T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MEROMORF FONKSİYONLARIN KONVEKSE YAKIN FONKSİYONLARA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

HASAN ŞAHİN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. İSMET YILDIZ

DÜZCE, 2022

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MEROMORF FONKSİYONLARIN KONVEKSE YAKIN FONKSİYONLARA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

Hasan ŞAHİN tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. İsmet YILDIZ

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Düzce Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Aydın SEÇER
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Doç. Dr. İzzettin DEMİR
Düzce Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
Biruni Üniversitesi ____________________

Doç. Dr. Merve İLKHAN KARA
Düzce Üniversitesi ____________________

Tez Savunma Tarihi: 28/06/2022

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

28 Haziran 2022

Hasan ŞAHİN

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında her türlü katkıyı esirgemeyerek bu yolda bana danışmanlık eden, çalışma azmi, ahlaki değerleri ve insani yanı ile her zaman kendime örnek edindiğim, beraber çalışmaktan onur ve gurur duyduğum çok değerli akıl hocam Prof. Dr. İsmet YILDIZ' a şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmam boyunca desteklerini esirgemeyen çok değerli hocalarım Prof. Dr. Mustafa Bayram, Prof. Dr. Aydın SEÇER ve Doç. Dr. İzzettin DEMİR' e ve Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nün değerli hocalarına çok teşekkür ediyorum.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen bana çalışmalarım için zaman yaratan ve hep yanımda olan sevgili eşim Esra ŞAHİN ve kızım Nehir ŞAHİN'e aynı zamanda ilim ve bilim yolunda ilerlemeyi bana öğreten annem Sultan ŞAHİN ve babam Tahir ŞAHİN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

28 Haziran 2022 **Hasan ŞAHİN**

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

SİMGELER

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\hat{\mathbb{C}}$	Riemann Küresi
$\mathscr{H}^*$	Uzatılmış üst yarı düzle
$\mathscr{L}$	Homojen olmayan lineer dönüşümler kümesi
$\mathscr{A}$	$\mathbb{C}$ üzerinde tersine çevrilebilir ikiye iki matris
$\mathscr{F}$	Temel(tamlık) bölge
$\bar{A}$	$\mathscr{L}$ grubunun aynı çift z_1 ve z_2 sabit noktalarına sahip
Γ	Modüler grup
$\bar{\Gamma}$	Homojen olmayan modüler grup
Ω	Periyod kümesi
U	Basit bağlantılı bölge
D_r	Merkezi orijin olan r yarıçaplı açık disk
D	Açık birim disk $\mathrm{D}=\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert<1\}$
D^*	Delinmiş birim disk
$\mathrm{D}(z_0,r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
$f^{(n)}(z)$	Bir $f(z)$ fonksiyonun n. mertebeden türevi
$f(\mathrm{D})$	D diskinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü
$f\prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordine
$k(z)$	Koebe fonksiyonu
$\mathrm{Re}\{f\}$	f fonksiyonun reel kısmı
$\mathrm{Im}\{f\}$	f fonksiyonun imajiner(sanal) kısım
i	sanal sayı
$\mathrm{Re}\,z(f,z_0)$	f fonksiyonunun $z-z_0$ noktasındaki rezidüsü
A	Normalize edilmiş analitik fonksiyonlar sınıfı
S	Birim disk içerisinde normalize edilmiş analitik ve ünivalent fonksiyonlar sınıfı
S^*	Starlike fonksiyonların sınıfı
$S^*(\alpha)$	α dereceden starlike fonksiyonların sınıfı
C	Konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathrm{C}(\alpha)$	α dereceden konveks fonksiyonların sınıfı
M	D birim diskinde meromorf univalent fonksiyonların sınıfı
$\mathrm{M}\ \mathrm{S}^*$	D birim diskinde meromorf ünivalent starlike fonksiyonların sınıfı
$\mathrm{M}\ \mathrm{C}$	D birim diskinde meromorf ünivalent konveks fonksiyonların sınıfı

M (α)	D birim diskinde α dereceden meromorf fonksiyonların sınıfı
M $S^{*}(\alpha)$	D birim diskinde α dereceden meromorf starlike fonksiyonların sınıfı
M $C(\alpha)$	D birim diskinde α dereceden meromorf konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
$M_{a,b}(\alpha,\beta;h)$	M fonksiyon sınıfının alt sınıfı
$(\lambda)_n$	Pochhammer sembolü
Σ	$\Delta=\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert>1\}$ de tanımlı analitik ve ünivalent fonksiyonların sınıfı

ÖZET

MEROMORF FONKSİYONLARIN KONVEKSE YAKIN FONKSİYONLARA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

Hasan ŞAHİN
Düzce Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, MatematikAnabilim Dalı
Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Haziran 2022, 130 sayfa

Bu tez çalışmasında birim diskte meromorf bir fonksiyonun türevlerinin konveks ve starlike olması hakkında genel bağıntılarını adi türev operatörü yardımıyla verilmiştir ve bu fonksiyonun konveks ve starlike olması üzerine bazı bağıntıları bulunmuştur. Bunun için öncelikle ünivalent fonksiyonların birim diskindeki konveks ve starlike olması ile ilgili kavramlar tanıtılmış, ardından ünivalent bir fonksiyonun hangi koşullarda konveks ve starlike olduğu ve aralarında ne tür ilişkiler olduğu üzerine çalışmalar yapılmıştır. Delinmiş birim diskteki analitik ve ünivalent meromorf fonksiyonların bu özellikleri ve bu fonksiyonların konveks, konvekse yakın ve starlike olması için gerekli ve yeterli koşullar araştırılmıştır. Meromorf fonksiyona sahip olmak için gerekli formdan bahsedilerek $f(z)$ fonksiyonu için karmaşık analitik dönüşümler incelenmiştir. $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ olacak şekilde $h(z)\neq 0$ koşulu sağlayan bir fonksiyondur. Birim D diskindeki f ve g nin analitik fonksiyonları için, Hadamard çarpımı ve lineer operatörler yardımıyla fonksiyonlar arasında subordinasyon ilkesini kullanarak meromorf analitik fonksiyon sınıfı meromorf fonksiyon sınıfını M yi ve $M_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ alt sınıflarını gösterir. Son olarak sonuç ve tavsiyeler yer verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Hadamard çarpımı, Konvekse yakın fonksiyon, Meromorf fonksiyon, Starlike fonksiyon, Ünivalent fonksiyon.

ABSTRACT

CONVERSION OF MEROMORPHIC FUNCTIONS TO CLOSE TO CONVEX FUNCTIONS

Hasan ŞAHİN
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematic
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
June 2022, 130 pages

We give general relations about starlike and convex of the derivatives of a meromorphic function in the unit disk with the help of the ordinary derivative operator and to find some relations on the starlike and convex of these function. For this, firstly, the concepts related to the starlike and convex of univalent functions in the unit disk were introduced, and then studies were carried out on the conditions under which a univalent function is starlike and convex, close to convex and what kind of relations there are between starlike, convex and close to convex. These properties of analytic and univalent meromorphic functions in the drilled unit disk and the necessary and sufficient conditions for these functions to be starlike and convex are investigated. Moreover it is mentioned that meromorphic functions are univalent functions that are analytical everywhere. Complex analytic transformations were investigated by mentioning the necessary form for $f(z)$ to have meromorphic function. It is a function $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ that satisfies the condition $h(z)\neq 0$. For analytic functions of f and g in the D unit disk, $f(z)$ shows the meromorphic function class M with and subclasses of $M_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ the meromorphic analytical function class using the subordination principle between functions with the help of Hadamard product and linear operators. In this way proves is provided. Finally, conclusions and recommendations are given.

Keywords: Close to convex, Hadamard product, Meromorphic function, Starlike, Univalent function.

EXTENDED ABSTRACT

CONVERSION OF MEROMORPHIC FUNCTIONS TO CLOSE TO CONVEX FUNCTIONS

Hasan ŞAHİN
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematic
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
June 2022, 130 pages

1. INTRODUCTION

The theory of geometric functions is a special branch of complex analysis that deals with the geometric properties of analytic functions $f(z)$, that is $D \subset \mathbb{C}\ (D \neq \mathbb{C})$, the relationship between analysis and geometry. This theory first emerged in 1851 with G. Bernard Riemann's theorem, known as the "Riemann transformation theorem" in the literature, which showed the existence of an analytic function *f* which depicts a simply connected subregion of the complex plane on D_1 its region. However, this theorem did not find much application in theory until the beginning of the 20th century, since it was not useful according to some researchers and its importance was not well understood by some. So much so that Koebe gave this theorem for analytical and univalent functions in 1907, Gronwall's proof of the field theorem in 1914, and the coefficient estimation for normalized functions introduced by Bieberbach in 1916 and the results of this estimation, the application area to the theory of geometric functions and He also initiated the emergence of the theory of univalent functions, which is an important branch of this theory. In these years, the problems established on the structure of univalent functions were popular topics of that period.

One of the important problem situations in the theory of geometric functions is to investigate whether the given analytic function is univalent. The main problem here is the question "Can necessary and sufficient conditions or conditions be obtained for a function to belong to class S?". Different researchers in this field from past to present tried to find answers to this question and tried to find the criteria or conditions of being univalent.

The desired purpose of the univalent criteria is to prove that this function is univalent for a given function in accordance with sufficient conditions. Therefore, it is aimed to obtain uniformity criteria according to the difference of functions or defined regions. In addition to the necessary and sufficient condition problems for the functions defined in the unit disk, the problem of determining the necessary and sufficient conditions for the meromorphic functions defined in the closed unit disk, outside the unit disk and in the drilled open unit disk has arisen. It has created such an important problem in providing the necessary and sufficient conditions for meromorph functions. Adequacy problems for meromorphic functions, or in other words, the criterion of being univalent, were first given by Nehari (1949), Aksent'ev (1958) and Becker (1973). Later, between 1981 and 1991, Lewandowski (1981), Miazga and Wesolowski (1991) made important contributions to this subject.

2. MATERIAL AND METHODS

Let the $h(z)$ analytic functions with $h(0)=1$ be class A. $\mathrm{D}=\mathrm{D}^{*}\cup\{0\}$ open unit disk is analytic. Hence;

$$\operatorname{Re} h(z)>0 \quad (z\in \mathrm{D}).$$

We can say that $f(z)$ and $g(z)$ analytically in the unit disk D, f is subordined to g and written as $f\prec g$;

$$f(z)\prec g(z) \quad (z\in U).$$

If D has an analytical function of $v(z)$, it is $v(z)\le |z|$ and $f(z)=g(v(z))$. Also, if the g function is univalent in unit disk D then

$$f(z)\prec g(z) \Leftrightarrow \quad f(0)=g(0) \ \text{ and } \ f(\mathrm{D})=g(\mathrm{D}) \quad (z\in \mathrm{D}).$$

Let the $h(z)$ analytic functions with $h(0)=1$ be class A. $\mathrm{D}=\mathrm{D}^{*}\cup\{0\}$ analytic on the open unit disk and where

$$\operatorname{Re} h(z)>0 \quad (z\in \mathrm{D}^{*}).$$

If U has an analytical function, then we can write $v(z)\le |z|$ and $f(z)=g(v(z)) \quad (z\in \mathrm{D}^{*})$. Also, if function $g(z)$ is univalent in D then

$$f(z)\prec g(z) \Leftrightarrow \quad f(0)=g(0) \ \text{ and } \ f(\mathrm{D})\subseteq g(\mathrm{D}) \ (z\in \mathrm{D}^{*}).$$

Let $h\in A$ and

$$\operatorname{Re} h(z)<1+a \qquad (z\in \mathrm{D},\ a>0).$$

If $f\in M_{a,b}(\alpha+1,\beta;h)$ then $f\in M_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ and $f_{a,b}(\alpha,\beta;z)\neq 0$ with the condition $(z\in \mathrm{D}^{*})$.

$$(\alpha+1) f_{a,b}(\alpha,\beta;z)+z f'_{a,b}(\alpha,\beta;z)=\frac{\alpha}{a}\sum_{i=0}^{a-1}\delta_a^{i(b+1)}\left(I^{b}K(\alpha+1,\beta) f\right)'(\delta_a^{i}z)$$
$$=\alpha f_{a,b}(\alpha+1,\beta;z), \quad (f\in M \ ).$$

$f\in M_{a,b}(\alpha+1,\beta;h)$ and let's suppose that

$$v(z)=-\frac{z\left(f'_{a,b}(\alpha,\beta;z)\right)}{f_{a,b}(\alpha,\beta;z)}.$$

Then $v(z)$ is analytical within unit disk D, $v(0)=1$, from there

$$\alpha+1-v(z)=\alpha\frac{f_{a,b}(\alpha+1,\beta;z)}{f_{a,b}(\alpha,\beta;z)} .$$

Here if we take the logarithmic derivative of both sides with respect to z and use, we obtain

$$v(z)+\frac{zv'(z)}{\alpha+1-v(z)}=\frac{z\left(f'_{a,b}(\alpha+1,\beta;z)\right)}{f_{a,b}(\alpha,\beta;z)}$$

and from (if replaced $\alpha+1$)

$$v(z)+\frac{zv'(z)}{\alpha+1-v(z)}\prec h \qquad (z\in \mathrm{D})$$

From there with the application of equation now we get

$$v(z)\prec h(z) \qquad (z\in \mathrm{D})$$

$$s(z)=\frac{-z\left(I^{b}K(\alpha,\beta) f\right)'(z)}{f_{a,b}(\alpha,\beta;z)}.$$

If we create it, $s(z)$ provides the analytical $s(0)=1$ condition in D.

From

$$f_{a,b}(\alpha,\beta;z)s(z)=-\alpha I^bK(\alpha+1,\beta)f(z)+(1+\alpha)I^bK(\alpha,\beta)f(z).$$

By differentiating both sides , according to z and

$$zs'(z)+\left(\alpha+1+\frac{z\left(f'_{a,b}(\alpha,\beta;z)\right)}{f_{a,b}(\alpha,\beta;z)}\right)s(z)=-\frac{\alpha z\left(I^bK(\alpha+1,\beta)f\right)'(z)}{f_{a,b}(\alpha,\beta;z)}.$$

Because of this equations we obtain the equation

$$s(z)+\frac{zs'(z)}{\alpha+1-v(z)}=\frac{z\left(I^bK(\alpha+1,\beta)f\right)'(z)}{f_{a,b}(\alpha+1,\beta;z)}\prec h(z) \quad (z\in \mathrm{D}),$$

and $f\in P_{a,b}(\alpha+1,\beta;h)$. $\mathrm{Re}\{\alpha+1-v(z)\}>0$ is obtained. We get the results from

$$s(z)\prec h(z) \qquad (z\in \mathrm{D}),$$

This equation implies that it is $f\in M_{a,b}(\alpha,\beta;h)$.

3. CONCLUSION AND OUTLOOK

$f(z)\in M$ for z in unit disc D, $f(z)\neq 0$ and $\rho<0$,

$$\mathrm{Re}\left(-\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right)>\rho.$$

In this case, we obtained for each $(z\in \mathrm{D})$,

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\frac{1}{4}\left(2\rho+3-\sqrt{4\rho^2-\rho+9}\right).$$

If we take $r=1$ in the following result is obtained:

If $f(z)\in MC\left(\frac{1}{2}\right)$ then it becomes $f(z)\in \mathrm{M}\,\mathrm{S}^*\left(\frac{1}{2}\right)$.

$f(z)$ is in the form of $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$. In D, it is seen that $f(z)\neq 0$ is a meromorphic function from the Laurent expansion. On the other hand

$$-\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{1+z}{1-z}$$

and

$$-\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)=\frac{1+z^2}{1-z^2}.$$

Moreorever a new subclass formed by M a class, $M_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ are presented. It is given subclasses are created. At the same time, the subordination method and the Hadamard product were used. It was investigated by mentioning the necessary form of complex analytic transformations to have meromorphic function.

1. GİRİŞ

Kompleks sayılar hiç kimse tarafından keşfedilmiştir fakat bu sayıların varlığı ve ilk tartışmaları XVI. yüzyıl da ortaya atılmıştır. O dönemin amatör matematikçileri polinom denklemlerini kesirler içeren denklemler ile çözmeye çalışırken pozitif tamsayılar dışında sayı kümeleri olması gerekliliğini ve bu çözümü içeren sayıların varlığını kabul etmek zorunda kalmışlardır. $x^2+2x+2=0$ ve $x^3=6x+4$ denklemlerinin çözümü için kullanılması gereken $1+\sqrt{-1}$ ve $\sqrt[3]{2+\sqrt{-2}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-2}}$ çözüm kümesi bu matematikçiler arasında hayretle karşılanmıştır. Çünkü karesi negatif olan $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ gibi sayıların olmadı kanaati o zamana kadar hüküm sürmüştür. Böyle ifade edilen sayılar yalnızca birinin hayal gücüne dayalıdır. Belirli bir süre bu hayali sayılar gelişim gösterememiştir, bunun başlıca nedeni ise matematikçilerin gerçek sayılar üzerinde çalışmakta ısrarlı ve bir o kadar da inatçı olmasıdır. Bu şekilde takip eden yüzyıllar içerisinde sayı kavramı gelişim göstermiş; pozitif tam sayılara rasyonel sayılar, negatif sayılar ve irrasyonel sayılar eklenerek sayılar kümesi yavaş yavaş ve ısrarla büyümüştür. XVIII. yüzyılda Alman matematikçi Carl Friedrich Gaussun sözde hayali (sanal) sayıları yada şimdiki kullanımda kompleks sayıları mantıklı ve tutarlı bir temele dayandırarak reel (gerçel) sayı sisteminin bir genişlemesi olarak ifade ederek sayı kavramında çok büyük ilerlemeler kaydetmiştir (Dernek, 2013).

Carl Friedrich Gauss ve Fransız matematikçi Augustin Louis Cauchy nin çalışmaları ile elde etmiş oldukları yeni sonuçlar sayesinde matematikte geniş ve değerli bir yeri olan bu sayılar talihsiz "sanal" ismi ile yüzyıllar boyu çağırılmışlardır. Başlangıçta $\sqrt{-1}$ sayısını gizlemek için "i" sembolü kullanılmıştır.

Geometrik fonksiyon teorisi ise analitik fonksiyonların geometrik özelliklerini ele alan ve inceleyen, kompleks fonksiyon teorisinin önemli dallarından biridir. Yani, kompleks değişkenli $w=f(z)$ fonksiyonunun analitik özellikleri ile bir $U\subset\mathbb{C}$ içerisindeki görüntü kümesinin geometrik özellikleri arasındaki ilişkiyi bulmayı içerir.

Kökenleri 19. yüzyıla kadar dayanmakta olup, sürekli olarak ortaya çıkan yeni uygulamalar ile gelişmektedir. Bu gelişimin temel taşları ilk olarak 1907 yılında Koebe tarafından çalışılan ünivalent (yalınkat) fonksiyon teorisi ile oluşturulmuştur (Koebe, 1907). Bu alanda ilk önemli makalelerin ortaya çıktığı XX. yüzyılda, P. Koebe (1907), I.W. Alexander (1915), L. Bieberbach (1916) a borçlu olunan, karmaşık analizin ayrı bir dalı olan ünivalent fonksiyonlar olarak belirlenmiştir.

Analitik fonksiyonları ve konformal dönüşümleri ilgi çekici bulan ve bu alanda çalışmış olann Riemann'ın aksine Weierstrass kuvvet serilerini kullanarak fonksiyonların temelini oluşturan teoriyi kurmuştur. Bieberbach varsayımı analitik fonksiyon teorisinin bu iki bakış açısın dayanmaktadır yani bir fonksiyon için hem seri olarak hem de dönüşüm olarak ele almıştır. Böylece Bierberbach konformal dönüşümler üzerine çalışmalar yaparak serinin ilk katsayısını sıfır almış, ikinci katsayısını ise bir kabul ederek katsayıların büyüklüğü üzerine incelemelerde bulunmuştur. Kompleks düzlemin bağlantılı ve açık bir alt kümesi olan bir D bölgesindeki f fonksiyonu eğer herhangi bir değeri birden fazla olacak şekilde almıyorsa yani tek değerli ise bu fonksiyon D bölgesinde ünivalent fonksiyon olarak adlandırılmıştır. Seçilen bir f fonksiyonunun D bölgesindeki görüntü kümesi $f(\mathrm{D})$ bölgesini konformal olarak dönüştürülmüş olur. Kompleks fonksiyonlar teorisinde bu şekilde konformal dönüşümler üzerine en detaylı çalışan ilk kişi Riemanndır. Riemann 1851 deki doktora tezinde, Riemann Dönüşüm Teoremi olarak bilinen teoreminde; kompleks düzlemin herhangi bir basit bağlantılı alt bölgesi D nin |z|<1 birim diskine konformal olarak dönüştürülebileceğini belirtmiştir. Bu teoremden elde edilen dönüşümün birebir ve aynı zamanda analitik olması zorunludur. 1907 de Koebe, Riemannın bu savından yola çıkarak buradaki bir f dönüşümünün eğer D bölgesinde bir z_0 noktası için $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>1$ koşullarını sağladığı durumlar için tek olacağını keşfetmiştir. Bu şekilde bir ünivalent fonksiyonun tersi de ünivalent olduğundan burada seçilen birim diskte ünivalent fonksiyonları araştırmak ilgi duyulan bir konu olmuştur. Birim disk D de $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ şeklinde normalize edilmiş olan fonksiyonların sınıfı S ile gösterilmiştir. f fonksiyonunun Taylor açılımı $f(z)=\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ formundadır. Bu formda yazılan fonksiyonların görüntüleri çeşitli geometriler ve klasik karakterizasyonlar tanımlar. Örneğin eğer f fonksiyonu $|z|<1$ birim diskinde ünivalent ve normalize edilmiş analitik fonksiyon ise $|w|<\kappa$ diskini içerir (Özgül, 2014).

Ünivalent fonksiyonlar teorisi yüzyılın başında şekillenmeye başlamıştır. Tek değerli fonksiyon kavramı, analitik fonksiyonların geometrik teorisinde merkezi bir rol üstlenmiştir ve bu alanda 1907 tarihli ilk makale P. Koebe ye aittir (Koebe,1907). 1907 yılında Koebe, $|w|<\kappa$ diskinin her $f\in S$ fonksiyonunun aralığında yer aldığı mutlak bir $\kappa>0$ sabitinin varlığını kanıtlamıştır. $\kappa=1/4$ değeri birkaç yıl sonra Bieberbach (1913, 1915, 1916) tarafından belirlendi. Koebe (1909) ayrıca $|f'(z)|$ için sadece $|z|$ ye bağlı olarak pozitif üst ve alt sınırların varlığını kanıtlayarak bükülme (distortion) teoreminin ilkel bir formunu ispatlamıştır. Pick (1916) yaptığı çalışmada bu fonksiyon ile ilgili bazı sonuçlar elde etmiştir. Ünivalent fonksiyonlar çalışmasına Plemelj (1913) , Gronwall (1915) ve Faber (1916) tarafından devam edilmiştir. Gronwall (1915) alan teoremini 1914 te inşa etmiş ve Bieberbach (1915,1916) bunu $|a_2|\leq 2$ yi ispatlamak için Koebe nin genişleme ve bükülme teoremlerinin keskin biçimleriyle birlikte uygulamıştır. Aynı zamanda, Gronwall (1916) genişleme (growth) ve bükülme (distortion) teoremlerini ispatsız olarak ifade etmiştir. Faber (1916,1920) $\kappa=1/4$ olduğuna dair bir başka ispat daha elde etmiştir. Bieberbach (1919) dönüşüm teoreminin ilkel biçimini elde etmiş ancak keskin sınır Goluzinin 1936 daki çalışmasına kadar belirsiz kalmıştır. Landau (1916), ünivalent fonksiyon teorisi üzerine iyi bilinen küçük kitabında bu erken sonuçların zarif bir açıklamasını yapmıştır. Başka bir erken açıklama ise aynı dönemde çalışmalarını genişleterek devam eden Bieberbachın (1921) kitabında yer almıştır.

Bieberbach varsayımı zengin ve devam eden bir tarihe sahiptir. Bieberbach (1916) S içerisindeki maksimum $|a_n|$ değeri için A_n yerine k_n gösterimini kullanmıştır.

Bieberbach (1916) $k_2=2$ olduğunu kanıtladıktan sonra, bir dipnotta geçici olarak önerdiği " Dass $k_n\geq n$ zeigt das Beispiel Σnz^n. Vielleicht ist überhaupt $k_n=n$" ifadesini ünlü varsayımının kaynağı olarak kullanmıştır.

Birkaç yıl sonra, Loewner (1923) yarık dönüşümlerinin parametrik temsilini geliştirilmiş ve bunu $|a_3|\leq 3$ ü kanıtlamak için uygulamıştır. Bir karmaşık değişkenin fonksiyonlarının geometrik teorisinden elde edilen sonuçların genişletilmesi sorunu ilk kez H. Cartan tarafından 1933 te yayınlanan P. Montel kitabındaki ekte formüle edilmiştir (Cartan, 1993). Dördüncü katsayı, Garabedian ve Schiffer (1955) in nihayet $|a_4|\leq 4|$ ü değişken bir yöntemle kanıtladığı 1955 yılına kadar pek çok çabadan sonra sonuç vermiştir. Kanıtları oldukça zordur, ancak 5 yıl sonra Charzyski ve Schiffer (1960) nispeten daha basit iki kanıt bulmuştur.

Bu alanda çalışılan başka bir ispat ise alan teorisinin doğrudan bir uzantısı olan Grunsky eşitsizliklerini temel almıştır. Bu keşif, Grunskynin 1939 da tanıttığı Grunsky eşitsizliklerine yeni dikkatleri yöneltmiştir. 1960 dan beri, Grunsky eşitsizlikleri, Milin teorisi (Milin, 1971) ve FitzGeraldın (1972) in tüm n için $|a_n| < \sqrt{7/6}n$ olduğunu kanıtlaması da dahil olmak üzere, bir dizi önemli ilerlemenin temelini oluşturmuştur. 1968'de Pederson ve Ozawa (1969) Grunsky eşitsizliklerini $|a_6| \leq 6$ yı kanıtlamak için kullanmıştır. Birkaç yıl sonra, Pederson ve Schiffer (1972), $|a_5| \leq 5$ kanıtlamak için Grunsky eşitsizliklerinin bir genellemesi olan Garabedyen Schiffer eşitsizliklerini uygulamıştır.

Bu önemli konu üzerinde öncü olan çalışmalardan bazıları Z. Nehari (1952), L. V. Ahlfors (1973), Ch. Pommerenke (1975), A.W. Goodman (1983), P. L. Duren (1983), D. J. Hallenbeck ve T. H. MacGregor (1984), S. S. Miller ve P. T. Mocanu (1969) ve P. T. Mocanu, T. Bulboacă ve Gr. Şt. Sälägean (1999) gibi makalelerde bulunmaktadır.

Bieberbach varsayımının birçok matematikçiye uzun yıllar boyu bu şekilde çalışma alanı sağlamış ve bu alanda farklı ispatlar oluşturulması için uzun zamanlar üzerinde çalışılan önemli bir konu haline gelmiştir. Bu uzun süreç sonunda 1985 yılında Fransız matematikçi olan lois de Branges Loewner teorisini kullanarak tüm tüm $n = 2, 3, 4, \ldots$. için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin genel ispatını elde ederek probleme son noktaya koymuştur. Bu çözüm ile varsayımın üzerindeki çalışmalar devam etmiş ve birçok yeni problem durumu ortaya çıkmıştır. Elde edilen S sınıfı için; alt sınıflar, katsayıların farklı tahminleri, Genişleme ve bükülme teoremleri ve kullanım alanları, yarıçap problemleri, komşuluk kavramı, diferensiyel operatörleri subordinasyon gibi önemli yeni konuların ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır.

Geometrik fonksiyonlar teorisinin içerisinde bulunan önemli problem durumlarından bir tanesi ise verilen analitik fonksiyonun ünivalent olup olmadığının araştırılmasıdır. Buradaki temel problem ise " Bir fonksiyonun S sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart yada şartlar elde edilebilir mi?" sorusudur. Bu soru üzerine geçmişten günümüze bu alandaki farklı araştırmacılar cevaplar bulmaya çalışmışlar ve ünivalent olma kriterleri ya da şartları bulmaya çalışmışlardır.

Ünivalentlik kriterlerinde istenilen amaç ise yeter şartlar doğrultusunda verilen bir fonksiyon için bu fonksiyonun ünivalent olduğunu ispatlamaktır. Bundan dolayı fonksiyonların yada tanımlı bölgelerin farklı olma durumlarına göre ünivalentlik kriterleri elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu çalışmalar paralelinde starlike ve konveks fonksiyon kavramının birim daire içerisinde analitik fonksiyonlara genelleştirilmesi Robertson (1937, 1941, 1945, 1953) ve Goodman (1950) çalışmalarından elde edilmiştir. Devam eden çalışmalar ışığında Blakley (1962), Sakaguchi (1962), Hummel (1966), Ozaki (1941), Nunokawa (1987) ve daha birçok araştırmacı analitik fonksiyonların starlike ve konveksliği üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Birim disk içerisinde tanmlı olan fonksiyonlar için gerek ve yeter şart problemlerinin yanı sıra kapalı birim diskte, birim diskin dışında ve delinmiş açık birim diskte tanımlı olan meromorf fonksiyonlar için de gerek ve yeter şartları belirleme problemi oluşmuştur. Meromorf fonksiyonlar için gerek ve yeter şartları sağlamakta bir o kadar önemli bir problem durumu oluşturmuştur. Meromorf fonksiyonlar için yeterlilik problemleri veya başka bir deyişle ünivalent olma kriteri ilk olarak Nehari (1949), Aksent'ev (1958) ve Becker (1973) tarafından verilmiştir. Pommerenke (1963), Miller (1970), Clunie (1959), Nunokawa ve Ahuja (2001) gibi birçok araştırmacı yine meromorf foknsiyonlar üzerine çalışmalar yapmışlardır. Birim disk üzerinde meromorf fonksiyonların starlike ve konveks olma özellikleri ile ilgili bağıntılar ise ilk olarak Royster (1963) tarafından verilmiştir. Daha sonra ise Aouf ve Hossen (1993), Liu ve Owa (1998) ve çok sayıda araştırmacı konu üzerine farklı çalışmalar oluşturmuşlardır. 1981 ile 1991 yılları arasında Lewandowski (1981), Miazga ve Wesolowski (1991) bu konuya önemli katkılarda bulunmuşlardır.

Bu tez çalışmasında meromorf fonksiyonların her yerde analitik olan ünivalent fonksiyonlar olması için gerek ve yeter şartlardan bahsedilmiştir. Bunun için öncelikle ünivalent (yalınkat) fonksiyonların birim diski içerisinde starlike ve konveksliği ile ilgili kavramlar tanıtılmış, ardından ünivalent bir fonksiyonun starlike ve konveks olduğu koşullarda konveks, konvekse yakın ve starlike arasında ne tür ilişkiler olduğu üzerinde çalışmalar yapılmıştır.

Delinmiş birim diskteki analitik ve ünivalent meromorf fonksiyonların bu özellikleri ve bu fonksiyonların konvekse yakın ve starlike olması için gerekli ve yeterli koşullar araştırılmıştır. $f(z)$ nin meromorf fonksiyona sahip olması için gerekli formdan bahsedilerek karmaşık analitik dönüşümler incelenmiştir. Birim diskteki meromorf bir fonksiyonun türevlerinin konvekse yakın ve starlike olması ile ilgili genel bağıntıları adi türev operatörü yardımıyla verilmiş ve bu fonksiyonun konvekse yakın ve starlike olması üzerinde bazı bağıntılar bulunmuştur. Meromorf analitik fonksiyon sınıfının alt sınıfları, Hadamard çarpımı ve lineer operatörler yardımıyla fonksiyonlar arasındaki subordinasyon ilkesi kullanılarak gösterilmiştir.

2. KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

Kompleks değişkenli fonksiyonlara genel bir bakış açısı katarak hedeflenen bilgilerin ifade edilmesi için öncelikle temel tanım ve teorilere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu bağlamda literatür taraması ile ihtiyaç duyulan tanım ve teoremler ikinci bölümde verilmiştir.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

2.1.1. Tanım (Kompleks Sayı)

x ve y reel sayılar ve i sanal (imaginery) sayı olarak tanımlanırsa $z = x + iy$ biçiminde ifade edilen sayılara kompleks sayı denir. Burada $i^2 = -1$ şeklinde tanımlanır. Kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$ ile ifade edilir. Bu küme,

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\mathbb{R}^2$ ile $\mathbb{C}$ arasında doğal bir dönüşüm ve bağlantı vardır. Burada x z nin reel kısmıdır ve $\operatorname{Re}\{z\}$ şeklinde ifade edilir y ise sanal kısımdır ve $\operatorname{Im}\{z\}$ şeklinde ifade edilir. $z = x + iy$ ve $w = a + ib$ şeklinde iki kompleks sayı için aritmetik işlemler şu şekildedir:

Toplama: $z + w = (x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b)$,

Çıkarma: $z - w = (x + iy) - (a + ib) = (x - a) + i(y - b)$,

Çarpma: $z.w = (x + iy).(a + ib) = xa + iya + ixb + i^2 yb = (xa - yb) i (ya + xb)$,

Bölme: $\dfrac{z}{w} = \dfrac{x + iy}{a + ib} = \dfrac{x + iy}{a + ib}\dfrac{a - ib}{a - ib} = \dfrac{xa + yb}{a^2 + b^2} + i\dfrac{ya + xb}{a^2 + b^2} (w \neq 0)$

Eşleniği: $z = x + iy$ ise $\overline{z} = x - iy$ şeklinde ifade edilir,

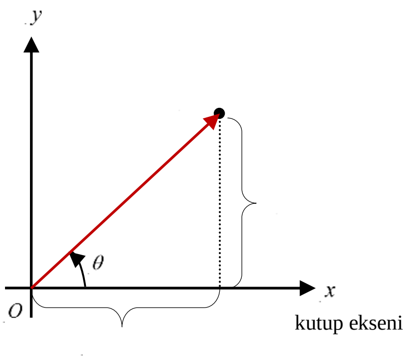
Modülü: $z = x + iy$ ise $|z| = x^2 + y^2$ ile gösterilir.

2.1.2. Tanım (Kompleks Sayının Kutupsal Gösterimi)

Kutup ekseni x eksenine ve O kutbu başlangıç noktasına (orijine) denk olacak biçimde seçildiğini düşünürsek bu şekilde $x,\ y,\ r$ ve θ arasındaki bağıntı $x = rcos\theta$ ve $y = rsin\theta$ dır. Bu eşitlikler sıfırdan farklı bir $z = x + iy$ sayısının

$$z = x = \left(rcos\theta\right) + i\left(rsin\theta\right)$$

biçiminde gösterilmesine kompleks olan z sayısı için kutupsal gösterim denir.



Şekil 2.1.Kompleks düzlemde kutupsal koordinatlar.

2.1.3. Tanım (ε-Komşuluğu)

$z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilmiş olsun. $B\left(z_0, \varepsilon\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - z_0\right| < \varepsilon\right\}$ kümesinde aldığımız bir z_0 noktası için ε komşuluğu vardır denir.

2.1.4. Tanım (İç Nokta)

$A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in A$ olmak üzere z_0 noktasının ε komşuluğu seçilen A kümesinde ise z_0 noktasına iç nokta denir.

2.1.5. Tanım (Dış Nokta)

$A \subset \mathbb{C}$ alt kümesi verilsin. A kümesinin tümleyeninin bir iç noktasına A kümesinin bir dış noktası denir. A kümesinin dışı bütün dış noktalardan oluşur ve $\left(\mathbb{C} - A\right)^0$ şeklinde gösterilir.

2.1.6. Tanım (Yığılma Noktası)

$a \in \mathbb{C}$ olsun. a nın her $\varepsilon > 0$ komşuluğuna ait olan A kümesi için sonsuz eleman varsa, a ya A kümesi için yığılma noktası adı verilir.

