \leq |b_1| \frac{1+r}{1-qr} \left(\frac{r}{(1-qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \quad (4.15)$$

İspat:

$$w(z) = b_1 \frac{1+z}{1-qz}$$

lineer dönüşümü, merkezi

$$C(r) = \left(\frac{\alpha_1(1+qr^2)}{1-q^2r^2}, \frac{\alpha_2(1+qr^2)}{1-q^2r^2} \right)$$

ve yarıçapı

$$\rho(r) = \frac{|b_1|(1+q)r}{1-q^2r^2}$$

olan birim diskinde resmeder.

Sabordinasyon ilkesini ve $SHS^*(q)$ sınıfının tanımını kullanarak,

$$w_q(D_r) = \left\{ \frac{D_q g(z)}{D_q h(z)} : \left| \frac{D_q g(z)}{D_q h(z)} - \frac{|b_1|(1+qr^2)}{1-q^2r^2} \right| \leq \frac{|b_1|(1+q)r}{1-q^2r^2}, q \in (0,1) \right\}$$

eşitsizliğini yazabiliriz ve üçgen eşitsizliklerini kullanarak

$$|b_1| \frac{1-r}{1+qr} \leq \left| \frac{g(z)}{h(z)} \right| \leq |b_1| \frac{1+r}{1-qr}$$

elde edilir.

$$\left| z \frac{D_q f(z)}{f(z)} - \frac{(1+qr^2)}{1-q^2r^2} \right| \leq \frac{(1+q)r}{1-q^2r^2}$$

eşitsizliğinden yararlanarak

$$\frac{1-r}{1+qr} \leq \operatorname{Re} \left(z \frac{D_q f(z)}{f(z)} \right) \leq \frac{1+r}{1-q^2r^2}$$

sonucu elde edilir.

$$z \frac{D_q f(z)}{f(z)} = r \frac{\partial q}{\partial r} \log |f(z)|$$

eşitliğini kullanarak Denklem (4.15) e ulaşırız.

Sonuç 4.1.8. $f = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu $SHS^*(q)$ sınıfının bir elemanı olsun. Bu durumda,

$$|b_1| \frac{1}{r} \left(\frac{1-r}{1+qr} \right)^2 \left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \leq |D_q g(z)| \leq |b_1| \frac{1}{r} \left(\frac{1+r}{1-qr} \right)^2 \left(\frac{r}{(1-qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \quad (4.16)$$

elde edilir.

İspat:

$$|b_1| \frac{1-r}{1+qr} \leq |w_q(z)| \leq |b_1| \frac{1+r}{1-qr}$$

eşitsizliğinden yola çıkarak,

$$|b_1| \frac{1-r}{1+qr} \leq \left| \frac{D_q g(z)}{D_q h(z)} \right| \leq |b_1| \frac{1+r}{1-qr} \quad (4.17)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

$$\frac{1}{r} \left(\frac{1-r}{1+qr} \right) \left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \leq |D_q h(z)| \leq \frac{1}{r} \left(\frac{1+r}{1-qr} \right) \left(\frac{r}{(1-qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \quad (4.18)$$

Eşitsizlik (4.17) ve (4.18) çarpıldığında, Denklem (4.16) elde edilir. Bu denklem Teorem 4.1.1 ve $SHS^*(q)$ sınıfının tanımının basit bir sonucudur.

Sonuç 4.1.9. $f = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu $SHS^*(q)$ sınıfının bir elemanı için Heinz eşitsizliği,

$$\begin{aligned} |D_q h(z)|^2 + |D_q g(z)|^2 &= |D_q h(z)|^2 + |w_q(z)|^2 |D_q h(z)|^2 = |D_q h(z)|^2 (1 + |w_q(z)|^2) \\ &\geq \frac{(1+qr)^2 + |b_1|^2 (1-r)^2}{(1+qr)^2} \left[\frac{1}{r} \frac{1-r}{1+qr} \left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \right]^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

İspat: q -yıldızlı fonksiyonlar için biliyoruz ki

$$|b_1| \frac{1-r}{1+qr} \left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \leq |D_q h(z)| \leq |b_1| \frac{1+r}{1-qr} \left(\frac{r}{(1-qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}}$$

eşitsizliği mevcuttur.

