T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# KONVEKS VE STARLIKE FONKSİYONLAR ARASINDAKİ BAĞINTILAR

HİLAL AY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. İSMET YILDIZ

DÜZCE, 2018

**T.C.**
**DÜZCE ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# KONVEKS VE STARLIKE FONKSİYONLAR ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Hilal AY tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Düzce Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Düzce Üniversitesi _______________________

Doç. Dr. Erol YILMAZ
Abant İzzet Baysal Üniversitesi _______________________

Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN
Düzce Üniversitesi _______________________

Tez Savunma Tarihi: 18/10/2018

# BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

18 Ekim 2018

Hilal AY

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans dönemimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. İsmet Yıldız'a en içten dileklerim ile teşekkür eder ve şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmam boyunca yardımlarını, destlerini ve katkılarını esirgemeyen sevgili çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

**18 Ekim 2018** **Hilal AY**

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa No**

# ŞEKİL LİSTESİ

**Sayfa No**

# SİMGELER

| | |
|---|---|
| $A$ | Bir küme |
| $a_n$ | Dizi |
| $arg\Theta$ | $\Theta$' nın argümenti |
| $B$ | Bölge |
| $C_p$ ,$C_r$ | Kapalı bir eğri |
| $D$, $E$ | Birim Disk |
| $E$ | Komşuluk |
| $F$ | Bir fonksiyon |
| $F(z)$ | $z$'ye bağlı fonksiyon |
| $Imz$ | Kompleks sayının imajiner kısmı |
| $Lim$ | Limit |
| $P$ | Sabit sayı |
| $\mathbb{R}$ | Reel Sayılar |
| $Rez$ | Kompleks sayının reel kısmı |
| $S$ | Normalize Edilmiş Univalent Fonksiyonlar |
| $S^*$ | Starlike (Yıldızlı) Fonksiyon |
| $w_1$, $w_2$ | Kompleks sayılar |
| $z$, $z_0$, $y$ | Bir nokta |
| $\sum$ | Toplam sembolü |
| $\Theta$ | Açı |
| $\Phi$ | Analitik Olan Fonksiyon |
| $\Delta$ | Diskriminant |
| $\mu(t)$ | $t$'ye bağlı değişken |
| $\zeta(z)$ | z'ye bağlı fonksiyon |
| $\varsigma(z)$ | z'ye bağlı tek fonksiyon |

# ÖZET

## KONVEKS VE STARLIKE FONKSİYONLAR ARASINDAKİ BAĞINTILAR

HİLAL AY
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Ekim 2018, 44 sayfa

Literatürde tanımlanan fonksiyonun daha önce konvekse yakın fonksiyonlar için yapılan bir ispatı bulunmamaktadır. Bu çalışmada, daha önce Starlike fonksiyonu için elde edilen $a_k$ katsayıları, şimdi $0 \leq a < 1$ aralığında $f(z) \epsilon A$ için ilgili fonksiyonun konvekse yakın bir ispatı yapılmıştır. Çemberin içinde alınan bir noktayı fonksiyonda yerine yazarsak; hangi kümede olduğunu bulabileceğimize ve;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{|k - 2u_k| + (1-a)|u_k|\} |A_{k+1}| \leq 1 - a$$

eşitsizliği, bu değer kümesindeki fonksiyon için sağlanıyorsa, $f(z) \epsilon S(a, t)$ olduğu için $f(z) \epsilon K(a)$ içinde sağlanıyordur.

**Anahtar sözcükler:** Analitik fonksiyon, Konveks fonksiyon, Starlike.

# ABSTRACT

## ANALYSIS OF RELATION BETWEEN CONVEX AND STARLIKE FUNCTION

Hilal AY
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master's Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
October 2018, 44 pages

There is not much proof for close to convex functions in the literature.In this thesis, $a_k$ coefficients previously obtained for starlike functions are now examined for *0≤a<1* in *f(z)* for close convex functions.If we substitute a point taken inside of the circle into a function, we can find out which set it is.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{|k-2u_k|+(1-a)|u_k|\}\,|A_{k+1}|\leq 1-a$$

If this inequality is provided for the function on this range, then it is also provided with *f(z)ϵK(a)* when it is *f(z)ϵS(a,t)*.

**Keywords:** Analytic function, Convex function, Starlike.

# 1. GİRİŞ

Univalent fonksiyonların teorisi eski bir konudur, yüzyılın dönüşünde doğmuştur, ancak şimdiki araştırmanın aktif alanı olarak kalmıştır. Süreç özellikle son yıllarda hızlanmıştır. Bu çalışma, reel ve kompleks analiz yardımıyla temel bilgiyi kabul ederek, alanın asıl metotlarına ve onların uygulamalarına bir yorumlama sunmaktadır.

Alanın ana problemlerinden biri, 1916 yılından beri var olan, sınıfındaki her bir fonksiyonun Taylor katsayılarının $|a_n|<n$ eşitsizliğini sağladığını savunan Bierbach varsayımıdır. Uzun yıllardan beri bu ünlü problem bir çelişki olarak kalmıştır ve bütün konunun bel kemiğini oluşturan yaratıcı metotların gelişimine ilham vermiştir.

Konunun düzenlenişi doğal olarak sonuçlara göre değil metotlara göre yönlenmiştir. Metotlar matematiğin farklı alanlarından gelmektedir. Her birinin belirli problemleri çözmek için kendine has özellikleri vardır. Örneğin, bazı ispatları yaparken dört farklı metot kullanılır:

$$|a_n| < e_n, \qquad |a_n| < 1.243n, \qquad |a_n| < \sqrt{7/6n} \;\; ve \;\; |a_n| < (e/2)n$$

Genel olarak, S sınıfının bütünü üzerinde durduk ve özel alt sınıflara biraz dikkat çektik. Univalent fonksiyonların tartışması detaylı bir girişle başlayarak teorinin daha temel ve klasik bölümlerine doğru ilerlemektedir.

# 2. GENEL BİLGİLER

## 2.1. TANIMLAR

### 2.1.1. $\varepsilon$ - Komşuluk

$z_0 \epsilon C$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \epsilon C : |z - z_0| < \varepsilon\} \tag{2.1}$$

Kümesine $z_0$ noktasının $\varepsilon$ - komşuluğu denir.

### 2.1.2. İç Nokta

$A \subset C$ her hangi bir küme ve $z_0 \epsilon A$ olsun. $z_0$ noktasının bir $\varepsilon$ komşuluğu, tamamen $A$ kümesine ait ise, $z_0$ noktasına bir iç nokta denir.

### 2.1.3. Kapanış Noktası

$A \subset C$ alt kümesi ve bir $z \epsilon C$ noktası verilsin. Eğer $z$ noktasının her boşluğunda $A$ kümesinin en az bir elemanı varsa, $z$ noktasına $A$ kümesinin kapanış noktası denir.

### 2.1.4. Bağlantılı Küme

$A$, $Y$ ve $Z$, $C$ kompleks sayılar kümesinin alt kümeleri olsun. Eğer $A \subset Y \subset Z$, $A \cap Z \neq \emptyset$, $A \cap Y \neq \emptyset$ olacak biçimde $Y$ ve $Z$ gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise, $A \subset C$ kümesine bağlantılıdır denir ve aksi bağlantısızdır denir.

### 2.1.5. Basit Bağlantılı Küme

$A \subset C$ olsun. Eğer bir $A$ kümesi içindeki herhangi iki noktayı birleştiren bütün yollar yine küme içerisinde kalıyor ise bu $A$ kümesine bağlantılı küme denir.

### 2.1.6. Bölge

Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

### 2.1.7. Seri

Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ ifadesine seri denir. $a_1$, $a_2$... sayılarına da serinin terimleri adı verilir. Bir seriyi göstermek için

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.2}$$

veya

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum a_n \tag{2.3}$$

kullanılır.

### 2.1.8. Yakınsaklık

Kompleks $\{z_n\}$ dizisi ve $z_n \epsilon C$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0$ olduğunda $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0$ doğal sayısı varsa, bu dizi $z_0$ kompleks sayısına yakınsıyor denir. $\{z_0\}$ dizisinin $z_0$ noktasına yakınsaması $z_n \rightarrow z_0$ veya $\lim z_n = z_0$ biçiminde gösterilir [1].

### 2.1.9. Düzgün Yakınsaklık

$A \subset C$ ve $f_n : A \subset C$ fonksiyonlarının $\{f_n\}$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve tüm $z \epsilon A$ değerleri için $n \geq n_o$ alındığında $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0$ doğal sayısı varsa, $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi $f$ fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

### 2.1.10. Mutlak yakınsaklık

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| \tag{2.4}$$

serisi yakınsak ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \tag{2.5}$$

serisine mutlak yakınsak seri denir.

#### 2.1.11. Süreklilik

$A\subset C$ ve $f{:}A\subset C$ bir fonksiyon ve $z_0\epsilon A$ olsun. $\varepsilon>0$ keyfi olmak üzere $z\epsilon A$ ve $z-z_0<\delta$ için

$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ olacak biçimde $\delta(z_0, \varepsilon) >0$ sayısı mevcut ise $f$ fonksiyonuna $z_0$ noktasında süreklidir denir [2].