2.1.7. Tanım (Kapanış Noktası)

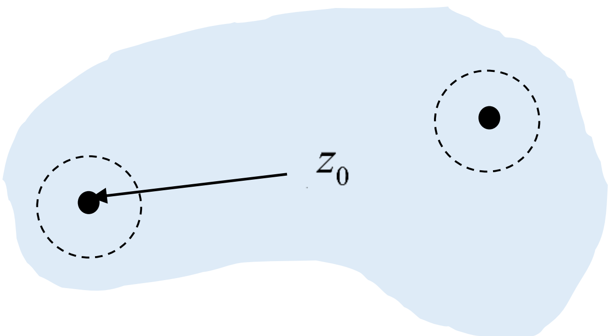
$A \subset \mathbb{C}$ alt kümesi olsun. Aynı zamanda bir $z \in \mathbb{C}$ noktası için eğer z noktasının her boşluğunda A kümesinin en az bir elemanı varsa, z noktasına A kümesinin kapanış noktası denir.

2.1.8. Tanım (Kutup Noktası, Sıfır Noktaları)

f fonksiyonu $z = z_0$ noktasında analitik değil fakat $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$ olan bir $n \in \mathbb{Z}^+$ şeklindeki sayı mevcut ise o zaman $z = z_0$ noktasına f fonksiyonu için bir kutup noktası adı verilir. Bu şekilde elde edilecek olan ve verilen ifadeyi sağlayan en küçük $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısına kutup noktasının mertebesi denir. Mertebesi bir olarak verilen kutup noktasına ise basit kutup noktası adı verilir. $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında bir analitik nokta olan f fonksiyonu için $f(z_0) = 0$ iken $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ verilen koşulu sağlayan pozitif bir n tamsayısı ve $g(z_0) \neq 0$ iken z_0 noktasında analitik olan bir g fonksiyonu olduğunu biliyorsak o zaman z_0 noktası bu f fonksiyonu için basit sıfırdır denir.

2.1.9. Tanım (Açık Küme)

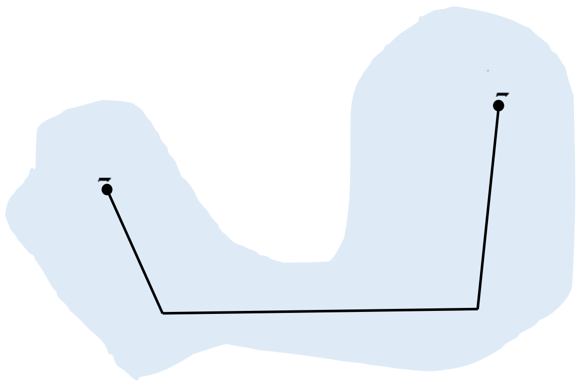
Bir z_0 noktasının seçilen bir komuşuluğu tümü ile küme içerisinde bulunuyorsa, z_0 noktasına kompleks düzlemdeki seçilen kümenin bir iç noktası denir. Eğer bu kümenin her z noktası bir iç noktaysa bu kümeye açık küme denir.



Şekil 2.2. Açık küme.

2.1.10. Tanım (Bağlantılı Küme)

Kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$ içerisinden seçilen *Z, Y* ve *A* kümeleri bu kümenin alt kümleri olarak seçilmiş olsun. Eğer $A \cap Z \neq \varnothing$, $A \cap Y \neq \varnothing$, $A \subset Y \cup Z$ ve $A \cap Y \cap Z \neq \varnothing$ şeklinde Y ve Z gibi ayrık, açık ve boş olmayan iki küme yoksa, $A \subset \mathbb{C}$ kümesi bağlantılı bir kümedir denir ve diğer durumlarda bağlantısızdır denir. Diğer bir tabirle bir küme içerisindeki herhangi z_1 ve z_2 nokta çifti tümüyle verilen küme içinde kalan sonlu sayıda doğru parçası ile birleştiriliyorsa bağlantılıdır denir.



Şekil 2.3. Bağlantılı küme.

2.1.11. Tanım (Bölge)

Kompleks olan bir düzlem için verilen küme hem açık hem de bağlantılı küme ise bu kümeye bölge denir.

2.1.12. Tanım (Basit Bağlantılı Küme)

$A \subset \mathbb{C}$ şeklinde seçilen bir *A* kümesi için *A* kümesi içindeki herhangi iki noktayı birleştiren bütün yollar yine küme içerisinde kalıyorsa bu *A* kümesi için basit bağlantılı küme adı verilir.

2.1.13. Tanım (Seri)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$$

şeklinde ifadelere seri adı verilir. $a_1, a_2, \ldots$ sayılarının her birine bu serinin terimleri denir.Bir seriyi ifade etmek için

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

şeklinde kullanılır (Kadıoğlu ve Kamali, 1998).

2.1.14. Tanım (Rezidü)

Seçilen tek değerli bir f fonksiyonu için □ içinde ve $z = z_0$ noktası dışındaki, □ içerisinde ve üzerinde analitik olsun. O zaman f fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki Laurent açılımını

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

şeklindedir. Elde edilen bu açılımda $\frac{1}{z - z_0}$ şeklinde bulunan terimlerin katsayısı f fonksiyonunun $z - z_0$ noktasındaki rezidüsü (kalıntı) olarak ifade edilir ve

$$\operatorname{Re} z(f, z_0)$$

ile gösterilir.

$$\operatorname{Re} z(f, z_0) = b_1$$

şeklinde tanımlanır. Bu rezidü(kalıntı) aynı zamanda

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

integrali yardımıyla da hesaplanabilir.

Verilen bu nokta basit kutup noktası ise

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + ...$$

şeklinde açılımı elde edilir ve

$$b_1 = \lim_{z - z_0} \left[(z - z_0) f(z) \right]$$

ifade edilen limit değeri ile de rezidü (kalıntı) hesaplanabilir.

2.1.15. Tanım (Yakınsaklık)

Kompleks sayılar içerisinden seçilen bir $\{z_n\}$ dizisi ve $z_0 \in$ □ verilmiş olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0$ olduğunda $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde seçilen bir n_0 doğal sayısı varsa bu dizi z_0 kompleks sayısına yakınsak olur. $\{z_n\}$ dizisi için z_0 noktasına yakınsanması demek $z_n \to z_0$ veya $\lim z_n = z_0$ şeklinde ifade edilmesi anlamına gelir.

2.1.16. Tanım (Düzgün Yakınsaklık)

Verilen bir $\{f_n\}$ dizisi için $A \subset \mathbb{C}$ ve $f_n : A \to \mathbb{C}$ şeklinde verilmiş olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve aynı zamanda bütün $z \in A$ değeri için $n \geq n_0$ alındığında

$$\left| f_n(z) - f(z) \right| < \varepsilon$$

olacak biçimde n_0 doğal sayısı varsa, $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.

2.1.17. Tanım (Süreklilik)

$A \subset \mathbb{C}$ **,** $f : A \to \mathbb{C}$ fonksiyon ve $z_0 \in A$ olacak şekilde bir f fonksiyonu seçilmiş olsun. $\varepsilon > 0$ olacak şekilde keyfi olarak seçilen $z \in A$ ve $|z_n - z_0| < \delta$ için $\left| f_n(z) - f(z) \right| < \varepsilon$ öyle bir $\delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı mevcut olursa f fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir.

2.1.18. Tanım (Parçalı Süreklilik)

$A \subset \mathbb{C}$ ve $f : A \to \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon için f fonksiyonunun A üzerindeki süreksizlik nokta sayısı eğer sonlu ise f fonksiyonuna A üzerinde parçalı sürekli bir fonksiyondur denir (Bakı, 1985).

2.2. Tanım (Analitik Fonksiyon)

Kompleks değişkenli ve kompleks değerli bir f fonksiyonu için $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlanmış olsun. O zaman

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, bu fonksiyona z_0 noktasında differansiyellenebilir denir. Eğer $f(z), z_0$ noktasının bir komşuluğunda differansiyellenebilirse, f ve z_0 noktasında analitik fonksiyondur (Duren, 1977).

2.3. Tanım (Çift ve Tek Fonksiyonlar)

$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $x \in A$ olduğu zaman $-x \in A$ oluyorsa bu küme için simetrik küme ifadesi kullanılır. Burada A simetrik küme olsun ve $f : A \to \mathbb{R}$ için her $x \in A$ için $f(-x) = f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna çift fonksiyon denir. Eğer $f(-x) = -f(x)$ oluyor ise f fonksiyonu tek fonksiyon olarak adlandırılır.

2.3.1. Teorem (Schwarz Lemması)

$f : \mathrm{D} = \{z : |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ analitik ve $z \in \mathrm{D}$ için $|f(z)| \le 1$ ve $f(0) = 0$ olsun. Burada $z \in \mathrm{D}$ noktaları için $|f(z)| \le |z|$ ve $|f'(0)| \le 1$ olur. Üstelik $z_0 \in \mathrm{D}(z_0 \ne 0)$ için $|f(z_0)| = |z_0|$ ise c, $|c| = 1$ özelliğinde bir sabit olmak üzere $f(z) = cz$ biçimindedir.

İspat

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \ne 0 \quad \text{ise} \\ f'(0), & z = 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde bir fonksiyon ele alalım. O zaman g, $\mathrm{D} - \{0\}$ kümesi üzerinde analitik olur ve aynı zamanda D de süreklidir. Bundan dolayı g fonksiyonu, D de analitiktir denir. Şimdi $0 < r < 1$ olmak üzere, $\mathrm{D}_r = \{z : |z| \le r\} \subset \mathrm{D}$ kümesini ele alırsak g fonksiyonu D_r de analitik olacağından dolayı $|z| = r$ üzerinde

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \le \frac{1}{r} \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece D_r üzerinde $|f(z)| \le |z|/r$ sonucu elde edilir. Buradan $r = 1$ için $|f(z)| \le |z|$ şeklinde elde edilir. Aynı zamanda $|g(0)| \le 1$ olur. Bu sayede $|f'(0)| \le 1$ olur. Eğer $z_0 \ne 0$ için, $|f(z_0)| \le |z_0|$ ise denklem (2.1) den $|g(z_0)| = 1$ elde edilir. Üstelik elde edilen bu değer D_r'nin içindeki maksimum değer olur. O halde g fonksiyonu D_r de sabittir. Bu sabitlik ise r değerinden bağımsız olarak gerçekleşir. O halde elde edilen (2.1) den D de $|g(z)| = 1$ ve $|f(z)/z| = 1$ olur yani $|f(z)| = |z|$ şeklinde bulunur. Böylece $|c| = 1$ olmak üzere $f(z) = cz$ olur.

2.3.2. Tanım (Bieberbach Tahmini)

S sınıfındaki $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \ldots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

açılımına sahiptir. Bieberbach, $n \geq 2$ için

$$|a_n| \leq n$$

olduğunu söylemiştir. Bu eşitsizlik Bieberbach tahmini olarak adlandırılır.

2.3.3. Tanım (Cauchy-Riemann eşitliği)

$f : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ **,** D üzerinde analitik olsun. Eğer $f(z) = u(z) + iv(z)$ yazarsak, u ve v, f nin gerçek parçaları ile görüntü parçalarını oluşturur, sırasıyla, Cauchy-Riemann eşitliğini uygularsak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Tersine, eğer $u : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ ve $v : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ şeklinde devam edersek

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

buradan $u + iv : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ u D üzerinde analitik denir.

3. ÜNİVALENT FONKSİYONLAR

Bu kavram için çeşitli başka terimler kullanılmaktadır. Bu nedenle ünivalent fonksiyonlara "simple" veya "schlicht" denir. Ruslar bu tür fonksiyonlar için tek tabaka anlamına gelen “odnolistni” adını vermişlerdir. Esas olarak $\mathbb{D}$ de düzenli (analitik, holomorfik) olan ünivalent fonksiyonlarla ilgidir.

Ünivalent fonksiyonlar ilk olarak Alexander (1915) tarafından tanıtılmıştır. Nevanlinna (1921) da bu konuda detaylı araştırmalar yapmıştır. Daha sonra, ünivalent fonksiyonlar Marx (1932), Strohhacker (1933), McGregor (1975) ve daha birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Birim çemberde meromorf fonksiyonlar hakkında; Pommerenke (1963), Miller (1970), Nunokawa ve Ahuja (2001) ve diğer birçok araştırmacı. Birim çemberdeki meromorf fonksiyonların lineer dönüşümleri ilk olarak Royster (1963) tarafından verilmiştir. Daha sonra Liu ve Owa (1998) ve birçok araştırmacı bu konu üzerinde çalışmışlardır.

19. yüzyılın ortalarında Weierstrass, Mittag-Leffler ve Picard tarafından yürütülen çalışmalar, meromorf fonksiyonlar teorisinin sistematik çalışmalarının başlangıcı olmuştur. Weierstrass, Mittag-Leffler teoremleri, tam ve meromorf fonksiyonların yapılarının genel bir tanımını sağlar. Weierstrass tarafından oluşturulan tam fonksiyonların sonsuz bir çarpım ile temsili, bu fonksiyonların özellikleri üzerine yapılan çalışmaların temelini oluşturmaktadır (Gonchar vd., 2001). Sonuç olarak, tek değerlilik terimi, $f(z)$ nin de düzenli olduğu çağrışımı taşır. Ancak bu öğeyi tanıma dahil etmiyoruz çünkü birçok durumda $f(z)$ nin $\mathbb{D}$ de basit bir kutba sahip olmasına izin vereceğiz (eğer $f(z)$ ünivalent ise, daha yüksek bir kutba veya $\mathbb{D}$ de birden fazla kutba sahip olamaz).

Ünivalent fonksiyonlar teorisi o kadar geniş ve karmaşıktır ki, bazı basitleştirici varsayımlar gereklidir. En belirgin olanı, keyfi $\mathbb{D}$ alanını uygun olanla değiştirmektir ve en çekici seçim birim disk $\mathbb{D}$: |z| < 1.

Temel bir örnek olarak, $\mathbb{D}$ birim diskindeki $f(z) = (1+z^2)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun $\mathbb{D}$ deki tek değerliliğini geometrik zeminlerde görmek kolaydır. Gerçekten de 1+z birim diski sağa kaydırır ve 1+z nin karesini almanın etkisini görselleştirmek kolaydır. Aynı tür argüman, $w=\left(1+z^3\right)$'ün D de ünivalent olmadığını gösterir. $g\left(z\right)$ D de düzenliyse, D de yakınsak olan bir Maclaurin açılımına sahiptir.

3.1. Tanım (Ünivalent Fonksiyon)

D kompleks bölgesi için D bölgesi üzerinde birebir olan bir f fonksiyonuna ünivalent(yalınkat) fonksiyon denir. Burada seçilen z_1, z_2 noktalarında $f\left(z_1\right)\neq f\left(z_2\right)$ koşulunu sağlaması gerekir.

3.2. Tanım (Lokal Ünivalent Fonksiyon)

Eğer $z_0 \in$ D noktasının uygun bir komşuluğunda f fonksiyonu ünivalent ise, f ye lokal ünivalent fonksiyon denir. f analitik fonksiyonu için $f'\left(z_0\right)=0$ şartı, z_0 noktasında lokal ünivalentliğe denktir. Bir analitik ünivalent fonksiyon açı koruma özelliğinden dolayı konform dönüşüm olarak adlandırılır (Bernardı, 1969).

3.3. Tanım (Periyodik Fonksiyon)

Kompleks düzlem üstünde verilen her noktada tanımlı ve gerçek sayılar da lineer bağımsız vektörler olan w_1 ve w_2 karmaşık sayılar olmak suretiyle iki periyoda haiz olan fonksiyon çifte periyodik fonksiyon olarak ifade edilir. Tüm karmaşık z sayılarının f fonksiyonunda w_1 ve w_2 periyotları

$$f\left(z+w_1\right)=f\left(z+w_2\right)=f\left(z\right)$$

şeklinde gösterilir.

3.4. Tanım (Meromorf Fonksiyon)

Bir $\mathbb{D}$ bölgesi içerisinde kutup noktasından başka singüler noktası bulunmayan fonksiyon türüne denir (San, 1973).

3.5. Teorem (S Sınıfı)

$f(0)=0$, $f'(0)=1$ şartlarını sağlayan $\mathbb{D}$ $\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskinde analitik ve ünivalent olan

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$$

biçiminde Taylor açılımına sahiptir. Bu şekildeki fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. Diğer bir deyişle

$$S=\left\{f:\mathrm{D}\to\mathbb{C}:f \text{ analitik ve ünivalent D üzerinde, } f(0)=0,\ f'(0)=1\right\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $f\in S$ sınıfı için Taylor açılımı

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...,\qquad |z|<1,$$

şeklindeki formda olacak ve $a_n\in\mathbb{C}$, $n=2,3,4,...$ olarak seçilmiştir.

3.6. Tanım (M ve Σ Sınıfı)

$\mathbb{D}$ birim diskinde

$$f(z)=\frac{1}{z}+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+...+a_nz^n+...$$

açılımına sahip olan ünivalent ve meromorf $f(z)$ fonksiyonlarının sınıfı M ile gösterilir ve $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ biçiminde olmak üzere $\mathbb{C}^*-\overline{\mathrm{D}}=\{z:|z|>1\}$ bölgesinde ünivalent ve meromorf olan

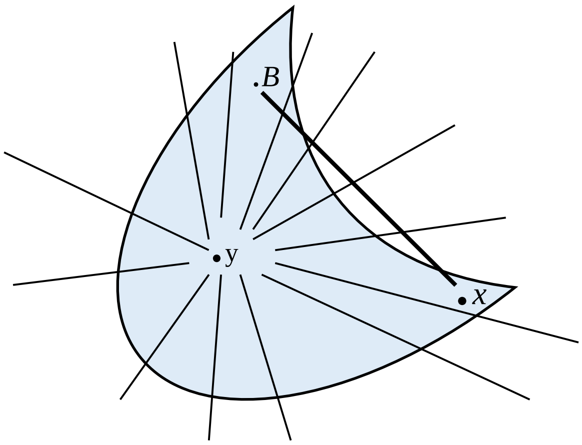
$$g(z)=z+b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+...+\frac{b_n}{z^n}+...$$

biçimindeki $g(z)$ fonksiyonunun sınıfı Σ ile gösterilir.

3.7. Tanım (Starlike Bölge)

$B\subset\mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere seçilen bir y noktası için $y\in B$ olsun. Eğer burada y noktasını B nin içinde herhangi bir x noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B

nin içinde kalıyorsa B ye y noktasına göre starlike bölge denir. Daha genel bir ifade edecek olursak B bölgesinin her bir noktası y noktasından görülebilir.



Şekil 3.1. Starlike bölge.

Yukarıda verilen şekilde görüldüğü gibi bir B bölgesi y noktasına göre satarlike olarak ifade edilir ancak B bölgesi x noktasına göre starlike değildir. Çünkü B bölgesi içerisindeki herhangi bir nokta ile x noktasını birbirine bağlayan doğru parçası bölge içerisinde kalmamaktadır.

3.8. Tanım (Starlike Fonksiyon)

$f \in S$ olsun. $f\left(\mathrm{D}\right)$ orjine göre starlike ise $f\left(z\right)$ fonksiyonuna starlike fonksiyon denir ve starlike fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir (Tuneski, 2007).

Örnek

$k(z) = \dfrac{z}{\left(1-z\right)^2}$ şeklinde verilen Koebe fonksiyonu için $\log k'(z)$ fonksiyonu starlike fonsiyondur (Duren ve Mclaughlin, 1972).

3.8.1. Lemma

$f \in S$, $\Delta = f\left(\mathrm{D}\right), \overline{\mathrm{D}}_r = \left\{z : |z| \le r < 1\right\}$ ve $\overline{\Delta}_r = f\left(\overline{\mathrm{D}}_r\right)$ olsun. Eğer Δ orjine göre starlike ise $\overline{\Delta}_r$ de aynı nokta için starlikedır. Her $r < 1$ için tersine düşünürsek $\overline{\Delta}_r$ orjine göre starlike ise Δ da verilen aynı noktaya göre starlikedır.

İspat

Eğer $z\in \mathrm{D}$ ise $f\left(z\right)\in \Delta$ ve Δ starlike olduğundan $0\le t\le 1$ için $tf\left(z\right)\in \Delta$ dir. $g\left(z\right)=f^{-1}\left(tf\left(z\right)\right)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de analitik ve $\left|z\right|<1$ için $g(0)=0$, $\left|g(z)\right|<1$ dir. Schwarz Lemmasından $\left|z\right|<1$ için

$$\left|g(z)\right|\le \left|z\right|$$

yazılır. Farz edelim ki $z_1\in \overline{\mathrm{D}}_r$ olsun. Burada

$$f\left(z_1\right)\in \overline{\Delta}_r \text{ ve } \left|g\left(z_1\right)\right|=\left|f^{-1}\left(tf\left(z_1\right)\right)\right|\le \left|z_1\right|\le r$$

bulunur. Eğer $z_2=f^{-1}\left(tf\left(z_1\right)\right)$ alırsak

$$\left|z_2\right|\le r \text{ ve } f\left(z_2\right)=tf(z_1)\in \overline{\Delta}_r$$

bulunur. Bu halde, $f\left(z_1\right)\in \overline{\Delta}_r$ iken $tf(z_1)\in \overline{\Delta}_r$ olup $\overline{\Delta}_r$ orijine göre starlikedır. $w^*\in \mathrm{D}$ noktası bazı $\overline{\Delta}_r$ ler de oluşacağından lemmanın tersi açıktır. Bu durumda

$$z^*=f^{-1}\left(w^*\right)$$

ters görüntüsü de $r=\left|z^*\right|$ özelliğine sahip $\overline{\mathrm{D}}_r$ lerde ihtiva edilir.

3.8.2. Lemma

$f\in S$ fonksiyonunun starlike olması için gerek ve yeter şart $\left|z\right|=r<1$ olacak şekilde bütün z ler için

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0$$

olmasıdır.

İspat

$z\neq 0$ iken $\arg f\left(z\right)$ nin seçilen özel bir dalı için

$$\log f\left(z\right)=\ln\left|f(z)\right|+i\arg f(z)$$

şeklinde yazabiliriz. $z = re^{i\theta}$ alırsak

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(z) = \frac{izf'(z)}{f(z)} = i\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(z) + \frac{\partial}{\partial\theta}\ln|f(z)|$$

yazılır. Buradan da

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(z) = \mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}$$

elde edilir. 3.8.1. Lemmaya göre $0 < r < 1$olmak üzere f, D_r de starlike iken f fonksiyonu D bölgesinde de starlikedır ve terside olursa da doğrudur. Böylece $-\pi < \theta \leq \pi$ olmak üzere $z = re^{i\theta}$ çemberi boyunca herhangi bir özel daldaki starlike fonksiyon için $\arg f(z)$ azalamaz. Aksi halde $w = f(z)$ ye karşılık gelen yarıçap vektörü tekrar dönüş yapacak ve aynı yarıçap birden daha çok noktadan $\overline{\Delta}_r$ nin sınırını kesiyor olur. Böylece $|z| = r < 1$ için

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \geq 0$$

dır. Bununla birlikte $\mathrm{D} = \mathrm{Re}(zf'/f)$ harmonik fonksiyonuna maksimum modül teoremi uygulandığında eşitliğin olamayacağı elde edilir. Bu yüzden $|z| = r < 1$için

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

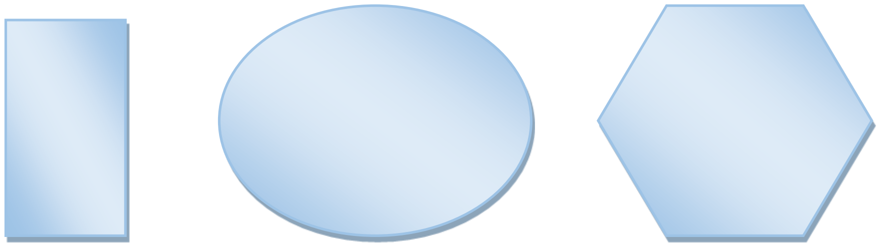
olur.Bu durumda $\arg f(z)$ devamlı artandır ve starlikedır. 3.8.1. lemmadan elde ettiğimiz S sınıfına ait olan f fonksiyonunun $(|z| < 1)$starlike olması için gerek ve yeter şartı

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(z) = \mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

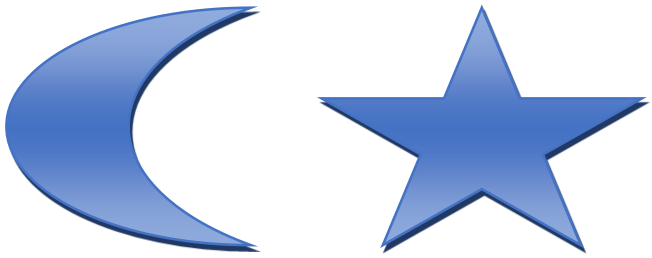
olduğu gösterilmiştir. Eğer $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ fonksiyonu D de analitik ise yukarıdaki eşitsizlik f fonksiyonunun starlike olması için şarttır. Fakat $f(z) = z^2$ örneğindeki gibi ünvalent olmayabilir.

3.9. Tanım (Konveks Bölge)

Her $z_1, z_2 \in A$ noktaları için bu noktaları birleştiren doğru parçası A bölgesinde kalıyorsa böyle bölgelere konveks bölge denir.



Şekil 3.2. Konveks bölge.



Şekil 3.3. Konveks olmayan bölge.

3.10. Tanım (Konveks Fonksiyon)

D de analitik bir fonksiyon olan f fonksiyonunun $f(\mathrm{D})$ görüntü kümesini oluşturan konveks bir bölge oluşuyor ise f fonksiyonu D de konveks olarak ifade edilir. S sınıfına ait konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir.

Verilen bir konveks bölge seçilen her noktasına göre starlike ise konveks fonksiyon sınıfı starlike fonksiyonları kapsar.

Örnek

$f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}\ \left(|z|<1\right)$ fonksiyonunun konveks fonksiyon oluğunu inceleyelim.

Çözüm

$f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}=w$ dersek buradan,

$$w - wz = 1 + z \Rightarrow w - 1 = wz + z$$

$$\Rightarrow w - 1 = z(w+1)$$

$$\Rightarrow z = \frac{w-1}{w+1}$$

olur. Elde edilen eşitliğin her iki tarafının da normunu alırsak,

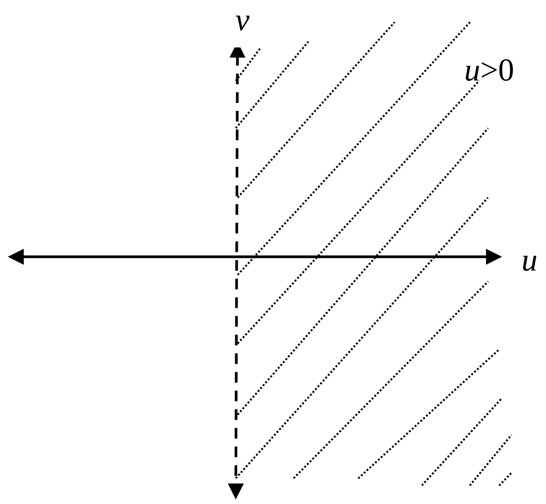
$$|z| = \left|\frac{w-1}{w+1}\right| < 1$$

olur. Elde edilen eşitlikte $w = u + iv$ dönüşümü yaparsak,

$$\left|\frac{u+iv-1}{u+iv+1}\right| < 1 \Rightarrow |u-1+iv| < |u+1+iv|$$

$$\Rightarrow |u-1+iv| < |u+1+iv|$$
$$\Rightarrow (u-1)^2 + v^2 < (u+1)^2 + v^2$$
$$\Rightarrow u^2 - 2u + 1 + v^2 < u^2 + 2u + 1 + v^2$$
$$\Rightarrow -2u < 2u$$
$$\Rightarrow 4u > 0$$
$$\Rightarrow u > 0$$

elde edilir. Bu şekilde elde edilen bölge dönüşümünün sağ yarı düzlemdir. $u > 0$ şeklinde reel kısmı elde edilen $f(z)$ fonksiyonunun konveks olduğu gösterilmiş olur.



Şekil 3.4. *u*>0 dönüşümde konveks bölge.

3.10.1. Lemma

$f \in S$ olsun. $f(\mathrm{D})$ nin konveks olması için gerek ve yeter şart verilen bütün $r \in (0,1)$ için $f(\mathrm{D}_r)$ nin konveks olmasıdır.

İspat

$\Delta = f(\mathrm{D}), \Delta_r = f(\mathrm{D}_r)$ olmak üzere farz edelim ki Δ konvekstir. $w_1, w_2 \in \Delta_r$ olacak şekilde seçilen farklı iki nokta olduğu durumda $0 < t < 1$ için

$$tw_1 + (1-t)w_2$$

doğru parçasının Δ_r içerisinde olduğunu göstermemiz gerekir.

$$z_1 = f^{-1}(w_1) \text{ ve } z_2 = f^{-1}(w_2)$$

olsun. $z_1, z_2 \in \mathrm{D}_r$ olup $|z_1| \le |z_2|$ olarak kabul edilsin. Δ'nın konveksliğinden dolayı D ' nin

$$\psi(z) = tf\left(\left(\frac{z_1}{z_2}\right)z\right) + (1-t)f(z) \quad (0 \le t < 1)$$

altındaki görüntüsünü Δ içerir. Bu durumda $g(z) = f^{-1}(\psi(z))$ fonksiyonu D de analitik olarak ifade edilir ve $|g(z)| < 1$ ve $g(0) = 0$ şeklinde Schwarz Lemmasındaki aksiyomları sağlar. Böylece $|z| < 1$ için $|g(z)| \le |z|$ yazılır. Buradan

$$|g(z_2)| = \left|f^{-1}(tw_1 + (1-t)w_2)\right| \le |z_2| < r... \tag{3.1}$$

olur. $\Delta_r \subset \Delta$ olduğundan verilen her $t \in (0,1)$ için

$$f(z_1) = tw_1 + (1-t)w_2$$

olacak şekilde $z_t \in \mathrm{D}$ noktası vardır. Fakat (3.1) eşitliği için

$$\left|f^{-1}(f(z_1))\right| \le |z_1| < r \text{ veya } z_t \in \mathrm{D}_r$$

olduğunu gösterir. Böylece $tw_1 + (1-t)w_2$'nin tüm noktaları Δ_r dedir. Tersine diğer durum için her $0 < r < 1$ için Δ_r konveksi için Δ da konvekstir. Gerçekten de w_1 ve w_2, Δ da herhangi farklı iki nokta olarak seçilsin. $z_1 = f^{-1}(w_1)$ ve $z_2 = f^{-1}(w_2)$ nin her ikisi de

D_r de olacak şekilde r seçilirse $\Delta_r = f\left(D_r\right)$, w_1 ve w_2 noktalarının her ikisini de ve bu şekilde $0 \le t \le 1$ olmak üzere $tw_1 + \left(1-t\right)w_2$ doğru parçasının tüm noktalarını içerir. $\Delta_r \subset \Delta$ olduğundan dolayı burada verilen doğru parçası Δ içerisinde bulunur yani alt kümesidir.

3.10.2. Lemma

$f \in S$ olsun. f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $|z| < 1$ için

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$$

olarak gösterilmesidir.

İspat

3.10.1. Lemmadan f nin konveks olması için gerek ve yeter şart $r \in \left(0,1\right)$ için Δ_r nin konveks olmasıdır. Bu ifadenin geometrik yorumu ise f fonksiyonunun geometrik dönüşümü $C_r : \left\{z = re^{i\theta}, 0 < r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$ çemberinin yönü saat yönünün ters yönü olan Γ_r basit kapalı eğrileri üzerine dönüştürür. $w = f(z)$ de Γ, eğrisinin teğetinin eğim açısı ω ise

$$\omega = \theta + \frac{\pi}{2} + \arg f'(z)$$

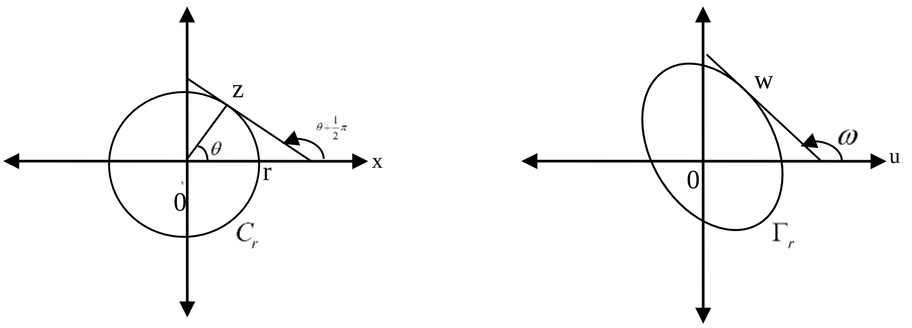
yazılır ve $\dfrac{\partial w}{\partial \theta} > 0$ şartı ile konveks fonksiyon karakterize edilir. Yani,

$$1 + \frac{\partial}{\partial \theta}\arg f'\left(re^{i\theta}\right) > 0$$

veya

$$1 + \operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} > 0$$

şeklinde gösterilir.



Şekil 3.5. Dönüşüm şekli.

Γ_r eğrisinin eğriliği T ile gösterilirse $f\left(\mathrm{D}_r\right)$ nin konveksliği

$$T = \frac{d\omega}{ds} = \frac{d\omega / d\theta}{ds / d\theta}$$

ve $\dfrac{ds}{d\theta} > 0$ olduğundan $\dfrac{d\omega}{d\theta} > 0$ olma şartı $T > 0$ olmasını ifade eder ve terside doğrudur (Gonzalez, 1992).

3.11. Tanım (Konvekse Yakın Fonksiyon)

$f \in S$ olduğunu varsayalım. Her $z \in \mathrm{D}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0 \text{ yada } \left|\arg\frac{f'(z)}{g'(z)}\right| < \frac{\pi}{2}$$

olacak şekilde D de konveks $g(z)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna D de konvekse yakın (close to convex) fonksiyon denir. Konvekse yakın olan fonksiyoların sınıfı ise $\mathrm{C}(\alpha)$ ile gösterilir.

Bu fonksiyon türü ilk olarak 1952 yılında çalışılmış ve Kaplan tarafından ispatlanarak ifade edilmiştir.

Starlike, konveks, S sınıfı içerisindeki fonksiyonlar arasında

$$S^* \subset \mathrm{C} \subset \mathrm{S}$$

şeklinde bir bağıntı bulunmaktadır.

Bir $f \in S$ fonksiyonu $\alpha\left(0 \le \alpha < 1\right)$ olmak üzere $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha, \left(|z| < 1\right)$ şartını sağladığı durumda f fonksiyonun α mertebeden starlike olduğu söylenir ve bu fonksiyonun sınıfı ise $S^*(\alpha)$ şeklinde gösterilir.

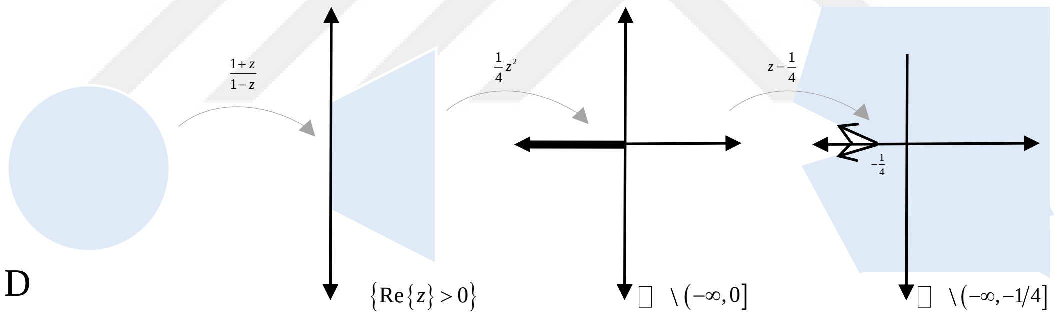
Eğer bir f fonksiyonu $\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha$, $(|z|<1)$ şartı ile sağlanıyorsa bu fonksiyona α mertebeden konveks fonksiyon denir ve bu fonksiyonların sınıfı ise $C(\alpha)$ ile gösterilir.