Ayrıca daha önceden kullandığımız

$$|b_1| \frac{1-r}{1+qr} \leq |w_q(z)| \leq |b_1| \frac{1+r}{1-qr} \quad (4.20)$$

eşitsizliğini de ele alarak

$$1 + |b_1|^2 \frac{(1-r)^2}{(1+qr)^2} \leq 1 + |w_q(z)|^2 \leq 1 + |b_1|^2 \frac{(1+r)^2}{(1-qr)^2}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Ayrıca,

$$w_q(z) = \frac{D_q g(z)}{D_q h(z)} \Rightarrow |D_q g(z)| = |D_q h(z)| |w_q(z)|$$

$$\Rightarrow |D_q g(z)|^2 = |D_q h(z)|^2 |w_q(z)|^2$$

Denkleminin her iki yanına $|D_q h(z)|^2$ terimi eklenip ortak paranteze alınırsa;

$$\begin{aligned} |D_q h(z)|^2 + |D_q g(z)|^2 &= |D_q h(z)|^2 + |D_q h(z)|^2 |w_q(z)|^2 \\ &= |D_q h(z)|^2 \left(1 + |w_q(z)|^2\right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$$1 + |w_q(z)|^2 \geq \frac{(1+qr)^2 + |b_1|^2(1-r)^2}{(1+qr)^2}$$

eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} |D_q h(z)|^2 + |D_q g(z)|^2 &= |D_q h(z)|^2 + |D_q h(z)|^2 |w_q(z)|^2 \\ &= |D_q h(z)|^2 \left(1 + |w_q(z)|^2\right) \\ &\geq |D_q h(z)|^2 \left(\frac{(1+qr)^2 + |b_1|^2(1-r)^2}{(1+qr)^2}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği ve ayrıca

$$\geq \frac{(1+qr)^2 + |b_1|^2(1-r)^2}{(1+qr)^2} \left[\frac{1-r}{r(1+qr)} \left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \right]^2$$

sonucu elde edilmiştir.

Sonuç 4.1.10. $f = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu $SHS^*(q)$ sınıfının bir elemanı olsun. Bu durumda,

$$F_2(A, B, C, D, q, r) \leq |J_{f_q}(z)| \leq F_1(A, B, C, D, q, r) \quad (4.21)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada,

$$F_1(A, B, C, D, q, r) = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1+r}{1-qr} \right) \left(\frac{r}{(1-qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \right]^2 \frac{(A-Br)(C+Dr)}{(1+qr)^2}$$

$$F_2(A,B,C,D,q,r) = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1-r}{1+qr} \right) \left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \right]^2 \frac{(A+Br)(C+Dr)}{(1-qr)^2}$$

Buradaki A, B, C ve D katsayıları $A = 1 + |b_1|$, $B = |b_1| - q$, $C = 1 - |b_1|$, $D = |b_1| + q$ şeklinde tanımlanır.

İspat:

$$|J_{f_q}(z)| = |D_q h(z)|^2 - |D_q g(z)|^2 = |D_q h(z)|^2 \left(1 - |w_q(z)|^2 \right) \quad (4.22)$$

ve ayrıca,

$$|b_1| \frac{1-r}{1+qr} \leq |w_q(z)| \leq |b_1| \frac{1+r}{1-qr}$$

eşitsizliklerinden yola çıkarak,

$$1 - \frac{|b_1|^2 (1-r)^2}{(1+qr)^2} \leq \left(1 - |w_q(z)|^2 \right) \leq 1 - \frac{|b_1|^2 (1+r)^2}{(1-qr)^2}$$

$$\frac{(A+Br)(C-Dr)}{(1-qr)^2} \leq \left(1 - |w_q(z)|^2 \right) \leq \frac{(A-Br)(C+Dr)}{(1+qr)^2}$$

$$F_2(A,B,C,D,q,r) \leq |J_{f_q}(z)| \leq F_1(A,B,C,D,q,r)$$

$$\left[\frac{1}{r} \left(\frac{1-r}{1+qr} \right) \left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \right] \leq |D_q h(z)| \leq \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1+r}{1-qr} \right) \left(\frac{r}{(1-qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \right]$$

burada

$$F_1(A,B,C,D,q,r) = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1+r}{1-qr} \right) \left(\frac{r}{(1-qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \right]^2 \frac{(A-Br)(C+Dr)}{(1+qr)^2}$$

$$F_2(A,B,C,D,q,r) = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1-r}{1+qr} \right) \left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \right]^2 \frac{(A+Br)(C-Dr)}{(1-qr)^2}$$

dir.