#### 2.1.12. Parçalı Sürekli

$A\subset C$ ve $f{:}A\subset C$ tanımlı bir fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonunun $A$'daki süreksizlik noktalarının sayısı sonlu ise $f$ fonksiyonuna $A$ üzerinde parçalı süreklidir denir.

#### 2.1.13. Yığılma Noktası

$a\epsilon C$ olsun. $a$'nın her $\varepsilon>0$ komşuluğunda $A$ kümesine ait sonsuz eleman varsa, $a$'ya $A$ kümesinin yığılma noktası veya yığılma yeri denir [3].

#### 2.1.14. Analitik Fonksiyon

$f$, kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyonu $z_0\epsilon C$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{2.6}$$

limiti varsa, bu fonksiyona $z_0$ noktasında diferansiyellenebilirdir denir. $z_0$ noktasının bir $\varepsilon>0$ komşuluğunda diferansiyellenebilir bir $f$ fonksiyonuna $z_0$ noktasında analitik fonksiyon denir [3], [4].

#### 2.1.15. Kutup Noktası, Sıfır Noktaları

$f$ fonksiyonu, $z=z_0$ noktasında analitik değil fakat

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z) = A \neq 0 \tag{2.7}$$

olacak şekilde bir $n\epsilon\mathbb{Z}^+$ sayısı mevcut ise, $z=z_0$ noktasına $f$ fonksiyonunun bir kutup noktası denir. Denklem (2.7) ifadesini gerçekleyen en küçük $n\epsilon Z^+$ sayısına $z_0$ kutup noktasının mertebesi denir. Mertebesi 1 olan kutup noktası basit kutup noktası adını alır. $z_0\epsilon C$ noktasında analitik bir $f$ fonksiyonu için $f(z_0)=0$ iken

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z) \tag{2.8}$$

koşulunu sağlayan bir $n$ pozitif tamsayısı ve $g(z_0)\neq 0$ olan, $z_0$ noktasında analitik bir $g$

fonksiyonu varsa $z_0$ noktasına $f$ fonksiyonunun bir basit sıfırı denir.

### 2.1.16. Rezidü

Kompleks $f$ fonksiyonu, tek değerli olmak üzere $C$ içindeki bir $z=z_0$ noktası hariç, $C$'nin üzerinde ve içinde analitik olsun. $f$ fonksiyonunun $z=z_0$ noktasındaki Laurent açılımı,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, (z - z_0)^{-n} \tag{2.9}$$

şeklindedir.

Bu açılımdaki negatif üslü $\frac{1}{(z-z_0)}$ terimlerinin ilk terimin katsayısına $f$ fonksiyonunun $z=z_0$ noktasındaki rezidüsü denir ve $Rez(f, z_0)$ ile gösterilir.

Denklem (2.9) ifadesinden

$$Rez(f, z_0) = b_1 \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır. Bu rezidü ayrıca

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \tag{2.11}$$

integrali ile de hesaplanabilir. Bu nokta bir basit kutup ise

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \tag{2.12}$$

açılımı var olup buradan

$$b_1 = \lim_{z - z_0} [(z - z_0) f(z)] \tag{2.13}$$

limiti ile de rezidü hesaplanabilir.

### 2.1.17. Çift ve Tek Fonksiyonlar

Kompleks $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $x \epsilon A$ olduğunda $-x \epsilon A$ oluyor ise $A$ kümesine simetrik küme denir. $A$ simetrik bir küme ve $f{:}A \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere her $x \epsilon A$ için $f(-x)=f(x)$ oluyor ise $f$ fonksiyonuna çift fonksiyon, $f(-x)=-f(x)$ oluyor ise $f$ fonksiyonuna tek fonksiyon denir [5].

### 2.1.18. Periyodik Fonksiyon

Kompleks düzlem üzerindeki her noktada tanımlı ve reel sayılar cisminde lineer bağımsız vektörler olan $w_1$ ve $w_2$ kompleks sayılar olmak üzere iki periyoda sahip olan fonksiyona çifte periyodik fonksiyon denir.

Tüm kompleks z sayıları için $w_1$ ve $w_2$'nin $f$'in periyodları olması

$$f(z+w_1) = f(z+w_2) = f(z) = f(z+w_1+w_2) \tag{2.14}$$

şeklinde ifade edilir.

### 2.1.19. Meromorf Fonksiyon

Bir *D* bölgesinde kutup noktalarından başka singüler noktası olmayan fonksiyona meromorf fonksiyon denir.

Başka bir deyişle Singüler Noktalar ve Meromorf Fonksiyonlar şu şekildedir.

Kompleks değişkenli bir *f(z)* fonksiyonu bir *D* bölgesinde *a* noktası hariç tanımlı ve analitik olsun. *f(z), a*'da monojen (regüler) veya süreksiz ise, *a* - noktasına ayrık singüler nokta denir.

Bu noktalar üç sınıfa ayrılır.

2.1.19.1. *Kaldırılabilir Singüler Nokta*

*f(z), a*'nın civarında holomorf değil, fakat sınırlı ise α noktası kaldırılabilir singüler nokta adını alır ve *a*'da *f(z)*'nin değeri değiştirilerek *f(z)* analitik fonksiyon haline getirilebilir.

**Örnek:** $z\neq 0$ için $f(z)=z$, $z=0$ için $f(z)=1$ olan *f(z)* fonksiyonu göz önüne alalım. *f(z)* fonksiyonunun $z=0$ noktasında singülerliği vardır. Çünkü $z=0$ noktasında fonksiyon sürekli değildir. Bu fonksiyon $z=0$ ve $z\neq 0$ için $f(z)=z$ şeklinde tanımlanırsa $z=0$'daki singülerlik kalkar.

2.1.19.2. *Kutup Noktaları*

*f(z), a*'nın civarında sınırlı değil, fakat $\frac{1}{f(z)}$ holomorf ise, *a*'ya kutup noktası denir.

**Örnek:**

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)^2}$$

fonksiyonu için $z=3$ noktası kutuptur. Çünkü $z=3$ için $f(z)\to\infty$ olur ve,

$$\frac{1}{f(z)} = (z-3)^2$$

fonksiyonu $z=3$ civarında holomorftur.

2.1.19.3. *Esas Singüler Nokta*

$f(z)$, $a$'nın civarında sınırlı değil ise ve $a$, $f(z)$ ile $\frac{1}{f(z)}$ için singüler nokta ise, $a$'ya $f(z)$'nin bir esas singüler noktası denir.

**Örnek:**

$$f(z) = e^{1/z}$$

fonksiyonunun reel eksen üzerindeki değişimini göz önüne alalım.

$x$ negatif değerlerle artarak sıfıra giderse $e^{1/x} \to 0$

$x$ pozitif değerlerle azalarak sıfıra giderse $e^{1/x} \to \infty$

olur. O halde $f(z)$, $z=0$ da ne sınırlıdır nede süreklidir. Aynı şekilde

$$\frac{1}{f(z)} = e^{-1/x}, \qquad z=0$$

aynı singülerliği gösterir. Buna göre $f(z)$ için $z=0$ bir esas singüler noktadır.

$f(z)$'nin sonsuzdaki durumu ile $f\left(\frac{1}{z}\right)$'nin sıfırdaki durumu aynıdır. Gerçekten $z$ sonsuz büyürse $\frac{1}{z}$ sonsuz küçülür.

Eğer $f\left(\frac{1}{z}\right)$, $z=0$ civarında holomorf ise $f(z)$, $z=\infty$ holomorftur. Eğer $f\left(\frac{1}{z}\right)$'nin orijinde bir kutbu varsa $f(z)$'nin sonsuzda kutbu vardır.

İki tam fonksiyonun oranı meromorftur, o halde paydanın sıfır yerleri meromorf fonksiyonun kutuplarıdır. Analitik fonksiyonlar sınıfı, holomorf, meromorf, multiform ve esas singüler noktaları olan fonksiyonları içine alır. Sonlu bir bölgede ayrık singüler noktaların sayısı sonludur [6].

### 2.1.20. Modül

$C$ kompleks sayılar kümesinin boş kümeden farklı ve toplama işlemine göre değişmeli her alt grubuna, $Z$ tam sayılar halkası üzerinde bir modül denir.

### 2.1.21. Kalan Sınıfı

$u\epsilon C$ olmak üzere

$$u+\ \mathcal{L}=\{u+w\colon w\epsilon\mathcal{L}\} \qquad (2.15)$$

cümlesine, *modL*''ye göre bir kalan sınıfı denir.

### 2.1.22. Starlike Bölge

$D\subset C$ bir bölge ve $y\epsilon D$ olsun. Eğer *y* noktasını *D*'nin herhangi bir *x* noktasına birleştiren doğru parçası tamamen *D*'nin içinde kalıyorsa *D*'ye *y* noktasına göre starlike bölge denir. Daha açık bir ifade ile *D* bölgesinin her bir noktası *y* noktasından görülebilir.

### 2.1.23. Starlike Fonksiyon

$f\epsilon S$ olsun. *f(D)* orjine göre starlike ise bu *f(z)* fonksiyonuna starlike fonksiyondur denir ve starlike fonksiyonların sınıfı genellikle $S^*$ ile gösterilir.