3.12. Tanım (Koebe Fonksiyonu)

S sınıfına dahil olan,

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+4z^4+\ldots=z+\sum_{n\geq 2}^{\infty}a_n z^n$$

şeklinde toplamı elde edilen fonksiyon Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyon $\mathbb{D}$ birim diskini $\mathbb{C}-\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$ bölgesi üzerine bire bir dönüşümünü gerçekleştirir.



Şekil 3.6. Koebe fonksiyonunun $\mathbb{D}$ düzleminden $\mathbb{C}\setminus(\infty,-1/4]$ ye dönüşümü.

Örnek: S sınıfına ait bazı dönüşümler ve bu dönüşümlerin görüntü kümelerinin dönüşüm bölgeleri;

i. özdeş dönüşüm, $f(z)=z$;

ii. $\mathbb{D}$ 'yi $\{\operatorname{Re}\{z\}>-1/2\}$ yarım düzlemine eşleyen $f(z)=\frac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+\ldots$

iii. $\mathbb{D}$ 'yi $[1/2,\infty)$ ve $(-\infty,-1/2]$ iki yarım düzleme eşleyen $f(z)=\frac{z}{1-z^2}=z+z^3+z^5+\ldots$

iv. D 'yi yatay şerit $\{-\pi/4 < \operatorname{Im}\{z\} < \pi/4\}$ üzerine eşleyen $f(z)=\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$ ve

v. D 'yi kardioidin iç kısmına eşleyen $f(z)=-\frac{1}{2}z^2=\frac{1}{2}\left[1-(1-z)^2\right]$.

4. MODÜLER GRUP TEORİSİ

Bu bölümde homojen olmayan lineer dönüşümler ve Öklid olmayan geometri hakkında gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Fonksiyon teorisi üzerine lineer dönüşümler ile ilgili bilgiler verilerek yapılan çalışma üzerinede daha derin bir inceleme elde edilmiştir.

4.1. Homojen Olmayan Lineer Dönüşümler

4.1.1. Tanım

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde bir cisim (bölge), $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesin ve $\hat{\mathbb{C}}$ ise Riemann küresi olsun. Homojen olmayan lineer dönüşümler (∞ ile hesaplamak için olağan kurallarla birlikte) dönüşümü,

$$L:\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}\ ,\ z \to w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{4.1}$$

$ad-bc \neq 0$ parametrelerini sağlayan $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ şeklinde olur. Bütün homojen olmayan lineer dönüşümler kümesi $\mathscr{L}$ ile ifade edilmiştir.

4.1.2. Homojen olmayan Lineer Dönüşümlerin Önemli Özellikleri

$L \in \mathscr{L}$ ’nin tersi alınabilir ve ters dönüşümü

$$L^{-1}:\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}\ ,\ w \to z = L^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

şeklinde gösterilir. $\mathscr{L}$ fonksiyonların birleşimi altında bir grup ifade eder. Ayrıca $L \in \mathscr{L}$, $z \in \mathbb{C}$ ve $z \neq -d/c$ için holomorftur. $z = \infty$ ve $z = -d/c$ den elde edilen durumlar olağan sonuçlar verir. Buradan $L \in \mathscr{L}$ açıyı muhafaza eder denir yani açı durumunu korunur. Dahası, $\mathscr{L}$, $\hat{\mathbb{C}}$ ’ nin kendi üzerine tüm açı koruma dönüşümlerinin kümesi olarak karakterize edilebilir. Son olarak $L \in \mathscr{L}$ çemberi muhafaza eder yani $\mathscr{L}$,$\hat{\mathbb{C}}$ ’ nin çemberini kendi üzerine dönüştürür.

4.1.3. Homojen Olmayan Lineer Dönüşümlerin Sabit Noktalarına Göre Sınıflandırılması

Eğer $L \in \mathscr{L}$ birim dönüşümü değilse, o zaman L genelde en fazla iki sabit noktalıdır. $L \in \mathscr{L}$ 'nin üç farklı $\hat{\mathbb{C}}$ noktasının görüntüleri ile benzersiz bir şekilde belirlendiği sonucuna varılır. Bunlar keyfi olarak belirtilebilir:

$$z_1 \to w_1 , z_2 \to w_2 , z_3 \to w_3$$

ve dönüşüm aşağıdaki şekilde gerçekleştirilebilir

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \tag{4.2}$$

uygun dönüşümlerle ∞ daki değişimi bu şekilde ifade edilebilir. Eğer (4.2) yi çözersek w için L yi (4.1) formunda bulabiliriz. İfade edecek olursak;

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} = \mathrm{D}\left(z_1, z_2, z_3, z\right) \tag{4.3}$$

dört nokta olan z_1, z_2, z_3, z için dörtlü noktada çapraz oran olarak ifade edilir. (4.2) den, dört noktanın tümü aynı doğrusal dönüşüm $L \in \mathscr{L}$ sine tabi tutulursa çapraz orandan (4.3) geçersiz kaldığı sonucuna varılır. Devam eden açıklama $L \in \mathscr{L}$ ile ilgili sabit noktalar ele alınacaktır.

4.1.4. Teorem

$L \in \mathscr{L}$ iki ayrık sabit nokta için $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ normal formuna sahip

$$\frac{L(z)-z_1}{L(z)-z_2} = \lambda \frac{z-z_1}{z-z_2} , \; \lambda \in \mathbb{C} \; , \lambda \neq 0,1$$

şeklinde ifade edilir. $L \in \mathscr{L}$ sabit nokta için $z_1 \in \mathbb{C}$ ve ∞ normal formuna sahip

$$L(z)-z_1 = \lambda\left(z-z_1\right), \; \lambda \in \mathbb{C} \; , \lambda \neq 0,1$$

şeklinde ifade edilir. $L \in \mathscr{L}$ bir sabit nokta için $z_0 \in \mathbb{C}$ normal formuna sahip

$$\frac{1}{L(z)-z_0} = \frac{1}{z-z_2} + \alpha \; , \; \alpha \in \mathbb{C} \;\; \text{ve} \, \alpha \neq 0$$

şeklinde ifade edilir. Yukarıda ortaya çıkan $\lambda \neq 0,1$ katsayısına L nin çarpanı denir. Eğer

λ pozitif ise L ye hiperbolik denir, eğer $|\lambda|=1$ ise eliptik olur. Bir lineer dönüşüm dönüşüm sadece bir sabit noktası varsa parabol olarak adlandırılır.

4.1.5. Öklid Geometrisi Dışında Homojen Olmayan Reel Katsayılı Lineer Dönüşümler

Eğer $a,b,c,d \in$ ve $ad-bc>0$ ve L reel ekseni (sonsuz dahil) kendi üzerine eşler ve benzer şekilde L üst yarım, düzlem $\mathscr{H}$ kendi üzerine dönüştürür. Özelliklerle L gerçek eksene dik olan $\mathscr{H}$ deki (dikey yarım çizgiler dahil) yarım daire kümesine dönüştürür. Bunları noktaları üst yarım düzlemin noktaları olan bir geometrinin düz çizgileri olarak tanımlarsak bir öklid olmayan(Non Euclidian=N. E) geometrisinin Poincare's modelini alır: Bunun anlamı iki öklid olmayan çizgi arasındaki açıyı kesişme noktasında öklid tanjantları arasındaki öklid açısıdır. $z_1, z_2 \in \mathscr{H}$ noktaları arasındaki N. E mesafe $\delta(z_1, z_2)$ yi tanımlamak için E-dairenin gerçek eksenine dik olan z_1 ve z_2 den ∞_1 ve ∞_2 gerçek noktalarını dikkate alıyoruz. ∞_1 ve ∞_2 noktası $\infty_1, z_1, z_2, \infty_2$'un bu daire üzerinde dönüşümlü olarak birbirini izleyeceği şekilde devam etmektedir. O zaman tanımlanan

$$\delta(z_1, z_2) = \log \mathrm{D}(z_1, z_2, \infty_1, \infty_2)$$

Reel pozitif logaritmalar ile elde edilir. Bu seçim bu dört parçayı($\infty_1, z_1, z_2, \infty_2$) doğrusal bir dönüşümle$(0,1,\lambda,\infty)$ eşleştirirse mümkün olur. Işın, segment ve daire kavramları öklid geometrisinde olduğu gibi kullanılmıştır.

Eğer *K*, merkezi μ ve yarıçapı *r* olan bir N. E dairesi ise, $\bar{\mu}$ dönüşümünün altındaki görüntüsü

$$z \to w = \frac{z-\mu}{z-\bar{\mu}}, \qquad (\bar{\mu},\ \mu\text{'nün karmaşık kongrüantı})$$

$w=0$ merkezli bir öklid dairesi, $z=\mu$ üzerinden N.E çizgileri, yaklaşık $w=0$ üzerinden öklid çizgileri, gerçek *z* ekseni bir öklid dairesi üzerinde yaklaşık $w=0$ olarak eşlenir ve doğrusal dönüşümler altındaki çarpraz oranın değişmezliği, *K* görüntüsünün bir öklid dairesi olduğunu gösterir, ancak öklid merkezi ve yarıçapı farklıdır.

z_1 ve z_2 $\mathscr{H}$ deki iki ayrı nokta ise $\mathscr{H}$ de eşit N. E mesafeli nokta kümesi segmentin N. E dik açıortaylayıcısı olan bir N. E çizgisidir. Bunu z_1 ve z_2 yi gerçek eksenin üzerinde aynı yükseklikte bir çift nokta üzerine eşleyerek görüyoruz. İyi bilindiği gibi, düşündüğümüz dönüşümler, $\mathscr{H}$ nin kendisiyle uyumlu dönüşümlerinin kümesi ile örtüşmektedir.

4.2. Homojen Lineer(Doğrusal) Dönüşümler

4.2.1. Tanım

$\mathscr{A}$, $\mathbb{C}$ üzerinde tersine çevrilebilir ikiye iki matris grubu olsun:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \text{ ve } \det|A| = \alpha\delta - \beta\gamma \text{ .}$$

Dahası L, homojen lineer dönüşümler dediğimiz kendi üzerine $\mathbb{C}$ dahil edilebilir doğrusal dönüşümler grubu olsun. Her $A \in \mathscr{A}$ için elde edilen dönüşüm

$$L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ z \to w = A.z$$

L' ye ait ve buradan $A.z$, A nın $z = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ sütununa sahip matris ürünüdür ve buradan

$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ olur.

$\mathscr{A} \to L, A \to L_A$ şeklinde yazılabiliyorsa o zaman $\mathscr{A} \cong L$ şeklinde yazılan bir izomorfizma olur. Gelecekte, matrisler ve homojen doğrusal dönüşümleri için aynı gösterimi kullanacağız. Eğer

$$z' = sz\ ,\ w' = sw \text{ ve } |s| \neq 0$$

olursa o zaman

$$w' = sAs^{-1}z'$$

şeklinde kurabiliriz.

4.2.2. Homojen Lineer Dönüşümlerin Jordan Normal Formu

$A, B \in \mathscr{A}$ iki matrisi için eğer aynı kökten türemişler ise eşittirler denir ve eğer bir $s \in \mathscr{A}$ ise o zaman $B = sAs^{-1}$ olur. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathscr{A}$ öz değerinin bu karakteristik polinomunun kökleri

$$\phi_A(x) = \det\left(xI - A\right) = x^2 - \left(\alpha + \delta\right)x + \alpha\delta - \beta\gamma$$

sıfır değillerdir ve sadece A nın eşdeğerlik sınıfına bağlıdır (I birim matrisi $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olarak alınır).

4.2.3. Teorem

Farklı öz değerleri λ_1, λ_2 olan eşdeğer matris sınıflarının her biri tam olarak iki diyagonal matris içerir, bunlar

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ve} \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat

$$z^1 = \begin{pmatrix} \omega_1^1 \\ \omega_2^1 \end{pmatrix}, z^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{pmatrix}$$

böyle bir sınıfın A matrisinin doğrusal olarak bağımsız öz vektörleridir. Yani,

$$Az^\nu = \lambda_\nu z^\nu, \qquad \nu = 1, 2.$$

O zaman

$$s = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \tag{4.4}$$

şeklindeki A dönüşümünden

$$sAs^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

elde edilmiş olur. Karakterize işlemi açıkça sağlanmış olur.

4.2.4. Teorem

Farklı olan ve tam olarak bir özlere sahip olan eşdeğer λI matris sınıfları $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

matrisi içerir ve λ_0 sayısı ile karakterize edilir.

İspat

Eğer $z^0 = \begin{pmatrix} \omega_1^0 \\ \omega_2^0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ matrisinin sınıfının öz vektörü ise o zaman $s = \begin{pmatrix} \omega_1^0 & 1 \\ \omega_2^0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ olur ve eğer $\omega_2^0 \neq 0$ yada $s = 1$ olursa yada bunun dışında ikinci bir durumda eğer $\omega_2^0 = 0$ olursa A nın dönüşümü $sAs^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \beta^* \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde alınan $\beta^* = \gamma / \omega_2^0$ ya da $\beta^* = \beta$ değerleri için elde edilmiş olur. İki durumdan dolayı $\beta^* \neq 0$ ve $A = \lambda I$ olur. Başka bir dönüşümde $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta^* \end{pmatrix}$ şeklindeki matrisin anlamı $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ olur. Bu şekilde karakterize edildiği anlaşılmış olur. $\{\lambda I\}$ sınıfları tek öz değer λ ya sahiptir , öz uzayı ise $\mathbb{C}^2$ dir. Özetle elde edilen ispatta $\{\lambda I\}$ den farklı eş değer matris sınıfları öz değerlerine göre belirlenir.

4.2.5. Homojen ve İnhomojen (Homojen Olmayan) Lineer Dönüşümler Arasındaki Bağıntı

$\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{L}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ve $A \to \bar{A} : z \to w = \bar{A}(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ çekirdeği ile homomorfizma olur($\alpha \in \mathbb{C}$ olarak seçilen birimde $\alpha I \in \mathscr{A}$). Eğer kendini modüler matrislerin $\mathscr{A}^*$ grubu ile sınırlandırırsa

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathscr{A}^*, \qquad |A| = \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

buradan φ nün çekirdeği $\{\pm 1\}$ olur. Aynı zamanda

$$\mathscr{A} / \mathbb{C}^* \cong \mathscr{L} \ , \ \mathscr{A}^* / \{\pm 1\} \cong \mathscr{L} \ .$$

A matrisinin iki farklı öz değeri olan λ_1, λ_2 değerlerine sahip olduğunu varsayarsak, o zaman değişimler $z' = sz$, $w' = sw$ 4.2.3. teoremdeki s matrisinin dönüşümü ile $w = Az$ içerisinde

$$w' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z'$$

ya da

$$\omega_2^2 w_1 - \omega_1^2 w_2 = \lambda_2 \left(\omega_2^2 \omega_1 - \omega_1^2 \omega_2 \right),$$

$$-\omega_2^1 w_1 + \omega_1^1 w_2 = \lambda_2 \left(-\omega_2^1 \omega_1 + \omega_1^1 \omega_2 \right).$$

o zaman

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = z, \quad \frac{w_1}{w_2} = w, \qquad \frac{\omega_1^1}{\omega_2^1} = z_1, \qquad \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = z_2$$

elde edilen eşitliklerden homojen olmayan dönüşümler için bulduğumuz eşitlik $w = \bar{A}z$ nin normal formu:

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = \lambda \frac{z - z_1}{z - z_2} \text{ eğer } \omega_2^1 \text{ ve } \omega_2^2 \neq 0 \text{ ya da}$$

$\omega_2^2 = 0$ olursa

$$w - z_1 = \lambda \left(z - z_1 \right)$$

eşitliği elde edilir. $\bar{A}$'nın çarpanlarından $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ve sabit noktaları z_1 ve z_2 dir. Eşitlikten

$$Az^v = \lambda_v z^v \text{ yada} \begin{cases} \alpha\omega_1^v + \beta\omega_2^v = \lambda_v \omega_1^v \\ \gamma\omega_1^v + \delta\omega_2^v = \lambda_v \omega_2^v \end{cases}$$

sabit noktaları ve öz değerler arasında elde edilen ilişki;

$$\lambda_v = \alpha + \frac{\beta}{z_v} \text{ ve } \lambda_v = \gamma z_v + \delta, \qquad v = 1, 2.$$

Bu eşitlikler arasındaki ilişkilerden bir tanesi ω_1^v ve $\omega_2^v = 0$ durumları için sağlanmamaktadır. $\mu \neq 0$ için μA matrisi $\overline{\mu A} = \bar{A}$ şeklinde ifade edilir. $\mu\lambda_1$ ve $\mu\lambda_2$ için elde edilen öz değerler λ ya eşittir. Bu şekilde ispat sağlanmış olur.

4.2.6. Teorem

Eğer $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ matrisi λ_1 ve λ_2 iki farklı öz değerli ve lineer bağımsız öz vektörler $\begin{pmatrix}\omega_1^1 \\ \omega_2^1\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}\omega_1^2 \\ \omega_2^2\end{pmatrix}$ ise, o zaman $\overline{A}$ dönüşümünün de iki farklı sabit noktası

$$z_\nu = \frac{\omega_\nu^1}{\omega_\nu^1} = \frac{\lambda_\nu - \delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\lambda_\nu - \alpha}, \qquad \nu = 1,2$$

ve çarpımları $\lambda = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ şeklinde olur.

Eğer A λ_0 gibi tek öz değere sahip ise o zaman 4.2.4. teorem ispatından s ifadesini kullanarak benzer işleme karşılık gelen normal formu verilir. Bu durumda sabit z_0 noktası için

$$z_0 = \infty \text{ için } \lambda_0 = \alpha \text{ ya da } z_0 \neq \infty \text{ için } \lambda_0 = \gamma z_0 + \delta \tag{4.5}$$

şeklinde elde edilir.

4.2.7. Aynı Sabit Noktalar İle Dönüşümler

Tüm $\overline{A} \in \mathscr{L}$ grubunun sırasıyla aynı çift z_1 ve z_2 sabit noktalara veya aynı tek sabit noktaya sahip olduğunu düşünelim. Konjugrasyon yolu ile bu grubun ya sabit nokta çifti sıfır olan tüm $\overline{A} \in \mathscr{L}$ grubu ∞ yada tek(sabit) nokta ∞ için $\overline{A} \in \mathscr{L}$ grubuna izomorf olduğunu görüyoruz. Ayrıca normal formlar bu grubun izomorfunun ya tüm $\lambda \in \mathbb{C}^*$ nin çarpımsal grubu ya da $\alpha \in \mathbb{C}$ nin katkı grubu ile gösteririz. Daha kesin olarak bu görüşler 4.2.8. teorem içerisinde ifade edilmektedir.

4.2.8. Teorem

Ortak bir sabit nokta çiftine sahip bir grup homojen olmayan lineer dönüşüm izomorftur ve toplama grubuna göre aralarındaki ilişki yine izomorftur.

4.3. Modüler Grup Ve Sabit Noktalar

4.3.1. Tanım ve Sınıflandırma

Homojen bir modüler dönüşüm elemanları rasyonel sayı olan ve determinantı bir olan homojen bir doğrusal dönüşümdür. Bir grup homojen modüler dönüşüm yaparsa unimodüler matris grubu üzerine izomorf olur. Burada

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{Z} \quad ad - bc = 1 \right\}$$

φ homomorfizmasından elde ettiğimiz inhomojen modüler grup

$$\bar{\Gamma} = \left\{ \bar{A} \mid A \in \Gamma \right\}.$$

Burada eğer $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olursa $\bar{A} : z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ olur. $\bar{A} \in \bar{\Gamma}$ elemanları homojen olmayan modüler dönüşüm olarak adlandırılır. Bu dönüşümler üst yarı düzlem $\mathscr{H}$ reel eksen $\mathbb{R}$ ve rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ şeklinde korunur. Γ ve $\bar{\Gamma}$ arasındaki izomorf ilişkisi

$$\Gamma / \left\{ \pm 1 \right\} \cong \bar{\Gamma}$$

şeklinde gösterilir. Eğer $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ise o zaman karakteristik polinom

$\phi_A(x) = \det \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix} = x^2 - tr(A)x + 1$, $tr(A) = a+d$ kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+d)^2 - 4}$$

$\lambda_1 \lambda_2 = 1$. Bu durumda öz değer λ_1 ve λ_2 cebirsel tamsayıdır ve bunlar ya rasyonel sayıların $\mathbb{Q}$ alanında ya da quadratik(karesel) sayı alanında $\mathbb{Q}\left(\sqrt{(a+d)^2 - 4}\right)$ bulunur. $\mathbb{Z}$ ' nun birimleri ± 1 ve $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ olduğundan ya $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ya da $a+d = 2$ ya da $a+d = -2$ ise $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ olur. Bu da $a+d$ nin herhangi bir değerini takiben $\lambda_{1,2}$ $\mathbb{Q}$ içerisinde değildir. Bütün diğer durumlar için iki öz değerin farklı olması gerekir. Sonuç olarak verilen durumlar için elde edilmiştir.

i. **Parabolik durum:** Verilen sabit terimleri $\lambda_0 = 1$ ya da $\lambda_0 = -1$ şeklinde seçilirse burada elde edilen durum için $|a+d|=2$ olduğunda parabol oluşur.

ii. **Eliptik durum üzerinde:** $\mathbb{Q}(i)$ nin elde edilmesi için seçilecek olan $a+d=0$, $\lambda_{1,2}=\pm i$ şeklinde elde edilir. Burada $\lambda=\lambda_2/\lambda_1$ şeklinde olması için $\lambda=-1$ olur. Bu da eliptik (modüler) dönüşümü belirler.

iii. **Eliptik durum üzerinde:** $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ için $|a+d|=1$, $\rho=e^{2\pi i/3}$ olarak alınırsa $\lambda_{1,2}=\rho^{\pm 1}$ ya da $\lambda_{1,2}=-\rho^{\pm 1}$ olur. Burada çarpım birim küp kök olur ve modüler dönüşüm eliptik olarak elde edilir.

iv. **Hiperbolik durum:** Verilen ihtimaller dahilinde kalan ihtimal son olarak $|a+d|>2$ için elde edilen sonuçlarla öz değer ve çarpanlar gerçek quadratik(karesel) sayı alanındaki birimlerdir. λ çarpanı pozitif ve $\lambda_1\lambda_2=1$ için $\lambda=\lambda_2/\lambda_1=\lambda_2^2$ şeklinde ifade edilir (dolayısıyla dönüşüm gerçekten de hiperboliktir).

Şimdi eş değerlik kavramına ihtiyacımız vardır: Modüler $\overline{\Gamma}$ grubu altında iki nokta $z_1,z_2\in\mathbb{H}$ denir. $\overline{A}(z_1)=z_2$ ile homojen olmayan bir modüler dönüşüm varsa $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ olarak ifade edilir. Bunun bir eş değerlik ilişkisi tanımladığı açıktır. K üzerinde ikinci dereceden bir sayı K alanının $\mathbb{Q}$ üzerinde ayrımını verir. Bunun için ω, $\omega=\alpha_1/\alpha_2$ integrali ile α_1,α_2 K 'nın temsilini verir. O zaman diskriminant $\Delta(\omega)$ yi tanımlarsak,

$$\Delta(\omega)=\left[\frac{\alpha_1\alpha_2'-\alpha_2\alpha_1'}{N(\alpha_1,\alpha_2)}\right]$$

şeklinde elde edilmiş olur. Burada asal, payda da birleşme ve normu, rasyonel sayı olarak kabul edilen olan α_1,α_2 nin en büyük ortak böleni (α_1,α_2) nin normudur. $\Delta(\omega)$ nin K tamsayıları olarak gösterilmesinden bağımsız olduğu açıktır. $\Delta(\omega)$ aynı zamanda ω nin bir kök olduğu ve katsayıları rasyonel olmayan tamsayılar olan quadratik (karesel) polinom ayrımıdır. Ortak bölen yani polinom

$$\frac{(\alpha_2x-\alpha_1)(\alpha_2'x-\alpha_1')}{N(\alpha_1,\alpha_2)}=\frac{1}{N(\alpha_1,\alpha_2)}\left[\alpha_2\alpha_2'x-(\alpha_1\alpha_2'+\alpha_1'\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_1'\right].$$

Verilen sınıflandırma özelliklerine göre modüler dönüşümler ve özelliklerini incelemeye devam edilecektir.

4.3.2. Parabolik Sonuç

Modüler dönüşümleri $\overline{A} \in \overline{\Gamma}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $|a+d| = 2$ ile elde edilen sonuçları incelenmeye devam edilecektir.

4.3.3. Teorem

i. Sabit noktaların kümesi rasyonel sayılar ve ∞ için tutarlıdır.

ii. Aynı sabit noktaya sahip $\overline{A} \in \overline{\Gamma}$, $\overline{\Gamma}$ içerisinde tek bir sabit nokta ∞ ile modüler dönüşüm grubunun birleşimi ile sonsuz bir döngüsel sıklık grubu oluşturur.

iii. Tüm rasyonel sayılar modüler $\overline{\Gamma}$ grubu altında ∞'a eş değerdir.

İspat

Eğer $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $|a+d| = 2$ ve $c \neq 0$ ise o zaman $\dfrac{a+d}{2}$ sadece öz değer olur. (4.5) formülünden elde ederiz ki rasyonel nokta olarak $\dfrac{a-d}{2c}$, $\overline{A}$ nın tek sabit noktasıdır. Eğer böyle ise $c = 0$ olacak şekilde bir seçim yaparsak o zaman $A = \pm\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olur. Standart dönüşüm ile

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \overline{u} : z \to z+1$$

dönüşümü yapacak olursak, bu şekilde $\overline{A} = \overline{u}b$ elde edilmiş olur. $\overline{u}^b, b \in$ dönüşümleri sabit noktada ∞ ile paraboliktir, yani tek sabit noktaları sonsuzdur; $\overline{u}$ tarafından üretilen sonsuz bir döngüsel grup oluştururlar. En büyük ortak bölen $(a', c') = 1$ ile verilen rasyonel bir nokta için $s = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ matrisi ile $b', d' \in$ için $a'd' - b'c' = 1$ olacak şekilde kurulmuştur. Her şeyden önce ispatı kanıtlayan $\overline{s}(\infty) = a'/c'$ 4.3.3. teoremdeki üçüncü iddianın ispatını takip eder. Ayrıca

$$A' = sus^{-1} \in \Gamma$$

ise $\bar{A}$ sabit nokta olarak verilen a'/c' noktasına sahiptir ve paraboliktir. Dolayısıyla bir a'/c' ifade edilen (4.3.3. teoremdeki) birinci iddianın ispatını kanıtlayan sabit bir nokta olarak ortaya çıkar. Dahası $\bar{s} \in \bar{\Gamma}$ ile sonsuz ve birleşen gruptur. Bu iddia (4.3.3. teoremdeki) ikinci iddianın ispatı verir.

4.3.4. Gauss Sayı Alanları Üzerine Eliptik Olma Durum

Modüler dönüşümler $\bar{A} \in \bar{\Gamma}$ ile $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $a + d = 0$ takip eden özelliklere sahiptir.

4.3.5. Teorem

i. Bir sabit nokta kümesi $\frac{\pm i - d}{c}$, $d^2 \equiv -1 (\bmod c)$ ile çiftlerden oluşur, bunlar $\mathbb{Q}(i)$ içerisinde, diskriminantı -4 olan sayılardır.

ii. Aynı sabit noktayı içeren $\bar{A} \in \bar{\Gamma}$ ikinci dereceden döngüsel grubu ifade eder.

iii. Tüm sayılar $\frac{i - d}{c} \in \mathbb{Q}(i)$ ile $d^2 \equiv -1 (\bmod c)$, $c > 0$ modüler grup $\bar{\Gamma}$ altında eşdeğerdir.

İspat

Teorem de verilen ikinci iddiayı $\lambda = -1$ için birazdan kanıtlayacağız. Burada öncelikle birinci kısmı ispatlayalım; $\bar{A}$ nın sabit noktaları $\lambda_{1,2} = \pm i$ formülü ile $\lambda_{1,2} = cz_{1,2} \pm d$ değerlerinden hesaplanır. Böylece $z_{1,2} = \frac{\pm i - d}{c}$ ve $a = -d$ olunca devam eden $ad - bc = 1$ olduğundan $d^2 \equiv -1 (\bmod c)$ elde edilir. Sonuç olarak eğer $c, d \in \mathbb{Z}$ ve $d^2 \equiv -1 (\bmod c)$ ise o zaman matris

$$A = \begin{pmatrix} -d & -\frac{d^2 + 1}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$$

tamsayılardan oluşur ve determinantı bir olur aynı zamanda trace(izi) sıfır'dır, $\bar{A}$' nın sabit noktaları $\frac{\pm i - d}{c}$ olur. İspatın birinci iddiası sağlanmış olur. $\frac{\pm i - d}{c}$ sayıları ile $d^2 \equiv -1 (\bmod c)$ sıfır polinomları olarak ifade edilir ve

$$b=-\frac{1+d^2}{c} \text{ için } cx^2+2dx-b$$

$-bc=1+d^2$ olursa $ebob(b,c,2d)=1$ bu yüzden -4 diskriminantına sahiptir. Sonuç olarak tersini düşünürsek; $\frac{d'i-d}{c}\in\mathbb{Q}(i)$ ortak bölenleri $c,d,d'\in\mathbb{Z}$ olmadan diskriminantı -4 verilmiş olsun. Eğer $\gamma=(di-d,c)$ ise $-4=(2id'c/N(\gamma))^2$ ve böylece $d'c=\pm N(\gamma)$ olur. Eğer π/d' asalsa, o zaman π/c ve π/d de bu şekilde olur ve π/γ ve π/γ' de bu şekilde ifade edilir. Burada $ebob(c,d,d')=1$ olur. Bu da $d'=\pm 1$ ve böylece $N(\gamma)=\pm c$ olur. Özellikle $\gamma|\pm i-d$ olduğunda bu $c=\pm N(\gamma)/N(\pm i-d)=1+d^2$ ve böylece $d^2\equiv -1(\mathrm{mod}\, c)$ elde ederek birinci iddiayı ispatlamış oluruz. Şimdi üçüncü iddiayı ispatlayalım; bütün $\bar{A}\in\bar{\Gamma}$ ve $tr(A)=0$ birleşimi için ($\bar{\Gamma}$ içerisinde) $\bar{\Gamma}$ nun standart dönüşümü ile

$$T=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \bar{T}: z\to -\frac{1}{z}.$$

4.3.6. Birim Küpkökler Üzerinde Eliptik Olma Durumları

Modüler dönüşüm $\bar{A}\in\bar{\Gamma}$ ile $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$ ve $|a+d|=1$ devam eden teoremde dönüşümümüz ile teorem ispatımızı elde edelim.

4.3.7. Teorem

i. Sabit nokta kümesi sayı çiftlerinden oluşur;

ii. $$\frac{\rho^{\pm 1}-d}{c}\in\mathbb{Q}(\rho) \text{ ile } d^2+d+1\equiv 0(\mathrm{mod}\, c);$$

iii. $\mathbb{Q}(\rho)$ nin diskriminantı -3 olan sayılardır.

iv. Sabit noktaların formlarının üçüncü dereceden dönüşüm grupları $\bar{A}\in\bar{\Gamma}$ çiftleridir.

v. Bütün sayılar

$$\frac{\rho-d}{c}\in\mathbb{Q}(\rho) \text{ ile } d^2+d+1\equiv 0(\mathrm{mod}\, c)\ c>0,$$

modüler $\bar{\Gamma}$ grubunun altında eş değerdir.

İspat

Birim küplerin çarpımı ikinci iddianın ispatını verir. Şimdi birinci teoremi ispatlayalım. Eğer $\bar{A} \in \bar{\Gamma}$ ve $|a+d| = 1$ verilirse genel bir çözüm için $a+d=-1$ olur. $\bar{A}$ nın sabit noktası $\dfrac{\rho^{\pm 1}-d}{c}$ öz eğer hesabından hesaplarsak $\lambda_{1,2} = \rho^{\pm 1}$ olur. Böylece $a = -(1+d)$ bu da $ad-bc=1$ ve $d^2+d+1 \equiv 0 \pmod{c}$ olur. Tersine $c,d \in \mathbb{Z}$ için $d^2+d+1 \equiv 0 \pmod{c}$ burada elde edilen matris

$$A = \begin{pmatrix} -(1+d) & -\dfrac{d^2+d+1}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$$

tamsayılarından oluşur ve determinantı, trace(iz)=1 ve $\bar{A}$ sabit noktası $\dfrac{\rho^{\pm 1}-d}{c}$ olur. Bu da birinci iddiayı kanıtlar. Sayılar

$$\frac{\rho^{\pm 1}-d}{c} \text{ ile } d^2+d+1 \equiv 0 \pmod{c}$$

olan polinom kökleri

$$b = -\frac{d^2+d+1}{c} \text{ için } cx^2+(1+2d)x-b$$

diskriminantı -3 olur. $\dfrac{\rho^{\pm 1}-d}{c}$ sayısı için $ebob(c, 1+2d, b) = 1$ ve aynı zamanda diskriminant -3 olur. Tersine $\dfrac{d'\rho-d}{c} \in \mathbb{Q}(\rho)$ verilmiş olsun. $c,d,d' \in \mathbb{Z}$ genel bölenler haricinde diskriminant -3 olsun ($\dfrac{d'\rho-d}{c} \in \mathbb{Q}(\rho)$ dahil olsun). Eğer $\gamma = (d'\rho-d, c)$ o zaman $-3 = \left(\dfrac{d'c(\rho-\bar{\rho})}{N(\gamma)}\right)^2$ böylece $d'c = N(\gamma)$ olur. Üçüncü iddiayı ispatlayacak olursak; bütün $\bar{A} \in \bar{\Gamma}$ için $|tr(A)| = 1$ birleşimi ($\bar{\Gamma}$ içerisinde) R yada $\bar{R}$ standart dönüşümü için

$$R = Tu\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{R} : z \to \frac{-1}{z+1}$$

olur.

4.3.8. Hiperbolik Olma Durumu

Modüler dönüşüm $\bar{A} \in \bar{\Gamma}$ ile $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $|a+d| > 2$ şeklinde olduğunda hiperbolik durum elde edilmiş olur.

4.4. Ana Noktalar Ve İlişkiler

4.4.1. Teorem (Ana Noktalar)

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ın dördüncü derecesi ve sonsuz derecede $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nun elemanları tarafından homojen modüler grup oluşturur. Homojen olmayan modüler grup ise sonsuz mertebeli $\bar{u} : z \to z+1$ve ikinci dereceden $\bar{T} : z \to \dfrac{-1}{z}$ dönüşümleri tarafından oluşturulur.

İspat

Eğer $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ve $k \in \mathbb{Z}$ ise o zaman

$$TA = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix},$$

$${}^{k}A = \begin{pmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$|c| \leq |a|$ olduğunu varsayalım. (Çünkü bu *A* için doğru değilse, *TA* ile başlarız.) $c = 0$ ise $A = \pm u^{q_0}$. Bununla birlikte $c \neq 0$ ise öklid algoritmasından *a* ve *c*' den (değiştirilmiş biçimde):

$$a = q_0 c + r_1 ,\ -c = q_1 r_1 + r_2 ,\ r_1 = q_2 r_2 + r_3 ,\ ...,\ \left(-1\right)^n r_{n-1} = q_n r_n + 0$$

$r_n = \pm 1$ ile biter çünkü $\left(a, c\right) = 1$ olur. A tarafından

$$Tu^{-q_n} T ... Tu^{-q_0}$$

ön çarpımı için $q_{n+1} \in \mathbb{Z}$ de $\pm u^{q_{n+1}}$ elde ederiz. Bu durumda $|c| > |a|$ dahil,

$$A = T^m u^{q_0} Tu^{q_1} Tu^{q_2} T ... Tu^{q_n} Tu^{q_{n+1}}$$

$m = 0,1,2$ ya da 3; $q_0, q_1, q_2, q_3, ..., q_{n+1} \in \mathbb{Z}$ ve $q_0, q_1, q_2, q_3, ..., q_{n+1} \in \mathbb{Z}$ olur. $\bar{\Gamma}$ için ispatımız tamamlanmış olur.