Sonuç 4.1.11. $f = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu $SHS^*(q)$ sınıfının bir elemanı olsun. Bu durumda,

$$F_2(A, B, q, r) \leq |f| \leq F_1(C, D, q, r) \quad (4.23)$$

$$A = 1 - |b_1|, \quad B = q + |b_1|, \quad C = 1 + |b_1|, \quad D = q - |b_1|$$

$$F_1(C, D, q, r) = \int \frac{(C - Dr)(1+r)}{r(1-qr)^2} \left(\frac{r}{(1-qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} |d_q z|$$

$$F_1(A, B, q, r) = \int \frac{(A - Br)(1-r)}{r(1-qr)(1+qr)} \left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} |d_q z|$$

İspat:

$$|b_1| \frac{1-r}{1+qr} \leq |w_q(z)| \leq |b_1| \frac{1+r}{1-qr}$$

eşitsizliğini ele alarak,

$$1 - \frac{|b_1|(1+r)}{(1-qr)} \leq (1 - |w_q(z)|) \leq 1 - \frac{|b_1|(1-r)}{(1+qr)}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

$$\frac{(1 - |b_1|) - (q + |b_1|)r}{(1-qr)} \leq (1 - |w_q(z)|) \leq \frac{(1 - |b_1|) + (q + |b_1|)r}{(1+qr)}$$

Genel düzenlemeler yaparak,

$$\frac{A - Br}{(1-qr)} \leq (1 - |w_q(z)|) \leq \frac{A + Br}{(1+qr)}$$

ve

$$1 + \frac{|b_1|(1-r)}{(1+qr)} \leq (1 + |w_q(z)|) \leq 1 + \frac{|b_1|(1+r)}{(1-qr)}$$

eşitsizliklerini buluruz. Buradan,

$$\frac{(1 + |b_1|) + (q - |b_1|)r}{(1+qr)} \leq (1 + |w_q(z)|) \leq \frac{(1 + |b_1|) - (q - |b_1|)r}{(1-qr)}$$

$$\frac{C + Dr}{(1+qr)} \leq (1 + |w_q(z)|) \leq \frac{C - Dr}{(1-qr)}$$

$$\left(\left| D_q h(z) \right| - \left| D_q g(z) \right| \right) \left| d_q z \right| \leq \left| d_q f \right| \leq \left(\left| D_q h(z) \right| + \left| D_q g(z) \right| \right) \left| d_q z \right|$$

$$\left| D_q h(z) - w_q(z) D_q h(z) \right| \left| d_q z \right| \leq \left| d_q f \right| \leq \left| D_q h(z) + w_q(z) D_q h(z) \right| \left| d_q z \right|$$

$$\left| D_q h(z) \right| \left| (1 - w_q(z)) \right| \left| d_q z \right| \leq \left| d_q f \right| \leq \left| D_q h(z) \right| \left| (1 + w_q(z)) \right| \left| d_q z \right|$$

Bu eşitliğin her iki tarafının q - integrali alındığında Denklem (4.23) elde edilir.

$$F_1(C, D, q, r) = \int \frac{(C - Dr)(1+r)}{r(1-qr)^2} \left(\frac{r}{(1-qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \left| d_q z \right|$$

$$F_2(A, B, q, r) = \int \frac{(A - Br)(1-r)}{r(1-qr)(1+qr)} \left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \left| d_q z \right|$$

Teorem 4.1.12. Eğer $f(z) \in K_q$ ise

$$z \frac{D_q f(z)}{f(z)} \prec \frac{1}{1-qr} \quad (4.24)$$

İspat:
$$z \frac{D_q f(z)}{f(z)} = \frac{1}{1-q\phi(z)} \quad (4.25)$$

şeklinde tanımlanan denklemde,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \text{ ve}$$

$$z D_q f(z) = z + a_2 \frac{1-q^2}{1-q} z^2 + a_3 \frac{1-q^3}{1-q} z^3 \dots,$$

olduğundan dolayı,

$$\left. z \frac{D_q f(z)}{f(z)} \right|_{z=0} = 1 = \frac{1}{1-q\phi(z)} \Rightarrow \phi(0) = 0$$

olur. Her $z \in D$ için $|\phi(z)| < 1$ olduğunu gösterelim. Verilenin aksine, $z_0 \in D$ için $|\phi(z_0)| = 1$

olsun. Sabordinasyon ilkesini ve $K(q)$ sınıfının tanımını kullanarak,

$$A(r) = \left\{ f(z) : \left| (1+qr) \frac{D_q(D_q f(z))}{D_q f(z)} - \frac{1+qr^2}{1-q^2 r^2} \right| \leq \frac{(1+q)r}{1-q^2 r^2}, f(z) \in K(q) \right\} \quad (4.26)$$