### 2.1.24. Taylor Serisi

Bir serinin $|z-z_0|=R$ içinde bir *f* fonksiyonunu gösterdiği kabul edilsin.

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+a_3(z-z_0)^3+\cdots \qquad (2.16)$$

*f*'nin türevlerini alalım

$$f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k k(z-z_0)^{k-1}=a_1+2a_2(z-z_0)+3a_3(z-z_0)^2+\cdots \qquad (2.17)$$

$$f''(z)=\sum_{k=2}^{\infty}a_k k(k-1)(z-z_0)^{k-2}=2.1a_2+3.2a_3(z-z_0)+\cdots \qquad (2.18)$$

$$f'''(z)=\sum_{k=3}^{\infty}a_k k(k-1)(k-2)(z-z_0)^{k-3}=3.2.1a_3+\cdots \qquad (2.19)$$

Serileri olduğu çıkar Denklem (2.16) kuvvet serisi kendi $|z-z_0|=R$ yakınsaklık çemberi içinde, (burada *R* pozitif ya da sonsuzdur), türetilebilir bir $f$ fonksiyonu gösterdiğinden, kendi yakınsaklık çemberi içinde kuvvet serisi bir analitik fonksiyon gösterir sonucuna varırız.

Denklem (2.16)'deki $a_k$ katsayıları ile $f$'nin türevleri arasında bir ilişki vardır. $z$-$z_0$ da Denklem (2.16), (2.17), (2.18) ve (2.19)'u değerlendirerek sırasıyla

$$f(z_0) = a_0 \;\; f'(z_0) = 1!\, a_1 \;\; f''(z_0) = 2!\, a_2 \tag{2.20}$$

ve

$$f'''(z_0) = 3!\;\, a_3 \tag{2.21}$$

verir. Genel olarak, $f^n(z_0) = n!\, a_n$ ya da

$$a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!} \quad , \quad n \geq 0 \tag{2.22}$$

Denklem (2.22) te $n=0$ iken sıfır mertebeden türevi $f(z_0)$ ve $0!=1$ olarak alırız, öyle ki formül

$a_0=f(z_0)$ verir. Denklem (2.22) ve Denklem (2.16) da kullanarak

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \tag{2.23}$$

verir. Bu seriye *f*'nin $z_0$ merkezli Taylor serisi denir. $z_0=0$ merkezli bir Taylor serisi,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (z)^k \tag{2.24}$$

Bir Maclaurin serisi olarak anılmaktadır [7], [8].

### 2.1.25. Laurent Serisi

$0 \leq r_1 \leq r_2$ ve $z_0 \epsilon C$ olsun. *f* fonksiyonunun analitik olduğu

$$A = \{z\epsilon\, \mathbb{C}: r_1 < |z - z_0| < r_2\} \tag{2.25}$$

halka bölgesindeki

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, (z - z_0)^k \tag{2.26}$$

serisine, *f* fonksiyonunun $z_0$ noktası civarındaki Laurent serisi denir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k} \tag{2.27}$$

serisine Laurent serisinin esas kısmı,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k \tag{2.28}$$

ifadesine de analitik kısmı denir [5], [7], [8].

## 2.2. UNIVALENT FONKSİYON

Bir $f(z)$ fonksiyonu verilsin. $z_1$, $z_2 \in D$ olmak üzere $f(z_1)=f(z_2)$ olması sadece ve sadece $z_1=z_2$ olmasını gerektiriyorsa fonksiyonuna $D$ bölgesinde univalent ya da yalınkat fonksiyon denir [9], [10].

Bu çalışmada univalent kelimesini tercih edeceğiz. Örneğin;

$$g(z)=\frac{z}{2} \quad \text{ve} \quad a,b,c,d \in \mathbb{C} \quad \text{ve} \quad ad-bc \neq 0 \tag{2.29}$$

olmak üzere

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \tag{2.30}$$

dönüşümü birer univalent fonksiyondur. Oysa $f(z)=0$ *ve* $f(z)=z^2$ fonksiyonları univalent değildir.

$E$ açık birim disk ve $g(z)$ fonksiyonu da $E$'de analitik ise

$$g(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{2.31}$$

şeklinde seri gösterimine sahip olsun. Burada

$$\frac{g(z)-b_0}{b_1}=f(z) \tag{2.32}$$

denilirse ve

$$\frac{b_n}{b_1}=f(z) \tag{2.33}$$

yazılırsa

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{2.34}$$

elde edilmiş olur [11].

## 2.3. KONVEKS FONKSİYON

Eğer *f(z)* fonksiyonu, $|z|<1$ bölgesinde analitik ve $f'(z)\neq 0$ için

$$Re[1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}] > 0$$

ise *f(z)* fonksiyonuna konveks denir [12]. Bu şekilde şu gösterime ulaşabiliriz:

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} d\mu(t), \tag{2.35}$$

Bunu da $\mu(t)$'yi azalmayan, $\mu(\pi)-\mu(-\pi)=1$ ve $\mu(t)$'yi normalize edilmiş olarak kabul edebiliriz. Bu şekilde Denklem (2.36)'yı elde ederiz.

$$\frac{1}{2}[\mu(t+0) + \mu(t-0)] = \mu(t) \ , \ \int_{-\pi}^{\pi} \mu(t)dt = 0 \tag{2.36}$$

## 2.4. STARLIKE FONKSİYON

$D\subset\mathbb{C}$ bir bölge ve $y\epsilon D$ olsun. Eğer *y* noktasını *D*'nin herhangi bir *x* noktasına birleştiren doğru parçası tamamen *D*'nin içinde kalıyorsa *D*'ye *y* noktasına göre starlike bölge denir. Daha açık bir ifade ile *D* bölgesinin her bir noktası y noktasından görülebilir.

$f\in S$ olsun. *f(D)* orjine göre starlike ise bu *f(z)* fonksiyonuna starlike fonksiyondur denir ve starlike fonksiyonların sınıfı genellikle $S^*$ ile gösterilir.

## 2.5. RIEMANN DÖNÜŞÜM TEOREMİ

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem, *D*'de $\mathbb{C}$ düzleminde birden fazla sınır noktasına sahip bağlantılı bir bölge ve $z_0\epsilon D$ olsun. $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$ şartlarını sağlayan ve *D*'yi birim disk üzerine konform olarak dönüştüren bir tek *f* konform dönüşümü vardır.

## 2.6. CAUCHY-RIEMANN DENKLEMLERİ

*D* açık kümesi üzerinde bir *f* fonksiyonu alalım ve reel ile sanal kısımlarına göre,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{2.37}$$

biçiminde yazalım. Şimdi aklımıza bu fonksiyonun hangi şartlar altında türevlenebilir olduğu sorusu gelebilir. Gerçi bu sorunun cevabı daha sonraki konularda ayrıntılı olarak verilecektir. Ancak burada da sırası gelmişken kısaca gerekli şartları araştıracağız. Sabit bir $z \in D$ için

$$f'(z) = a + ib \tag{2.38}$$

olsun. $h$, $k \in R$ için, $w=h+ik$ alalım ve farz edelim ki *f*, *z*'de türevlenebilirdir. O zaman türevlenebilme tanımına göre

$$f(z + w) - f(z)w + \sigma(w)w \tag{2.39}$$

yazılır. Burada,

$$\lim_{w \to 0} \sigma(w) = 0 \tag{2.40}$$

$$f'(z).w = (a + ib)(h + ik) = ah - bk + i(bh + ak) \tag{2.41}$$

olur. Diğer taraftan,

$$f(x, y) = \big(u(x, y), v(x,, y)\big) \tag{2.42}$$

şeklindeki $f{:}D \to R^2$ fonksiyonu için,

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = (ah - bk, bh + ak) + \sigma_1(h, k)h + \sigma_2(h, k)k \tag{2.43}$$

yazılır. Burada $\sigma_1$ ve $\sigma_2$, h ve k ile birlikte sıfıra giden fonksiyonlardır.

Eğer *f*'nin analitik olduğunu kabul edersek *f*'nin reel anlamda türevlenebileceğini söyleriz ve türevini,

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & -\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

Jacobien matrisi ile gösteririz.

$$f'(z) = a + ib \;\Rightarrow\; f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.45}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ a &= \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right. \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.46}$$

$$\left.\begin{aligned} b &= -\frac{\partial u}{\partial y} \\ b &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right. \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.47}$$

Denklem (2,46) - (2,47) Denklemlerine Cauchy-Riemann denklemleri denir [13], [14]. Denklem (2.46) - (2.47)'deki kısmi türevin varlığı $f'(z)$'nin varlığı ile mümkündür.

Karşıt olarak *u(x,y)* ve *v(x,y)* fonksiyonları Cauchy-Riemann denklemleri sağlayan ve reel anlamda sürekli türevlere sahip olan fonksiyon iseler,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{2.48}$$

Fonksiyonu kompleks türevlenebilen bir fonksiyondur. Bunu görmek için yukarıdaki işlemleri sondan başa doğru yaparız.

$$\Delta f = a^2 + b^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{2.49}$$

yazılacağından $\Delta f \geq 0$ ve $\Delta f \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart $f'(z) \neq 0$ olmasıdır. Ayrıca,

$$\Delta f(x, y) = |f'(z)|^2 \tag{2.50}$$

olduğunu görmek zor değildir. Yukarıdaki ifadeleri toparlayarak tamamen aynı olan aşağıdaki teoremi ifade edelim.