4.4.2. İlişkilerin Tanımlanması

u ve T , Γ grubunu oluşturduğundan T ve $R_1 = R$ daha önceki ispatımızdan $u = -TR$ olur.Takip eden teoremde bu durumun ispatı verilmiştir

4.4.3. Teorem

Γ modüler grubu ile ilişkili olarak kurulan T ve R_1 için;

$$T^4 = R_1^3 = 1,\ R_1 T^2 = T^2 R_1$$

ve Γ için ilişkilerin tanımlanmasını ifade eder.

İspat

Γ modüler grubu ile ilişkili olarak kurulan T ve R_1 arasındaki ilişkiler ifade edilir. Farz edelim ki kısıtlama olmadan verilmiş keyfi bir ilişki verilsin,

$$T^{v_1} R_1^{\alpha_1} T^{v_2} R_1^{\alpha_2} T^{v_3} R_1^{\alpha_3} ... T^{v_n} R_1^{\alpha_n} T^{v_{n+1}} = I\ ,\ u_v, \alpha_v \in \mathbb{Z}\ .$$

Elde edilen dönüşümleri uygularsak

$$T^{v_1} R_1^{\alpha_1} T^{v_2} R_1^{\alpha_2} T^{v_3} R_1^{\alpha_3} ... T^{v_n} R_1^{\alpha_n} T^{v_{n+1}} = I$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_{n+1} = 0,1,2,3$, $\alpha_v = 1$ ya da 2, ve $n \geq 0$. Burada uygun bir T çarpımından sonra elde edeceğimiz

$$s = R_1^{\alpha_1} T ... R_1^{\alpha_n} T = T^{\alpha}\ ,\ \alpha_v = 1 \text{ ya da 2},\ \alpha = 0,1,2,3 \text{ ve } n \geq 0\ .$$

Bununla birlikte böyle bir ilişki $n \geq 1$ için uygun olmaz. Gerçekten de eğer $s = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ şeklinde bir küme alırsak, s girişlerinin $n \geq 1$ için koşullarının

$$a, b, c, d \geq 0 \text{ ve } b + c > 0$$

ya da

$$a, b, c, d \leq 0 \text{ ve } b + c < 0$$

sağladığını ve T^{α} üzerinde $\alpha = 0,1,2,3$ girişlerinin olmadığını gösteririz. Elde edilen sonuç sadece $n = 0$ için olasıdır. s için verilen eşitlikler için

$$R_1 T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$R_1^2 T = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eğer $s = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ için doğru ise o zaman,

$$R_1 T s = \begin{pmatrix} a & -b \\ -(a+c) & b+d \end{pmatrix},$$

$$R_1^2 T s = -\begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ -c & d \end{pmatrix}$$

bütün $n \geq 1$ olan s ler için ima edilir. Elde edilen eşitlik için

$$\overline{T}^2 = \overline{R}^3 = \overline{I}$$

homojen olmayan Γ modüler grubu ile ilişkilerin tanımlanmasında kullanılır. Bundan dolayı $\overline{T}^2 = \overline{I}$ için önemsiz hale dönüşür (Schoeneberg, 1974).

4.4.4. Teorem

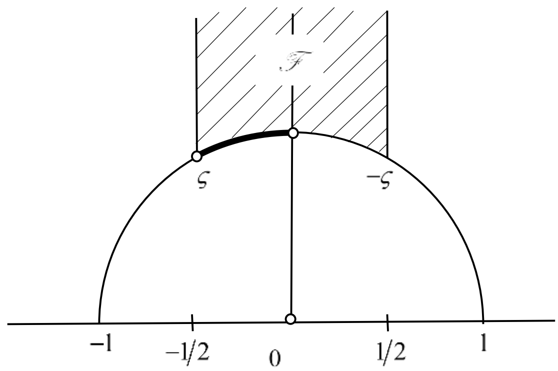
İkinci ve üçüncü dereceden döngüsel grupların özgün oluşumları için $\overline{\Gamma}$ grubu izomorftur. Farklı ispat yöntemi için Klein ve Fricke (1890) incelenebilir.

4.5. Temel Bölge Ve Özellikleri

Bundan böyle gerçek eksenin rasyonel noktaları ve şimdi $i\infty$ sembolü tercih ettiğimiz ∞ noktası, üst yarı düzleme bitişik olacaktır. Bu uzatılmış üst yarı düzlem $\mathscr{H}^*$ ile , değişken τ ile gösterilecektir.

4.5.1. Temel Bölge

$\mathscr{F}$ nin $\overline{\Gamma}$ grubu altında $\mathscr{H}^*$ eş değeri sınıflarının her bir sınıfından tam olarak bir nokta içeriyorsa, $\mathscr{F}$ kümesine $\mathscr{H}^*$ için modüler $\overline{\Gamma}$ grubunun temel kümesi denir.



Şekil 4.1. Fundamental (tamlık) bölgesi.

$\mathscr{F}$ bölgesi temel bölge olarak adlandırılırsa

$$\tau \in \mathscr{F}\ ,\ \overline{s}(\tau) \in \mathscr{F}\ , \overline{I} \neq \overline{s} \in \overline{\Gamma}$$

τ nun $\mathscr{F}$ nin bir sınır noktası olduğunu ima eder.

4.5.2. Teorem

$$\mathscr{F} = \left\{ \tau \middle| \tau \in \mathscr{H}, \left| \mathrm{Re}\left(\tau \leq \frac{1}{2} \right) \right|, |\tau| > 1 \right\} \cup \{i\infty\} \cup \left\{ \tau \middle| \mathrm{Re}\,\tau = -\frac{1}{2}, |\tau| \geq 1 \right\}$$

$$\cup \left\{ \tau \middle| |\tau| = 1, -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\,\tau \leq 0 \right\}$$

$\mathscr{H}^*$ için $\overline{\Gamma}$ nun temel bölgesidir.

İspat

İlk olarak $\overline{\Gamma}$ altındaki her bir denklik sınıfının bir temsilcisi olduğunun ispatını sağlayalım.

Bu amaçla $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma$ ve $\tau\in\mathscr{H}$ için formüle edecek olursak;

$$\operatorname{Im}\overline{A}(\tau)=\frac{\operatorname{Im}(\tau)}{\left|c\tau+d\right|^{2}}.$$

$\operatorname{Im}(\tau)>0$ ile sabit bir τ için $c\tau+d, c,d\in\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$ de bir latis oluşturur. Böylece $\left|c\tau+d\right|$ pozitif bir minumum değere sahiptir.

5. ELİPTİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde genel eliptik fonksiynlar teorisinin sistematik gelişmesi için önemli olan temel soyut cebir ve kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinin kavramlarına kısaca değinilecektir. Weierstrass Faktör teoremi, Mittag Leffler kısmi kesir teoremi gibi kompleks fonksiyonlar teorisindeki gelişmeler için önemli olan bazı teorilere ispatlarına değinilmeden yer verilecektir. Son olarak da genel fonksiyon fikirlerinden, periyodik fonksiyon sınıfının genel özellikleri ve periyodlarının sınıf özellikleri herhangi bir sınıf üysinin formuna değindirilmeden incelenecektir.

5.1. Soyut Cebir Kavramları

5.1.1. Tanım

Eğer bazı A ve B kümelerinin elemanları arasında bazı bağıntılar varsa, B kümesinin A kümesi ile bağlantılı olduğu söylenir. $x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere ${}_X R_Y$ sembolü ile gösterilir.

5.1.2. Tanım

Eğer aşağıda verilen şartlar bir ${}_X R_Y$ bağıtsını için sağlanıyorsa bu bağıntı denklik bağıntısı olarak adlandırılır:

i. ${}_X R_X$ (Yansıma)

ii. ${}_X R_Y$ ise ${}_Y R_X$ (Simetrik)

iii. ${}_X R_Y$ ve ${}_Y R_Z$ ise ${}_X R_Z$ dir. (Geçişme)

5.1.3. Tanım

Eğer G, $a^o e = e^o a = a$ özelliğini sağlıyorsa bir e eleman içeriyorsa ve G her bir a elemanı için $a^o b = e$ özelliği bir $b \in G$ için sağlanıyorsa, G grubu birleşme özelliği olan temel bir işlem altında (şöyle ki herhangi bir $a, b \in G$ çifti için $a^o b \in G$) kapalı olan elemanlar kümesi olarak ifade edilir.

Not: Eğer $a^o b = e,\ b^o a = e$ ise $b = a^{-1}$ şeklinde gösterilir.

5.1.4. Tanım

G grubundan alınan bir alt küme S eğer kendisi de " ^{o} "işlemi için grup özelliklerini sağlıyorsa, S ye G nin bir alt grubu denir.

5.1.5. Tanım

Herbir $a, b \in G$ çifti için değişmeli (şöyle ki $a^o b = b^o a$) özelliğini sağlayan G grubu, Abelian (değişmeli) gruptur.

5.1.6. Tanım

Bir K alanı genellikle toplama işlemi olarak verilen işlem altında bir Abelian gruptur ve K nın boş olmayan elemanları altunda farklı bir işlem olarak verilen çarpma işlemi altında da değişmeli gruptur. K nın elemanları genel dağılma özelliği sağlar:

$$a\left(b+c\right) = ab + ac$$

$$(a+b)c = ac + bc\,.$$

5.2. Denklik, Şeritler ve Hücreler

5.2.1. Tanım

Eğer z_1 ve z_2 herhangi iki kompleks sayı olmak üzere $2w$ sabit bir kompleks sayı m de bir tamsayı iken $z_2 - z_1 = m2w$ eşitliğini sağlıyorsa $\bmod 2w$ ye göre z_2, z_1 in dengidir denir ve $z_1 \equiv z_2 \left(\bmod 2w\right)$ şeklinde ifade edilir.

5.2.2. Tanım

Eğer z_1 ve z_2 herhangi iki kompleks sayı olmak üzere $2w_1$ ve $2w_2$ iki kompleks sayı ve m ile n tamsayılar iken $z_2 - z_1 = m2w_1 + m2w_2$ eşitliğini sağlıyorsa ve z_2 nin z_1 e denk olduğu söylenir ve

$$z_2 \equiv z_1 \left(\bmod 2w_1, 2w_2\right)$$

şeklinde gösterilir.

Not: Eğer $2w$ veya $2w_1$ ve $2w_2$ önceden verilirse, onlar kısaca

$$z_2 \equiv z_1$$

şeklinde yazılır. Denklik eşit bir bağıntıdır. Eğer $z_1 \equiv z_3, z_2 \equiv z_1$ ise $mz_1 + nz_2 \equiv mz_3 + nz_4$ (*m* ve *n* tamsayı olmak üzere) bağıntısı da sağlanır.

Not: İki sayı, eğer onlarla ilgili olan iki paralel çizgiler arasındaki alan, *z* den geçen doğru dahil ama $z+2w$ dan geçen doğru dahil olmamak üzere, genellikle bir şerit olarak adlandırılır. Tüm bu düzlem $z, z \pm 2w, z \pm 2.2w, \pm 2.3w, ...$ doğrultusundaki paralel doğrular ile paralel şeritlere bölünebilir.

5.2.3. Tanım

z , $z+2w_1$, $z+2w_1+2w_2$, $z+2w_2$ köşe noktalarına sahip olan açık paralelekenar (*z*) de $z+2w_1$, $z+2w_1+2w_2$, $z+2w_2$ köşelerine sahip hücre olarak ifade eder. Bu hücrede $z+2w_1$, $z+2w_1+2w_2$ ve $z+2w_1+2w_2$, $z+2w_2$ kenarları çıkartılır. Tüm düzlem $z \pm m2w_1 \pm n2w_2$ de köşeleri olan hücrelere ayrılabilir.

5.2.4. Teorem

z_0, z_0+2w ve onlarla birleşen doğru üzerindeki bir nokta

$$z = z_0+\theta 2w, \qquad 0 \le \theta \le 1$$

şeklinde yazılır ve ispatı koordinat tanımından gelmektedir.

5.2.5. Teorem

z_0+m2w ve $z_0+(m+1)2w$ dahil olduğu doğru üzerindeki bir nokta, bir noktaya

$z' = z_0+\theta 2w \pmod{2w}$ denktir. Burada $0 \le \theta \le 1$ 'dir.

İspat

Diyelim ki

z, z_0+m2w ve $z_0+(m+1)2w$ nin dahil olduğu doğru üzerinde herhangi bir nokta olsun. O zaman

$$z = z_0+m2w+\theta 2w, \quad 0 \le \theta \le 1$$

$z' = m2w$ olsun. Sonuç olarak

$$z \equiv z' (\mathrm{mod}\, 2w)$$

olur.

5.2.6. Teorem

(z_0) hücresindeki herhangi bir z noktası, $0 \le \theta \le 1 \;\; i = 1,2$ olduğunda

$$z = z_0 + \theta_1 2w_1 + \theta_2 2w_2$$

şeklinde ifade edilir.

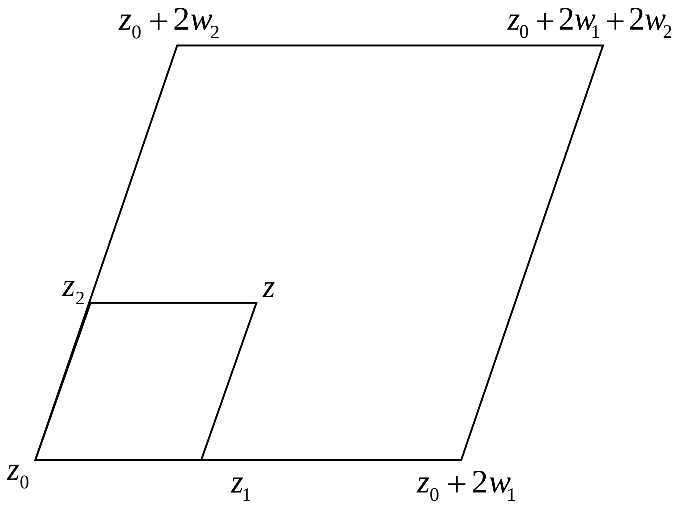
İspat

Diyelim ki köşeleri (z_0, z_1, z, z_2) da paralelkenar olan (z_0) hücresinin kenarlarına paralel olarak çizilsin. Sonra colur. Bu yüzden

$$z = -z_0 + z_0 + \theta_1 2w_1 + z_0 + \theta_2 2w_2$$

$$z = z_0 + \theta_1 2w_1 \theta_2 2w_2 .$$

Burada $0 \le \theta_i < 1 \quad (i = 1,2)$.



Şekil 5.1. (z_0, z_1, z, z_2) Paralelkenarı.

Tüm kompleks düzlemdeki herhangi bir z noktası z_0 hücresinde bir $z' (\mathrm{mod}\, 2w_1, 2w_2)$ noktasına denktir.

İspat

Diyelimki köşeleri (z_0, z_1, z, z_2) olan paralelkenar z_0 hücresine kenarları parelel olarak çizilsin. Bundan dolayı

$$z_0 + z = z_1 + z_2$$

burada $z_1 = z_0 + (m + \theta_1) 2w_1$ ve $z_2 = z_0 + (n + \theta_2) 2w_2$ olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} z &= z_1 + z_2 - z_0 \\ &= z_0 + \theta_1 2w_1 + \theta_2 2w_2 + m2w_1 + n2w_2 \\ &= z' + m2w_1 + n2w_2 \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı

$$z = z' (\bmod 2w_1, 2w_2)$$

şeklinde edilde edilir. Yukarıdaki denklikler $modn$ tamsayılı J_n cebirinin doğrudan bir genellemesidir.

5.3. Kompleks Fonksiyonlar Teorisinin İlgili Kavramları

5.3.1. Tanım

Eğer $f'(z)$ verilen D bölgesinde her noktada tanımlı ise tek değerli $f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde analitiktir.

5.3.2. Tanım

Verilen bir bölgedeki esaslı teklikleri olmayan tek değerli bir fonksiyon meromorf fonksiyon olarak tanımlanır.

Özellikler

i. Meromorf foknisyon bir alan oluşturur.

ii. Bir meromorf fonksiyon bölgede sonlu sayıda sıfırlara ya da kutuplara sahiptir.

iii. Kapalı bir kompleks düzlemde meromorf olan bir fonksiyon sadece sonlu sayıda kutuplara veya sıfırlara sahiptir.

iv. Meromorf fonksiyonların türevleri de bir meromorf fonksiyondur ve meromorf fonksiyonların alanında bir elemandır.

v. Meromorf fonksiyonun tersi yine bir meromorf fonksiyondur.

5.3.3. Teorem (Mittag Leffler Teoremi)

Eğer herhangi sonlu veya sonsuz $\{z_n\}$ noktalar kümesi z_k noktaları da dahil tanımlanmış olan limit noktalarına sahip değil ise (ana bölümü $G_k\left(\dfrac{1}{z-z_k}\right)$) kesinlikle tanımlanmış $\{z_n\}$ noktalarında tanımlanmış ana bölüm ile kutup noktalarına sahip meromorf fonksiyon vardır. Eğer $M_0(z)$ bu şekilde bir fonksiyon ise en genel fonksiyonun kutupları ve ana bölümü $M_0(z)$ olan

$$M(z)=M_0(z)+G(z)$$

şeklindedir ve $G(z)$ herhangi bir integral fonksiyonudur.

Not: $M(z)$ fonksiyonunda uygun ana bölümdeki kutupların görünür olması için kısmi kesirlerine ayrıştırma yöntemi uygulanmıştır. Weierstrass eliptik fonksiyonlar teorisinde yapılan genel araştırmalar da, tanımlanan Mittag-Leffler teoreminde ifade edilen ile benzerlik gösterir. Bu yüzden bu teorem burada verilmiştir. Kompleks fonksiyonlar teorisi ile ilgili herhangi bir çalışma da ispatı bulunabilir.

5.3.4. Tanım

İntegral fonksiyonu olarak da bilinen bir fonksiyon tüm açık kompleks düzlemde analitiktir. İntegral fonksiyonunun sonsuz dışında tekilliği yoktur.

5.3.5. Tanım (Weierstrass Faktör Teoremi)

Eğer herhangi sonlu veya sonsuz noktalar kümesi olan $\{z_n\}$ tanımlı sonlu limit noktalarına sahip değil ve bu her bir nokta tanımlı, sıralı pozitif tamsayılar ise kesinlikle tanımlanmış noktada tanımlı derecede sıfırlara sahip bir integral fonksiyonu vardır. Eğer $G_0(z)$ bu tip bir fonksiyon ise $G_0(z)$ ile birlikte belirli derecede sıfırları olan en genel fonksiyon

$$G(z)=e^{h(z)}G_0(z)$$

şeklinde yazılır. Burada $h(z)$ herhangi bir integral fonksiyonudur. $G(z)$ fonksiyonu basit belirli derecede sıfırların çarpımı olarak açılabilir.

5.3.6. Tanım

Eğer $P(z)=\sum_{r=0}^{n} a_r z^r$ şeklinde yazılırsa $P(z)$ ye *n*. dereceden polinom denir.

5.3.7. Tanım

Eğer $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ foknisyonu için $Q(z)$ ve $P(z)$ polinom ise o zaman $R(z)$ rasyonel fonkisyon olarak tanımlanır.

5.3.8. Tanım (Rasyonel Fonksiyonların Özellikleri)

i. Tüm rasyonel fonksiyonlar kümesi bir alandır.

ii. Rasyonel fonksiyon $f(z)$ için her zaman kutup noktalarının sayısı bir sıfır veya *r*. Dereceden bir kutup, r sıfırları veya kutupları olarak hesaplandığında sıfırlarının sayısı eşittir.

iii. Rasyonel bir fonksiyon kısmi kesirlerine ayrıştırılarak yazılır.

iv. Eğer $f(z)$, α_r de sıfırları ve β_r de kutup noktaları olan rasyonel bir fonksiyon ise

$$f(z)=c\frac{\prod_{r=1}^{m}(z-\alpha_r)}{\prod_{r=1}^{n}(z-\beta_r)}$$

şeklinde yazılır. Burada *c* bir sabittir.

v. Rasyonel fonksiyonların türevleri de bir rasyonle fonksiyondur.

vi. Rasyonel fonksiyonlar herhangi bir nokta için kuvvet serisinin açılımı olarak yazılır.

vii. $f(z)$ ve $g(z)$ iki rasyonel fonksiyonu $F[f(z),g(z)]=0$ cebir bağıntısını sağlar. Burada $F[x,y]$ x ve y ye bağlı bir polinomdur.

5.3.9. Tanım

$P(w,z)=0$ ise w ve z deki bir fonksiyonun $u=f(z)$ nin cebirsel bir fonksiyonu olduğu söylenir.

Not: Bir cebirsel fonksiyon, kutupların yanı sıra bazı dal noktalarına sahip kapalı kompleks düzlemde bir meromorf fonksiyondur.

5.3.10. Tanım

Cebirsel olmayan bir fonksiyona aşkın fonksiyon denir. Kapalı kompleks düzlemde en az bir temel tekilliğe sahip olan bir fonksiyona aşkın fonksiyon (transcendental) denir.

5.4. Periyodik Fonksiyonun Genel Özellikleri

5.4.1. Tanım

Bir $f(z)$ fonksiyon D bölgesinide tanımlanırsa ve eğer tüm $z_1, z_2 \in \mathrm{D}$ için $f(z_1)=f(z_2)$ ise D ‘deki $z_2 - z_1 = m2w$ en az bir $2w$ (m bir tamsayı) için $f(z)$ periyod olarak $2w$ ile periyodik bir fonksiyon olduğu söylenir.

Örnek:
$$\exp(z+2\pi i)=\exp z\,.$$

$$\exp m\left(z+\frac{2\pi i}{m}\right)=\exp mz\,.$$

$$\sin m(z+2\pi i)=\sin z\,.$$

$$\sin\frac{2\pi}{l}(z+l)=\sin\frac{2\pi}{l}z\,.$$

Açıkça $\exp z$, $\exp mz$, $\sin z$ ve $\sin\frac{2\pi}{l}z$ periyodik fonksiyonlarının $2\pi i$, $\frac{2\pi i}{m}$, 2π ve l şeklinde periyodları vardır.

Not: Herhangi bir $f(z)$ fonksiyonu için $f(z+0)=f(z)$ olur. Yani $f(z)$ sıfır periyodu olan bir fonksiyon olarak kabul edilebilir. Böylece sıfır periyodunun kabul edilmesi periyodik fonksiyonların sınıfını genel olarak fonksiyonlarınkiyle aynı yapar. Böylece tanım bir totoloji haline gelir. Dolayısıyla $2w=0$ durumu gelecekteki tartışmalarda dışlanacaktır. Herhangi bir sayı, sabit bir fonksiyonun periyodu olarak alınabilir.

5.4.2. Teorem

Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ aynı periyodda iki periyodik fonksiyon ise o zaman $f(z)\pm g(z)$, $f(z).g(z)$, $f(z)/g(z)$ $\left(g(z)\neq 0\right)$ aynı periyodlu periyodik fonksiyonlar olur.

İspat

Periyodik fonksiyonların tanımını doğrudan sonucudur.

5.4.3. Teorem

Tüm eş periyodik fonksiyonların kümesi bir alan oluşturur.

İspat

Tüm sabit sayılar eş periyodik fonksiyonlar sınıfında üyeler olarak da görülebilir bu teorem 5.4.2. teoreminden gelir.

5.4.4. Teorem

Bir periyodik fonksiyonun türevi aynı periyod veya periyodlarla aynı periyodik bir fonksiyondur.

İspat

$f(z)$ periyodu $2w$ ile periyodik olan bir fonksiyon olsun. O zaman

$$f(z+2w)=f(z)$$

$$f'(z+2w)=f'(z)$$

elde edilir. Dolayısıyla bir periyodik fonksiyonun tüevide aynı bölge içerisinde yer alır.

5.5. Doğal Periyodların Genel Özellikleri

5.5.1. Teorem

Eğer $2w$, $f(z)$ fonksiyonunun bir periyodu ise o zaman $m2w$ de $f(z)$nin bir periyodudur ve burada *m* herhangi bir tam sayıdır.

İspat

m herhangi bir tamsayı olsun.

$$f(z+2w)=f\left(z+\overline{m-1}\ 2w+2w\right)$$

$$f(z+2w)=f\left(z+\overline{m-1}\ 2w\right)$$

$$=f\left(z+\overline{m-2}\ 2w\right)$$

$$\vdots$$

$$=f(z).$$

m herhangi bir negatif tamsayı olsun. O zaman

$$f(z-m2w)=f(z-m2w+2w)=f(z).$$

Periyod kümesi $\Omega=\{m2w\}$ sonsuzdur.

5.5.2. Teorem

Periyodik $f(z)$ fonksiyonunun periyodlarının kümesi $2w_1,\ 2w_2,\ 2w_3$ şeklinde olsun. O zaman $\sum_{r=1}^{n} m_r 2w_r$ (m_r tamsayı olmak üzere) fonksiyonun periyodudur.

İspat

$$f\left(z+\sum_{r=1}^{n} m_r 2w_r\right)=f\left(z+\sum_{r=2}^{n} m_r 2w_r+m_1 2w_1\right)$$

$$=f\left(z+\sum_{r=2}^{n} m_r 2w_r\right)$$

$$\vdots$$

$$=f(z)$$

ispat tamamlanmış olur.

5.5.3. Teorem

Toplama işlemi altında Ω formundaki periyodların kümesi Abelian (değişmeli) grup oluşturur.

İspat

5.5.2. Teoremden ispat elde edilir.

5.5.4. Teorem

Sabit olmayan $f(z)$ periyodik meromorf fonksiyonu Ω periyodlarının kümesi boş bir dizi (sequence) içermez.

İspat

Mümkünse $\{2w_n\}$, Ω içerisinde boş bir dizi olsun. O zaman $F(z) = f(z) - f(z_0)$, z_0 sabit nokta olsun. $F(z)$ meromorf fonksiyondur. Bu nedenle $z = z_0 + 2w_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ için $F(z) = 0$, $F(z)$'nin noktaları $\{z_0 + 2w\}$'nin limiti z_0 olur Dolayısıyla z_0, $F(z)$ nin sabit olmayan bir meromorf fonksiyon olduğu varsayımına aykırı olan $f(z)$ nin temel tekilliğidir. Bu şekilde teorem kurulmuş olur.

5.5.5. Teorem

Sabit olmayan bir periyodik meromorf fonksiyonun Ω periyodlarının kümesi sonlu bir limit noktasına sahip olamaz.

İspat

Eğer Ω periyod kümesi α sonlu limit noktasına sahipse o zaman limiti α olan (α limitli) $\{2\Omega_n\}$ dizisi vardır. Bununla beraber $\{2(w_n - w_{n-1})\}$ dizisi Ω nin alt kümesidir ve ayrıca boş bir dizidir. Bu 5.5.4. teoremine aykırıdır ve çelişir.

5.5.6. Teorem

$2w_1$ ve $2w_2$ sabit olmayan periyodik bir meromorf fonksiyonun iki periyodu ise ve $\dfrac{2w_2}{2w_1}$ gerçekse, $\dfrac{2w_2}{2w_1}$ rasyonel sayıdır.

İspat

$(0 \pm 2w)$ m nin bütün integral değerleri için $0, 2w_1$ katılan çizgi üzerinde bir aralık kümesi olsun. $\frac{2w_2}{2w_1}$ gerçek olduğunda $n2w_2$ nin n nin integral değerleri için çizgi üzerinde olması gerekir. $m2w_1 \neq n2w_2$ olması durumunda, $\frac{2w_2}{2w_1}$ oranı rasyonel birsayıdır. Herhangi bir m ,n değeri için $m2w_1 \neq n2w_2$ olursa, $\{z'_n\}$ noktalarının kümesi $\{n2w_2\}(\mathrm{mod}\,2w_1)$ de eşdeğerliği olur ve $(0,2w_1)$ arasında kalan noktaların hepsinin belirgin olması gerekir. Aksi taktir de

$$z'_{n_1} = z'_{n_2}\,, n_1 \neq n_2$$

$$n_1 2w_2 \equiv n_2 2w_2\,, (\mathrm{mod}\,2w_1).$$

Bu da bir önceki durumu açıklar. O zaman sonsuz sınırlanmış $\{z'_n\}$ kümesinin limit noktasına gelmesi gerekir. Fakat $\{z'_n\}$ kümesi 5.5.5. teoreme aykırı bir noktası olan Ω alt kümesidir. Bu durumda bu mümkün değildir. Dolayısıyla $\frac{2w_2}{2w_1}$ oranı rasyonel sayıdır.

5.6. Eliptik Fonksiyonların Genel Teorisi

Burada eliptik fonksiyonların sistematik teorisi, eliptik fonksiyonların genel teorisi cebirsel özelliklere ve onların karşılığı cebirsel bağıntılar incelenecektir.

5.6.1. Tanım (Eliptik Fonksiyon)

Açık z düzlemindeki çift periyodlu meromorf fonksiyonlara eliptik fonksiyon denir.

5.6.2. Tanım (Eliptik Fonksiyonların Derecesi)

Eliptik fonksiyonların bir periyod hücresindeki sıfırlarının ve ya kutuplarının sayısı (çokluklar hesaba katılır) eliptik fonksiyonların derecesi olarak bilinir.

5.6.3. Teorem

Herhangi iki eş periyodik eliptik fonksiyonların toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü yine aynı periyotta eliptik bir fonksiyondur.

İspat

$f_i(z+2w) = f_i(z)$, $2w = 2w_1$ ve $i = 1,2$ olsun. Bundan dolayı

$$f_1(z+2w) \pm f_2(z+2w) = f_1(z) \pm f_2(z),$$

$$f_1(z+2w).f_2(z+2w) = f_1(z).f_2(z),$$

$$f_1(z+2w)/ f_2(z+2w) = f_1(z)/ f_2(z).$$

Tüm meromorf fonksiyonlar kümesi bir bölge oluşturduğundan tekrar $f_1(z) \pm f_2(z)$, $f_1(z).f_2(z)$, $f_1(z)/ f_2(z)$meromorf ve periyodiktir. Periyodları $2w_1$ve $2w_2$dir. Bu yüzden onlar aynı periyoddaki eliptik fonksiyonlardır.

5.6.4. Teorem

Tüm eş eliptik fonksiyonlar kümesi bir bölge oluşturur.

İspat

Sabit fonksiyon herhangi bir periyod da periyodik fonksiyon olarak düşünüldüğünde eş periyodik fonksiyonlar grubuna ait olarak alınabilir. Sabit fonksiyon çarpmada birim eleman bir ve toplamada sıfır olacaktır. Sonuç olarak 5.6.3. teoreme göre eş periyodik eliptik fonsiyonlar bir bölge oluşturur.

Sonuç: Eş periyodik eliptik fonksiyonların rasyonel bir fonksiyonu aynı periyod da bir eliptik fonksiyondur.

5.6.5. Teorem

Eliptik fonksiyonların türevleri aynı periyod da yine eliptik fonksiyondur.

İspat

Meromorf fonksiyonların türevleri yine meromorf fonksiyon olduğundan ve bunların periyodik fonksiyonları yine aynı periyodda periyodiktir. Eliptik fonksiyonların logaritmik türevleri de eliptik fonksiyondur. Türevler ve logaritmik türevleride eliptik fonksiyonların bölgesindedir. Sabit olmayan elektrik fonksiyonlar sınıfı boş değildir.

5.7. Eliptik Fonksiyonlar Hakkında Genel Teoremler

Genel teoremlerin incelenmesi için $0 < \arg(2w_2/2w_1) < \pi$ olan temel periyodlar seçilmiştir.

5.7.1. Teorem

Eliptik fonksiyon $f(z)$ nin integrali sabittir.

İspat

Bir hücrede $f(z)$ nin tekilliği olmadığında $|f(z)| < K$ olur ve K herhangi bir sabittir. Bu yüzden $|f(z)| < K$ açık bir kompleks düzlemde ve $f(z)$ dolayısıyla Liouville teoreminde bir sabittir. Bu durum Liouville teoreminin özel bir durumudur ve bazı zamanlar Liouville teoremi olarak kullanılır. Bu teorem aşağıda verilen farklı formlarda da belirtilmiş olabilir.

i. Bir hücrede kutubu olmayan eliptik bir fonksiyon bir sabittir.
ii. Derecesi sıfır olan eliptik fonksiyon sadece sabittir.

5.7.2. Teorem

Eğer eliptik $f(z)$ fonksiyonunun bir kutbu olan β ve asal bölümü $z=\beta$ de $g\left(\frac{1}{z-\beta}\right)$ olduğunda diğer noktalar β' larda $f(z)$ nin bir kutup noktası olursa o zaman asal bölümleri $z=\beta$ de $g\left(\frac{1}{z-\beta}\right)$ olur. Burada $\beta' = \beta(\bmod 2w_1, 2w_2)$ olarak ifade edilir.

İspat

$z=\beta$ komşuluğunda $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z-\beta}\right) + P(z-\beta)$$

formunda alınabilir. Burada $P(z-\beta)$ β komşuluğunda analitiktir.

Diyelim ki $w = 2mw_1 + 2nw_2$ olduğunda $\beta' = \beta + w$ olsun. Eğer z', β' nın komşuluğunda bir nokta olursa, $z' = z + w$ ve

$f(z') = f(z+w) = f(z) = g\left(\frac{1}{z-\beta}\right) + P(z-\beta) = g\left(\frac{1}{z'-\beta'}\right) + P(z'-\beta')$ olur. Burada

$P(z'-\beta')$, β' de analitiktir.

$f(z') = g\left(\dfrac{1}{z'-\beta'}\right) + P(z'-\beta')$ iken β' asal bölümü $z=\beta'$ de $g\left(\dfrac{1}{z-\beta'}\right)$ olan $f(z)$ nin bir kutup noktası olur.

5.7.3. Teorem

Eğer bir hücrede iki eş eliptik fonksiyon $f(z)$ ve $f_1(z)$ varsa

i. ayrı ayrı kutuplarda asal bölümleri aynı olan aynı kutuplara sahipse sabit bir şekilde farklılık gösterirler.

ii. aynı sıfırlara ve aynı kutuplara sahip ise (onların çoklukları da hesaplandığında) sabit bir faktöre göre farklılık gösterirler.

İspat

$f(z)$ ve $f_1(z)$ fonksiyonları eş periyodik olduğunda aynı hücre ağına sahip olurlar 5.7.1. teoreminden dolayı $f(z) - f_1(z)$ ve $f(z)/f_1(z)$ aynı periyotlar ile eliptik fonksiyonlardır. Yani aynıi hücre aağına sahiptirler.

Bu yüzden bu hücrede (i) şartına göre $f(z) - f_1(z)$ ve (ii) şartına göre $f(z)/f_1(z)$ nın kutupları yoktur. Bu yüzden Liouville teoremine göre (i) şartını sağlayan $f(z) - f_1(z)$ ve (ii) şartını sağlayan $f(z)/f_1(z)$ sabittir. Bu yüzden

$$f(z) - f_1(z) = c \text{ ve } f(z) = cf_1(z)$$

olur c bir sabittir.

5.7.4. Teorem

Eliptik bir fonksiyonun bir hücrede sadece sabit sayıda sıfırları ve kutup noktaları vardır.

İspat

Aksi takdirde limit noktası veya sıfır noktaları veya kutupları fonksiyonun bir esas tekilliği olur. Böylece fonksiyon meromorf olmaktan çıkar ve eliptik olur.Bu yüzden teorem ispatlanmıştır.