Diğer taraftan, q -türev, Teorem 4.1.3 ve Denklem 4.25 kullanılarak,

$$(1+qz) \frac{D_q(D_q f(z))}{D_q f(z)} = q \left(\frac{1}{1-q\phi(z)} \right) + \frac{\log q^{-1}}{1-q} \frac{z D_q \phi(z)}{1-q\phi(z)} + \left(1 - q \frac{\log q^{-1}}{1-q} \right) \quad (4.27)$$

q – Jack lemmayı Denklem (4.27) de kullanarak

$$(1+qz_0) \frac{D_q(D_q f(z_0))}{D_q f(z_0)} = q \left(\frac{1}{1-q\phi(z_0)} \right) + \frac{\log q^{-1}}{1-q} \frac{z D_q \phi(z_0)}{1-q\phi(z_0)} + \left(1 - q \frac{\log q^{-1}}{1-q} \right) \notin A(r)$$

elde edilir. Bu, Denklem (4.26) ile çelişki yaratır böylece tüm $z \in D$ için $|\phi(z)| < 1$ olur.

Teorem 4.1.13. Eğer $f(z) \in K_q$ ise o zaman

$$\left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \leq |f(z)| \leq \left(\frac{r}{(1-qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \quad (4.28)$$

Bu sınırlar keskindir çünkü ekstremal fonksiyon $z \frac{D_q f(z)}{f(z)} = \frac{1}{1-qz}$, q – diferansiyel denkleminin çözümüdür.

İspat: $w(z) = \frac{1}{1-qz}$ lineer dönüşümü, merkezi $C(r) = \frac{1}{1-q^2 r^2}$ ve yarıçapı $\rho(r) = \frac{qr}{1-q^2 r^2}$

$|z| = r$ olan birim diskinde resmeder. Teroem 4.1.3 ve sabordinasyon ilkesini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz,

$$\left| z \frac{D_q f(z)}{f(z)} - \frac{1}{1-q^2 r^2} \right| \leq \frac{qr}{1-q^2 r^2} \quad (4.29)$$

Eşitsizlik (4.29) aşağıdaki formda yeniden yazılabilir.

$$\frac{1}{1+qr} \leq \operatorname{Re} \left(re^{i\theta} \frac{D_q f(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right) \leq \frac{1}{1-qr} \quad (4.30)$$

Diğer yandan,

$$\operatorname{Re} \left(re^{i\theta} \frac{D_q f(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right) = r \frac{\partial_q}{\partial_r} \log |f(re^{i\theta})| \quad (4.31)$$

Eşitsizlik (4.30) ve (4.31) birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz,

$$\frac{1}{r(1+q)} \leq \frac{\partial_q}{\partial_r} \log |f(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{r(1-qr)} \quad (4.32)$$

Eşitsizlik (4.32) nin her iki yanının q – integrali alındığında, Denklem (4.28) elde edilir.

Uyarı 4.1.14. $\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1-q}{\log q^{-1}} = 1$ olduğundan dolayı Denklem (4.28)

$$\frac{r}{(1+r)} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)}$$

konveks fonksiyonlar için büyüme teoremi olarak bilinir.

Uyarı 4.1.15. Eğer $f(z) \in K_q$ ise o zaman

$$(1+qr)^{-\left(\frac{1-q^2}{q^2 \log q^{-1}}\right)} \leq |D_q f(z)| \leq (1-qr)^{-\left(\frac{1-q^2}{q^2 \log q^{-1}}\right)} \quad (4.33)$$

dir.

Bu sınırlar keskindir çünkü ekstremal fonksiyon q – diferansiyel denkleminin çözümüdür.

İspat: $\left(\frac{1+z}{1-qz}\right)$ lineer dönüşümü merkezi $C(r) = \frac{1+qr^2}{1-q^2r^2}$ ve yarıçapı $\rho(r) = \frac{(1+qr)}{1-q^2r^2}$ disk üzerinden $|z| = r$ olan birim diske resmeder. Sabordinasyon ilkesini ve K_q kullanılarak,

$$\left| 1+qz \frac{Dq(D_q f(z))}{D_q f(z)} - \frac{1+qr^2}{1-q^2r^2} \right| \leq \frac{(1+q)r}{1-q^2r^2}$$

yazılır. Teorem 4.1.13 de kullandığımız aynı teknikle,

$$\frac{1+q}{q} \frac{1}{1+qr} \leq \frac{\partial_q}{\partial_r} \log |D_q f(re^{i\theta})| \leq \frac{1+q}{q} \frac{1}{1-qr} \quad (4.34)$$

Eşitsizlik (4.34) in her iki tarafından q – integral alınarak Eşitsizlik (4.33) elde edilmiş olur.