### 2.6.1. Teorem

*D* açık kümesinde tanımlı,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{2.51}$$

fonksiyonunun $z=x+iy\epsilon D$ noktasında türevli olabilmesi için gerek ve yeter şart bu noktada

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.52}$$

kısmi türevlerinin mevcut, sürekli ve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.53}$$

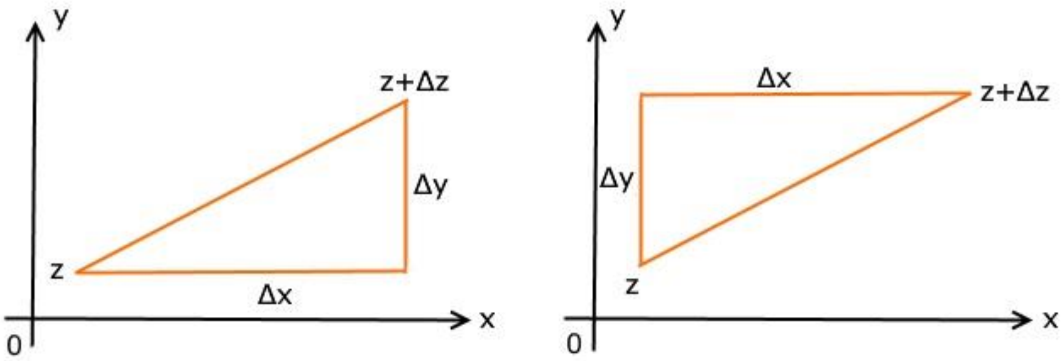
Denklemlerinin sağlanmasıdır [8].

**İspat:**

Şart gerektir: *f(z)=u(x,y)+iv(x,y)* fonksiyonu bir *z* noktasında türevli olsun. Yani,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{2.54}$$

limiti mevcut olsun.




Şekil 2.1. Yaklaşımlar sonucu oluşan limit.

Hangi yönde (doğrudan) yaklaşırsak yaklaşalım, bu limit mevcuttur. O halde, *Δz=Δx+iΔy* ifadesinde önce *Δy*'yi ve sonrada *Δx*'i sıfıra götürerek *Δz*'yi sıfıra götürebiliriz. *Δy=0* için, *Δz=Δx* olacağından,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{2.55}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \tag{2.56}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.57}$$

bulunur. Şimdi *Δx=0* için, *Δz=iΔy* ve,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{2.58}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \tag{2.59}$$

$$f'(z) = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.60}$$

bulunur. Türevlerin de birbirine eşit olması gerektiğinden

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.61}$$

sonucu elde edilir.

Şart yeterlidir: Yani *u* ve *v*'nin kısmi türevleri mevcut, sürekli ve Cauchy-Riemann denklemlerini sağlıyorsa,

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) \tag{2.62}$$

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y \tag{2.63}$$

yazılır. Burada iki değişkenli fonksiyonlarda ortalama değer teoremi uygulandı. Aynı şekilde,

$$\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y \tag{2.64}$$

yazılır. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ değerleri $\Delta x$ ve $\Delta y$ ile sıfıra yaklaşsınlar. Şimdi $\Delta f$'yi teşkil edelim.

$$\Delta f = f(z+\Delta z) - f(z) \tag{2.65}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y\right) \tag{2.66}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \delta_1\Delta x + \delta_2\Delta y \tag{2.67}$$

ifadesini Cauchy-Riemann denklemlerini kullanarak elde edilir. Burada $\delta_1$ ve $\delta_2$ fonksiyonları $\Delta z$ ile birlikte sıfıra giderler.

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \delta_1\frac{\partial x}{\partial z} + \delta_2\frac{\partial y}{\partial z} \tag{2.68}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\Delta \mathrm{f}}{\Delta \mathrm{z}}=\frac{\partial u}{\partial u}+i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.69}$$

yani,

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.70}$$

$$\left|\frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta \mathrm{z}}\right| \leq 1 \text{ ve } \left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| \leq 1 \tag{2.71}$$

ise $\Delta z=0$ için sıfıra gider.

Örnek: $f{:}z\to|z|^2$ fonksiyonunun analitik olup olmadığını araştırınız.

Çözüm:

$$f(z)=|z|^2=\sqrt{(x^2+y^2)^2}=x^2+y^2$$

olur. $u(x,y)=x^2+y^2$ ve $v(x,y)=0$ bulunur.

$u_x=2x$, $u_y=2y$, $v_x=0$ , $v_y=0$ yazılır. $u_x=v_y$ ve $u_y=-v_x$ denklemleri ancak $(0,0)$ noktasında sağlanırlar. O halde bu fonksiyonun sadece $(0,0)$ noktasında türevi vardır. ℂ’de analitik değildir [6].

# 3. SERİ AÇILIMLARINA GÖRE SINIFLAR

Bu bölümde tezimizde kullanacağımız $S$ sınıfı, $P$ sınıfı ve $\sum$ sınıfı kavramlarının ne demek olduğunu açıklayacağız.

## 3.1. *S* SINIFI

$$E = \{z\epsilon\mathbb{C}: |z| < 1\} \tag{3.1}$$

birim diskinde analitik olan ve *f(0)=0, f'(0)=1*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{3.2}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlarının sınıfı *A* ile gösterilir. *A* sınıfından olup univalent olan fonksiyonların sınıfı ise *S* ile gösterilir. *S* sınıfına ait starlike fonksiyonların sınıfı ise $S^*$ ile gösterilir [9].

## 3.2. *P* SINIFI

$$F(z) = f(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}) \tag{3.3}$$

ifadesi uygun bir sabitle çarpılarak *f*'nin rezidüsü *+1* yapılabilir. Böylece, sonuçta

$$F(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n + \cdots \tag{3.4}$$

biçiminde bir Laurent açılımına sahip olan bir *F(z)* fonksiyonunu buluruz. Buradan da

$$F_1(z) = F(z) - b_0 \tag{3.5}$$

yazılarak

$$F_1(z) = \frac{1}{z} + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n + \cdots \tag{3.6}$$

elde edilir. *D* diskinde Denklem (3.6) biçiminde açılıma sahip olan univalent meromorf fonksiyonların sınıfını *P* ile göstereceğiz ve $F_1(0)=\infty$ olarak tanımlanır.

Sigma sınıfı

$$C^* - \overline{D} = \{z: |z| > 1\} \tag{3.7}$$

de univalent ve meromorf olan

$$g(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + \cdots \tag{3.8}$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı da genelde $\Sigma$ ile gösterilir.

# 4. BİRİM DİSKTE UNIVALENT FONKSİYONLAR

Riemann dönüşüm teoremini göz önüne alarak birden fazla sınır noktasına sahip herhangi basit bağlantılı bir $R$ bölgesi, $\psi:R\to D$ univalent ve analitik fonksiyon vasıtasıyla $D=\{z:|z|<1\}$ birim diski üzerine komform olarak dönüştürülebilir. Dolayısıyla herhangi bir $g:R\to G$ univalent fonksiyonu $f:D\to G$ univalent fonksiyonu ile birleştirilebilir. Yani karşılıklı olarak $f=go\psi^{-1}$ yazılabilir. Bu sebepten dolayı, bundan sonraki çalışmalarımızda $|z|<1$ diskinde (ya da $|z|>1$ şeklindeki birim diskin dış bölgesinde) univalent fonksiyonlar üzerine çalışılacaktır.

$D$'de analitik ve univalent olan bir fonksiyondan yine $D$'de $f_1(0)=0$ ve $f_1'(0)=1$ şartlarını sağlayan analitik ve univalent bir fonksiyon elde edebiliriz. Bu da,

$$f_1(z)=\frac{f(z)-f(0)}{f'(0)} \tag{4.1}$$

biçiminde yazılır. $f$, $D$'de univalent olduğundan $f'(0)\neq 0$' dır. D'de analitik ve univalent olan $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ şartlarını sağlayan fonksiyon

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots \tag{4.2}$$

biçiminde bir Taylor açılımına sahiptir. Böyle fonksiyonların sınıfı $S$ ile gösterilir. Şimdi $f$'nin $D$'de meromorf ve univalent olduğunu kabul edelim. Teorem 2.6.1'e göre $f$ fonksiyonu $D$'de basit kutba sahiptir. $|a|<1$ olmak üzere $z=a$ noktasında kutba sahip olan

$$F(z)=f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) \tag{4.3}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım

$$z'=\frac{z+a}{1+\bar{a}z} \tag{4.4}$$

fonksiyonu univalent ve $D$'yi kendi üzerine dönüştürdüğünden $F$'de univalent olup $z_0$ noktasında basit kutba sahiptir. Eğer gerekirse,

$$F(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) \tag{4.5}$$

$$F_1(z) = \frac{1}{z} + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n + \cdots \tag{4.6}$$

elde edilir. *D* diskinde denklem (3.6) biçiminde açılıma sahip olan univalent meromorf fonksiyonların sınıfını *P* ile göstereceğiz ve $F_1(0)=\infty$ olarak tanımlanır.

$$C^* - \overline{D} = \{z : |z| > 1\} \tag{4.7}$$

de univalent ve meromorf olan

$$g(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + \cdots \tag{4.8}$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı da genelde $\Sigma$ ile gösterilir.[15]

## 4.1. KOEBE FONKSİYONU

*S* sınıfında olan,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z^2)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \tag{4.9}$$

biçiminde gösterilen fonksiyona Koebe fonksiyonu denir. Bu fonksiyon *E* birim diskini

$$\mathbb{C} - \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \tag{4.10}$$

bölgesi üzerine bire bir olarak dönüştürür.