5.7.5. Teorem

Eğer eliptik $f\left(z\right)$ fonksiyonun çevre uzunluğu P olan z_0 hücresinde analitik ise o zaman

$$\int_P f(z)dz = 0$$

olur.

İspat

Eğer $f(z+2w_1) = f(z)$ ve $f(z+2w_2) = f(z)$ olursa burada işlemler için

$$\int_P f(z)dz = \int_{z_0}^{z_0+2w_1} f(z)dz + \int_{z_0+2w_1}^{z_0+2w_1+2w_2} f(z)dz + \int_{z_0+2w_1+2w_2}^{z_0+2w_2} f(z)dz + \int_{z_0+2w_2}^{z_0} f(z)dz$$

$$= \int_{z_0}^{z_0+2w_1} f(z)dz + \int_{z_0}^{z_0+2w_2} f(z+2w_1)d\left(z+2w_1\right)$$

$$+ \int_{z_0+2w_1}^{z_0} f(z+2w_2)d\left(z+2w_2\right) + \int_{z_0+2w_2}^{z_0} f(z)dz$$

$$= \int_{z_0}^{z_0+2w_1} \left\{f(z) - f(z+2w_2)\right\}dz + \int_{z_0}^{z_0+2w_2} \left\{f(z+2w_1) - f(z)\right\}dz$$

$$= 0$$

elde edilir.

5.7.6. Teorem

$\left(z_0\right)$ hücresindeki tüm kutuplara uyan $f\left(z\right)$ eliptik fonksiyonunun kalanları toplamı sıfıra eşittir.

İspat

i. Eğer bir $\left(z_0\right)$ hücresinde çevre uzunluğu herhangi bir $f\left(z\right)$ kutbunu geçmiyorsa Cauchy teoreminden dolayı bir hücrede kutuplara göre kalanların toplamı

$$\frac{1}{2\pi i}\int_P f(z)dz$$

eşittir ve bu da 5.7.5 teoreminden dolayı sıfıra eşittir.

ii. Eğer bir (z_0) hücresinin çevre uzunluğu herhangi bir kutubu ve $f(z)$ kutuplarını geçiyorsa bu durumda başka bir (z_0+c) hücresi, burada $|c|$ olabildiğince küçük alınır, yeni bir hücrede çevre uzun olmayan bir kutup olarak elde edilir. Sonra (z_0+c) hücresindeki kalanların toplamında (i) den dolayı sıfıra eşit olur. Bu yüzden bir (z_0) hücresinde $f(z)$ kalanlarının toplamı sıfır olur.

5.7.7. Teorem

Birinci mertebeden sabit olmayan eliptik fonksiyon tanımlı değildir.

İspat

Eğer bir hücrede asal bölümü β kutup noktasında $A/z-\beta$ olan birinci mertebeden eliptik bir fonksiyon β basit bir kutuba sahipse bu hücredeki β 'daki kalan A ya eşittir ve bu da 5.7.6. teoreme terstir.

Not: Bu teorem farklı bir şekilde şöyle verilebilir; her sabit olmayan eliptik bir fonksiyon en az derecesi iki olan kurtuba veya bir hücrede iki basit kutuplara sahip olmalıdır veya sabit olmayan eliptik fonksiyonun derecesi ikiden büyük veya iki eşittir.

5.7.8. Teorem

Bir hücredeki $f(z)$ eliptik fonksiyonunun sıfırlarının sayısı kutuplarının sayısına eşittir çoklukları hesaba alınmıştır.

İspat

$f(z)$ eliptik bir fonksiyon olduğundan $f'(z)/f(z)$, $f(z)$ ile aynı periyoda sahip eliptik bir fonksiyondur. 5.7.5. teoremden dolayı

$$0=\frac{1}{2\pi i}\oint_P \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

$$=P \text{ 'deki tekilliklerde } \frac{f'(z)}{f(z)} \text{ kalanlarının toplamına}$$

$$= f(z)\text{'nin sıfırlarının sayısı} - f(z)\text{'nin kutuplarının sayısı.}$$

Bu yüzden $f(z)$ fonksiyonun sıfırlarının sayısı $f(z)$ kutuplarının sayısına eşittir. Eliptik fonksiyonların derecelerinin bu tanımı bir hücredeki sıfırlarının sayısı veya kutuplarının sayısı olarak eşittir.

5.7.9. Teorem

Mertebesi *r* olan eliptik bir fonksiyon bir hücredeki her *c* değerini tam olarak *r* defa olduğunu varsayar. Burada *c* karmaşık birsayıdır.

İspat

Diyelimki $f(z)$ fonksiyon eliptik bir fonksiyon olsun $f(z)-c$ de $f(z)$ ile aynı sayıda kutuba sahip eliptik bir fonksiyondur. Bu yüzden $f(z)-c$ bir hücrede tam olarak *r* tane sıfıra sahiptir. Yani $f(z)$ bir hücredeki *c* değerinin tam olarak *r* defa olduğunu varsayar.

5.7.10. Teorem

Eğer bir hücrede α_i ve β_i $(i=1,2,3...,r)$ sıfırlar ve sırayla eliptik fonsiyonların kutupları ise

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=\sum_{i=1}^{r}\beta_i \qquad (\bmod 2w_1, 2w_2)$$

olur. Burada her kutup çokluğun gösterdiği kadar hesaplanır.

İspat

Analizde rezidü(kalıntı) teoreminden

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i-\sum_{i=1}^{r}\beta_i=\frac{1}{2\pi i}\int_P \frac{zf'(z)}{f(z)}dz \,(P \text{ herhangi bir çokluk})$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{z_0}^{z_0+2w_1}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz+\int_{z_0+2w_1}^{z_0+2w_1+2w_2}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz+\int_{z_0+2w_1+2w_2}^{z_0+2w_2}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz+\int_{z_0+2w_2}^{z_0}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{z_0}^{z_0+2w_1}\{z-(z+2w_2)\}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int_{z_0}^{z_0+2w_2}\{z+2w_1-z\}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[2w_1\int_{z_0}^{z_0+2w_2}\frac{f'(z)}{f(z)}dz-2w_2\int_{z_0}^{z_0+2w_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{2w_1\left[\log f(z)\right]_{z_0}^{z_0+2w_2}-2w_2\left[\log f(z)\right]_{z_0}^{z_0+2w_1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(4\pi i m w_1 - 4\pi i n' w_2\right)$$

$$= m2w_1 + 2nw_2 \,.\; \left(n = -n'\right)$$

Sonuç olarak $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i \equiv \sum_{i=1}^{r}\beta_i \left(\operatorname{mod} 2w_1, 2w_2\right)$ elde edilir. Bu teorem Liouville teoreminden gelir.

5.7.11. Teorem

Eğer bir hücrede are mertebeden eliptik fonksiyon için c' ve c'' herhangi sonlu veya sonsuz karmaşık sayı ve α_i' ile α_i'' $(i = 1, 2, 3..., r)$ sırasıyla $f(z) = c'$ ve $f(z) = c''$ olan noktalar ise $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i' \equiv \sum_{i=1}^{r}\alpha_i''\left(\operatorname{mod} 2w_1, 2w_2\right)$ olur.

İspat

i. Diyelim ki c' ve c'' sonsuz olsun. İspatı bir önceki 5.7.10. teoreminden gelir.

ii. Diyelim ki c' ve c'' ikiside sonlu ve eşit olmasın. $f(z) - c'$ ve $f(z) - c''$ fonksiyonları kutupları $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ de olan eliptik fonksiyonlardır. Bu yüzden

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i' = \sum_{i=1}^{r}\beta_i = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i''\left(\operatorname{mod} 2w_1, 2w_2\right)$$

olur. Bundan dolayı

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i' \equiv \sum_{i=1}^{r}\alpha_i''\left(\operatorname{mod} 2w_1, 2w_2\right)$$

elde ederiz.

iii. Diyelim ki c' ve c'' ikiside sonlu ve eşit veya ikiside sonsuz olsun. Bu durum açıktır.

5.7.12. Teorem

Mertebesi iki olan eliptik bir $f(z)$ fonksiyonu $f(s - z) = f(z)$ bağıntısı sağlar. Burada $s = \sum_{r=1}^{2}\beta_r$ ve β_r bir hücrede $f(z)$ kutuplarıdır.

İspat

Eliptik fonksiyonu şu şekilde düşünelim.

$$F(z) = f(z) - f(z_1)$$

$f(z_1)$ herhangi $z \neq z_1$ değeri için sonludur. Açıkca bu durum β_1 ve β_2 noktaları $F(z)$ nin kutupları ve z_1'in $F(z)$ nin sıfırı olmasından oluşur. Diyelim ki z_2, $F(z)$ nin farklı bir sıfırı olsun. Bu yüzden

$$z_1 + z_2 = \beta_1 + \beta_2 \qquad (\operatorname{mod} 2w_1, 2w_2)$$

sonuç olarak

$$f(\beta_1 + \beta_2 - z_1) = f(z_2) = F(z_2) + f(z_1) = f(z_1)$$

Bu yüzden

$$f(\beta_1 + \beta_2 - z_1) = f(z)$$

olur. Eğer z_1, $f(z)$ nin bir kutup noktası ise ispat benzer şekilde olur.

5.7.13. Teorem

Eğer bir hücrede β_1 ve β_2 mertebesi iki olan eliptik bir fonksiyonun farklı iki kutubu ise

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + w_1, \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + w_1 + w_2, \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + w_2$$

noktaları $f'(z)$ nin sıfır noktaları olur.

İspat

$f(z)$ fonksiyonu β_1 ve β_2 basit kutba sahip olduğunda $f'(z)$ her bir β_1 ve β_2 için çift, bir kutuba sahip olur. Bu yüzden mertebesi dördüncü dereceden olan eliptik bir fonksiyondur ve dört tane sıfırı olmak zorundadır. 5.7.12. teoreminden dolayı

$f(s - z) = f(z)$ olur ve burada $s = \beta_1 + \beta_2$ dir.

Bu yüzden $-f'(s - z) = f'(z)$ dir. Ayrıca $s = z/2$ olduğu zaman

$-f'(s/2) = f'(s/2)$ olur yani $f'(s/2) = 0$ dır. Bu yüzden $\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ noktası $f'(z)$ nin bir sıfırı olmak zorundadır. Şimdi $z = \frac{s}{2} + w_1$

$$f'\left(\frac{s}{2}+w_1\right)=-f'\left(\frac{s}{2}-w_1\right)=-f'\left(\frac{s}{2}-w_1-2w_2\right)=f'\left(\frac{s}{2}+w_1\right)$$

olduğunu görürüz. Snuç oarak

$$f'\left(\frac{s}{2}+w_1\right)=0$$

olur. Yani $\frac{\beta_1+\beta_2}{2}+w_1$ noktası $f'(z)$nin farklı bir sıfırıdır.Benzer şekilde $\frac{s}{2}+w_1+w_2$ ve $\frac{s}{2}+w_2$ 'nin $f'(z)$ nin sıfırları olduğu ispatlanabilir. Sonuç olarak teorem ispatlanmıştır.

5.7.14. Teorem

Her yarım periyod bir sıfırdır veya tek derecenin bir kutu, bu ve tek eliptik fonksiyondur.

İspat

Diyelimki *w*, tek eliptik $f(z)$ fonksiyonunun yarım bir periyod olsun. Sonra

$$f(w)=f(2w-w)=f(-w)=-f(w) \text{ ve } f(w)=-f(w)$$

olur. Bu yüzden $f(w)$ sıfıra veya sonsuza eşit olmak zorundadır. Yani w , $f(z)$ nin bir sıfırı veya bir kutubudur. Şimdi de mertebesi sıfır olanın tek olduğunu kanıtlayalım.

i. Diyelim ki *w*, $f(z)$ nin bir sıfırı olsun. Sonra *w* nin derece sıfır olmak zorundadır. Eğer mümkünse w nin mertebesi çift ve *2n* ye eşit olduğunu söyleyelim. Sonra $f^{2n}(z)$ bir tek fonksiyondur ve $f^{2n}(z)\neq 0$. $(z\neq w)$Yukarıdaki sonuca terstir bu yüzden mertebesi sıfır olan tektir.

ii. Diyelim ki w, $f(z)$ nin bir kutubu olsun. Sonra w, $\frac{1}{f(z)}$ nin bir sıfır noktası olmak zorundadır ve (i) den dolayı w nin mertebesi tek olmak zorundadir. Bu yüzden $f(z)$ nin bir kutubunun mertebesi tektir.

5.7.15. Teorem

Çoklu kutupların mertebeleri veya çift eliptik bir $f(z)$ foksiyonunun yarım periyotdaki sıfırı da çifttir.

İspat

i. Diyelim ki $f(z)$ nin yarım periyodunda mertebesi sıfır olsun, $2m+1$(denebilir), $f'(z)$ nin yarım periyoddaki sıfır mertebesi $2m$ olur. Ancak $f'(z)$ yarım periyodda çift mertebede bir sıfıra sahip tek eliptik fonkiyondur. Bu durum 5.7.14. teoremine terstir. Bu yüzden yarım periyoddaki çift eliptik foksiyonun sıfır mertebesi çifttir.

ii. Diyelim ki yarım periyod bir kutup olsun. Sonra çift eliptik fonksiyon $\dfrac{1}{f(z)}$ nin yarım periyodu bir sıfırdır ve bu yüzden mertebesi çift olmalıdır.

5.8. Eliptik Fonksiyonların Sağladığı Cebirsel Bağıntılar

5.8.1. Teorem

Eğer iki eliptik $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarının oranı reel olmayan bir çift ortak periyotları var ise onlar

$$F\left[f(z), g(z)\right] = 0$$

formundaki cebirsel bir bağıntı ile ilişkili olurlar. Burada $F(x, y)$ sabit katsayılı ve x ve y prametrelerine bağlı birer polinomdur.

İspat

Varsayalım ki $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ noktaları ortak periyot hücresinde ya $f(z)$ nin yada $g(z)$ nin veya ikisinin de kutupları olsun. O zaman diyelim ki m de herhangi verilen fonksiyonlardan bir tanesinin β_r kutbunun mertebesi ve β_r iki fonksiyonun da bir kutubu olduğu zaman m_r mertebeden büyük olsun.

Varsayımımıza devam edersek $F_1(\xi, \eta)$ sabit terimi olmayan n. mertebeden ξ, η ya bağlı bir polinom olsun. Bu polinom

$$(n+1)+(n)+...+2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{1}{2}n(n+3)$$

tane katsayı olarak sabit içerir.

$$\phi(z) = F_1[f(z), g(z)]$$

periyod olarak ortak bir periyodu olan eliptik bir fonksiyon olduğunu buluruz. Şimdi β da $\phi(z)$ fonksiyonunun eğer katsayıları

$$\frac{1}{2}n(n+3) \geq n\sum_{i=1}^{r} m_i \text{ yani } n \geq 2\sum_{i=1}^{r} m_i - 3$$

şeklinde seçilirse katsayılarının $\frac{1}{2}n(n+3)$ uygun şekilde seçiminden dolayı fonksiyonun esas kısmı tam anlamıyla sıfır olmalıdır.

Sonra $\phi(z)$ bu hücrede kutubu olmayan eliptik ve sabit bir fonksiyon olur. Bu yüzden

$$\phi(z) = F_1[f(z), g(z)] = \text{sabit} = c \text{ diyelim.}$$

Sonuç olarak

$$F[f(z), g(z)] = 0$$

olur ve bu teoremin ispatı için yeterlidir.

Not: Bu teoremde $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarının aynı temel $2w_1, 2w_2$ periyotlarına sahip olması gerekli değildir. Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ sırasıyla $w_1, 2w_2$ ve $2w_1, w_2$ veya benzertemel periyodlara sahip olursa bu teorem yine geçerli olur.

Not: $F_1(\xi, \eta)$ polinomunun sabit bir terimi olabilir ancak $\phi(z)$ nin esas kısmının sıfır olası gerekli değildir.

5.8.2. Teorem

$F(x, y)$ x ve y parametrelerine bağlı bir polinom olduğundan eliptik fonksiyon $f(z)$ ve onun türevi $f'(z)$ olsun. O zaman

$$F[f(z), f'(z)] = 0$$

cebirsel bağıntısını sağlar.

İspat

$f'(z)$, $f(z)$ ile aynı periyoda sahip bireliptik fonksiyon olduğundateoremin sonucu direk 5.8.1 teoreminden gelecektir.

5.8.3. Teorem

Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ sırasıyla $(2w_1, 2w_2)$ ve $(2w_1, 2w_2)$ periyotlarına sahip sabit olmayan iki eliptik fonksiyon ise fonksiyonlar arasında bir cebirsel bağıntının olması gereklilik veyeterlilik şartı $2w_1, 2w_2, 2w_1, 2w_2$ gibi iki farklı temel periyodu olması olarak ifade edilir.

İspat

Yeterlilik şartı 5.8.1 teoremden gelmektedir. Gereklilik şartını ispatlamak için $f(z)$ ve $g(z)$ arasında

$$0 = F\left[f(z), g(z)\right]$$

$$= a_0\left\{f(z)\right\}^{\lambda} + a_1\left\{f(z)\right\}^{\lambda-1} + \ldots + a_\lambda$$

formda cebirsel bir bağıntının olduğunu kabul edelim ve burada a_i ler $g(z)$ de polinomdur. Eğer l_1' bir tamsayı iken $\arg z\ 2l_1'w_1'$ tarafından artırılırsa $= a_0, a_1, \ldots, a_\lambda$ değiştirilemez biçimde kalır. Bu yüzden

$$0 = F\left[f\left(z + 2l_1'w_1'\right), g\left(z + 2l_1'w_1'\right)\right]$$

$$= F\left[f\left(z + 2l_1'w_1'\right), g(z)\right],$$

$$= a_0\left\{f\left(z + 2l_1'w_1'\right)\right\}^{\lambda} + a_1\left\{f\left(z + 2l_1'w_1'\right)\right\}^{\lambda-1} + \ldots + a_\lambda,$$

$$= a_0\left\{f\left(z + 2lw_1 + 2mw_2 + 2l_1w_1'\right)\right\}^{\lambda} + a_1\left\{f\left(z + 2lw_1 + 2mw_2 + 2l_1w_1'\right)\right\}^{\lambda-1} + \ldots + a_\lambda$$

(*l* ve *m* tamsayı)

$$= a_0\left\{f(z + \delta)\right\}^{\lambda} + a_1\left\{f(z + \delta)\right\}^{\lambda-1} + \ldots + a_\lambda$$

$$= F\left\{f(z + \delta), g(z)\right\} \left(\delta = 2lw_1 + 2mw_2 + 2l_1w'\right)$$

olur. Şimdi Taylor teoreminden

$$0 = F + f'\left(\frac{\partial F}{\partial f}\right)\frac{\delta}{1!} + \left[f'^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial f^2}\right)\frac{\delta}{1!} + f''\left(\frac{\partial F}{\partial f}\right)\right]\frac{\delta^2}{2!} + \ldots$$

burada $F = F\left[f\left(z+\delta\right), g\left(z\right) \right]$. Elde edilen sonuçları iki durum halinde inceleyelim.

i. $\delta = 0$ yani $2lw_1 + 2mw_2 + 2l_1'w' = 0$ olması $2w_1, 2w_2, 2w_1'$ lerin iki farklı ilkel periyodları olarak ifade edildiğini gösterir.

ii. $\delta \neq 0$ sıfırın $\delta = \left[2lw_1 + 2mw_2 + 2l_1'w'\right]$ kümesinin limit noktası olduğunu gösterir. Bu yüzden

$$F = 0\,, \frac{\partial F}{\partial f} = 0\,, \frac{\partial^2 F}{\partial f^2} = 0\,,..., \frac{\partial^\lambda F}{\partial f^\lambda} = 0$$

burada λ $F\left(x, y\right)$ polinomunda x'in en büyük derecesidir. Sonuç olarak $a_0 = 0, a_1 = 0, ..., a_\lambda = 0$ olur. Bu yüzden $g\left(z\right)$ sabit katsayılı λ polinom denklemi sağlar ve bu nedenden dolayı bir sabit olmak zorundadır.

Sonuç olarak $g\left(z\right)$'nin $2w_1', 2w_2'$ temel periyodlarına sahip eliptik bir fonksiyon olmasından dolayı bu durum imkansızdır. Bu yüzden $2w_1, 2w_2, 2w_1'$ temel periyotlar olarak ifade edilir. Aynı durum $2w_2'$ sayısı içinde geçerlidir. Sonuç olarak teorem ispatlanmıştır.

5.8.4. Teorem (Weierstrass Teoremi)

eğer açık, karmaşık bir düzlemdemeromorf bir fonksiyon olan $\phi\left(z\right)$

$$F\left[\phi\left(z_1 + z_2\right), \phi\left(z_1\right), \phi\left(z_2\right)\right] = 0$$

şeklinde cebirsel bir toplama teoremini sağlıyorsa

i. ya rasyonel bir fonksiyondur,

ii. veya dairesel (trigonometrik) bir fonksiyondur,

iii. veya eliptik bir fonksiyondur.

İspat

Eğer $\phi\left(z\right)$ bir kutuba veya sonsuzda rastgele bir noktaya sahipse, $\phi\left(z\right)$ kapalı karmaşık düzlemde meromorf bir fonksiyondur. Yani rasyonel bir fonksiyondur. Rasyonel fonksiyon özelliklerinin bilinmesinden dolayı bu fonksiyon bir cebirsel toplama teoremini sağlar, bu da teoremin birinci kısmının ispatıdır.

Eğer $\phi(z)$ sonsuzda bir noktada esas bir tekilliği var ise esas tekillikler ile ilgili olan Baş, Weierstrass teoreminden $\phi(z_2)$, z_2 nin sonsuz değerler kümesi için herhangi c_2 sabit değerlerini alır. Diyelim ki $\phi(z_2)=c_2$ ve $z_2=a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_m$ burada m $F\left[\phi(z_1+z_2),\phi(z_1),\phi(z_2)\right]$ de $\phi(z_1+z_2)$'nin en büyük kuvvetidir.

Diyelim ki ζ , $\phi(z)$ de diğer sıradan bir nokta olsun, örneğin $\phi(\zeta)=c_1$ ve $\phi(z)$, $\zeta+a_i$ ve $i=1,2,3,...,m$ noktalarında analitikdir.

Sonra $\phi(\zeta+a_i)$ polinom denkleminin cevabı $w=\phi(z_1+z_2)$ şeklinde alınırsa

$$F(w,c_1,c_2)=0$$

olmak zorundadır.

$F(w,c_1,c_2)$ w de *m*. dereceden polinom olduğunda *w* en az iki tane eşit olmak zorunda olan yalnızca *m* değerine sahip olur. Yani $\phi(\zeta+a_k)=\phi(\zeta+a_1)$ burada a_k , a_1 noktaları $a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_m$ kümesinin iki elemanıdır.

Diyelim ki z , ζ komşuluğunda farklı bir nokta olsun o zaman

$$F\left[\phi(z_1+a_i),\phi(z),c_2\right]=0 \tag{5.1}$$

olur. Daha önce ifade edildiği üzere $\phi(z_1+a_{k'})=\phi(z_1+a_{1'})$ olur ve burada $a_{k'}$, $a_{1'}$ noktaları $\{a_i\}$ kümesinden iki noktadır ve farklı z değerleri için genellikle $\{a_i\}$ kümesinden farklı noktalar olacaktır. Şimdi (5.1) bağıntısı z nin ζ komşuluğunda sadece a_k , a_1 çiftlerinin sonlu değerleri için değil sonsuz değerleri için de sağlar. (5.1) bağıntısı için $\{a_i\}$ kümesinden en az bir a_i,a_j noktası z nin sonsuz değeri için doğrudur. Bu yüzden analitik özelliğinin devamından dolayı

$$\phi(z+a_i)=\phi(z+a_j) \text{ tüm z ler için,}$$

$$\phi(z)=\phi(z+a_j-a_i) \text{ tüm z ler için}$$

olur. Yani $\phi(z)$ periyodu (a_j-a_i) olan periyodik bir fonksiyondur. Jakobi'nin nin araştırmalarına göre $\phi(z)$ ya basit periyodik yada çift periyodik fonksiyondur. Sonuç olarak $\phi(z)$ ya dairesel yada eliptik fonksiyondur. Teorem ispatlanmıştır.

5.9. Weierstrass'ın İlişkili Fonksiyonları

Weierstrass'ın ilişkili fonksiyonları $\zeta(z), \sigma(z), \sigma_r(z)$ (r=1, 2, 3) ve onların özelliklerini inceleyelim. Bu fonksiyonlar eliptik değildir ancak eliptik fonksiyonlar teorisinin gelişiminde önemli bir yere sahiptir.

5.9.1. Tanım (Weierstrass Zeta Fonksiyonu)

Zeta fonksiyonu çift seriler tarafından tanımlanır.

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{z - \Omega_{mn}} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega^2{}_{mn}} \right\}$$

burada $\Omega_{mn} = 2mw_1 + 2nw_2$ ve m, n sıfırdan farklı tamsayılardır. m ve n nin sıfır olması dışında $\sum\sum{}'$ toplamı tüm tamsayılarda oluşabilir. Aslında Ω_{mn} noktası $\zeta(z)$ nin basit kutubudur ve sonuç olarak bu fonksiyon meromorftur.

5.9.2. Teorem

Seri

$$\frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{z - \Omega_{mn}} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega^2{}_{mn}} \right\}$$

mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İspat

$$\left| \frac{1}{z - \Omega_{mn}} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega^2{}_{mn}} \right| = \left| \frac{z^2}{\Omega^2{}_{mn} \left(z\Omega_{mn} \right)} \right|$$

$$\leq \frac{\left|z^3\right|}{\left|\Omega_{mn}\right|^3 \left(1 - \dfrac{|z|}{\left|\Omega_{mn}\right|} \right)} \quad \left|\Omega_{mn}\right| > |z| \text{ tüm } m, n \text{ ler için sağlar.}$$

$$< \frac{2|z|^2}{\left|\Omega_{mn}\right|^2} \quad \text{tüm } m, n \text{ ler için sağlar. } \left(\left|\Omega_{mn}\right| > 2|z| \right)$$

Alınan seriler bu yüzden mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bu durum aynı zamanda $\wp(z)$

için dizilerin mutlak ve düzgün yakınsaklığı durumundan gelir.

5.9.3. Teorem

$\zeta(z)$ fonksiyonu tek fonksiyondur.

İspat

$$\zeta(-z) = \frac{-1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{-z-\Omega_{mn}} + \frac{1}{\Omega_{mn}} - \frac{z}{\Omega^2{}_{mn}} \right\}$$

$$= -\left[\frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z+\Omega_{mn})} - \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega^2{}_{mn}} \right\} \right]$$

$$= -\left[\frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{-m-n})} + \frac{1}{\Omega_{-m-n}} + \frac{z}{\Omega^2{}_{-m-n}} \right\} \right]$$

$$= -\left[\frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z+\Omega_{mn})} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega^2{}_{mn}} \right\} \right]$$

$$= -\zeta(z). \quad \left(\{\Omega_{-m-n}\} \text{ ve } \{\Omega_{mn}\} \text{ eşit kümeler olduğundan} \right)$$

5.9.4. Teorem

$\wp(z)$ ve $\zeta(z)$ fonksiyonları

$$\wp(z) = -\zeta(z)$$

bağıntısı ile ilişkilidir.

İspat

$\zeta(z)$ serileri düzgün yakınsak fonksiyon serileri olduğundan serinin terimleri birebir türevlenebilir. Bu yüzden

$$\zeta'(z) = -\left[\frac{1}{z^2} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega^2{}_{mn}} \right\} \right] = -\wp(z)$$

olur.

5.9.5. Teorem

$\zeta(z)$ fonksiyonu kuvvet serileri olarak yazılabilir.

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}-\frac{a_2z^3}{3}-\frac{a_4z^5}{5}-\dots-\frac{a_{2n}z^{2n+1}}{2n+1}-\dots,$$

burada

$a_k=\sum\sum{}'\,(k+1)\Omega_{mn}^{-(k+2)}$.

İspat

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum\sum{}'\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})}+\frac{1}{\Omega_{mn}}+\frac{z}{\Omega^2{}_{mn}}\right\}$$

$$=\frac{1}{z}-\sum\sum{}'\left\{\frac{z^2}{\Omega_{mn}^3}+\frac{z^3}{\Omega_{mn}^4}+\dots\right\}$$

$$=\frac{1}{z}-z^2\left\{\sum\sum{}'\,\Omega_{mn}^{-3}\right\}-z^3\left\{\sum\sum{}'\,\Omega_{mn}^{-4}\right\}-\dots$$

$\zeta(z)$fonksiyonubir tek fonksiyon olduğu zaman z^{2k}terimlerinin katsayıları kesinlikle sıfırdır. (k=1,2,3,..) Bu yüzden

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}-\frac{a_2}{3}z^3-\frac{a_4}{5}z^5-\dots$$

olur. Burada

$$a_k=\sum\sum{}'\,(k+1)\Omega_{mn}^{-(k+2)},\ k=2,4,6,\dots$$

olur. Geliştirilmiş $\zeta(z)$ kuvvet serileri $\wp(z)$ ın terimlerinin tek tek integralinin alınması ile de bulunabilir.

5.9.6. Teorem

$$\zeta(\lambda z;\lambda w_1,\lambda w_2)=\lambda^{-1}\zeta(z;w_1,w_2)\ \text{(Homojenlik)}$$

İspat

Bu durum direk $\zeta(z)$ nin tanımından gelir. $\zeta(z)$fonksiyonu derecesi -1 olan homojen fonksiyondur.

5.9.7. Teorem

$$\zeta\left(z+2w_1\right)=\zeta\left(z\right)+2\eta_1$$

$$\zeta\left(z+2w_2\right)=\zeta\left(z\right)+2\eta_2$$

burada $\eta_1=\zeta\left(w_1\right)$ ve $\eta_2=\zeta\left(w_2\right)$'dır.

İspat

$$\zeta'\left(z+2w_1\right)-\zeta'\left(z\right)=-\wp\left(z+2w_1\right)+\wp\left(z\right)=0\,.$$

İntegralini alırsak

$$\zeta\left(z+2w_1\right)=\zeta\left(z\right)+2\eta_1$$

burada $2\eta_1$ integral sabitidir ve şu şekilde hesaplanır

$$2\eta_1=\zeta\left(-w_1+2w_1\right)-\zeta\left(-w_1\right)=2\zeta\left(w_1\right).$$

Sonuç olarak

$$\eta_1=\zeta\left(w_1\right).$$

Benzer şekilde $\zeta\left(z+2w_2\right)=\zeta\left(z\right)+2\eta_2$ eşitliğinden $\zeta_2=\zeta\left(w_2\right)$olduğu bulunur. Teoremi kullanırsak $\zeta\left(z+2mw_1+2nw_2\right)=\zeta\left(z\right)+2m\eta_1+2n\eta_2$ eşitliğini blulruz.

5.9.8. Teorem

η_1,η_2 sabitleri Legendre's bağıntısı ile ilişkilidir.

$$\eta_1 w_2-\eta_2 w_1=\frac{\pi}{2}i\,.$$

İspat

Kalan(rezidü) teoreminden

$\int\limits_{(z_0)}\zeta\left(z\right)dz=2\pi i$ x $\left(z_0\right)$hücresinde Ω_{mn} de $\zeta\left(z\right)$nin kalanları

$$2\pi i=\int\limits_{(z_0)}\zeta\left(z\right)dz=\left[\int\limits_{z_0}^{z_0+2w_1}+\int\limits_{z_0+2w_1}^{z_0+2w_1+2w_2}+\int\limits_{z_0+2w_1+2w_2}^{z_0+2w_2}+\int\limits_{z_0+2w_2}^{z_0}\right]\zeta\left(z\right)dz$$

$$= \int_{z_0}^{z_0+2w_2} \{\zeta(z+2w_1)-\zeta(z)\}dz - \int_{z_0}^{z_0+2w_1} \{\zeta(z+2w_2)-\zeta(z)\}dz$$

$$= 4\eta_1 w_2 - 4\eta_2 w_1 .$$

Sonuç olarak

$$\eta_1 w_2 - \eta_2 w_1 = \frac{\pi}{2} i$$

elde edilir. 5.9.7. teoreminden $\zeta(z)$ çifte periyodik olmadığının bir kanıtıdır ve eliptik fonksiyon değildir. Ayrıca derecesi bir olan sabit olmayan eliptik bir fonksiyon olmasının beklenmesine rağmen değildir. Ayrıca Legendre bağıntısından dolayı η_1, η_2 sa her ikiside sıfır olmadığının kanıtıdır. (Ama $\zeta(z)$ periyod olması istendiği gibi bazı düzgün durumlara sahip olabilir. Fonksiyonun değeri, z gibi bir sabitin eklenmesi ile değişimi Ω_{mn} tarafından artırılır.)

5.10. $\zeta(z)$ Eliptik Fonksiyonun Terimleri

5.10.1. Teorem

Bir $f(z)$ eliptik fonksiyonu bir hücrede $A_1, A_2, A_3, ..., A_s$ kalanları ile $\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_s$ noktalarında basit kutuplara sahipse

$$f(z) = A_0 + \sum_{r=1}^{s} A_r \zeta(z-\beta_r)$$

şeklinde yazılır ve A_0 bir sabittir.

İspat

$f(z)$ eliptik bir fonksiyon olduğundan 5.9.7. teoreminden dolayı

$$\sum_{r=1}^{s} A_r = 0$$

olur.

$\phi(z)=\sum_{r=1}^{s}A_r\zeta(z-\beta_r)$ olduğunu dünelim. Sabit sayıda meromorf fonksiyonların toplamı olan $\phi(z)$ fonksiyonuda meromorftir. Tekrar

$$\phi(z+2mw_1+2nw_2)=\sum_{r=1}^{s}A_r\{z+2mw_1+2nw_2-\beta_r\}$$

$$=\sum_{r=1}^{s}\left[A_r\{\zeta(z-\beta_r)+2m\eta_1+2n\eta_2\}\right]$$

$$=\sum_{r=1}^{s}A_r\zeta(z-\beta_r)\quad\left(\sum_{r=1}^{s}A_r=0 \text{ olduğunda}\right)$$

$\phi(z)$ foknsiyonu bu yüzden çift periyodik fonksiyondur ve açıkça eliptiktir. Bu yüzden $\phi(z)$ ve $f(z)$ kutuplarda benzer kalanlar ile aynı sıfırlarasahip iki eliptik fonksiyondur.

$$f(z)=A_0+\phi(z)=A_0+\sum_{r=1}^{s}A_r\zeta(z-\beta_r)$$

olur ve burada A_0 bir sabittir.

5.10.2. Teorem

$\zeta(z)$ fonksiyonu benzer bir cebirsel toplama teoremini sağlar.

$$\zeta(z_1+z_2)-\zeta(z_1)-\zeta(z_2)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\wp'(z_2)-\wp'(z_1)}{\wp(z_2)-\wp(z_1)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\zeta''(z_2)-\zeta''(z_1)}{\zeta'(z_2)-\zeta'(z_1)}\right\}.$$

İspat

$\dfrac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(z_1)}$ fonksiyonu z_1, $-z_1$, 0 kutuplarında sırası ile kalanları 1, 1, -2 olan eliptik bir fonksiyondur. Eğer z_1, $-z_1$, 0 noktaları bir hücrede değilse bu hücredeki denk noktaları alınabilir. 5.10.1. teoreminden dolayı

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(z_1)}=A_0+\zeta(z-z_1)+\zeta(z+z_1)-2\zeta(z)$$

olur. z yerine $-z$

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(z_1)} = A_0 - \zeta(z+z_1) - \zeta(z-z_1) - 2\zeta(z)$$

veya

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(z_1)} = -A_0 + \zeta(z+z_1) + \zeta(z-z_1) - 2\zeta(z)$$

olur. Buradan $A_0 = 0$ olur. Bu yüzden

$$\frac{\wp'(z_2)}{\wp(z)-\wp(z_1)} = \zeta(z_2+z_1) + \zeta(z_2-z_1) - 2\zeta(z_2)$$

ve

$$\frac{\wp'(z_1)}{\wp(z_1)-\wp(z_2)} = \zeta(z_2+z_1) + \zeta(z_1-z_2) - 2\zeta(z_1)$$

olur.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\wp'(z_2)-\wp'(z_1)}{\wp(z_2)-\wp(z_1)}\right] = \zeta(z_1+z_2) - \zeta(z_1) - \zeta(z_2)$$

eşitliği elde edilir.