Uyarı 4.1.16. $\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1-q^2}{q^2 \log q^{-1}} = 2$ olduğundan dolayı Eşitsizlik (4.33),

$$(1+r)^{-2} \leq |f'(z)| \leq (1-r)^{-2}$$

elde edilir. Bu bu konveks fonksiyonlar için bükülme teoremi olarak bilinir.

Teorem 4.1.17. Eğer $g(z) \in C_q$ ise o zaman

$$(1-r)(1+qr)^{-\left(\frac{1-q^2}{q^2 \log q^{-1}}+1\right)} \leq |D_q g(z)| \leq (1+r)(1-qr)^{-\left(\frac{1-q^2}{q^2 \log q^{-1}}+1\right)} \quad (4.35)$$

Bu sınırlar keskindir çünkü ekstremal fonksiyon $\frac{D_q g(z)}{D_q f(z)} = \frac{1+z}{1-qz}$, q -diferansiyel denkleminin çözümüdür. Bu şartlar altında $f(z)$, q -konveks fonksiyondur.

İspat: C_q sınıfının tanımını ve Teorem 4.1.3 kullanılarak,

$$\frac{D_q g(z)}{D_q f(z)} = p(z) \Leftrightarrow \frac{D_q g(z)}{D_q f(z)} \prec \frac{1+z}{1-qz} \Rightarrow \left| \frac{D_q g(z)}{D_q f(z)} - \frac{1+qr^2}{1-q^2 r^2} \right| \leq \frac{(1+q)r}{1-q^2 r^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1-r}{1+qr} |D_q f(z)| \leq |D_q g(z)| \leq \frac{1+r}{1-qr} |D_q f(z)|$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Denklem (4.35) elde edilir.

Teorem 4.1.18. Eğer $g(z) \in C_q$ ise o zaman

$$\frac{g(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-qz} \quad (4.36)$$

olur.

İspat: $g(z) \in C_q$ ise o zaman

$$A(r) = \left\{ \frac{D_q g(z)}{D_q f(z)} : \left| \frac{D_q g(z)}{D_q f(z)} - \frac{1+qr^2}{1-q^2 r^2} \right| \leq \frac{(1+q)r}{1-q^2 r^2}, f(z) \in K(q), q \in (0,1) \right\} \quad (4.37)$$

$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)}$ eşitliğinde, $\phi(z)$ analiktir ve $\phi(0) = 0$ dır. Şimdi her $z \in D$ için $|\phi(z)| < 1$

olduğunu gösterelim. Farzedelim ki $z_0 \in D$ için $|\phi(z_0)| = 1$ olsun. Diğer taraftan,

$$D_q \left(\frac{g(z)}{f(z)} \right) = D_q \left(\frac{1+\phi(z)}{1-q\phi(z)} \right) \Rightarrow$$

$$D_q \left(\frac{g(z)}{f(z)} \right) = \frac{g(qz)}{f(qz)} + \frac{(1+q)D_q \phi(z)}{(1-q\phi(z))(1-q\phi(qz))} \frac{f(z)}{D_q f(z)}$$

$$\frac{D_q g(z_0)}{D_q f(z_0)} = \frac{1+\phi(qz_0)}{1-q\phi(qz_0)} + \frac{(1+q)z_0 D_q \phi(z_0)}{(1-q\phi(z_0))(1-q\phi(qz_0))} \frac{f(z_0)}{z_0 D_q f(z_0)} \quad (4.38)$$

q - Jack lemma ve Teorem (4.1.12) kullanılarak,

$$\frac{D_q g(z_0)}{D_q f(z_0)} = \left(\frac{1 + \phi(qz_0)}{1 - q\phi(qz_0)} + \frac{(1+q)m\phi(z_0)}{(1-q\phi(z_0))(1-q\phi(qz_0))} \frac{1-q^2r^2}{1+qre^{i\theta}} \right) \notin A_r$$

yazılır. Bu, Eşitsizlik (4.37) ile çelişkidir ve böylece tüm $z \in D$ için $|\phi(z)| < 1$ olur. Dikkat

edersek, denklemde bulunan $\left(\frac{1-q^2r^2}{1+qre^{i\theta}} \right)$ çarpanı $\left(z \frac{D_q f(z)}{D_q g(z)} \right)$ sınıır değerinin tersidir.