## 4.2. TEOREM (SCHWARZ LEMMA)

B birim diski içerisindeki *f* analitik, $f(0)=0$ ve $|f(z)|<1$ olsun. O zaman $|f'(0)|\leq 1$ ve $f(z)\leq|z|$ olur. $f'$ de tahmin edilemeyen kesin eşitsizlikler diskte dönme yapılırsa bu durum olur.

**İSPAT:** Analitik fonksiyona maksimum modül teoremi uygularsak

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \tag{4.11}$$

olur [4].

**(4.2.1)Teorem:**

$f:B=\{z:|z|<1\}\to\mathbb{C}$ analitik, $z\in B$ için $|f(z)|\leq 1$ ve $f(0)=0$ olsun. Bu durumda $z\in B$ noktaları için $|f(z)|\leq|z|$ ve $|f'(0)|\leq 1$'dir. Üstelik $z_0\in B$ $(z_0\neq 0)$ için $|f(z_0)|=|z_0|$ ise $c$, $|c|=1$ özelliğinde $1$ sabit olmak üzere $f(z)=cz$ biçimindedir [9].

**İspat:**

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z}, & z\neq 0 \quad \text{ise}\\ f'(0), & z=0 \quad \text{ise}\end{cases} \tag{4.12}$$

şeklinde bir fonksiyon alalım. O halde $g$, $B$-$\{0\}$ kümesi üzerinde analitiktir ve $B$'de süreklidir. Dolayısıyla $g$, $B$'de analitiktir. Şimdi $0<r<1$ olmak üzere, $B_r=\{z:|z|\leq r\}\subset B$ kümesini alalım. $g$, $B_r$'de analitik olacağından $|z|=r$ üzerinde

$$|g(z)|=\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leq\frac{1}{r} \tag{4.13}$$

olur. Böylece $B_r$ üzerinde

$$|f(z)|\leq\frac{|z|}{r} \tag{4.14}$$

Buradan $r\to 1$ için $|f(z)|\leq|z|$ elde edilir. Özel olarak $|g(0)|\leq 1$ dir. Böylece denklem (4.12)'den $|f'(0)|\leq 1$ olur. Eğer $z_0\neq 0$ için, $|f(z_0)|\leq|z_0|$ ise Denklem (4.13)'den $|g(z_0)|=1$ elde edilir. Üstelik bu değer $B_r$'nin içindeki maksimum değer olur. O halde $g$ fonksiyonu bir $B_r$ bölgesinde analitik ve eğer $B_r$'de $|g|$ maksimum değer alıyorsa $g$, $B_r$'de sabittir. Bu sabitlik $r$'den bağımsızdır. O halde Denklem (4.13)'den $B$'de $|g(z)|=1$ ve

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|=1 \tag{4.15}$$

yani $|f(z)|=|z|$ bulunur. Böylece $|c|=1$ olmak üzere $f(z)=cz$'dir.

## 4.3. BIEBERBACH TEOREMİ

Eğer $f\in S$ ise o halde $|a_2|\leq 2$'dir, eşitlik ile birlikte $\Leftrightarrow$ $f$ Kobe fonksiyonunun bir dönüşümüdür.

İspat: Bir karekök transformasyonu ve $f \in S$'nin ters çevrilmesi $\Sigma$ sınıfının

$$g(z) = \left\{f\left(\frac{1}{z^2}\right)\right\}^{-1/2} = z - \left(\frac{a_2}{2}\right) z^{-1} + \cdots \tag{4.16}$$

fonksiyonunu sağlar. Böylece alan teoreminin sonucuyla $|a_2| \leq 2$'dir. Eşitlik sadece

$$g(z) = z - \frac{e^{i\theta}}{z} \tag{4.17}$$

forma sahip ise oluşur.

Basit bir hesaplama Kobe fonksiyonunun döndürmesi olan $f(\zeta)=\zeta(1-e^{i\theta}\zeta)^{-2}=e^{i\theta}k(e^{i\theta}\zeta)$ fonksiyonun eşdeğer olduğunu gösterir.

Bieberbach teoreminin ilk uygulamasına göre şimdi Kobe'den dolayı ünlü bir örten teoremini sağlayacağız. Her $f\epsilon S$ fonksiyonu $f(0)=0$ ile birlikte açık bir dönüşümdür. Bu nedenle onun sınırları orijinin merkezindeki bazı diskleri tamamlar.1907'lerde Kobe, $p$'nin kesinlikle sürekli olduğu $|w|<p$ yaygın bir diskini içeren $S$'de bütün fonksiyonların sınırlarını içerir. Kobe fonksiyonu $p \leq \frac{1}{4}$'ü gösterir ve Bieberbach daha sonra $p$'nin $\frac{1}{4}$ olması için alınan Kobe konjonktürünü kurmuştur [16].

## 4.4. KATSAYI TAHMİNLERİ

Katsayı problemi $S$, $P$ ve $\Sigma$ sınıflarının birine ait olan bir fonksiyon için uygun seri açılımlarının katsayıları üzerine (ya da daha sonra tanımlanacak bir alt sınıf için) gerek ve yeter şartları bulma problemidir. Daha doğrusu univalent fonksiyonun bir sınıfı için $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ noktalarının olduğu $c^{(n-1)}$ bölgeyi tayin etmektir.Meşhur Koebe tahmini, $S$ sınıfında Koebe fonksiyonu hariç tüm $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ kesin eşitsizliğin yazılabileceğini açıklar. $n=2$ için doğru olduğu Bieberbach tarafından [17], [21], $n=3$ için Löwner [16], [19]; $n=4$ Garabedion ve Schiffer [16], [19], [22]; $n=5$ için Pederson ve Schiffer [19], [23]; $n=6$ için Pederson [19], [24], [25]; tarafından gösterildi. Bu tahminin yavaş yavaş incelenmesi bir genel yaklaşımın sınır zorluğu ile zorlandı. Sonunda 1984 yılında Louis de Branges genel bir ispat elde etti.

## 4.5. NASHIRE-WARSCHAWSKI THEOREM

Eğer *D* konveks tanım kümesinde *f'(z)* analitik ise ve *Re f'(z)>0 (zϵD)* o zaman *f(z), D* de univalenttir.

**İSPAT:**

$$f(z_1) - f(z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f'(\xi) d\xi \tag{4.18}$$

Eğer $\xi z_2$

$$\xi = tz_2 + (1-t)z_1(0 \leq t \leq 1)z_1 \tag{4.19}$$

O zaman:

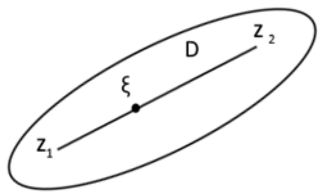
$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1)\int_0^1 f'(tz_2 + (1-t)z_1)\, dt \tag{4.20}$$

$$\xi = \ tz_2 + (1-t) \qquad z_1 \epsilon D \tag{4.21}$$

ve

$$Ref'(\xi) = Re\, f'(tz_2 + (1-t)z_1) > 0 \tag{4.22}$$

$$f'(\xi) = \ f'(tz_2 + (1-t)z_1) \neq 0 \tag{4.23}$$




Şekil 4.1. *D* bölgesinde alınan bir noktanın yaklaşımı.

Bunun için eğer $z_1 \neq z_2$ ise, o zaman $f(z_1) \neq f(z_2)$ olur. Bu da *f(z) D*'de univalettir denir [26].

Örnek:

$$f(z) = z + \frac{e^{i\alpha}}{m} z^m(|z| < 1) \tag{4.24}$$

olsun

$$z = re^{i\theta}(0 \leq r < 1) \tag{4.25}$$

için

$$Ref'(z) = Re\left(1 + e^{i\alpha}z^{m-1}\right) = Re\left(1 + r^{m-1}e^{i(\alpha+(m-1)\theta)}\right) \tag{4.26}$$

olur. Bu nedenle

$$Ref'(z) = 1 + r^{m-1}\cos(\alpha + (m-1)\theta) > 0 \tag{4.27}$$

olur.