$\zeta'(z) = -\wp(z)$ sonucu kullanılır ise

$$\zeta(z_1+z_2) - \zeta(z_1) - \zeta(z_2) = \frac{1}{2}\left[\frac{\zeta''(z_2)-\zeta''(z_1)}{\zeta'(z_2)-\zeta'(z_1)}\right]$$

olduğu bulunur.

$\zeta(z)$, $\zeta'(z)$ herhangi bir cebirsel bağıntıyı sağlamaz ise yukarıdaki sonuç $\zeta(z_1+z_2)$, $\zeta(z_1)$ ve $\zeta(z_2)$ arasında bir bağıntı vermez. Bu yüzden bu teorem benzer cebirsel toplam teoremi olarak da kullanılır.

5.10.3. Sonuç

$\wp(z)$ fonksiyonu bir toplam teoremini sağlar.

$$\wp(z_1+z_2) = \wp(z_1) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left\{\frac{\wp'(z_1)-\wp'(z_2)}{\wp(z_1)-\wp(z_2)}\right\},$$

$$\wp(z_1+z_2)=\wp(z_2)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left\{\frac{\wp'(z_2)-\wp'(z_1)}{\wp(z_2)-\wp(z_1)}\right\}.$$

İspat

5.10.2. teoreminin sonucunun türevinin alınmasıyla 5.10.3. sonuç elde edilir.

5.10.4. Teorem

Herhangi bir eliptik $f(z)$ fonksiyonu şu forma dönüştürülebilir.

$$f(z)=c+\sum_r\{A_r\zeta(z-\beta_r)+A_r'\zeta'(z-\beta_r)+...$$

$$...+A_r^{k_r-1}\zeta^{k_r-1}(z-\beta_r),$$

burada $\sum_r$ bir hücrede tüm farklı β_r sıfırlarında genişletilmiş bir toplamdır ve c bir sabittir. β_r kutubunda esas kısmı

$$\frac{A_r}{z-\beta_r}-\frac{1!A_r'}{(z-\beta_r)^2}+\frac{2!A_r''}{(z-\beta_r)^3}-...\frac{(-1)^{k_r-1}(k_r-1)!A_r^{k_r-1}}{(z-\beta_r)^{k_r}}.$$

İspat

$\phi(z)$ fonksiyonunun aşağıdaki şekilde verildiğini düşünelim.

$$\phi(z)=\sum_r\{A_r\zeta(z-\beta_r)+A_r'\zeta'(z-\beta_r)+...$$

$$...+A_r^{k_r-1}\zeta^{k_r-1}(z-\beta_r)\}.$$

Sabit sayıda meromorf fonksiyonun toplamı olan $\phi(z)$ fonksiyonu da meromorf fonksiyondur. Ayrıca

$$\phi(z+2mw_1+2nw_2)=\phi(z)$$

$\phi(z)$ fonksiyonu çifte periyodik ve bu yüzden eliptiktir. Bu teoremin sonucu kısmi kesir çözünürlüğünü ifade eder.

5.11. Sigma Fonksiyonu

5.11.1. Tanım

Sigma fonksiyonu verilen bağıntı ile ifade edilir;

$$\frac{d}{dz}\left[\log\sigma(z)\right]=\zeta(z)$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z}=1$$

şartını sağlar.

5.11.2. Teorem

$\sigma(z)$ fonksiyonu sonsuz sayıda faktör formunda dönüştürülebilir;

$$\sigma(z)=z\prod_{m,n}{}'\left\{\left(1-\frac{z}{\Omega_{mn}}\right)e^{\left(\frac{z}{\Omega_{mn}}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{\Omega^2_{mn}}\right)}\right\}$$

burada çarpım tüm pozitif ve negatif *m,n* sayıları üzerinde genelleştirilebilir. Ancak *m*, *n* sıfır olmamalıdır.

İspat

$\sigma(z)$ fonksiyonunun tanımı

$$\frac{d}{dz}\left[\log\sigma(z)\right]=\zeta(z)$$

veya

$$\frac{d}{dz}\left[\log\sigma(z)\right]-\frac{1}{z}=\zeta(z)-\frac{1}{z}.$$

İntegralini alırsak

$$\log\frac{\sigma(z)}{Az}=\int_0^z\left\{\zeta(z)-\frac{1}{z}\right\}dz,$$

$$=\int_0^z\sum\sum{}'\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})}+\frac{1}{\Omega_{mn}}+\frac{z}{\Omega^2{}_{mn}}\right\}dz$$

$$=\sum\sum{}' \int_0^z \left\{ \frac{1}{\left(z-\Omega_{mn}\right)} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega^2{}_{mn}} \right\} dz$$

$$=\sum\sum{}' \left\{ \log\left(\frac{z-\Omega_{mn}}{-\Omega_{mn}} \right) + \frac{z}{\Omega_{mn}} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{\Omega^2{}_{mn}} \right\},$$

burada *A* integral sabitidir ve $\zeta(z)-\frac{1}{z}$, $z=0$ komşuluğunda analitiktir. Terime karşılık gelen her terim için integraller düzgün yakınsak serilerin analitik fonksiyonları olan seriler olarak kabul edilebilir. Bu yüzden

$$\sigma(z) = Az\prod_{m,n}{}' \left(1-\frac{z}{\Omega_{mn}} \right) e^{\left(\frac{z}{\Omega_{mn}} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{\Omega^2{}_{mn}} \right)} \tag{5.2}$$

burada *A* bir sabittir.

$\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z}=1$ olduğu zaman *A*=1 dir. Bu şekilde teoremin ispatı elde edilmiştir. $\sigma(z)$ fonksiyonu Ω_{mn} de sıfırları olan bir integral fonksiyonudur. Ancak bir eliptik fonksiyon değildir. Bazı araştırmacılar (5.2) bağıntısı ile tanımlamışlardır.

5.11.3. Teorem

$\sigma(z)$ fonksiyonu z= 0 komşuluğunda

$$\sigma(z) = z + b_1 z^5 + b_2 z^7 + \ldots + b_n z^{2n+3} + \ldots$$

kuvvet serisi formunda genişletilebilir ve $b_1 = -\frac{g_2}{240}, b_1 = -\frac{g_3}{840}$,... şeklinde elde edilir.

İspat

$\sigma(z)$fonkiyonunun tanımından,

$$\log\frac{\sigma(z)}{z} = \int_0^z \left\{ \zeta(z) - \frac{1}{z} \right\} dz$$

$$= \int_0^z \left\{ -a_2\frac{z^3}{3} - \ldots - a_{2n}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)} - \ldots \right\} dz$$

$$=-\frac{a_2}{12}z^4-\frac{a_4}{30}z^6-...$$

Sonuç olarak

$$\sigma(z)=ze^{-z^4P(z)} \text{ burada } P(z)=\frac{a_2}{12}+\frac{a_4}{30}z+...$$

$$=z\left\{1-z^4P(z)+\frac{z^8}{2!}P^2(z)+...\right\}$$

$$=z-\frac{a_2}{12}z^5-\frac{a_4}{30}z^7-...$$

elde edilir. Bu yüzden $\sigma(z)=z+b_1z^5+b_2z^7+...+b_nz^{2n+3}+...$ için $b_1=-\frac{a_2}{12}=-\frac{g_2}{240}$, $b_2=-\frac{a_4}{30}=-\frac{g_3}{840}$ olur. Burada $\sigma(z)$ fonksiyonu tek bir fobksiyondur. Bu durum kuvvet serilerinden gelmektedir.

5.11.4. Teorem

$\sigma(z)$ ve $\wp(z)$ şu bağıntı ile birbirine bağlanabilir,

$$\wp(z)=-\frac{d^2}{dz^2}\{\log\sigma(z)\}=\frac{\sigma'^2(z)-\sigma(z)\sigma''(z)}{\sigma^2(z)}.$$

İspat

$$\wp(z)=-\frac{d}{dz}\zeta(z)$$

$$=-\frac{d^2}{dz^2}\{\log\sigma(z)\}$$

$$=\frac{\sigma'^2(z)-\sigma(z)\sigma''(z)}{\sigma^2(z)}.$$

5.11.5. Teorem

Diyelim ki

$$\sigma\left(z+\Omega_{mn}\right)=\left(-1\right)^{m+n+mn}e^{2\eta_{mn}\left(z+\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}\sigma\left(z\right)$$

olsun. Burada $2\eta_{mn}=2m\eta_1+2n\eta_2$ şeklinde verilir.

İspat

Daha önceden elde ettiğimiz $\zeta\left(z+\Omega_{mn}\right)=\zeta\left(z\right)+2\eta_{mn}$ veya $\dfrac{\sigma'\left(z+\Omega_{mn}\right)}{\sigma\left(z+\Omega_{mn}\right)}=\dfrac{\sigma'\left(z\right)}{\sigma\left(z\right)}+2\eta_{mn}$

olur. Bu eşitliğin integrali alınırsa

$$\log\sigma\left(z+\Omega_{mn}\right)=\log\sigma\left(z\right)+2\eta_{mn}z+A$$

elde edilir. Burada *A* bir integral sabitidir. Bu yüzden

$$\sigma\left(z+\Omega_{mn}\right)=e^{2\eta_{mn}z+A}\sigma\left(z\right)$$

$$=e^{2\eta_{mn}\left(\frac{z+\Omega_{mn}}{2}\right)+A'}\sigma\left(z\right)$$

$$=c.e^{2\eta_{mn}\left(\frac{z+\Omega_{mn}}{2}\right)}\sigma\left(z\right)$$

olur. Burada $c=e^{A'}$ şu şekilde hesaplanır:

i. *m, n* ikiside çift olmadığı zaman $\dfrac{\Omega_{mn}}{2}$ bir periyot değildir. $z=-\dfrac{\Omega_{mn}}{2}$ yukarı da yerine konulursa $c=\dfrac{\sigma\left(\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}{\sigma\left(-\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}=-1$ olur.

ii. *m, n* ikiside çift olduğu zaman $\dfrac{\Omega_{mn}}{2}$ $\sigma\left(z\right)$ foksiyonunun sıfırıdır. Bu yüzden L'Hospital kuralından

$$c=\frac{\sigma'\left(\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}{\sigma'\left(-\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}=+1.$$

$\sigma'(z)$ fonksiyonu çift bir fonksiyondur ve $\sigma(z)$fonksiyonu Ω_{mn} de basit sıfırlara sahip iken $\sigma'(z)$, $\dfrac{\Omega_{mn}}{2}$ de sıfırları yoktur. Bu yüzden

$$\sigma(z+\Omega_{mn}) = (-1)^{m+n+mn} e^{2\eta_{mn}\left(\frac{z+\Omega_{mn}}{2}\right)}\sigma(z).$$

5.11.6. Sonuç

$$\sigma(z+2w_1) = -e^{2\eta_1(z+2w_1)}\sigma(z);$$

$$\sigma(z+2w_2) = -e^{2\eta_2(z+2w_2)}\sigma(z);$$

$$\sigma(z+2w_3) = -e^{2\eta_3(z+2w_3)}\sigma(z).$$

Burada elde edilen sonuçlar 5.11.5 teoreminin özel sonuçlarıdır. Eğer

$\phi(z) = \dfrac{\sigma(z-\alpha)}{\sigma(z-\beta)}$ ise $\phi(z+\Omega_{mn}) = e^{2\eta_{mn}(\beta-\alpha)}\phi(z)$ olur. Ω_{mn} deki z lerin artışından dolayı $\sigma(z)$ foksiyonu şeklinde bazı düzgünlükler vardır. Bu durum fonksiyon bir kuvvet faktörü ile çarpıldığı zaman oluşur. Fonksiyonun bu özelliğinden dolayı fonksiyon yarı periyodik olarak isimlendirilir. $\zeta(z)$i düzgün bir şekilde ayırt etmek için yarı çarpım periyodikliği olarak adlandırmak daha iyidir.

5.12. Herhangi Bir Eliptik Fonksiyon Sigma Fonksiyonlarının Katsayısı Olarak İfade Edilmesi

5.12.1. Teorem

Bir hücrede sırasıyla sıfırları α_i de ve kutupları β_i de derecesi r olan tüm eliptik $f(z)$ fonksiyonu (sıfırları ve kutupları onların çarpımından dolayı alınmış olan) şu şekilde ifade edilir.

$$f(z) = c\frac{\prod_{i=1}^{r}\sigma(z-\alpha_i)}{\prod_{j=1}^{r}\sigma(z-\beta_i)}$$ olur. Burada c herhangi bir sabittir.

Tersi ise teorem 5.12.1. de olduğu gibi bu şekildeki fonksiyonlar eliptik fonksiyonlardır ancak

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=\sum_{j=1}^{r}\beta_j$$

şeklinde olursa sağlar.

İspat

Diyelim ki fonksiyon

$\phi(z)=c\dfrac{\prod_{i=1}^{r}\sigma(z-\alpha_i)}{\prod_{j=1}^{r}\sigma(z-\beta_i)}$ şeklinde olsun. $\phi(z)$ fonkisyonunun aynı periyoda sahip eliptik bir fonksiyon olduğu ve $f(z)$ gibi aynı hücrede aynı sıfır ve kutuplara sahip olduğunu göstermek kolaydır. $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\neq\sum_{j=1}^{r}\beta_j$ eşitsizliği olsa bile $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=\sum_{j=1}^{r}\beta_j\ (\mathrm{mod}\,2w_1,2w_2)$ olur. Yani $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=\sum_{j=1}^{r}\beta_j+\Omega_{m'n'}$, α_i,β_j ler sırayla indirgenemez sıfırlar ve kutuplar olduğunda

$$f(z)=c.e^{2\eta_{m'n'}z}\frac{\prod_{i=1}^{r}\sigma(z-\alpha_i)}{\prod_{j=1}^{r}\sigma(z-\beta_i)}$$

şeklinde olur. Diyelim ki fonksiyon

$$\psi(z)=e^{2\eta_{m'n'}z}\frac{\prod_{i=1}^{r}\sigma(z-\alpha_i)}{\prod_{j=1}^{r}\sigma(z-\beta_i)}$$

şeklinde olsun.

$$\psi(z+\Omega_{mn})=e^{2\eta_{m'n'}(z+\Omega_{mn})}\frac{\prod_{i=1}^{r}\sigma(z+\Omega_{mn}-\alpha_i)}{\prod_{j=1}^{r}\sigma(z+\Omega_{mn}-\beta_i)}$$

$$=e^{2\eta_{m'n'}\Omega_{mn}-2\eta_{mn}(\Sigma\alpha_i-\Sigma\beta_j)}e^{2\eta_{m'n'}z}\frac{\prod_{i=1}^{r}\sigma(z-\alpha_i)}{\prod_{j=1}^{r}\sigma(z-\beta_i)}$$

$$= e^{2\eta_{m'n'}\Omega_{mn} - 2\eta_{mn}\Omega_{m'n'}}\psi(z) = \psi(z)$$

olduğu bulunur. Bu durum

$$2\eta_{m'n'} - 2\eta_{mn}\Omega_{m'n'} = 4(nm' - n'm)(\eta_1 w_2 - \eta_2 w_1)$$

$$= 2(nm' - n'm)\pi i = 2\pi i k$$

olduğu zaman. Sonuç olarak teorem ispatlanmıştır.

5.13. Bazı Önemli Sonuçlar

i. $\wp(z)$ yi $\sigma(z)$ cinsinden ifade edilir.

$\wp'(z)$ fonksiyonu w_1, w_2, w_3 de sıfırları ve $w_1 + w_2 + w_3 = 0$ olduğunda kutup derecesi üç olan fonksiyondur. Sonuç olarak

$$\wp'(z) = c\frac{\sigma(z-w_1)\sigma(z-w_2)\sigma(z-w_3)}{\sigma^3(z)} \text{ (burada } c \text{ bir sabittir)}$$

veya

$$z^3\wp'(z) = c\frac{\sigma(z-w_1)\sigma(z-w_2)\sigma(z-w_3)}{\sigma^3(z)/z^3}.$$

$\lim z \to 0$ olarak alınırken $\lim_{z\to 0} z^3\wp'(z) = -2$ ve $\lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z} = 1$ olduğu düşünülürse

$c = \dfrac{2}{\sigma(w_1)\sigma(w_2)\sigma(w_3)}$ olarak bulunur. Sonuç olarak

$$\wp'(z) = 2\frac{\sigma(z-w_1)\sigma(z-w_2)\sigma(z-w_3)}{\sigma^3(z)\sigma(w_1)\sigma(w_2)\sigma(w_3)}$$

elde edilir.

ii. α nın periyoddan farklı bir sabit olduğu yerde $\wp(z) - \wp(\alpha)$ ‘yı $\sigma(z)$ cinsinden ifade edilir.

$\wp(z) - \wp(\alpha), \pm\alpha$ sıfırları ve $z = 0$ da kutup derecesi iki olan eliptik bir fonksiyondur.

$$\wp(z)-\wp(\alpha)=c\frac{\sigma(z-\alpha)\sigma(z+\alpha)}{\sigma^2(z)}$$

olur ve *c* bir sabittir veya $z^2\{\wp(z)-\wp(\alpha)\}=c\dfrac{\sigma(z-\alpha)\sigma(z+\alpha)}{\sigma^2(z)/z^2}$

$z\to 0$ olduğunda ve $\lim\limits_{z\to 0} z^2\{\wp(z)-\wp(\alpha)\}=1$ ve $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sigma(z)}{z}=1$ olduğu düşünüldüğünde

$$c=-\frac{1}{\sigma^2(\alpha)}$$

eşitliği bulunur. Bu yüzden

$$\wp(z)-\wp(\alpha)=-\frac{\sigma(z-\alpha)\sigma(z+\alpha)}{\sigma^2(z)\sigma^2(\alpha)}$$

ifadesi bulunur.

iii. $\wp'(z)=-\dfrac{\sigma(2z)}{\sigma^4(z)}$;

$\wp(z)-\wp(\alpha)$ formülünden dolayı

$$\frac{\wp(z)-\wp(\alpha)}{z-\alpha}=-\frac{\sigma(z-\alpha)\sigma(z+\alpha)}{(z-\alpha)\sigma^2(z)\sigma^2(\alpha)}$$

olur.

iv. $\dfrac{\sigma(2z)}{\sigma^4(z)}=2\sigma'^3(z)-3\sigma(z)\sigma'(z)\sigma''(z)+\sigma^2(z)\sigma'''(z)$.

(iii) sonucundan dolayı

$$\sigma(2z)=-\sigma^4(z)\wp'(z)$$

$$=-\sigma^4(z)\frac{d}{dz}\wp(z)$$

olduğu bulunur.

$$=\sigma^4(z)\frac{d}{dz}\left\{\frac{\sigma''(z)\sigma(z)-\sigma'^2(z)}{\sigma'^2(z)}\right\},$$

$$=\sigma^4(z)\frac{\{\sigma''(z)\sigma(z)-\sigma''(z)\sigma'(z)-2\sigma'(z)\sigma''(z)\}\sigma^2(z)}{\sigma^4(z)}$$

$$-\frac{2\sigma(z)\sigma'(z)\{\sigma''(z)\sigma(z)-\sigma'^2(z)\}}{\sigma^4(z)}.$$

Sonuç olarak $\dfrac{\sigma(2z)}{\sigma(z)}=2\sigma'^3(z)-3\sigma''(z)\sigma'(z)\sigma(z)+\sigma'''(z)\sigma^2(z)$.

v. $e_i=\wp(w_i)$ ve $\sum w_i=0$, $i=1,2,3$ olduğunda $\sqrt{\wp(z)-e_i}$ ifadesini $\sigma(z)$ cinsinden ifade edilir.

Sonuç (ii) den dolayı $\wp(z)-e_i=-\dfrac{\sigma(z-w_i)\sigma(z+w_i)}{\sigma^2(z)\sigma^2(w_i)}$

$$=e_i^{-2\eta_i z}\frac{\sigma^2(z+w_i)}{\sigma^2(z)\sigma^2(w_i)}$$

$$\sigma(z+w_i)=\sigma(z-w_i+2w_i)=e_i^{-2\eta_i(z-w_i+w_i)}\sigma(z-w_i)=e_i^{-2\eta_i z}\sigma(z-w_i).$$

Sonuç olarak $\sqrt{\wp(z)-e_i}=\pm e_i^{-2\eta_i z}\dfrac{\sigma(z+w_i)}{\sigma(z)\sigma(w_i)}$

$\lim\limits_{z\to 0} z\sqrt{\wp(z)-e_i}=1$, $\lim\limits_{z\to 0} z\dfrac{\sigma(z)}{z}=1$, $\lim\limits_{z\to 0} e^{-\eta_i z}=1$ ve $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sigma(z+w_i)}{\sigma(w_i)}=1$. Bu yüzden

$\sqrt{\wp(z)-e_i}=e_i^{-\eta_i z}\dfrac{\sigma(z+w_i)}{\sigma(z)\sigma(w_i)}$ $(i=1,2,3.)$ z nin yerine w_j yazarsak

$$(e_j-e_i)^{1/2}=e_i^{-\eta_i w_j}\frac{\sigma(w_i+w_i)}{\sigma(w_i)\sigma(w_i)}.$$

5.14. İlişkili Sigma Fonksiyonları

5.14.1. Tanım

İlişkili $\sigma_r(z)$ sigma fonksiyonları $\sigma_r(z)=e^{-\eta_r z}\dfrac{\sigma(z+w_r)}{\sigma(w_r)},(r=1,2,3)$ şeklinde tanımlanır. (v) den dolayı $\sqrt{\wp(z)-e_r}=\dfrac{\sigma_r(z)}{\sigma(z)}$ olur. $\sigma(z+w_r)$, $e^{-\eta_r z}$ ifadeleri z ye bağlı integral fonksiyonları olduğundan $\sigma_r(z)$ de aynı şekilde olur.

5.14.2. Teorem

$\sigma_r(z)$ fonksiyonu çift fonksiyondur.

İspat

$$\sigma_r(-z)=e^{\eta_r z}\,\frac{\sigma(-z+w_r)}{\sigma(w_r)}=e^{(\eta_r z-2\eta_r z)}\,\frac{\sigma(z+w_r)}{\sigma(w_r)}=\sigma_r(z).$$

5.14.3. Teorem

$\sigma_r(z)$ yarı çarpım periyodik fonksiyondur.

İspat

$$\sigma_r(z+\Omega_{mn})=e^{-\eta_r(z+\Omega_{mn})}\,\frac{\sigma(z+w_r+\Omega_{mn})}{\sigma(w_r)}$$

$$=e^{-\eta_r(z+\Omega_{mn})}(-1)^{m+n+mn}\,e^{2\eta_{mn}\left(z+w_r+\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}\,\frac{\sigma(z+w_r)}{\sigma(w_r)}$$

$$=(-1)^{m+n+mn}\,e^{2\eta_{mn}\left(z+\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}e^{2\eta_{mn}w_r-\eta_r\Omega_{mn}}\sigma_r(z).$$

Şimdi

$$2\eta_{mn}w_r-\eta_r\Omega_{mn}=\begin{cases}-n\pi i & \text{eğer } r=1\\ -m\pi i & \text{eğer } r=2\\ (n-m)\pi i & \text{eğer } r=3\end{cases}$$

şeklinde eşitlikleri verilen değerler için elde edilir.

$\sigma_r(z+\Omega_{mn})=\varepsilon_r(-1)^{m+n+mn}\,e^{2\eta_{mn}\left(z+\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}\sigma_r(z)$ için $\varepsilon_r=e^{2\eta_{mn}w_r-\eta_r\Omega_{mn}}=(-1)^n$ yada $(-1)^m$ yada $(-1)^{m+n}$ olur burada $r=1$ yada 2 yada 3. Bu şekilde teorem ispatlanmış olur. $\sqrt{\wp(z)-e_r}$ periyotları sırasıyla $r=1,2,3$ için $2w_1$, $4w_2$; $4w_1$, $2w_2$; $4w_1$, $2w_3$ şeklinde verilir burada $r=1,2,3$ olarak seçilmiştir.

5.14.4. Teorem

$\wp'(z)$ nin $\sigma_r(z)$ fonksiyonları şeklinde ifade edilir.

İspat

$\wp'(z)=\sqrt{\{\wp(z)-e_1\}\{\wp(z)-e_2\}\{\wp(z)-e_3\}}$ şeklinde yazılır. Bu yüzden

$$\wp'(z)=-2\frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{\sigma^3(z)}$$

şeklinde ispat tamamlanmış olur.

5.14.5. Teorem

$z=0$ komşuluğunda $\sigma_r(z)$'nin gelişimi

$$\sigma_r(z)=1-\frac{1}{2}e_r z^2+\frac{1}{48}\left(g_2-6e_r{}^2\right)z^4+...$$

İspat

$$\wp(z)-e_r=-e_r+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{20}g_2z^2+\frac{1}{28}g_3z^4+... \text{ için } |z|\le 2|w|$$

$$\sqrt{\wp(z)-e_r}=\frac{1}{z}\left[1-e_rz^2+\frac{1}{20}g_2z^4+\frac{1}{28}g_3z^6+...\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{z}\left[1-z^2\left\{e_r-\frac{1}{20}g_2z^2-\frac{1}{28}g_3z^4-...\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{z}\left[1-\frac{1}{2}e_rz^2+\frac{1}{40}\left(g_2-5e_r^2\right)z^4+...\right]^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Buradan verilen $\sigma(z)$ için düzenleme yaparsak

$$\sigma(z)=z\left\{1-\frac{g_2}{240}z^4+...\right\}$$

şeklinde elde edilir. Aynı zamanda

$$\sigma_r(z)=\sigma(z)\sqrt{\wp(z)-e_r}$$

$$=\left\{1-\frac{g_2}{240}z^4+\ldots\right\}\left\{1-\frac{1}{2}e_r z^2+\frac{1}{40}\left(g_2-5e_r^{\;2}\right)z^4+\ldots\right\}$$

$$=1-\frac{1}{2}e_r z^2+\frac{1}{48}\left(g_2-6e_r^{\;2}\right)z^4+\ldots .$$

Bu şekilde verilen ispat tamamlanmış olur (Dutta ve Debnath, 1965).

6. MEROMORF FONKSİYONLAR

1920 lerde Nevanlinna teorisi, yirminci yüzyılın birkaç büyük matematik olayından biri olarak matematikçi Rolf Nevanlinna tarafından tasarlandı. Nevanlinnanın birinci ve ikinci ana teoremleri olarak adlandırılan iki ana teoremden oluşur. Nevanlinna teorisi o zamandan beri kendi içinde sağlam bir şekilde geliştirildi ve meromorf fonksiyonların benzersizliği, karmaşık diferansiyel ve fark denklemleri ve birkaç karmaşık değişken gibi diğer karmaşık analiz alanlarına yaygın olarak uygulanmaktadır. Meromorf fonksiyonlarla ilgili literatür çok geniştir. 1953–1970 yıllarında Sovyet "Referativnyi Zhurnal" da konuyla ilgili gözden geçirilen her şeyi içeren kapsamlı bir araştırma Goldberg (1990) ve daha sonra yapılan büyük bir çalışma Goldberg, Levin ve Ostrovskii (1997) ile bu fonksiyon türün olan ilgi ve problem durumlarının çözümü için verilen uğraşlar artmıştır. Daha yeni yapılan çalışmalar Drasin (1995), Hayman (1996) ve Eremenko (2002) daha kısadır ve kapsamı daha dardır.

1970'den sonra yayınlanan meromorf fonksiyonlar teorisindeki belirli konulardaki bazı kitaplar Cherry (2001), Chuang (1990), Hayman (1989), Lang (1987), Ru (2001) Petrenko (1978), Rubel (1996), Yang (1993) şeklinde incelenebilir. Hızla gelişen meromorf fonksiyonların yinelenmesi konusuna ilişkin bir araştırma da Bergweiler (1993) dir. Öncelikle meromorf fonksiyonlar ile ilgili genel tanım ve teoremleri sunarak kısa bir genel bilgilendirme yapılmıştır.

Bir meromorf fonksiyon ünivalent ve analitik bir fonksiyondur, ancak muhtemelen bu fonksiyon tanım kümesinin ayrık bir alt kümesinde ve bu tekilliklerde bir polinom gibi sonsuza gitmelidir (yani, bu istisnai noktalar kutupsal olmalıdır, gerekli tekillik değil). Bir $f(z)$ meromorf fonksiyonunu basit bir şekilde tanımlarsak

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

şeklinde olur. Burada $g(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonları $h(z) \neq 0$ koşulunu sağlayan tüm fonksiyon olarak adlandırılırlar (Krantz, 1999). Bir meromorf fonksiyon sadece sonlu mertebeden, izole kutuplardan ve sıfırlardan oluşur ve tanım alanında gerekli tekilliklere sahip değildir. Kutup sayısının sonsuz olduğu meromorf bir fonksiyon delinmiş diskte $\mathrm{D}^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$ şeklinde ifade edilir. Örneğin, tüm karmaşık düzlemdeki bir Gamma fonksiyonu meromorftur. Riemann küresinde karmaşık bir analitik dönüşüm olarak meromorf fonksiyonun eşdeğeri olarak tanımlanır. Bütün karmaşık düzlemde Gama fonksiyonu meromorftur (Pandey, 2008).

6.1. Genel Tanım Ve Teoremler

6.1.1. Tanım (Meromorf Fonksiyon)

Verilen bir bölge içerisinde kutup noktasından başka singüler (tekil) noktaya sahip olmayan tek değerli bir fonksiyona meromorf fonksiyon denir (Wang ve Guo, 1989).

6.1.2. Teorem

Eğer $z = z_0$ bir $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası ise $z \to z_0$ için $|f(z)| \to \infty$ olur.

İspat

$$\left|\sum_{n=1}^{m} b_n \left(z - z_0\right)^{-n}\right| = \left|z - z_0\right|^{-m} \left|\sum_{n=1}^{m} b_n \left(z - z_0\right)^{m-n}\right| \geq \left|z - z_0\right|^{-m} \left|\left|b_m\right| - \sum_{n=1}^{m-1} b_n \left|z - z_0\right|^{m-n}\right|$$

yazabiliriz. $z \to z_0$ için elde edilen eşitlikte ikinci kısmı $|b_m|$ ye yakınsanır. O zaman,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(z - z_0\right)^{-n}\right| \to \infty$$

bulunur (Ocak, 2005).

6.1.3. Tanım (Genel Meromorf Fonksiyon)

Meromorf fonksiyonlar aynı zamanda literatürde farklı şekillerde de ifade edilerek farklı genel çalışmalar yapılmıştır. $f(z)$ fonksiyonunun bir $z = a$ civarında bulunan Laurent açılımı sonlu sayıda negatif kuvvet içeriyorsa bu fonksiyona $z = a$ yerel meromorf fonksiyon denir. Sadece kutup noktaları için singülerlik (tekillik) özelliğine sahip fonksiyonlar genel meromorf fonksiyon olarak ifade edilir. Örnek olarak;

$f(z) = \dfrac{1}{z} + \log\left(z - 1\right)$ fonksiyonu için $z = 0$ noktasında yerel meromorf olur fakat genel merormorf fonksiyon özelliğini sağlamaz.

$f(z) = e^{1/z}$ ve $h\left(z\right) = \wp\left(e^{z}, g_2, g_3\right)$ fonksiyonları ünivalent olmasına rağmen genel meromorf fonksiyon değildirler (Conte ve Musette, 2008).

$P_n(z)$ ve $Q_m(z)$ sırasıyla n ve m mertebeden polinomlar ise $P_n(z)/Q_m(z)$ şeklinde rasyonel bir meromorf fonksiyondur. Eğer $P_n(z)$ ve $Q_m(z)$ nin ortak çarpanları yoksa verilen sonlu bir bölgedeki singülerlik(tekillik) sadece $Q_m(z)$ fonksiyonu sıfır olduğu noktalardır (Wang ve Guo, 1989).

$\tan z$ fonksiyonu $\pi/2$'nin tek katlarında basit kutba sahip başka bir meromorf fonksiyondur. $f(z) = \left(z^2+1\right)^{-2} e^{1/z}$ şeklinde tanımlanan $D = \mathbb{C} - \{0\}$ da meromorftur ve $i, -i$ noktaları bu fonksiyonun kutup noktalarıdır, iki kutba sahiptir (Palka,1991).

$F(z)$, $\mathbb{C} = \{z : |z| < +\infty\}$ kompleks düzleminde bir meromorf fonksiyon olsun. $F(z)$ nin $F(z) = f(g(z))$ şeklinde f sağ ve g sol çarpanlara sahip olduğu söylenebilir. Burada f bir meromorf fonksiyon ve g de tam fonksiyondur (f nin rasyonel olduğu durumda g meromorf olabilir) (Li ve Yang, 1993).

6.1.4. Tanım (Sıfır ve Kutup Noktaları)

D bölgesi içerisindeki bir $f(z)$ fonksiyonu holomorf olsun. $f(z)$ nin $z_1 \in D$ komşuluğundaki Taylor serisi:

$$f(z) = f(z_1) + \frac{f'(z_1)}{1!}(z-z_1) + \frac{f''(z_1)}{2!}(z-z_1)^2 + \frac{f'''(z_1)}{3!}(z-z_1)^3 + \ldots$$

olur. $z = z_1$ olarak seçilen bir nokta için $f(z)$ fonksiyonunun ardışık türevleri 0 olsun. Sıfır olmayan ilk türev $f^{(p)}(z_1)$ ise seriden

$$f(z) = (z-z_1)^{(p)} f_1(z)$$

eşitliği yazılabilir. Bu halde z_1 e $f(z)$ nin p katlı sıfır yeri şeklinde ifade edilir. Burada $f_1(z)$, D bölgesinde holomorf(analitik) bir fonksiyondur. Eğer $f_1(z)$ nin q katlı sıfırına z_2 denirse,

$$f_1(z) = (z-z_2)^{(q)} f_2(z)$$

İfadesi elde edilebilir ve aynı şekilde devam edersek,

$$f(z)=(z-z_1)^{(p)}(z-z_2)^{(q)}\dots(z-z_n)^{(r)}\ f_n(z)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi bir D bölgesinde meromorf olan $f(z)$ fonkisyonunu inceleyelim. $z=z_1$, $\dfrac{1}{f(z)}$ nin bir sıfır noktası ise z_1 komşuluğunda $f(z)$ fonksiyonu sınırlı olmayıp $\dfrac{1}{f(z)}$ holomorftur ve

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_1)^{(p)}\,g(z)\,,$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_1)^{(p)}\,g(z)} \tag{6.1}$$

olur. Burada z_1 noktası fonksiyonumuzun p katlı kutbu olur. $\dfrac{1}{g(z)}$ fonksiyonunun, z_1 noktasındaki komşuluğu holomorf olduğundan

$$\frac{1}{g(z)}=a_0+a_1(z-z_1)+\dots+a_{p-1}(z-z_1)^{p-1}+a_p(z-z_1)^p+\dots$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir ve bu ifadeyi (6.1) de yerine yazarsak

$$f(z)=\frac{a_0}{(z-z_1)^p}+\frac{a_1}{(z-z_1)^{p-1}}+\dots+\frac{a_{p-1}}{(z-z_1)}+f_1(z)$$

elde edilir. Eğer, $f_1(z)$ nin q katlı bir kutbu z_2 ise ve işlemler bu şekilde devam ettirilirse,

$$f(z)=\frac{a_0}{(z-z_1)^p}+\dots+\frac{a_{p-1}}{z-z_1}+\frac{b_0}{(z-z_2)^q}+\dots+\frac{b_{q-1}}{z-z_2}+\dots+\frac{c_0}{(z-z_n)^r}+\dots+\frac{c_{r-1}}{z-z_n}+f_n(z)$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade $f(z)$ meromorf fonksiyonunun basit kesirler şeklinde ifadesini verir (Kahramaner, 1991).