Sonuç: 4.1.19. Eğer $g(z) \in C_q$ ise o zaman,

$$\left(\frac{r}{(1+qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \frac{1-r}{1+qr} \leq |g(z)| \leq \left(\frac{r}{(1-qr)^{\frac{1+q}{q}}} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \frac{1+r}{1-qr} \quad (4.39)$$

İspat: Teorem 4.1.18. kullanılarak,

$$\left(\frac{1-r}{1+qr} \right)^{\frac{1-q}{\log q^{-1}}} \leq \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-qr} \Rightarrow$$

$$|f(z)| \frac{1-r}{1+qr} \leq |g(z)| \leq |f(z)| \frac{1+r}{1-qr}$$

Bu adım da Teorem 4.1.13. kullanılarak Denklem (4.39) elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Analitik kısmı q -yıldızlı olan harmonik fonksiyonların gerçekleştiği özellikler derinlemesine incelenmiştir. Yalınkat analitik fonksiyonlar teorisi için kuantum matematiği (q -Calculus) yöntemlerini ele alarak yeni tanımlamalar tez kapsamında yapılmıştır. Bu doktora çalışmasında, düzlemsel harmonik dönüşümlerin alt sınıfları detaylı bir şekilde incelenmiştir. q -harmonik dönüşüm için

$$SHS^*(q) = \left\{ f = h(z) + \overline{g(z)} : h(z) \in S_q^*, w_q(z) = \frac{D_q g(z)}{D_q h(z)}, w_q(z) \prec b_1 \frac{1+z}{1-qz} \right\}$$
$$C_q = \left\{ g(z) \in A : \frac{D_q g(z)}{D_q f(z)} = p(z), p(z) \in P(q), f(z) \in K(q) \right\}$$

şeklinde belirtilen fonksiyon sınıflarının incelenmesi yapılmıştır.

Bu çalışmanın devamında q -konvekse yakın fonksiyonların alt sınıfları ve diğer sınıflar içinde yalınkat fonksiyonlar için kullanılan temel eşitsizliklerden faydalanarak yeni denklem ve eşitsizlikler elde edilebilir. Bu sonuçları elde ederken benzer olarak sabordinasyon ilkesi, büyüme, bükülme teoremlerinden yararlanır.

Bu tezde elde edilen sonuçlar bilimsel kongrelerde sunulmuş ve makale formatına getirilerek alan indeksli dergilere gönderilmiştir.

Tezin esas kısmı olan Bölüm 3'te elde edilen sonuçlar Romanya'da düzenlenen "12th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications" adlı kongrede sözel olarak sunulmuş ve tam metin olarak basılmıştır, ayrıca, Polonya da düzenlenen "XVIIIth Conference on Analytic Functions and Related Topics" ve Türkiye'de düzenlenmiş birçok konferansta yine bölüm 3 den elde ettiğimiz sonuçlar ışığında yeni kavramlar ve teoremler üzerine yapılar inşa etmekteyiz. Burdan elde ettiğimiz sonuçlar, "Sarajevo Journal of Mathematics" dergisinde ve "Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics" dergisinde yayınlanmıştır. Basım bilgileri sırasıyla [A. 2.] ve [A. 1.] de bulunabilir