$z_1 \neq z_2$ şeklindeki $z_1$, $z_2$ için

$$f(z_1) - f(z_2) = (z_1 - z_2) + \frac{e^{i\alpha}}{m}({z_1}^m - {z_2}^m) \tag{4.28}$$

$$= (z_1 - z_2)(1 + \frac{e^{i\alpha}}{m}({z_1}^{m-1} + {z_1}^{m-2}z_2 + \cdots + {z_2}^{m-1}) \neq 0 \tag{4.29}$$

### 4.5.1. Tanımlar

4.5.1.1. *Tanım 1*

*f(0)=0* ve *f'(0)=1* şeklinde normalize edilmiş olan *A* açık birim disk $U=\{z\epsilon\mathbb{C}:|z|<1\}$'de analitik olan *f*(z) fonksiyonlarının sınıfı olsun. Öyleyse $f(z)\epsilon A$

$$f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_m z^m \tag{4.30}$$

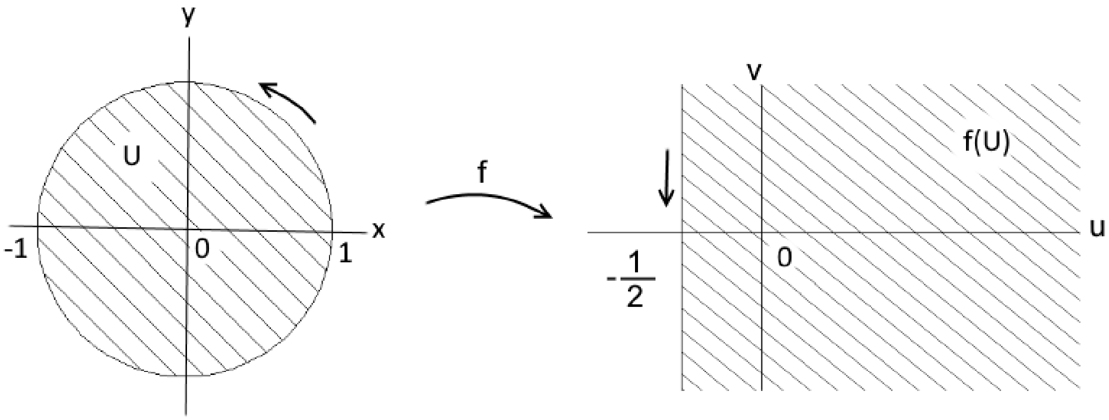
şeklinde yazılır [26].

4.5.1.2. *Tanım 2*

*S*, *U* 'da univalent olsun. *f(z)* fonksiyonlarından oluşan *A*'nın alt sınıfı olsun.

Örnek 1:

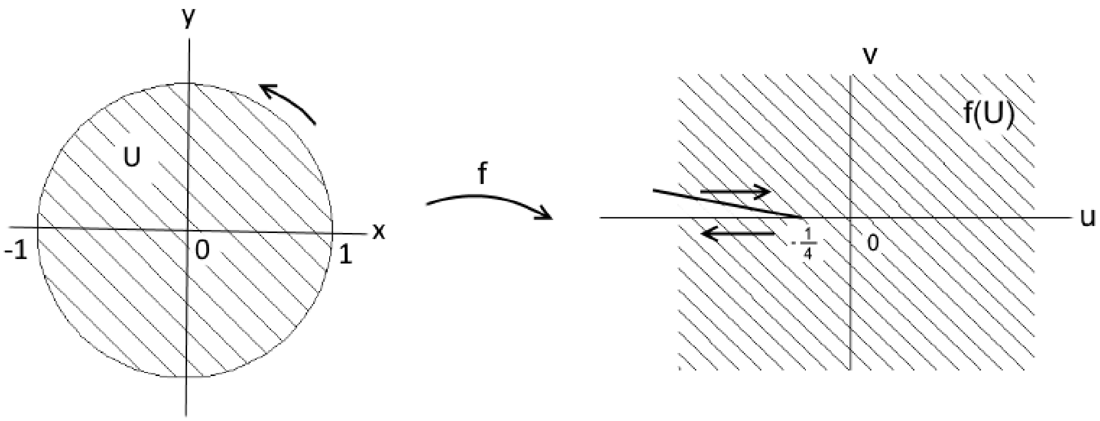
$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{m=2}^{\infty} z^m \epsilon\, S$$




Şekil 4.2. *x*, *y* düzleminde oluşan çemberin içinin *u*, *v* düzlemindeki dönüşümü.

Örnek 2:

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{m=2}^{\infty} m\, z^m \epsilon\, S$$




Şekil 4.3. *x*, *y* düzleminde oluşan çemberin içinin *u*, *v* düzlemindeki dönüşümü.

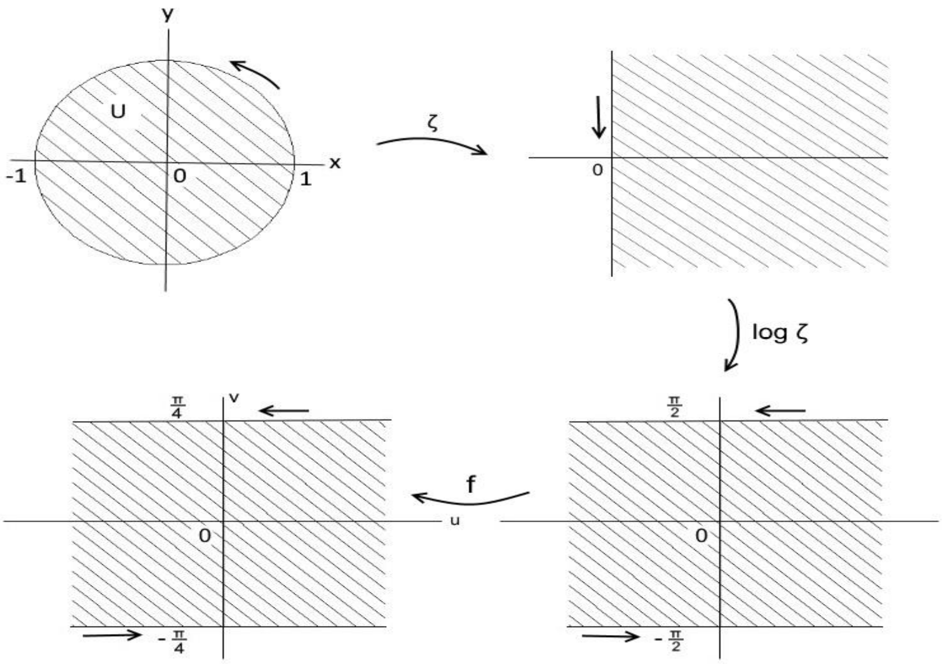
Örnek 3:

$$f(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{2}(\log(1+z) - \log(1-z))$$

$$= \frac{1}{2}\{\left(z + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} z^m\right) + \left(z + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} z^m\right)\}$$

$$z + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{2m-1} z^{2m-1} \epsilon\, S$$

$$f(z) = \frac{1}{2} log\zeta = \frac{1+z}{1-z}$$

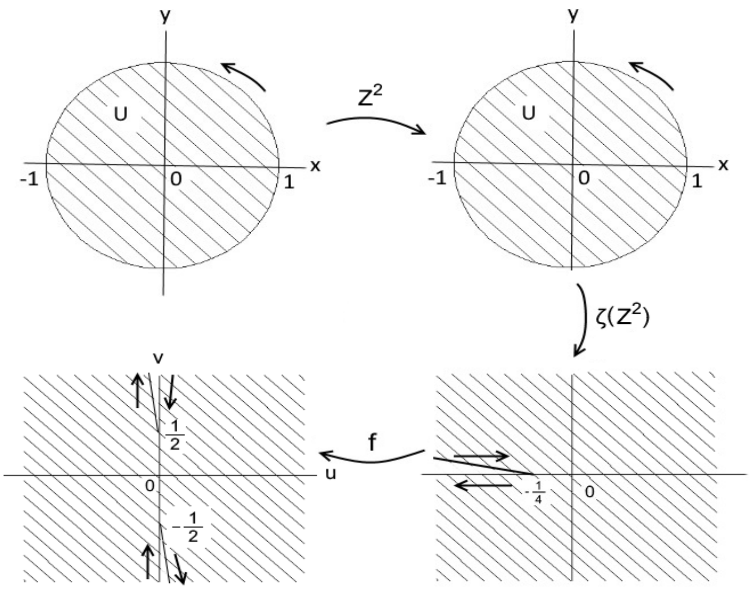



Şekil 4.4. *x*, *y* düzleminde çemberin içinin dönüşüm aşaması.

Örnek 4:

$$f(z) = \frac{z}{1 - z^2} = z + \sum_{m=2}^{\infty} z^{2m-1} \epsilon\, S$$

$$f(z) = \frac{z}{1 - z^2} = \sqrt{\frac{z^2}{(1 - z^2)^2}} = \sqrt{\zeta(z^2)} \quad , \quad \zeta(z) = \frac{z}{(1 - z)^2}$$




Şekil 4.5. *x*, *y* düzleminde çemberin dönüşüm evresi.

### 4.5.2. Teorem 1

*f(z)ϵA* fonksiyonu yalnızca ve yalnızca

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \tag{4.31}$$

*(zϵU)* ise $S^*$'u azalabilir.