6.1.5. Teorem

Bütün düzlemde meromorf olan herhangi bir fonksiyona iki tam fonksiyonun bölümü şeklinde ifade edilir.

İspat

$F(z)$ meromorf fonksiyon olsun. O zaman kutup noktalarını sıfır yapan tam fonksiyon

$g(z)$ için

$$F(z).g(z) = f(z)$$

Bir tam fonksiyon olur. Böylece;

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

yazılabilir (Uluçay, 1971).

6.1.6. Teorem

Genişletilmiş bir düzlem üzerinde verilen bir nokta için kutup noktasından başka singüler (tekil) noktası olmayan fonksiyon rasyonel fonksiyondur.

İspat

Verilen bir fonksiyonun kutup noktası sayısı ve yerleri sonludur. Aksi durumlarda ise sonlu veya sonsuzda kutup yerlerinde yığılma noktası vardır denir. Verilen bu yığılma noktalarında fonksiyon analitik olamaz. Diğer taraftan yığılma noktası kutup noktası değildir. Böylece $f(z)$ fonksiyonunun sonlu kutup noktalarını $a, b, ..., k$ ve mertebelerini $\alpha, \beta, ..., \chi$ ile gösterirsek

$$g(z) = f(z)(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}...(z-k)^{\chi}$$

fonksiyonu sonlu düzlemde analitik denir. O zaman

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ve

$$g\left(\frac{1}{z'}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z'^n}$$

olur. $z' = 0$ noktası en fazla bir kutup noktası olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z'^n}$ açılımındaki seride terim sayısı sonlu olur. Yani $g(z)$ bir polinom ifade eder. Bunun üzerine $f(z)$ iki polinomun bölümünü ifade ettiğinden rasyoneldir denir. Karşıt olarak rasyonel bir fonksiyonun kutup noktalarından başka singüler noktası yoktur (Uluçay, 1971).

Meromorf fonksiyonların sıfır ve kutuplarının sayısı ile ilgili şu teorem ifade edilebilir.

Karmaşık düzlemin bir D bölgesinde meromorf bir fonksiyon $f(z)$ ve D ye ait üzerinde sıfır ve kutup noktası bulunmayan kapalı eğri γ olsun. Devam eden teoremde bu durumunun ispatını inceleyelim.

6.1.7. Teorem

$f(z)$ nin γ nın içindeki sıfır noktalarının sayısı Z ve kutupları noktalarının sayısı P ise, her sıfır ve kutup yeri katlılığı kadar sayılmak üzere,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z - P$$

olur. Eğer $f(z)$ D bölgesinde holomorf ise, $P = 0$ olacağından bu eşitlik γ nin içindeki sıfırların sayısını gösterir (Kahramaner, 1991).

Kompleks sayılar cismi üzerinden seçilen meromorf fonksiyonlar için tek değişkenli cebirsel fonksiyonların cismini oluşturur denir (Bers, 1981).

$z = z_0$ noktasında kutup noktasına sahip bir $f(z)$ fonksiyonu meromorf olsun. O zaman $g(z)$ fonksiyonu olarak seçilen bir fonksiyon z_0 noktasında analitik olur ve $h(z) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(z - z_0\right)^{-j}$ olacak şeklide $f(z) = g(z) + h(z)$ şeklinde ifade edilir. Burada $h(z)$ ye $f(z)$ nin $z = z_0$ noktasındaki esas kısmı denir (Clark, 2000).

6.1.8. Teorem

$f(z)$ sınırlı bir D bölgesinde holomorf olduğunu varsayalım, o zaman $f(z)$ fonksiyonunun D bölgesinde sıfır noktası sonlu sayıda olur. Benzer olarak;

Sonlu bir bölge içerisinde seçilen meromorf fonksiyonun bulunan kutup noktaları sonlu sayısındadır (Wang ve Guo, 1989).

Kompleks düzlemin açık bir alt kümesinde seçilen holomorf bir fonksiyonu ile meromorf bir fonksiyonun toplamı meromorf olur (Kirwan, 1992).

Eğer $f(z) \neq 0$ ise $\frac{1}{f(z)}$ meromorftur ve meromorf iki fonksiyonun toplamı veya çarpımı sonucunda meromorf bir fonksiyonu ifade eder (Noguchi, 1997).

Meromorf bir fonksiyon olan $f(z)$ herhangi bir z_0 noktasındaki kutbunun mertebesi q ise

$f^k(z)$ meromorf fonksiyonu aynı z_0 noktasının kutbunun mertebesi kq olur. Eğer c fonksiyonunun herhangi bir sıfır noktasının mertebesi q ise $f^{1/k}(z)$ fonksiyonunun aynı sıfır kutup noktasında mertebesi q/k olur. q, k tamsayısının katı olduğundan dolayı bu nokta $f^{1/k}(z)$ fonksiyonunun da sıfır noktasını ifade eder (Yağızel, 1991).

Bir meromorf fonksiyonun türevini alırsak meromorf bir fonksiyon elde ederiz ve ve meromorf fonksiyonlar cisminin bir elemanı olur (Dutta ve Debnath, 1965). Fakat bütün meromorf fonksiyonların meromorf bir fonksiyonun türevi olduğu söylenemez (Caratheodory, 2001).

6.1.9. Teorem

z_1, $f(z)$ nin p mertebeden bir kutbu olsun o zaman z_1 noktası $f'(z)$ nin $(p+1)$ mertebeli kutup olarak ifade edilir.

İspat

$f(z)=\dfrac{Q(z)}{(z-z_1)^p}$ nin türevini alacak olursak

$$f'(z)=\frac{Q'(z)(z-z_1)^p-Q(z)p(z-z_1)^{p-1}}{(z-z_1)^{2p}}=\frac{Q_1(z)}{(z-z_1)^{p+1}}$$

elde edilerek türevin istediğimiz sonucu verdiği görülür (San, 1973).

6.2. Singüler Noktaların Sınıflandırılması ve Özellikleri

6.2.1. Tanım (Ayrık Singüler Nokta)

$f(z)$ fonksiyonu $z_0 \notin A$ için A bölgesinde analitik olma özellikleri sağlasın. O zaman z_0 noktasının ε komşuluğu A içerisinde ise yada başka bir deyişle $f(z)$ fonksiyonu z_0 ın bir civarında z_0 hariç tek değerli ve analitik ise bu şekilde z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun ayrık singüler noktası denir. Ayrık singüler noktalar üçe ayrılır. (Aşağıda verilecek olan ifadeler için Laurent açılımındaki negatif kuvvetlerin katsayıları b_n ile temsil edilmiştir. Laurent açılımını gösterecek olursak;

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

şeklinde olur.)

6.2.2. Tanım (Kutup Noktası)

Verilen bir $f(z)$ fonksiyonu için bir z_0 ayrık singüler noktası ve bu fonksiyonun Laurent açılımındaki b_n katsayılarının sonlu sayıda olanları hariç diğerleri sıfır ise z_0 noktası $f(z)$ nin kutup noktası olarak adlandırılır. $b_k \neq 0$ olacak şekilde bir k tamsayısı varsa $f(z)$ nin z_0 daki kutup noktasının derecesi k olur. Eğer $k=1$ ise, z_0 a f nin basit kutup noktası denir.

İkinci bir tanım olarak eğer $f(z)$ fonksiyonu belli bir a noktası civarında sınırlı değil fakat $\dfrac{1}{f(z)}$ holomorf ise a ya kutup noktası denir.

6.2.3. Tanım (Esas Singüler Nokta)

$f(z)$ bir fonksiyon olsun. Laurent açılımına göre elde edilen b_k katsayılarının sonsuz sayısı eğer sıfırdan farklı ise z_0 noktasına esas singüler nokta denir. z_0 noktası sonsuz mertebeden kutup noktası şeklinde de ifade edilir.

Eğer $f(z)$ bir a noktasında sınırlı değil ve a $f(z)$ ve $\dfrac{1}{f(z)}$ için singüler nokta ifade ediyorsa a ya $f(z)$ nin bir esas singüler noktası adı verilir.

6.2.4. Tanım (Kaldırılabilir Singüler Nokta)

Bir $f(z)$fonksiyonunun Laurent açılımı incelendiğinde $(z-z_0)$ noktası için negatif kuvvetlerinin katsayıları b_k sıfır oluyorsa o zaman $z_0$noktasın kaldırılabilir singüler nokta denir (Ocak, 2005).

Eğer $f(z)$ a nın civarında holomorf değil fakat sınırlı ise a noktası için kaldırılabilir singüler noktasıdır denir ve a da $f(z)$ in değeri değiştirilerek bir analitik fonsiyona dönüştürülür.

6.2.5. Teorem

$f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in A$ içersinde ayrık singülerlik hariç analitik olsun.

i. $z_0 \in A$ nın bir kaldırılabilir singüler nokta olması için gerek ve yeter şart aşağıda verilen üç koşuldan herhangi birisinin gerçek olmasıdır;

a) $f,\ z_0 \in A$ nın bir delinmiş komşuluğunda sınırlı,

b) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ vardır,

c) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$

ii. $z_0 \in A$ noktası için mertebesi $\leq k$ olarak ifade edilen bir kutup noktası (ya da kaldırılabilir singüler nokta) olması için gerek ve yere şart aşağıdaki koşullardan herhangi birisinin gerçekleşmesidir.

a) Öyle bir $M > 0$ ve $k \geq 1$ bulunabilir ki $z_0 \in A$ noktasındaki delinmiş komşuluğu

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z - z_0|^k},$$

b) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ vardır ($k \geq 1$ ise $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ olur),

c) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$.

iii. $z_0 \in A$ f fonksiyonunun basit kutup noktası olması için gerek ve yeter şart;

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

var ve sıfırdan farklı olasıdır.

iv. $z_0 \in A$ f fonksiyonunu mertebesi (≥ 1) olan kutup noktaı olması için gerek ve yeter şart z_0 ın $\mathrm{D} \setminus \{z_0\} \subset \mathrm{D}$ özelliğinde bir D komşuluğu ve

$$\psi(z_0) \neq 0,\ f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^k}$$

olacak biçimde bir ψ analitik fonksiyonunun bulunabilmesidir (Başkan, 2005).

6.2.6. Teorem

g ve h fonksiyonları bir z_0 noktasında analitik olsun. $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ ve $h'(z_0) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman,

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$$

fonksiyonunun z_0 noktasında basit bir kutup noktası vardır denir.

İspat

$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{h(z)}{z-z_0}=h'(z_0)\neq 0$ ifadesini oluşturalım. Böylece,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{h(z)}=\frac{1}{h'(z_0)}$$

yazılır. Buradan,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)g(z)}{h(z)}=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

eşitliği elde edilir. $g(z_0)\neq 0$ ve $h'(z_0)\neq 0$ olduğundan limit mevcuttur ve z_0 basit kutuptur (Dönmez, 1999).

6.2.7. Teorem

$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $g(z)$, z_0 da *k*. mertebeden ve *h*, z_0 da $(k+1)$. mertebeden sıfıra sahipse, o zaman *f* fonksiyonu birinci mertebeden bir kutup noktasına sahiptir denir.

İspat

Varsayım gereği

$$g(z_0)=g'(z_0)=...=g^{(k-1)}(z_0)=0,g^{(k)}(z_0)\neq 0$$

ve

$$h(z_0)=h'(z_0)=...=h^{(k)}(z_0)=0,h^{(k+1)}(z_0)\neq 0$$

ifadeleri oluşturulabilir. Dolayısıyla bu fonksiyonların Taylor açılımları,

$$g(z)=\frac{(z-z_0)^k}{k!}g^{(k)}(z_0)+(z-z_0)^{k+1}\tilde{g}(z)$$

ve

$$h(z)=\frac{(z-z_0)^k}{(k+1)!}h^{(k+1)}(z_0)+(z-z_0)^{k+2}\,\tilde{h}(z)$$

şeklindedir. Burada $\tilde{g}$ ve $\tilde{h}$ analitik fonksiyonlardır. Böylece,

$$(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)}=\frac{\dfrac{g^{(k)}(z_0)}{k!}+(z-z_0)\tilde{g}(z)}{\dfrac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}+(z-z_0)\tilde{h}(z)}$$

bulunur. Buradan $z\to z_0$ için limit alınırsa,

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)}=(k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

olduğu görülür. Bu da z_0 noktasında birinci mertebeden kutup noktasıdır denir (Başkan, 2005).

6.2.8. Teorem

$f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ fonksiyonu verilsin. g ve h, z_0 noktasında analitik ve $g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0$, $h'(z_0)=0$ ve $h''(z_0)\neq 0$ olsun. Bu durumda f nin bu noktada ikinci mertebeden kutup noktası vardır.

İspat

Teorem gereği $g(z_0)\neq 0$ ve $h(z)=(z-z_0)^2\,\tilde{h}(z)$, $\tilde{h}$ z_0 ın komşuluğunda analitik ve $\tilde{h}(z_0)\neq 0$ olduğundan,

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}=\frac{g(z)}{(z-z_0)^2\,\tilde{h}(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^2}\frac{g(z)}{\tilde{h}(z)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $g(z_0)\neq 0$ ve $\tilde{h}(z_0)\neq 0$ olduğundan f fonksiyonu z_0 noktasından ikinci mertebeden kutup noktasıdır denir (Başkan, 2005).

6.2.9. Teorem

g ve h fonksiyonları z_0 noktasında analitik olsun. $g(z_0)=0$, $g'(z_0)\neq 0$ ve $h(z_0)=0$

, $h'(z_0)=0$, $h''(z_0)=0$ ve $h'''(z_0)\neq 0$ şeklinde olduğunu varsayalım. O zaman, g/h fonksiyonunun z_0 noktasında ikinci mertebeden kutup noktası vardır denir (Dönmez, 1999).

İspat

Verilen teoremdeki işlemleri inceleyecek olursak $g(z_0)=0$, $g'(z_0)\neq 0$ ve $h(z_0)=0$, $h'(z_0)=0$, $h''(z_0)=0$ ve $h'''(z_0)\neq 0$ dır. Bu durum için;

$$g(z)=(z-z_0)\tilde{g}(z) \text{ ve } h(z)=(z-z_0)^3\tilde{h}(z)$$

eşitlikleri oluşturulursa,

$$f(z)=\frac{(z-z_0)\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^3\tilde{h}(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^2}\frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{h}(z)}$$

elde edilir. Burada $\tilde{g}(z_0)\neq 0$ ve $\tilde{h}(z_0)\neq 0$ olduğundan f nin z_0 da ikinci mertebeden kutup noktası vardır.

6.2.10. Teorem

f fonksiyonunun z_0 noktası için ayrık singüler noktası olsun. O zaman $k\geq 0$ olan en küçük tamsayısını;

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)$$

limiti olacak şekilde seçilirse f fonksiyonu z_0 noktasında k. mertebeden kutup noktası vardır denir. Eğer,

$$G(z)=(z-z_0)^k f(z)$$

şeklinde ifade edersek buna göre $G(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik olacak biçimde tek olarak belirlenebilir (Dönmez, 1999).

6.2.11. Teorem

h ve g fonksiyonları z_0 noktasında analitik olsun. Ayrıca $g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0=...=h^{(k-1)}(z_0)$ ve $h^{(k)}(z_0)\neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu halde $f=g/h$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki kutup noktasının mertebesi k gibi bir pozitif tamsayıdır

(Dönmez, 1999).

6.3. Tanım (Nevanlinna Karakteristik Fonksiyonu)

$|z| < R \leq \infty$ de tanımlı f meromorf fonksiyon olarak verilsin. $r < R$ için;

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$$

Şeklinde tanımlanan T fobksiyonuna f nin Nevanlinna karakteristik fonksiyonu denir (Nevanlinna, 2003).

Burada;

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^{+}\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi$$

olur. $\log^{+} t = \max\{\log t, 0\}$, $t > 0$ için $\log t = \log^{+} t - \log^{+} 1/t$ ile tanımlar.

$$N(r, f) = \int_{0}^{r} \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f)\log r$$

$n(r, f)$, f fonksiyonunun, $|b_k| \leq r$ şartını sağlayan b_k kutuplarının sayısını ve $n(0, f) = k$ orijindeki kutbunun mertebesini ifade eder.

$|z| < r$ diskinden fonksiyonun mertebe ve tipleri ile ilgili bilgiler içeren $T(r, f)$ Nevanlinna karakteristik fonksiyonu meromorf fonksiyonlar teorisinde merkezi rol oynar (Ablowitz ve Halburd, 1999). Nevanlinna karakteristik fonksiyonu için şu eşitsizlikler geçerlidir.

$$T\left(r, \prod_{j=1}^{n} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j),$$

$$T\left(r, \sum_{j=1}^{n} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j) + \log n$$

olur. Bu ifadenin düzenlenmiş hali için $c_1, c_2, c_3, \ldots$ keyfi kompleks noktaları seçelim. O zaman

$$\log^+\left|\prod_{j=1}^{n} c_j\right| \le \sum_{j=1}^{n}\log^+\left|c_j\right|$$

ve

$$\log^+\left|\prod_{j=1}^{n} c_j\right| \le \log^+\left(n\max_{j=1,\dots,n}\left|c_j\right|\right) \le \sum_{j=1}^{n}\log^+\left|c_j\right| + \log n$$

olur. Bu ifadeler $m\left(r,\prod_{j=1}^{n} f_j\right)$ ve $m\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right)$ yi hesaplamak için kullanılırsa

$$m\left(r,\prod_{j=1}^{n} f_j\right) \le m\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right),$$

$$m\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} m\left(r, f_j\right) + \log n$$

eşitsizlikleri elde edilir. Eğer *f*, iki veya daha fazla meromorf fonksiyonun toplamı veya çarpımı ise f nin kutbunun mertebesi en fazla ayrık fonksiyonların aynı noktadaki kuyuplarının mertebeleri toplamına eşittir. Bu ifade $N\left(r,\prod_{j=1}^{n} f_j\right)$ ve $N\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right)$ nin alabileceği değerlerin sınırları hakkında bilgiler içerir. Elde edilen sonuçlar birleştirilirse,

$$T\left(r,\prod_{j=1}^{n} f_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} T\left(r, f_j\right)$$

$$T\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} T\left(r, f_j\right) + \log n$$

eşitsizlikleri oluşturulabilir (Nevanlinna, 2003).

6.3.1. Tanım (Meromorf Fonksiyonların Mertebe ve Tipleri)

$$p = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T\left(r, f\right)}{\log r}$$

şeklinde tanımlanan p ye $f(z)$ meromorf fonksiyonunun mertebesi denir. Eğer bir $f(z)$ meromorf fonksiyonun mertebesi p ise $\left(0 < p < \infty\right)$, c sayısı ile göstereceğimiz meromorf fonksiyonun tipi;

$$c = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{T(r, f)}{r^p}$$

olarak tanımlanır.

i. $c = \infty$ ise, $f(z)$ meromorf fonksiyonu maksimum tipten,

ii. $0 < c < \infty$ ise, $f(z)$ meromorf fonksiyonu orta tipten,

iii. $c = 0$ ise, $f(z)$ meromorf fonksiyonu minimum tiptendir denir (Yağızel, 1991).

7. MEROMORF FONKSİYONLARIN KONVEKSE YAKIN FONKSİYONLARA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

7.1. Meromorf Fonksiyonların Konveks, Konvekse Yakın ve Starlike Fonksiyonlara Dönüştürülmesi İçin Bazı Özel Koşulların İncelenmesi

7.1.1. Lemma (Schwarz Lemması)

$z \in \mathrm{D}$ and $f(0)=0$ olarak seçilen bir $f:\mathrm{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu için $|f(z)| \leq 1$ analitik olsun. Bu durumda seçilen $z \in \mathrm{D}$ için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ olur. Ayrıca eğer $|f(z_0)| \leq |z_0|$ için seçilen $z_0 \in \mathrm{D}$ $(z_0 \neq 0)$ noktasında *k*, $|k|=1$ özelliğinde bir sabit ise, $f(z)=kz$ şeklindedir. Bu lemma, Schwarz lemması olarak da bilinir (Szegö ve Polya, 1954).

7.1.2. Lemma (Jack's Lemması)

$m(z)$ fonksiyonu $m(0)=0$ and $r \in \mathbb{R}$, $0<r<1$ koşulunu yerine getiren analitik bir fonksiyon olsun. Eğer $|m(z)|$, $|z|=r$ üzerinde z_0 noktasında maksimum değerine ulaşırsa, burada tatmin edecek bir *k* değeri

$$z_0 m'(z_0) = km(z_0) \quad (\mathrm{k} \geq 1)$$

şeklinde ifade edilir. Bu lemma Jack's Lemma (Jack, 1971) olarak bilinir. Bu lemmanın genelleştirilmesi aşağıda verilmiştir.

7.1.3. Lemma

$m(z)$ fonksiyonun

$$m(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \ldots \qquad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde seçilmiş olsun. $m(z) \not\equiv 0$, olacak şekilde $(z \in \mathrm{D})$ D de analitik olsun. Eğer

$$\left|m(z_0)\right| = \max_{|z|\le|z_0|}\left|m(z)\right|$$

eşitliği sağlanırsa bu durumda ispat için $z_0 = r^{ie}$ $(r \in \mathbb{R}\ ,\ 0<r<1)$ şeklinde ifade edilir. Buradan $k \in \mathbb{R}$ ve $k \ge n \ge 1$ olarak seçersek

$$z_0 m'(z_0) = km(z_0)$$

şeklinde elde ederiz (Mocanu 2000).

7.1.4. Lemma

Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ D de düzgünse, $f(0)=g(0)=0$ için alınan $g(z)$, D birim diskini orijine göre starlike çok tabakalı bir bölgeye ve ayrıca D içerisinde $\operatorname{Re}\left(f(z)/g(z)\right)>0$ ye eşler. Bu durumda, $\operatorname{Re}\left(f(z)/g(z)\right)>0$ eşitsizliği sağlanır (Libera, 1965).

7.1.5. Meromorf Fonksiyonların Konveks ve Starlike Olma Durumu

Birim disk üzerinde bir kutup noktası bulunan $D \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z|<1\}$ diskindeki analitik ve ünivalent fonksiyonların $z=0$ noktasında konveks ve starlike tanımları aşağıda verilmiştir.

7.1.6. Tanım (Ünivalent Meromorf Starlike Fonksiyon)

D birim diskinde bulunan bir $f(z)$ meromorf fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)<0$$

ve

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)d\theta = -2\pi \quad \left(z = re^{i\theta}; 1>r\right).$$

D birim diskinde $f(z)$ fonksiyona ünivalent meromorf starlike fonksiyon denir.

7.1.7. Tanım (Ünivalent Meromorf Konveks Fonksiyon)

Eğer birim diskteki bir meromorf f fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)<0$$

ve

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)d\theta=-2\pi\quad\left(z=re^{i\theta};1>r\right)$$

özelliklerini sağlıyorsa $f(z)$ fonksiyonuna ünivalent meromorf konveks fonksiyon denir.

7.1.8. Tanım (Meromorf Fonksiyon Sınıfı)

Seri açılımı

$$f(z)=\frac{1}{z}+a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+a_{n+3}z^{n+3}+\ldots=\frac{1}{z}+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k z^k\quad\left(n\in\mathbb{N}\right)$$

olan $f(z)$ fonksiyonun D birim disk içierisinide $\mathrm{M}\left(n\right)$ sınıfı olarak gösterilir ve bu tür fonksiyonlara meromorf fonksiyon denir.

Bu tür fonksiyonların $z=0$ noktasında singüler noktası vardır ve ilgili seri açılımındaki tüm a_k katsayıları negatif ise ilgili seri açılımına sahip fonksiyonlara negatif katsayılı meromorf fonksiyonlar, pozitif ise pozitif katsayılı meromorf fonksiyonlar, ve karmaşıksa karmaşık katsayılı meromorf fonksiyonlar denir.

Eğer $n=0$ ise, $\mathrm{M}=\mathrm{M}\left(0\right)$ sınıf elde edilir. Bu sınıfla ilgili tanım ve teoremler aşağıda verilmiştir.

7.1.9. Tanım

Eğer $f(z)\in M$ injektif ise ve $f\left(\mathrm{D}\right)$ tümleyeni orijine göre starlike ise fonksiyona starlike denir (Miller vd., 2000).

7.1.10. Tanım

Eğer $f(z) \neq 0$ eşitsizliği şeklinde alınırsa

$$\operatorname{Re}\left(-\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \ (z \in \mathrm{D})$$

için sağlanırsa, $f(z) \in M$ fonksiyona orijinin starlike tamamlayıcısı denir. Meromorf starlike fonksiyonlar sınıfı $\mathrm{M\,S}^*$ ile gösterilir.

7.1.11. Tanım

Bir $f(z) \in M$ fonksiyonu injektif ise ve $f(\mathrm{D})$ nun tümleyeni orijine göre konveks ise $f(z)$ fonksiyonuna konveks denir.

7.1.12. Tanım (Meromorf Konveks Fonksiyon Sınıfı)

$f'(z) \neq 0$ eşitsizliği için

$$\operatorname{Re}\left(-\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right) > 0 \ (z \in \mathrm{D})$$

olarak karşılanırsa, D birim disk içerisinde $f(z)$ fonksiyonu konveks olarak da adlandırılır. Meromorf konveks fonksiyonların sınıfı $M\,C$ ile gösterilir.

7.1.13. Teorem

Varsayalım ki $\delta(z) = \dfrac{f'(z)}{g'(z)}$, birim disk D içerisinde analitik ve $g(z)$ konveks olsun. $\delta(0) = 1$ ve $0 < 2^{-r} < 1 \left(r \in \mathbb{R}^{+} \right)$ olarak seçilirse,

$$\operatorname{Re}\{\delta(z)\} > 2^{-r}$$

olduğunu göstermemiz gerek ve yeter şarttır.

İspat

Varsayalım ki $m(z)$ D birim disk içerisine analitik ve $m(0) = 0$ olsun. O zaman

$$\delta(z) = \left(1 - 2^{-r}\right) \frac{1 + m(z)}{1 - m(z)} + 2^{-r}. \tag{7.1}$$

Her biri için birim disk $z \in \mathrm{D}$ içerisinde seçilen noktada $|m(z)| < 1$ fonksiyonunu göstermek yeterlidir. Böyle bir $z_0 \in \mathrm{D}$ $|m(z)|<1$ ve $|m(z_0)|=1$varsa z için $|z|<|z_0|$ eşitsizliği sağlayan Lemma 7.1.2 den $z_0 m'(z_0) = \mathrm{k}m(z_0)$ $(k \geq 1)$ elde edilir. $m(z_0)=e^{i\theta}$ yazılırsa, (7.1) den şunu elde ederiz:

$$\frac{z_0\delta'(z_0)}{\delta(z_0)} = \frac{\dfrac{2\left(1-2^{-r}\right)z_0 m'(z_0)}{\left(1-m(z_0)\right)^2}}{\left(1-2^{-r}\right)\dfrac{1+m(z)}{1-m(z)}+2^{-r}}$$

$$= \frac{\dfrac{2\left(1-2^{-r}\right)ke^{i\theta}}{\left(1-e^{ii\theta}\right)^2}}{\left(1-2^{-r}\right)\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}+2^{-r}}$$

buradan işlemlerimize devam edersek,

$$= \frac{\dfrac{2\left(1-2^{-r}\right)k}{\left(1-\cos\theta\right)^2}}{\left(1-2^{-r}\right)\dfrac{2i\sin\theta}{2\left(1-\cos\theta\right)}+2^{-r}}$$

$$= \frac{-\left(1-2^{-r}\right)k}{2^{-r}\left(1-\cos\theta\right)+i\left(1-2^{-r}\right)\sin\theta}$$

$$= \frac{-\left(1-2^{-r}\right)k\left(2^{-r}\left(1-\cos\theta\right)-i\left(1-2^{-r}\right)\sin\theta\right)}{2^{-2r}\left(1-\cos\theta\right)^2+\left(1-2^{-r}\right)^2\sin^2\theta}.$$

Buradan elde edilir ki

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_0\delta'(z_0)}{\delta(z_0)}\right) = \frac{-\left(1-2^{-r}\right)k2^{-r}\left(1-\cos\theta\right)}{2^{-2r}\left(1-\cos\theta\right)^2+\left(1-2^{-r}\right)^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{k\left(1-2^{r}\right)\left(1-\cos\theta\right)}{\sin^2\theta\left(1-2^{r}\right)^2+\left(1-\cos\theta\right)^2}. \tag{7.2}$$

$1-\cos\theta = v$ denir ve $0 \leq v \leq 2$ şeklinde yazarsak,

$$h(v) = \frac{2^{2r}}{v+\left(2^r-1\right)^2\left(2-v\right)}$$

o zaman (7.2) olarak ifade edilebilir

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_0\delta'(z_0)}{\delta(z_0)}\right)=-k2^{-r}\left(1-2^{-r}\right)h(v).$$

Basit bir işlemle fonksiyonun minimum değerini $v=0$ olacak şekilde alırsak $h(v)$ fonksiyonu

$$\lim_{v\to 0} h(v)=\frac{2^{2r-1}}{\left(2^r-1\right)^2}$$

olur. Buradan

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_0\delta'(z_0)}{\delta(z_0)}\right)\geq\frac{-1}{2\left(2^r-1\right)}$$

elde ederiz.

$$\operatorname{Re}\left(\delta(z_0)-\frac{z_0\delta'(z_0)}{\delta(z_0)}\right)\leq 2^{-r}+\frac{2^{-r}}{2\left(1-2^{-r}\right)}=\frac{3.2^r-2}{2^{r+1}\left(2^r-1\right)}.$$

Bu varsayımla $|m(z)|<1$ çelişeceğinden, $z\in \mathrm{D}$ her biri için elde edilir. $\delta(z)$ tanımından,

$$\delta(z)=\left(1-2^{-r}\right)\frac{1+m(z)}{1-m(z)}+2^{-r},$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+m(z)}{1-m(z)}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{\delta(z)-2^{-r}}{1-2^{-r}}\right)>0$$

$$\operatorname{Re}\left(\delta(z)\right)>2^{-r}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Böylelikle teorem ispatımız tamamlanmış olur. Teoremimiz uygulanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

7.1.14. Teorem

$0<2^{-r}<1$ olmak üzere $f(z)\in \mathrm{M\ C}\left(\dfrac{3.2^r-2}{2^{r+1}\left(2^r-1\right)}\right)$

ise

$$f(z)\in \mathrm{M\ S}^*\left(2^{-r}\right)\text{dir.}$$

İspat

$\delta(z)=-\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ olsun. $\delta(0)=1$ olduğu açıkça görülür. Buradan

$$\delta(z)-\frac{z\delta'(z)}{\delta(z)}=-\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)$$

bulunur. 7.1.2 Lemmadan göz önüne alınırsa

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>2^{-r} \text{ yani } f(z)\in MS^*\left(2^{-r}\right)$$

elde edilir.

7.2. Meromorf Fonksiyonların Lineer Dönüşüm Operatörleri Kullanılarak İncelenmesi

Normalize edilmiş $f(z)$ meromorf fonksiyonu M sınıfı ile gösterelim (Cho ve Owa, 2004).

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n .$$

Bu $f(z)$ fonksiyonu delinmiş birim disk D^* de ünivalent ve analitiktir. $f_i(z)$ fonksiyonu için, (i=1;2) ile tanımlanır

$$f_i(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,i}z^n$$

$f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonlarını Hadamard çarpımı şeklinde ifade edersek

$$(f_1 * f_2)(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,1}a_{n,2}z^n$$

şeklinde oluşur (Mogra, 1991). $\partial(\alpha,\beta;z)$ fonksiyonunu

$$\partial(\alpha,\beta;z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(\alpha)_{n+1}}{(\beta)_{n+1}}\right|z^n$$

şeklinde tanımlarsak, $\beta\neq 0,-1,-2,...\ \alpha\in\mathbb{C}/\{0\}$ için bu Pochhammer sembolünü $(\lambda)_n=\lambda(\lambda+1)_{n+1}$ şeklinde kullanıyoruz. Buradan $(\alpha)_{n+1}=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)$ ve $(\beta)_{n+1}=\beta(\beta+1)...(\beta+n)$ eğer $(\alpha)_{n+1}$ ve $(\beta)_{n+1}$ yerine koyarsak;

$$\partial(\alpha,\beta;z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)}{\beta(\beta+1)...(\beta+n)}\right|z^n$$

şeklinde elde ederiz. Eğer burada enklemi $(1)_n$ ile çarparsak ve $n!$ ile bölersek

$$\partial(\alpha,\beta;z)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n(\alpha)_n}{(\beta)_n}\frac{z^n}{n!}$$

şeklinde bulunduğunda

$${}_2F_1(b,\alpha,\beta;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n(\alpha)_n}{(\beta)_n}\frac{z^n}{n!}$$

bilinen bir gauss hipergeometrik fonksiyonudur. Tanıdık bir gauss hipergeometrik işlevi kullanırsak, şunu elde ederiz:

$$\partial(\alpha,\beta;z)=\frac{1}{z}\,{}_2F_1(1,\alpha,\beta;z).$$

Burada yeniden tanımlanan $K^*(\alpha,\beta)$ için $f(z)\in \mathrm{M}$ fonksiyonu Hadamard çarpımını kullanmaya ilişkin yeni bir lineer $\partial(\alpha,\beta;z)$ operatör tanımlayalım.

$$K^*(\alpha,\beta)f(z)=\partial(\alpha,\beta;z)*f(z)$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(\alpha)_{n+1}}{(\beta)_{n+1}}\right|a_nz^n \tag{7.3}$$

Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlara sahip meromorf fonksiyonlar son zamanlarda tartışılmaktadır (Cho ve Kim, 2007), (Dziok ve Srivastava, 2003).