6. KAYNAKLAR

- [1] W. A. Goodman and E. B. Saff, "On the definition of a close to convex function," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol.1, pp. 125-132, 1978.
- [2] J. Kowalczyk and E. Leś-Bomba, "On a subclass of close-to-convex functions," *Applied Mathematics Letters*, vol. 23, pp. 1147-1151, 2010.
- [3] C. Y. Gao and S. Q. Zhou, "On a class of analytic functions related to the starlike functions," *Kyungpook Math. J.*, vol. 45, no.1, pp. 123-130, 2005.
- [4] O. R. Maxwell, On close to convex univalent functions, received as lecture note, 1955.
- [5] W. Kaplan, "Close to convex schlicht functions," *Michigan Math. J.*, pp. 169-185, 1952.
- [6] M. S. Robertson, "Analytic functions starlike in one direction," *American Journal of Mathematics*, vol. 58, pp. 456-472, 1936.
- [7] K. I. Noor, and S. N. Malik, "On coefficient inequalities of functions associated with conic domains," *Computers and Mathematics Appl.*, vol. 62, pp. 2209-2217, 2011.
- [8] S. Mahmood, M. Arif and S. N. Malik, "Janowski type close-to-convex functions associated with conic regions," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2017, pp. 1-14, 2017.
- [9] P. N. Chicra, "New subclasses of the class of close-to-convex functions," *American Mathematical Society*, vol. 62, 1977.
- [10] P. L. Duren, *Harmonic Mappings in The Plane*, Cambridge University Press, 2004.
- [11] V. Kac and P. Cheung, *Quantum Calculus*, Springer-Verlag New York, USA, 2002.
- [12] B. Riemann, "Grundlagen für eine allgemeine theorie der functionen einer veränderlichen complexen größe," PhD dissertation, University of Göttingen, Germany, 1851.
- [13] P. Koebe, "Über die uniformisierung beliebiger analytischer kurven," *Nach. Ges. Wiss. Göttingen*, pp. 191-210, 1907.
- [14] L. Bieberbach, "Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen, welche eine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteln," *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl.*, pp. 940-955, 1916.

- [15] Z. Nehari, *Conformal Mapping*, New York, USA, 1952.
- [16] A. W. Goodman, *Univalent Functions*, Vols I - II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 1983.
- [17] F. H. Jackson, “On q -functions and a certain difference operators,” *Earth and Environmental Science Transactions of The Royal Society of Edinburgh*, vol. 46, pp. 253-281, 1908.
- [18] F. H. Jackson, “On q -definite integrals,” *Quart. J. Pure Appl. Math*, vol. 41, pp. 193-203, 1910.
- [19] S. Ponnusamy and H. Silverman, “Complex variables with applications,” Birkhäuser, Boston, pp. 520, 2006.
- [20] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, vol. 259, New York, USA, 1983.
- [21] B. P. Palka, *An introduction to complex function theory*, Springer-Verlag, New York, USA, pp. 560, 1991.
- [22] J. E. Marsden, *Basic Complex Analysis*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, USA, 1973.
- [23] E. Lindelöf, “Memoire sur certaines inegalites dans la theorie des fonctions monogenes et sur quelques proprietes nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d’un point singulier essentiel,” *Acta Soc. Sci. Fenn*, no. 7, pp. 1 – 35, 35, 1909.
- [24] J. E. Littlewood, “On inequalities in the theory of functions,” *Proceeding of the London Mathematical Society*, pp. 481 – 519, 1925.
- [25] J. E. Littlewood, *Lectures on theory of functions*, Oxford University Press, London, 1944.
- [26] W. Rogosinski, “On subordinate functions,” *Mathematical Proceeding of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 35, pp. 1 – 26, 1939.
- [27] W. Rogosinski, “On the coefficients of subordinate functions,” *Proceeding of the London Mathematical Society*, pp. 48 – 82, 1943.
- [28] S. S. Miller and P. T. Mocanu, “Differential subordinations and univalent functions,” *Michigan Mathematical Journal*, pp. 157 – 171, 28, 1981.
- [29] L. De Branges, “A proof of the Bieberbach conjecture,” *Acta Mathematica*, pp. 137-152, 1985.
- [30] W. Rogosinski, “On the coefficients of subordinate functions,” *Proceeding of the London Mathematical Society*, vol. 48, pp. 48-82, 1943.
- [31] J. Krzyz, “The radius of close to convexity within the family of the univalent functions,” *Bull. Acad. Polon. Sci*, vol. 10, pp. 201-204, 1962.