**İspat:**

$$C_r = \{z\epsilon \mathbb{C} \ ||z| < r < 1\} \tag{4.32}$$

olsun. Eğer $f(z)\epsilon S^*$ olursa, o zaman *f(z)*'nin $C_r$'yi starlike bir tanım kümesi üzerine orijine göre ötelediğini gösterin. *g(z)=f(rz)*'nin *U*'yu starlike bir tanım kümesi üzerine orijine göre ötelediğini göstermek gerekmektedir. Dahası, şunu göstermeliyiz ki,

$$tg(z) = f(rz)\epsilon g(U)(0 < t < 1) \tag{4.33}$$

$f(z)\epsilon S^* \subset S$, ters fonksiyon $z=f^{-1}(w)$ inceleyelim, *w=f(z)* o zaman $|z|=|f^{-1}(w)|<1$ olur ve *w(0)=0* olur. Bu bize şunu verir.

$$w(z) = f^{-1}(tw) = f^{-1}(tf(z)) \tag{4.34}$$

*U*'da analitiktir ve $w(0)=f^{-1}(0)=0$,

$$|w(z)| = |f^{-1}(tw)| < |f^{-1}(w)| < 1 \qquad (0 < t < 1) \tag{4.35}$$

Buna göre, Schwarz Lemmasından şuna ulaşırız.

$$|w(z)| \leq |z| \quad (z\epsilon\, U) \tag{4.36}$$

*w(z)* için *tf(z)=f(w(z))* olduğu için,

$$tg(z) = tf(rz) = f(w(rz)) = f\left(r\frac{w(rz)}{r}\right) = g\big(w_1(z)\big), \tag{4.37}$$

burada;

$$w_1(z) = \frac{w(rz)}{r}, \quad |w_1(z)| \leq |z|\ '\text{dir}. \tag{4.38}$$

Bu *tg(z)ϵg(U)* demektir. Yani, *f(z)* her $C_r$'yi orijine göre starlike bir tanım kümesi oluşturan bir kapalı eğriye öteler.

Sonra, *z* noktası $|z| = r$ çember üstünde pozitif yönde hareket ederken *argf(z)*'nin arttığını görürüz. Bu da bize şunu gösterir.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg f(re^{i\theta})) \geq 0 \tag{4.39}$$

Aşağıdaki durumu incelersek;

$$f(argf(re^{i\theta}) = Im\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(re^{i\theta})\right) \tag{4.40}$$

$$= Im\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(z)\right) \qquad (z = re^{i\theta}) \tag{4.41}$$

$$= Im\left(\frac{\partial \log f(z)}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial\theta}\right) = Im\left(ire^{i\theta}\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \tag{4.42}$$

$$= Re(\frac{zf'(z)}{f(z)}) \geq 0 \tag{4.43}$$

elde edilir.

Buradan maksimum prensibine göre

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \tag{4.44}$$

harmonik olduğunu söyleyebiliriz.

Şu şekilde sonuçlandırırız.

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \qquad (|z| < r) \tag{4.45}$$

Yani, eğer *f(z)*$\epsilon S^*$ ise o zaman *f(z)*$\epsilon A$ olup

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \ \ (|z| < r) \tag{4.46}$$

Tersine *f(z)*$\epsilon$ *A* ise *f(z)* fonksiyonu

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \qquad (|z| < r), \tag{4.47}$$

bunu sağlar. O zaman, *f(z)* *z=0* noktasında birinci mertebeden bir sfıra sahip olur. Buna göre $z=re^{i\theta}$ için

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg f\left(re^{i\theta}\right)\right) > 0 \tag{4.48}$$

olur. Yani argüman prensibi gösteriyor ki; *f(z)'*nin görüntü eğrisi orijin etrafında bir rotasyon yapmaktadır. Yani, *f(z)*, $|z| < r$ için, orijine göre starlike ve univalenttir. Bu herhangi bir *r (0<r<1)* için doğru olduğu için, bu sonuca ulaşırız, yalnızca ve yalnızca *f(z)ϵ A*,

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \quad (z\epsilon U) \tag{4.49}$$

sağlarken $f(z)\epsilon S^*$ olur.

### 4.5.3. Teorem 2

Bir *f(z)ϵA* fonksiyonu sadece ve sadece

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \quad (z\epsilon U) \tag{4.50}$$

olursa *K'*ya bağlı olur.

**Sonuç:**

$$f(z)\epsilon K \Leftrightarrow \; zf'(z)\epsilon\, S^* \tag{4.51}$$

$$f\epsilon\, S^* \Leftrightarrow \int_0^z \frac{f(t)}{t}dt \;\epsilon\; K \tag{4.52}$$

### 4.5.4. Teorem 3

*f*, *D*'de analitik olsun.*f(0)=0* ve *f'(0)=1* ile birlikte analitik olsun. O halde

$$f \in K \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in P \tag{4.53}$$

dir.

**İspat:**

$f\epsilon S^*$ olduğunu farzedelim; o zaman şunu iddia ederiz. *f* starlike alanın üzerinde her birim diski *|z|<p<1* a dönüşür. Eşdeğer bir iddia olan *g(z)=f(pz)* *D*'de starlikedır. Diğer bir deyişle göstermeliyiz ki her sabit *t (0<t<1)* ve $\forall z\epsilon D$ için, *tg(z)* *g*'nin sınırındadır. Ama $f\epsilon S^*$ olduğu için Schwarz lemmasının uygulaması bazı *D*'deki *w* analitik fonksiyonları için *tf(z)=f(w(z))* verir ve *w(z)*≤|*z*|'na denk gelir. Böylece *tg(z)=t(f(pz))=g(w₁ (z))*

$$w_1(z) = \frac{w(pz)}{p} \in P\ ve\ \ |w_1(z)| \leq |z| \tag{4.54}$$

Bu $C_p$ eğrisinin üzerinde *f*'in her $|z|=p<1$ çemberine dönüştüğünü kanıtlar ki starlike alanı sınırlar. Bu şu *arg*'i takip eder. *f(z)* pozitif yönün içinde $|z|=p$ çemberi etrafında *z* gibi hareket ederek artar. Diğer bir deyişle

$$\frac{d}{d\theta}\{\arg f(pe^{i\theta})\} \geq 0 \tag{4.55}$$

$$\frac{d}{d\theta}\{\arg f(pe^{i\theta})\} = Im\left\{\frac{d}{d\theta} log f(pe^{i\theta})\right\} \tag{4.56}$$

$$= Im\left\{\frac{izf'(z)}{f(z)}\right\} = Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}, z = pe^{i\theta} \tag{4.57}$$

Böylece, harmonik fonksiyonlar için max prensipler tarafından

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \in P \tag{4.58}$$

elde edilir.

Diğer taraftan *f'*nin

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \in P \tag{4.59}$$

ile birlikte normal bir analitik fonksiyon olduğunu farz edelim. Daha sonra *f* orijinde basit bir sıfıra sahip ve diskin içinde herhangi bir yerde sıfır noktasına sahip değildir. Yukarıdaki hesaplamayı takip edersek, $\forall\ p<1$ için

$$\frac{d}{d\theta}\{\arg f(pe^{i\theta})\} > 0 \quad 0 < \theta < 2\pi \tag{4.60}$$

elde edilir.

Böylece *z* saat yönünün tersinde $|z|=p$ çemberinin etrafında döner. *f(z)* noktası argümentlerin artması ile kapalı bir $C_p$ eğrisini oluşturur. Çünkü *f* kesinlikle $|z|=p$ çemberinin içinde bir sıfır noktasına sahiptir. *Arg* prensibi bize şunu söyler. $C_p$ orijini tam bir kez kuşatmıştır. Ama eğer $C_p$ *arg* artmasıyla sadece bir kez orijini sarmışsa, kendisine eşittir. Böylece $C_p$ starlike alan olan $D_p$'yi sınırlayan basit kapalı bir eğridir ve $f$, $|z|<p$ diskinin içinde kesinlikle bir kez her $w\epsilon D_p$ değerini alır. Çünkü bu $\forall$ $p<1$ için doğrudur ve $f$, $D$'nin içinde univalent ve starlikedır. Bu ispatı sonuçlandırır. Konveks fonksiyonlar basit bir yolla tanımlanabilir.

### 4.5.5. Teorem 4

$f$, $D$'nin içinde $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ ile analitik olsun. O halde

$$f \in K \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in P \tag{4.61}$$

**İspat:**

Öncelikle $f\epsilon K$ olduğunu kabul edelim. $f$'in konveks bir alanın üzerinde her alt diski $|z|<r$ ye dönüşmesi gerektiğini iddia edelim. Bunu göstermek için $|z_1| \leq |z_2|<r$ ile birlikte $z_1$ ve $z_2$ noktalarını seçelim. $w_1=f|z_1|$ ve $w_2=f|z_2|$ olsun.

$w_0=tw_1+(1-t)w_2$ olsun, $0<t<1$ olsun.

O zaman $f$ konveks bir fonksiyondur. $f|z_0|=w_0$ için $z_0\epsilon D$ vardır ki $|z_0|<r$'dir.

$$g(z) = tf\left(\frac{z_1 z}{z_2}\right) + (1-t)f(z) \tag{4.62}$$

fonksiyonu $g(0)=1$ olup $g(0)$ ve $g(z_2)=w_0$ ile $D$ bölgesinde analitiktir. Çünkü $f\epsilon C$, fonksiyon $h(z)=f^{-1}(g(z))$ iyi tanımlıdır. Çünkü $h(0)=0$ ve $|h(z)|\leq 1$, Schwarz lemma $|h(z)|\leq|z|$ olduğunu söyler. Böylece gösterilen $|z_0|=|h(z_2)|\leq|z_2|<r$.