Tanımladığımız $f\in K^*(\alpha,\beta)f(z)$ fonksiyonu için $I^0(K(\alpha,\beta)f(z))=K(\alpha,\beta)f(z)$ ve b=1,2,3,... olacak şekilde

$$I^b\left(K(\alpha,\beta)f(z)\right)=z(I^{b-1}K(\alpha,\beta)f(z))'+\frac{2}{z}$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}n^k\left|\frac{(\alpha)_{n+1}}{(\beta)_{n+1}}\right|a_nz^n\,.$$

(7.3) ve (Srivasta ve Owa, 1986) daki denklemden şu sonuç çıkar:

$$z(K(\alpha,\beta)f(z))'=\alpha K(\alpha+1,\beta)f(z)-(\alpha+1)K(\alpha,\beta)f(z)\,. \tag{7.4}$$

Ayrıca, (7.4) yukarıda;

$$z(I^bK(\alpha,\beta)f(z))'=\alpha I^bK(\alpha+1,\beta)f(z)-(\alpha+1)I^bK(\alpha,\beta)f(z) \tag{7.5}$$

şeklinde düzenlenmiştir. Bu çalışma sırasında, varsayalım ki

$$a \in \square\,,\quad \beta \notin \square_0^-,\quad \delta_a^i = \exp\left(\frac{2\pi i}{a}\right)$$

ve

$$f_a(\alpha,\beta;z) = \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{a-1}\delta_a^i (K(\alpha,\beta)f)(\delta_a^i z) \quad f \in \mathrm{M}\,.$$

şeklinde elde edilir. Aynı zamanda

$$f_{a,b}(\alpha,\beta;z) = I^b f_a(\alpha,\beta;z)$$

$$= \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{a-1}\delta_a^{i(b+1)}\left(I^b K(\alpha,\beta)f\right)(\delta_a^i z)\,,\ \text{b=1,2,3,}\ldots \tag{7.6}$$

Açıkçası $a=1$ ve $b=0$ için $f_1(\alpha,\beta;z) = K(\alpha,\beta)f(z)$ yazabiliriz. Doğrusal operatör ve analitik fonksiyonlar arasındaki subordinasyon ilkesini kullanarak, meromorf analitik M fonksiyon sınıfının aşağıdaki alt sınıflarını oluşturacak ve $K(\alpha,\beta)$ araştıracağız:

$$\mathrm{M}_{a,b}(\alpha,\beta;h)\ ,\ N_{a,b}(\alpha,\beta;h)\ \text{ve}\ h \in A.$$

7.2.1. Tanım

$\mathrm{M}_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ sınıfından bir $f \in \mathrm{M}$ fonksiyonu belirleyerek aşağıdaki subordinasyon koşulunu sağladığında kullanılabilir:

$$\frac{-z(I^b K(\alpha,\beta)f)'(z)}{f_{a,b}(\alpha,\beta;z)} \prec h(z)\,,$$

$$z \in \mathrm{D}\,,\ h \in A\ \text{ve}\ f_{a,b}(\alpha,\beta;z) \neq 0\,.\quad \left(z \in \mathrm{D}^*\right)$$

7.2.2. Tanım

$N_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ sınıfından bir $f \in \mathrm{M}$ fonksiyonu belirleyerek aşağıdaki subordinasyon koşulunu sağladığında kullanılabilir:

$$\frac{-z\left(I^b K(\alpha,\beta)f\right)'(z)}{g_{a,b}(\alpha,\beta;z)} \prec h(z)\,,\quad \left(z \in \mathrm{D}\right)$$

$g \in \mathrm{M}_{a,b}(\alpha,\beta;h)$, $h \in A$ v $g_{a,b}(\alpha,\beta;z) \neq 0$ (7.6) daki gibi tanımlanır.

7.2.3. Tanım

Bir $f \in \mathrm{M}$ fonksiyonun $N_{a,b}(\upsilon,\alpha,\beta;h)$ sınıfından olduğunun belirlenmesi aşağıdaki alt koşul koşulunu sağladığında kullanılabilir:

$$-\upsilon\frac{z\left(I^{b}K(\alpha+1,\beta)f\right)'(z)}{g_{a,b}(\alpha+1,\beta;z)}-(1-\upsilon)\frac{z\left(I^{b}K(\alpha,\beta)f\right)'(z)}{g_{a,b}(\alpha,\beta;z)}\prec h(z),\quad \left(z\in \mathrm{D}\right)$$

bazı $\upsilon(\upsilon\geq 0)$ için $g\in \mathrm{M}_{a,b}(\alpha,\beta;h)$, burada $h\in A$ ve $g_{a,b}(\alpha+1,\beta;z)\neq 0$ şeklinde alınmıştır. Ana sonuçları kanıtlamak için bazı işlemlere ihtiyacımız var.

7.2.4. Lemma

γ karmaşık sayılar ve $a(a\geq 0)$ olsun. h(z), D birim diskte analitik ve ünivalent konveks fonksiyon olsun.

$$\mathrm{Re}\{ah(z)+\gamma\}>0\,.$$

Eğer $s\left(z\right)$, $s\left(0\right)=h\left(0\right)$ ile D birim disk içinde analitikse, o zaman subordinasyonu kullanarak

$$s(z)+\frac{zs'(z)}{as(z)+\gamma}\prec h(z),\ \left(z\in \mathrm{D}\right)$$

$s(z)\prec h(z)$ $\left(z\in \mathrm{D}\right)$ şeklinde ifade eden sonuç elde edilir (Miller ve Mocanu, 1985).

7.2.5. Lemma

D birim diskinde $h\left(z\right)$ fonksiyonunun ünivalent konveks ve analitik olsun. Ayrıca $v\left(z\right)$ analitik fonsiyonu D birim diskinde olsun.

$$\mathrm{Re}\,v(z)\geq 0\ \left(z\in \mathrm{D}\right).$$

Eğer birim diskteki $s\left(0\right)=h\left(0\right)$ ve $s(z)$ analitik ise o zaman $s(z)+v(z)zs'(z)\prec h(z)$ şeklinde bir subordinasyon düzenlemesi $\left(z\in \mathrm{D}\right)$ $s(z)\prec h(z)$ anlamına gelir.

7.2.6. Lemma

$f\left(z\right)$ fonksiyonu $f\in \mathrm{M}_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ şeklinde olsun. Bu durumda

$$-\frac{z\left(f'_{a,b}(\alpha,\beta;z)\right)}{f_{a,b}(\alpha,\beta;z)} \prec h(z) \quad (z\in \mathrm{D}) . \tag{7.7}$$

İspat

(7.6) daki denklemi kullanarak,

$$f_{a,b}(\alpha,\beta;\delta_a^i z) = \frac{1}{a}\sum_{c=0}^{a-1}\delta_a^{c(b+1)}\left(I^b K(\alpha,\beta) f\right)(\delta_a^{c+i} z)$$

$$= \frac{\delta_a^{-i}}{a}\sum_{c=0}^{a-1}\delta_a^{c(b+1)+i}\left(I^b K(\alpha,\beta) f\right)\left(\delta_a^{c+i} z\right) = \delta_a^{-i} f_{a,b}(\alpha,\beta;z),$$

$\left(i\in\{0,1,...,m-1\}\right)$

ve

$$f'_{a,b}(\alpha,\beta;z) = \frac{1}{a}\sum_{c=0}^{a-1}\delta_a^{i(b+2)}\left(I^b K(\alpha,\beta) f\right)'(\delta_a^i z)$$

olur. Öyleyse

$$-\frac{z\left(f'_{a,b}(\alpha,\beta;z)\right)}{f_{a,b}(\alpha,\beta;z)} = -\frac{1}{a}\sum_{i=0}^{a-1}\frac{\delta_a^{i(b+2)} z\left(I^b K(\alpha,\beta) f\right)'(\delta_a^i z)}{f_{a,b}(\alpha,\beta;z)}$$

$$= -\frac{1}{a}\sum_{i=0}^{a-1}\frac{\delta_a^{ib} z\left(I^b K(\alpha,\beta) f\right)'(\delta_a^i z)}{f_{a,b}(\alpha,\beta;\delta_a^i z)} \quad \left(z\in \mathrm{D}\right). \tag{7.8}$$

Bunu takip eden $f\in \mathrm{M}_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ için

$$-\frac{\delta_a^i z\left(I^b K(\alpha,\beta) f\right)'\left(\delta_a^i z\right)}{f_{a,b}\left(\alpha,\beta;\delta_a^i z\right)} \prec h(z) \tag{7.9}$$

$$\left(z\in \mathrm{D},\ \ i\in\{0,1,...,b-1\}\right)$$

elde edilir.

D birim diski içierisinde $h(z)$ de ünivalent konveks olduğu için, (7.8) ve (7.9) denkleminin sonucunda (7.7) eşitliğinin doğru olduğu sonucuna varırız.

7.2.7. Teorem

$h\in A$ olsun. O zaman

$$\operatorname{Re} h(z) < 1 + a \qquad (z \in \mathrm{D}, \;\; a > 0) \tag{7.10}$$

olur.

Eğer $f \in \mathrm{M}_{a,b}(\alpha+1, \beta; h)$ ise o zaman $f \in \mathrm{M}_{a,b}(\alpha, \beta; h)$ elde edilir ve $\left(z \in \mathrm{D}^{*}\right)$birim diskinde seçilen fonksiyon $f_{a,b}(\alpha, \beta; z) \neq 0$ koşulunu sağlar.

İspat

(7.5) ve (7.6) dan

$$(\alpha+1) f_{a,b}(\alpha, \beta; z) + z f'_{a,b}(\alpha, \beta; z) = \frac{\alpha}{a} \sum_{i=0}^{a-1} \delta_a^{i(b+1)} \left(I^b K(\alpha+1, \beta) f\right)' (\delta_a^i z)$$

$$= \alpha f_{a,b}(\alpha+1, \beta; z) \, , \;\; (\, f \in \mathrm{M}\,) \, . \tag{7.11}$$

$f \in \mathrm{M}_{a,b}(\alpha+1, \beta; h)$ ve varsayalım ki

$$v(z) = -\frac{z\left(f'_{a,b}(\alpha, \beta; z)\right)}{f_{a,b}(\alpha, \beta; z)} \tag{7.12}$$

olsun. O zaman birim disk içerisinde $v\left(z\right)$ analitik, (7.11) ve (7.12) den $v\left(0\right) = 1$

$$\alpha + 1 - v(z) = \alpha \frac{f_{a,b}(\alpha+1, \beta; z)}{f_{a,b}(\alpha, \beta; z)} \tag{7.13}$$

elde edilir. Burada (7.13) ün her iki tarafının z ye göre logaritmik türevini alır ve (7.12) yi kullanırsak şunu elde ederiz:

$$v(z) + \frac{z v'(z)}{\alpha + 1 - v(z)} = \frac{z\left(f'_{a,b}(\alpha+1, \beta; z)\right)}{f_{a,b}(\alpha, \beta; z)} \tag{7.14}$$

(7.14) ve 7.2.6 Lemmadan ($\alpha + 1$eğer değiştirilirse)

$$v(z) + \frac{z v'(z)}{\alpha + 1 - v(z)} \prec h \qquad \qquad \left(z \in \mathrm{D}\right) \tag{7.15}$$

(7.10) ve (7.15) den 7.2.7 lemmasının uygulanmasıyla şunu elde ederiz:

$$v(z) \prec h(z) \qquad \left(z \in \mathrm{D}\right),$$

$$s(z) = \frac{-z\left(I^b K(\alpha, \beta) f\right)' (z)}{f_{a,b}(\alpha, \beta; z)} \, . \tag{7.16}$$

Elde edilen (7.16) eşitliğini incelersek, D birim disk içerindeki analitik $s(z)$ fonksiyonu $s(0)=1$ koşulunu sağlar.

(7.5) ve (7.16) eşitliklerinden

$$f_{a,b}(\alpha,\beta;z)s(z)=-\alpha I^bK(\alpha+1,\beta)f(z)+(1+\alpha)I^bK(\alpha,\beta)f(z).$$

olur. Her iki tarafı z ye göre türevlendirerek ve (7.16) kullanarak,

$$zs'(z)+\left(\alpha+1+\frac{z\left(f'_{a,b}(\alpha,\beta;z)\right)}{f_{a,b}(\alpha,\beta;z)}\right)s(z)=-\frac{\alpha z\left(I^bK(\alpha+1,\beta)f\right)'(z)}{f_{a,b}(\alpha,\beta;z)}. \qquad (7.17)$$

olur. Bu (7.11), (7.12) ve (7.17) denklemlerinden dolayı denklemi elde ederiz.

$$s(z)+\frac{zs'(z)}{\alpha+1-v(z)}=\frac{z\left(I^bK(\alpha+1,\beta)f\right)'(z)}{f_{a,b}(\alpha+1,\beta;z)}\prec h(z) \qquad (z\in\mathrm{D}), \qquad (7.18)$$

ve $f\in\mathrm{M}_{a,b}(\alpha+1,\beta;h)$. $\mathrm{Re}\{\alpha+1-v(z)\}>0$ şeklinde elde ederiz.

Böylece (7.18) ve 7.2.5. lemmasından

$$s(z)\prec h(z) \qquad (z\in\mathrm{D}),$$

sonuçlarını elde ederiz.

Bu eşitlik $f\in\mathrm{M}_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ olduğunu ifade eder ve buradan 7.2.7. teoremin ispatının tamamlamış oluruz.

7.2.8. Teorem

$h\in A$ olsun.

$$\mathrm{Re}\,h(z)<1+\alpha \qquad (z\in\mathrm{D},\quad \alpha>0).$$

Eğer $g\in\mathrm{M}_{a,b}(\alpha+1,\beta;h)<1+\alpha$ şeklinde olursa buna göre $f\in N_{a,b}(\alpha+1,\beta;h)$ olur,

o zaman $f\in N_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ şartıyla $g_{a,b}(\alpha,\beta;z)\neq 0$ $(z\in\mathrm{D}^*)$ olur.

İspat

7.2.8. teoremin varsayımına göre, $g\in\mathrm{M}_{a,b}(\alpha+1,\beta;h)$ ve

$$\frac{-z\left(I^bK(\alpha+1,\beta)f\right)'(z)}{g_{a,b}(\alpha+1,\beta;z)} \prec h(z) \quad (z\in\mathrm{D}) \tag{7.19}$$

elde ederiz. Ek olarak, 7.2.7. teoreminden $g\in \mathrm{M}_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ ve 7.2.6. lemması

$$\theta(z) = -\frac{zg'_{a,b}(\alpha,\beta;z)}{g_{a,b}(\alpha,\beta;z)} \prec h(z) \qquad (z\in\mathrm{D})\ . \tag{7.20}$$

olur.

Varsayalım ki

$$s(z) = -\frac{z\left(I^bK(\alpha,\beta)f\right)'(z)}{g_{a,b}(\alpha,\beta;z)}\,.$$

(7.5) subordinasyon özelliğini kullanırsak, $g_{a,b}(\alpha,\beta;z)$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$g_{a,b}(\alpha,\beta;z)s(z) = -\alpha I^bK(\alpha+1,\beta)f(z) + (1+\alpha)I^bK(\alpha,\beta)f(z)\ . \tag{7.21}$$

(7.21) denkleminin her iki tarafının *z* ye göre türevini alalım ve (7.11) kullanarak (*f*, *g* ile değiştirilerek) denklemi bulalım,

$$s(z) + \frac{zs'(z)}{\alpha+1-\theta(z)} = -\frac{z\left(I^bK(\alpha+1,\beta)f\right)'(z)}{g_{a,b}(\alpha+1,\beta;z)} \qquad (z\in\mathrm{D}) \tag{7.22}$$

(7.19) ve (7.22) eşitliklerini birlikte kullanırsak,

$$s(z) + \frac{zs'(z)}{\alpha+1-\theta(z)} \prec h(z) \qquad (z\in\mathrm{D}) \tag{7.23}$$

subordinasyon özelliğini elde ederiz.

Sonuç olarak, 7.2.5. lemmasından (7.19), (7.20) ve (7.23) ele alındığında

$$s(z) \prec h(z) \quad (z\in\mathrm{D})$$

yazılır. $f\in N_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ olduğuna göre $g\in \mathrm{M}_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ olduğunu göstermektedir. Bu şekilde ispatımız tamamlanmış olur.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

8.1. Meromorf Fonksiyonların Konvekse Yakın ve Starlike Fonksiyonlara Dönüşümü Üzerine Sonuçlar

Meromorf fonksiyonun konvekse yakın fonksiyona dönüştürülmesi için elde edilen 7.1.13. teoreminde ρ değeri $\rho = \left(\dfrac{3.2^r - 2}{2^{r+1}\left(2^r - 1\right)} \right)$ alınırsa şu sonuçlar elde edilir,

i. $f(z) \in M$, D birim diskinde $f(z) \neq 0$ ve $\rho < 0$ olmak üzere;

$$\mathrm{Re}\left(-\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right) > \rho$$

olsun. Bu durumda her $z \in \mathrm{D}$ için

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \frac{1}{4}\left(2\rho + 3 - \sqrt{4\rho^2 - \rho + 9} \right)$$

şeklinde bulunur.

ii. Eğer $r = 1$ alınırsa $f(z) \in M\ C\left(\frac{1}{2}\right)$ meromorf konveks fonksiyon olur ve bu sayede $f(z) \in \mathrm{M\ S}^*\left(\frac{1}{2}\right)$ meromorf starlike fonksiyona dönüşür.

iii. $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ şeklinde alınırsa o zaman D birim disk içerisinde $f(z) \neq 0$ şeklinde olduğu bilinir. Bu sayede

$$-\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1+z}{1-z}$$

ve

$$-\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) = \frac{1+z^2}{1-z^2}$$

şeklinde elde edilir.

iv. f fonksiyonu sıfır mertebesinde meromorf konveks bir fonksiyon ise, o zaman en az sıfır mertebesinde meromorf starlike bir fonksiyondur.

8.2. Meromorf Fonksiyonların Lineer Dönüşüm İncelemesi

M sınıfından oluşturduğumuz yeni alt sınıflarımız $\mathrm{M}_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ ve $N_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ şeklinde ifade edilmiştir. $\mathrm{M}_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ ve $N_{a,b}(\alpha,\beta;h)$ alt sınıfların nasıl oluşturulduğu verilöiştir. Aynı zamanda subordinasyon yöntemi ve Hadamard çarpımı kullanılmıştır. Karmaşık analitik dönüşümlerin meromorf fonksiyona sahip olması için gerekli formdan bahsedilerek incelenmiştir.

9. KAYNAKLAR

Ablowitz, M. J., Haldburd, R., (1999). Nevalinna Theory and Difference Equations Of Painleve Type. *University of Colorado at Boulder APPM* Report number 421.

Ahlfors, L. V. (1973). Conformal Invariants. *Topics in Geometric Function Theory*, Mc Graw-Hill, New-York.

Aksent´ev, L. A. (1958). Sufficient conditions for univalence of regular functions (Russian), *Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika*, 4, pp. 3–7.

Alexander, J. W. (1915-1916). Function Which map the interior of the unit circle upon simple regions, *Ann. of Math.*, 17, pp. 12-22.

Aouf, M. K., Hossen, H. M. (1993). New Criteria for meromorphic p-valent starlike functions, *Tsukuba J. Math.* 17, pp. 481-486.

Bakı, M. (1985). *Matematik Analiz, I. Cilt.* Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, no. 142, pp. 37-42.

Başkan, T. (2005). *Kompleks Fonksiyonlar Teoris.* Nobel Basımevi, Ankara.

Becker, J. (1973). Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheitskriterien, *Math. Ann.*, 202, pp. 321–335.

Bergweiler, W. (1993). Iteration of meromorphic functions. B*ull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 29, no. 2, pp. 151–188.

Bernardı, S. D. (1969). Convex and Starlike Functions, *Transactions of the American Mathematical Society 135*, pp. 429-446, 1969.

Bers, L. (1981). Finite Dimensional Teichmüler Spaces and Generalizations. *Bulletion of American Mathematical Society*, (5), pp. 131-172.

Bertoni, V., Dimitrov, D. K. (2005). Generating Starlike and Convex Ünivalent Functions, *Mathematica Balkanica New Series* Vol. 19 Fasc. 3-4.

Bieberbach, L. (1916). Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, *Preuss, Akad. Wiss. Sitzungsb.*, pp. 940-955.

Bieberbach, L. (1913). Über einen Satz des Herrn Caratheodory. *Nachr . Königl . Ges . Wiss . Göttingen , Math Phys . Kl* . ,552-560 .

Bieberbach, L. (1915-1916). Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen. *Abbildung. Math. Ann.*, 77, pp. 153-172 .

Bieberbach, L. (1919). Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme. *Abbildungen . Math* . Z .. 4, pp. 295-305 .

Bieberbach, L. (1921). *Lehrbuch der Funktionentheorie* . Band 1 : Elemente der Funktionentheorie (B. G. Teubner : Leipzig . 1921) ; Band 11 : Moderne Funktionentheorie (Zweite Auflage, B. G. Teubner : Leipzig. 1931). (Reprinted by Johnson Reprint Corp.: New York . 1968.)

Blakley, G. R. (I962). Classes of p-valent starlike functions, *Proc. Amer. Math. Soe.*, 13, pp. 152-157.

Caratheodory, C. (2001). Theory of Functions of a Complex Variables, *AMS Chelsea Publishing*, pp 161.

Cartan, H. (1933). Sur la possibilite d'etendre aux functions de plusieurs variables complexes la theorie des fonctions ünivalentes, pp. 129-155. *Appendix la P. Montel, Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalente*s, Gauthier-Villars, Paris.

Charzynski, Z., Schiffer, M. (1960). A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient. *Arch. Rational Mech. Anal*,. 5, pp. 187-193.

Charzynski, Z., Schiffer, M. (1960). A geometrik proof of the Bieberbach conjecturefor the fourth coefficient. *Scripta Math.*, 25, pp. 173-181.

Cherry, W., Ye, Z. (2001). *Nevanlinna's theory of value distribution.* The second main theorem and its error terms. Springer-Verlag, Berlin.

Cho, N. E., Owa, S. (2004). Partial Sums of certain meromorphic functions, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, **5**(2) Art. 30.

Cho, N. E., Kim, I. H. (2007). Inclusion properties of certain classes of meromorphic functions associated with the generalized hypergeometric function, *Appl. Math. Compu.*, 187 (1), 115 121.

Chuang, C.T., Yang, C. C. (1990). *Fix-points and factorization of meromorphic functions.* Translated from the Chinese. World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ.

Clark, D. N. (2000). Dictionary Of Analysis, Calculus and Differential Equations. *CRC Press*, pp. 233.

Clunie, J. (1959). On meromorphic schlicht functions, *J. London Math. Soc*., 34 ,pp. 215-216.

Conte, R., Musette, M. (2008). *The Painleve Handbook.* Springer-Verlag, pp. 219. New York.

Dernek, A. (2013). *Kompleks Analiz ve Uygulamaları,* Nobel Akademi Yayıncılık, pp. 213-214.

Dönmez, A., (1999). *Çözümlü Alıştırmalı Karmaşık Fonksiyonlar Kuram*ı. Beta Basım Yayım, İstanbul.

Duren P. L., McLaughlin, R. (1972). Two slit mappinggs and the Marx conjecture. *Michigan Math. J.*, 19, pp. 267-273.

Duren, P. L. (1983). *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York.

Duren, P. L. (1977). Coefficients of Ünivalents Functions, *Bulletin of the American Mathematical Society 83*, pp. 891-911.

Dutta, M., Debnath, L. (1965). *Elements of the Theory of Elliptic and Associated Functions with Applications*, World Press, Calcutta.

Drasin, D. (1995). Meromorphic functions: progress and problems, *Proc. Intl. Congr. Math., (Zürich) vol.* 2, 828–835. Birkhauser, Basel.

Dziok, J., Srivastava, H. M. (2003). Certain subclasses of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 14 (1) , pp. 7-18.

Eremenko, A. (2002). Value distribution and potential theory. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, Higher Ed. Press, Beijing., pp. 681– 690.

Faber, G. (1920). Über Potentialtheorie und konforme Abbildung. *S.-B. Bayer. Akad. Wiss. München,* pp. 49-64.

Faber, G. (1916). Neuer Beweis eines Koebe-Bieberbachschen satzes über conforme Abbildung, *Sitzgsber. Bayer Acad. Wiss. Müchen*, pp. 39-42.

FitzGerad, C. H. (1972). Quadratic inqualitiesand coefficient estimates for schlicht function. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 46, pp. 356-368.

Garabedian, P. R., Schiffer, M. (1955). A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient. *J. Rational Mech. Anal.,* 4, pp. 427-465.

Gol'dberg, A. A. (1973). Meromorphic functions. *Mathematical analysis, Vol. 10 (Russian), Akad. Nauk SSSR Vsesojuz. Inst. Naucn. iTehn. Informacii*, Moscow. pp. 5–97.

Goluzin, G. M. (1936). On distortion theorems in the theory of conformal mappings. *Mat. Sb.* 1(43), pp. 127-135 (in Russia).

Gonzalez M. O. (1992). *Complex Analysis Selected Topics*, Marcel Deccer Inc., Madison Avenue, New York.

Gonchar, A. A., Havin, V. P., & Nikolski, N. K. (2001). *Complex Analysis I*. Springer-Verlag, pp 4, Newyork.

Goodman, A. W. (1983). *Univalent Functions,I-II,* Mariner Publ. Comp., Tamp, Florida.

Goodman A. W. (1950). On the Schwarz-Christo§el transformation and p-valent functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 68, pp. 204-233.

Gronwall, T. H. (1914). Some remarks on conformal representation, *Ann. of Math.,* (2),16, pp. 72-76.

Grunsky, H. (1939). Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen. *Math. Z., 45*, pp. 29-61.

Hallenbeck, D. J., MacGregor, T. H. (1984). *Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory*, Pitman Adv. Publ. Program, Boston-London-Melbourn.

Hayami, T., Shiraishi, H., Owa S., & Yildiz, I. (2012).Notes on Nunokawa Lemmas, *International Journal of Applied Mathematics*, pp. 429-441.

Hayman, W. K. (1989). *Subharmonic functions. Vol. 2.* London Mathematical Society Monographs, 20. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London.

Hummel, J. A. (1967). Multivalent starlike functions. *J. Analyse Math*. 18, pp. 133-160.

Kadıoğlu, E., & Kamali, M. (1998). *Genel Matematik*, pp. 419-431.

Kahramaner,Y. (1991). *Gerçel ve Karmaşık Analiz.* Aşkan Yayınları, sayfa 342-420, İstanbul.

Kirwan, F. C. (1992). Complex Algebraic Curves. *Cambridge University Press*, pp 115.

Klein, F., Fricke, R. 1. (1890). Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Moduler funktionen. *Ausgearbeitet und vervollstandigt von Robert Fricke. vol. 2* Leipzig: teubner. Reprint 1966.

Koebe, P. (1907). Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. *Nachr . Akad. Wiss. Göttingen . Math. - Phys. Kl.*, pp. 191-210 .

Koebe. P. (1909). Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe . *Nachr . Akad . Wiss . Göttingen, Math. - Phys. Kl.*, pp. 68-76 .

Koebe, P. (1913). Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. *Nachr. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.,* pp. 286-288 .

Krantz, S. G. (1999). Handbook of Complex Variables, , Birkhuser, Boston, MA.

Lang, S. (1987). *Introduction to complex hyperbolic spaces.* SpringerVerlag, New York.

Landau, E. (1946). Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionenentheorie. *Julius Springer: Berlin.* 1916; Zweite Auflage, 1926. (Reprinted by Chelsea: New York.

Lewandowski, Z. (1981). On a univalence criterion, *Bull. Acad. Polon. Sci. Math.*, 29, pp. 123–126.

Leung, Y. J. (1979). Integral means of the derivative of some ünivalent functions, *Bull. London Math. Soc. 11,* pp. 289-294.

Li, B. Q., Yang, C. C. (1993). Factorization Of Meromorphic Functions In Several Complex Variables. *Contemporary Mathematics, Volume* 142, pp. 61-74.

Liu, J., Owa, S. (1998). On certain meromorphic p-valent functions, *Taiwanese J. Math.* 2(1) , pp. 107-110.

Loewner, C. (1923). Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. *I, Math, Ann,*. 89, pp. 103-121.

MacGregor, T. H., Thomas, H. A. (1974). Subordination for convex functions of order α . *J. London Math. Soc.* (2) 9, pp. 530-536.

Marx, A. (1936). Untersuchungen , ber schlichte Funktionen, *Math. Ann.* 107, pp. 40-67.

Miazga, J.,Wesolowski, A. (1991). A univalence criterion for meromorphic functions, *Annales Polonici Mathematici,* 56(1), pp. 63-66.

Milin, I. M. (1971). Univalent Functions and Orthonormal systems. Izdat. "Nauka": Moscow. (in Russia); English transl., *Amer. Math. Soc., Providence, R. I.*, 1977.

Miller, S. S., Mocanu, P. T. (1985). On some classes of first order differential subordinations, *Michigan Math. J.* , 32 , pp. 185-195.

Miller, J. (1970). Convex meromorphic mappings and related functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 25 , pp. 220-228.

Miller, S. S., Mocanu, P. T. (2000). Differential Subordinations. Theory and Applications, *Marcel Dekker, Inc.*, Ne York, Basel.

Miller, J. (1970). Convex meromorphic mappings and related functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 25 , 220-228.

Mocanu, P. T. (1969). Une propriete de convexite generalisee dans la theorie de la representation conforme, *Mathematica(Cluj)*, 11(34), pp. 127-133.

Mocanu, P. T., Bulboaca, T., Salagean, Gr. Şt. (1999). *Teoria Geometrica a Functiilor Ünivalente,* Casa Cartii e Ştiinta. Cluj.

Mogra, M. L. (1991). Hadamard product of certain meromorphic univalent functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 157 , pp. 10-16.

Montel, P. (1933). *Leçons sur les Fonctions Ünivalentes ou Multivalentes*, Gauthier-Villars, Paris.

Nehari, Z., (1949). The schwarzian derivative and schlicht functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, pp. 545-551.

Nehari, Z. (1952). *Conformal Mappings*, Mc. Grraw-Hill Book Comp., New-York.

Nevanlinna, R. (1921). Über die konforme Abbildung von Sterngebieten, *Ofvers. Finska 58 Vet. Soc. Förh., 53 (A)*, Nr. 6.

Nevanlinna, O. (2003). Meromorphic Functions and Linear Algebra. *American Mathematical Society*, pp. 29-40, USA.

Noguchi, J. (1997). *Introduction To Complex Analysis. American Mathematical Society*, pp 94.

Nunokawa, M., Ahuja, O. P. (2001). On meromorphic starlike and convex functions, *Indian Pure Appl. Math.*, 32(7), pp. 1027-1032.

Nunokawa, M. (1987). On The Theory of Multivalent Functions, *Tsukaba J. Math*. Vol. 11 No. 2 , pp. 273-286.

Nunokawa, M., at al. (2012). On the order of Close-to-Convexity of Convex functions of order alpha, *Journal of Inequalities and Applications*.

Ocak, R. (2001). *Kompleks Analiz*, Atatürk Üniversitesi Yayınları no.750, pp. 1-226.

Ozaki, S. (1947). On the theory of multivalent functions II, *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A. 4* , pp. 45-87.

Ozawa, M. (1969). On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. *Kodai Math. Sem. Rep.,2*, pp. 197-128.

Owa, S. (1989). The order of close-to-Convexity for Certain Ünivalent Functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pp. 393-396.

Özgül, S., Yıldız, İ. (2014). Ünivalent Fonksiyonlar Teorisinde Geometrik Fonksiyonların Sağladığı Bazı Özellikler, *Düzce Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, pp. 154-168.

Palka, B. P. (1995). *An Introduction To Complex Function Theory.* Springer Verlag.

Pederson, R. N. (1968). A proof of Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 31, pp. 331-351.

Pederson, R., Schiffer M. (1972). A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient. *Arch. Rational Mech. Anal., 45*, pp. 161-193.

Petrenko, V. P. (1978). *Growth of meromorphic functions (Russian) Izdat*. pri Harkov.

Gos. Univ. Izdat. Ob'ed. "Vyshcha shkola", Kharkov.

Pick, G. (1916). Über den Koebeschen Verzerrungssatz. *Ber. Verh. Königl. Ges. Wiss. Leipzig. Math. -Phys. Kl.* 68, pp. 58-64.

Plemelj, J. (1913). Über den Verzerrungssatz vom P. Koebe, Ges. Dtsch. Naturforschren Arzte, 85, *Versammlung Wien Zeiter teie*, Erste Halfte.

Pommerenke, Ch. (1975). *Univalent Functions*, Vanderhoeck and Ruprecht, Göttingen.

Pommerenke, Ch. (1963). On meromorphic starlike functions. *Pacific J. Math. 13*. pp. 221-235.

Robertson, M. S. (1937). A representation of all analytic functions in terms of functions with positive real parts, *Ann. of Math., 38* , pp. 770-783.

Robertson, M. S. (1941). The partial sums of multivalently star-like functions, *Ann. of Math., 42,* 829-838.

Robertson, M. S. (1945). Star center poi nts of multivalent functions, *Duke Math. J., 12,* pp. 669-684.

Robertson, M. S. (1953). Multivalently starlike functions, *Duke Math. J., 20,* 539-549.

Royster, W. C. (1963). Meromorphic Starlike, *Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 107, No. 2* , pp. 300-308.

Ru, M. (2001). *Nevanlinna theory and its relation to Diophantine approximation.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ.

Rubel, L. A. (1996). *Entire and meromorphic functions.* Springer-Verlag, New York.

Sakagochi, K. (1959). On a certain Univalent Mapping, *Journal of the Mathematical Society of Japan 11*, pp. 72-75.

San, N., (1973). *Analitik Fonksiyonların Teorisi, I. cilt.,* Atatürk Üniversitesi Yayınları. No:267. Baylan Matbaası, Ankara, sayfa 37.

Sakaguchi, K. (1962). A note on p-valent functions. *J. Math. Soc. Japan 14*, pp. 312-321.

Schoeneberg, B. (1974). *Elliptic Moduler Functions An Introduction*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, pp. 15-16.

Srivastava, H. M., Owa, S., (1986). A certain one parameter additive family of operators defined on analytic functions, *Journal of mathematıcal analysıs and applıcatıons* 118, pp. 80-87.

Strohhacker, E. (1933). Beitrage zur Theorie der schlichten Funktionen, *Math. Z. 37,* pp. 356-380.

Şahin, H. (2018). 'Ünivalent Fonksiyonların Elementer Teorisi.' Yüksek Lisans Tezi, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce.

Şahin, H., Yıldız, İ. (2019). The Univalent Function Created by the Meromorphic Functions Where Defined on the Period Lattice, *Communications in Advanced Mathematical Sciences,* Vol. II, No. 4,pp. 303-308.

Şahin, H., Yıldız, İ. (2021). Examining the Function of Meromorphic with Using the Linear Convolution Operator, *Journal of the Institute of Science and Technology*, 11(1): pp. 609-616.

Tuneski, N. (2007). Some Results on Starlike and Conveks Functions, *Applicable analysis and Discrete Mathematics*, pp. 293-298.

Uluçay, C. (1971). *Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri.* Şirket-i Mürettibbiye Basımevi, İstanbul, ss. 167-168, 198.

Yağızel, R. (1991). 'Meromorf Fonksiyonlar. Yüksek Lisans Tezi.' Yüzüncüyıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Van.

Yang, L. (1993). *Value distribution theory.* Translated and revised from the 1982 Chinese original. Springer-Verlag, Berlin; Science Press, Beijing.

Wang, Z. X., Guo, R. D. (1989). *Special Functions.* World Scentific Publishing Company, pp 17.

Wilken, D. R., Feng, J. (1980). A Remark on Convex and Starlike Functions , *Journal of the London Mathematical Society,* Volume s2-21, Issue 2, April, pp. 287–290.

ÖZGEÇMİŞ

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2022
Y. Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2018
Lisans	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	Gazi Üniversitesi	2011
Lise		Hasan Ali Yücel Anadolu Öğretmen Lisesi	2006

YAYINLAR

Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler:

Şahin, H., Yıldız, İ. "Examining the Function of Meromorphic with Using the Linear Convolution Operator, " *Journal of the Institute of Science and Technology,* 11(1): pp. 609-616, 2021.

Şahin, H., Yıldız, İ., & Uyanık, N. "On the algebraic properties of the univalent functions in class S. " *New Trends in Mathematical Sciences* NTMSCI 5, No. 3, pp. 293-298, 2017.

Şahin, H., Yıldız, İ. "The Univalent Function Created by the Meromorphic Functions Where Defined on the Period Lattice, " *Communications in Advanced Mathematical Sciences* Vol. II, No. 4, pp. 303-308, 2019.

Şahin, H., Yıldız, İ. "Convex functions in selected theory of functions. " NTMSCI 7, No. 3, pp. 222-226 *New Trends in Mathematical Sciences, 2019.*

Uluslararası Kongrelerde Sunulan Bildiriler:

Şahin, H., Yıldız, İ. Akyar., A. & Menek, Ü. "On the Formation of Starlike and Univalent Functions with the Logarithmic Value of the Derivative of the Koebe Function. " *CSC2018: Internationla Computational Science Congress*. 2018.

Şahin, H., Yıldız, İ. On the Conversion of Convex Functions to Certain within the Unit Disk. *Conference Proceedings of Science and Technology,* 2(1), pp. 61–63 CPOST. 2019.

Şahin, H., Yıldız, İ. Menek, Ü. "On the Conversion of Convex Functions to Certain within the Unit Disk." *2nd International Conference on Mathematical Advances and its Applications.* İstanbul. 2019.