- [32] H. Lewy, "On the non-vanishing of the jacobian in certain one to one mappings," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 42, no. 12, pp. 689-692, 1936.
- [33] J. Clunie and T. Sheil-Small, "Harmonic univalent functions," *Annales Academie Scientiarum Fennice*, vol. 9, pp. 3-25, 1984.
- [34] L. V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, D. Van Nostrand Company, Inc, Princeton, New Jersey, 1966.
- [35] O. Lehto and K.I. Virtanen, Inc, *Quasiconformal Mappings in The Plane*, 2 nd edition, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [36] W. Hengartner and G. Schober, "Harmonic mappings with given dilatation," *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 33, pp. 473-483, 1986.
- [37] M. E. H. Ismail, E. Merkes and D. Steyr, "A generalization of starlike functions, complex variables," *Complex Variables , Theory and Application*, vol.14, pp. 77-84, 1990.
- [38] T. M. Seoudy and M. K. Aouf, "Coefficient estimates of new classes of q -starlike and q -convex functions of complex order," *Journal of Mathematical Inequalities*, vol. 10, no.1, pp. 135-145, 2016.
- [39] G. E. Andrews, "Application of basic hypergeometric functions," *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 16, pp. 441-484, 1974.
- [40] N. J. Fine, "Basic hypergeometric series and applications," *Mathematical Surveys*, *American Math. Soc. Providence*, no 27, 1988.
- [41] Y. Polatoğlu, H. E. Özkan, M. Aydoğan and A. Yemişçi Şen, "Distortion and growth theorems for q -starlike functions," *Rocky Mountain Journal*, 2015.
- [42] I. S. Jack, "Functions starlike and convex of order α ," *Journal of London Mathematical Society*, vol. 32, pp. 469-474, 1971.
- [43] C. Pommerenke, "*Univalent Functions*," Vandenhoeck and Ruprecht in Göttingen, 1975.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Oya MERT
Doğum Tarihi ve Yeri : 29.03.1982 / Tekirdağ-Saray
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : oya_mert88@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2018
Y. Lisans	Mühendislik Bilimleri	Orta Doğu Teknik Üniv.	2011
Lisans	Matematik Bölümü	Kocaeli Üniversitesi	2005
Lise		Ali Naki Erenyol Lisesi	1999

A. ULUSLARARASI HAKEMLİ DERGİLERDE BASILAN MAKALELER

- A.1.** H. E. Ozkan Ucar, O. Mert, Y. Polatoglu, “Some properties of the close to convex functions,” *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 46, no. 6, pp. 1105-1112, 2017.
- A.2.** Y. Polatoglu, M. Aydogan, O. Mert, “Some properties of q -convex functions of complex order,” *Sarajevo Journal of Mathematics*, vol. 13, no. 2, pp. 189-196, 2017.
- A.3.** I. Yildiz, O. Mert, N. Uyanik, N. Zorlu, “Extremal functions for starlike functions and convex functions,” *New Trends in Mathematical Sciences*, NTMSCI 2, no. 2, pp. 199-203, 2017.

B. ULUSLARARASI BİLİMSEL TOPLANTILARDA SUNULAN VE BİLDİRİ KİTABINDA (PROCEEDING) BASILAN BİLDİRİLER

- B.1.** Y. Polatoglu, O. Mert, “ q -harmonic mappings for which analytic part is q -starlike Functions,” *XVIIIth Conference on Analytic Functions and Related Topics*, Chelm, Poland, 2016.
- B.2.** I. Yildiz, N. Zorlu, O. Mert, “Extremal functions for starlike functions and convex functions,” *International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA 2016)*, Kırşehir, Turkey, 2016.
- B.3.** Y. Polatoglu, O. Mert, A. Cetinkaya, “Generalized close to convex functions with q -properties,” *International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2017)*, Kuşadası-Aydın, Turkey, 2017.
- B.4.** O. Mert, I. Yildiz, H. Sahin, H. Ay, “Analysis of relation between convex function and starlike function,” *International Congress on Fundamental of Applied Sciences (ICFAS 2016)*, İstanbul, Turkey, 2016.
- B.5.** I. Yildiz, O. Mert, N. Uyanik, H. Albayrak, “On the elliptic function established by generalized theta functions,” *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2017)*, İstanbul, Turkey, 2017.
- B.6.** I. Yildiz, O. Mert, A. Akyar, N. Uyanik, “On the relation between α grade convex and starlike functions,” *4th International Conference on Pure and Applied Sciences: Renewable Energy (ICPAS 2017)*, İstanbul, Turkey, 2017.

**C. ULUSLARARASI BİLİMSEL TOPLANTILARDA SUNULAN VE BİLDİRİ
KİTABINDA TAM METİN BASILAN BİLDİRİLER**

- C.1.** A. Cetinkaya, O. Mert, “A Certain class of harmonic mappings related to functions of bounded boundary rotation,” *12th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications*, Alba Iulia, Romania, pp. 67-76, 2016.
- C.2.** H. E. Ozkan, O. Mert, “ $q-k$ Quasiconformal harmonic mappings related to starlike functions,” *12th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications*, Alba Iulia, Romania, pp. 77-82, 2016.