Bundan dolayı $f$ konveks bir alanı sınırlayan $C_r$ eğrisinin üzerinde her çemberi $|z|=r<1$'e dönüştürür. Dışbükeylik şunu ifade eder. $C_r$ teğetinin eğimi pozitif yönlü olan bir eğridir. Analitik olarak,

$$\frac{d}{d\theta}\left(arg\left\{\frac{d}{d\theta}f\left(re^{i\theta}\right)\right\}\right) \geq 0 \text{ veya } Im\left\{\frac{d}{d\theta}\log[ire^{i\theta}f'\left(re^{i\theta}\right)\right\} \tag{4.63}$$

Bu durum aşağıdakine denktir.

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geq 0, |z| = r. \tag{4.64}$$

Böylece harmonik fonksiyonlar için max prensibine göre

$$[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}] \in P \tag{4.65}$$

oluşur. Diğer taraftan $f$'nin

$$[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}] \in P \tag{4.66}$$

ile birlikte normal bir analitik fonksiyon olduğunu farzedelim. Yukarıdaki hesaplama gösterir ki $C_r$ eğrisi için teğetin eğimi monoton olarak yükselir. Ancak bir nokta $C_r$'nin çemberini tamamlar. Teğet vektörünün argmenti net bir değişime sahiptir.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}\left(arg\left\{\frac{d}{d\theta} f\left(re^{i\theta}\right)\right\}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} d\theta \tag{4.67}$$

$$Re\left\{\int_{|z|=r} [1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}]\frac{dz}{iz}\right\} = 2\pi, z = re^{i\theta} \tag{4.68}$$

Bu gösterir ki $C_r$ konveks bir alana sarılı basit kapalı bir eğridir. Bunun için keyfi $r<1$ $f$'in konveks sınırlarla univalent bir fonksiyon olduğunu ifade eder [26].

# 5. KONVEKS VE STARLIKE FONKSİYONLARIN BAĞINTILARI

## 5.1. ÖNCÜL TEOREMLER

Daha önceden starlike fonksiyonları için elde edilen $a_k$ katsayıları şimdi.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{|k-2u_k|+(1-a)\,u_k\}|A_{k+1}|\leq 1-a \tag{5.1}$$

da olduğu gibi *f(z)ϵA'*da $0\leq a<1$ için incelenir.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{|k-2u_k|+(1-a)\,u_k\}|A_{k+1}|\leq 1-a \tag{5.2}$$

Eğer bu eşitsizlik bu serideki fonksiyon için sağlanırsa, o zaman *f(z)ϵS(a,t)* olduğunda *f(z)ϵK(a)* ile de sağlanır.

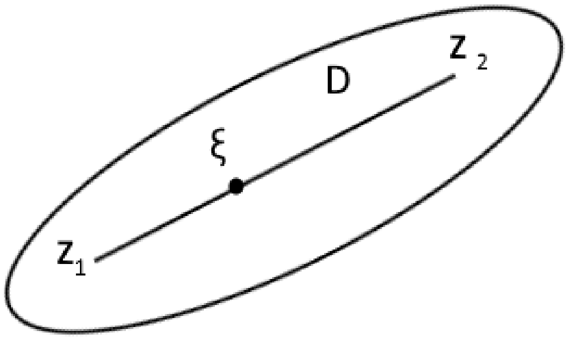
### 5.1.1. Teorem 1- Noshiro-Warschawski Teoremi

Eğer *f(z)* fonksiyonu konveks *D* tanım kümesi ve Re($f'$(z))>0'da analitik ise o zaman *f*(z), *D*'de univalenttir.

**İspat:**

$$f(z_2-z_1)=\int_{z_1}^{z_2} f'\,(\xi)d\xi \tag{5.3}$$

eşitliğini dikkate alalım.




Şekil 5.1. *D* bölgesinde alınan bir noktanın iki noktaya göre durumu.

Eğer $\xi = tz_2 + (1-t)z_1$ $(0 \leq t \leq 1)$ ise o zaman

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1)\int_0^1 f'(tz_2 + (1-t)z_1)dt \tag{5.4}$$

Çünkü $\xi = tz_2 + (1-t)\, z_1 \epsilon D$ ve

$$Ref'(\xi) = \text{Re } f'(tz_2 + (1-t)z_1) > 0 \tag{5.5}$$

$$Ref'(\,\xi) = Re\, f'(tz_2 + (1-t)z_1) \neq 0. \tag{5.6}$$

Dolayısıyla, eğer ise $z_1 \neq z_2$'dir. Böylece *f(z), D*'de univalenttir.

Örnek:

$$f(z) = z + \frac{1}{n}z^n, (n = 2, 3, 4 \dots) \tag{5.7}$$

|z|<1'de univalenttir. Eğer bir *f*(z) fonksiyonu bir konveks *D* kümesinde ve bazı reel *a* lar için analitikse, *f*(z), *D*'de univalenttir.

$Re(e^{ia} f'(z)) > 0 \; (z \epsilon D)$

5.1.1.1. *Tanım 1*

Açık birim diski $D = \{z \epsilon \mathbb{C} : |z| < 1\}$'de $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ ile normalleşen analitik *f(z)* fonksiyonun sınıfı *A* olsun. Öyleyse $f(z) \epsilon A$,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, z^n \tag{5.8}$$

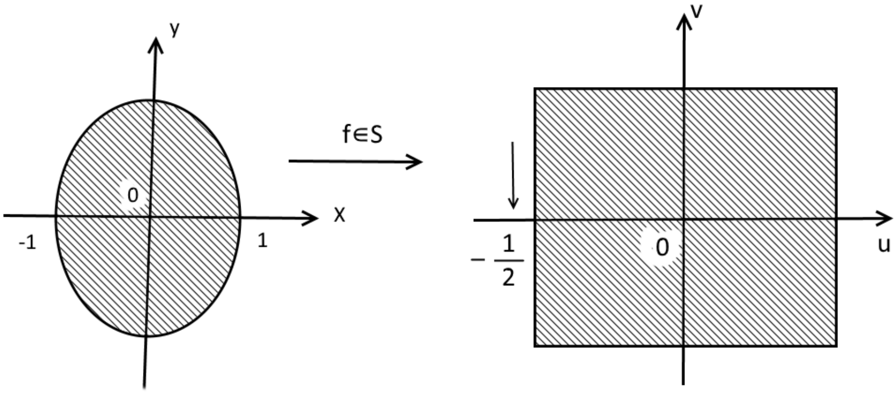
olarak yazılabilir.

5.1.1.1. *Tanım 2*

*D*' da univalent olan *f(z)* fonksiyonundan oluşan *A*'nın alt sınıfı *S* olsun.

Örnek:

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n \in S$$




Şekil 5.2. *x*, *y* çemberin içinin *u*, *v* ekseninde belli bir noktada sınırlanması.

**5.1.2. Teorem 2**

Bir

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n \tag{5.9}$$

fonksiyonu *K* sınıfı için bir ekstremal fonksiyonudur. Bir

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} n.z^n \tag{5.10}$$

fonksiyonu $S^*$ sınıfı için ekstremal bir fonksiyondur.

İspat:

$f(z)\in S^*$ olsun. Bu durumda

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} \tag{5.11}$$

ile verilen *p(z)* fonksiyonu bir Karatodori (Caratheodory) fonksiyonudur. Böylece $p(z)\in P$'dir. *P* sınıfı için bir

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1+Z}{1-Z} \tag{5.12}$$

ekstremal fonksiyonumuz var. Böylece

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1+Z}{Z(1-Z)} = \frac{1}{Z} + \frac{2}{1-Z} \tag{5.13}$$

bağıntısını verir. Bu da bize

$$\log f(z) = \log z - 2\log(1-z) = \log\frac{z}{(1-z)^2} \tag{5.14}$$

denklemi elde edilir.Buradan

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \tag{5.15}$$

denklemini elde ederiz. Daha sonra *z,* $f'(z)\epsilon S^* \Leftrightarrow f\epsilon K$ olur. Böylece *K* sınıfındaki bir *f(z)* ekstremal fonksiyonu için

$$z.f'(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \tag{5.16}$$

olduğunu düşünürüz.

$$f(z) = \frac{z}{1-z} \tag{5.17}$$

kolayca elde edilir.

5.1.2.1. *Tanım*

Bir $f(z)\epsilon A$ fonksiyonun analitiği eğer bazı $a$ $(0\leq a<1)$ için

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > a\,, \quad (z\epsilon U) \tag{5.18}$$

denklem (5.18)' i karşılarsa $a$ dizisinin starlike olabileceği varsayılır. $a$ dizisinin $f(z)\epsilon A$ starlike fonksiyonları sınıfı $S^*(a)$ ile gösterilir. Aynı zamanda, bir $f(z)\epsilon A$ fonksiyonu eğer bazı reel $a$ $(0\leq a<1)$ için

$$Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > a\,, \quad (z\epsilon U) \tag{5.19}$$

fonksiyonunu karşılarsa α dizisinin konveks olabileceği varsayılır. α dizisinin $f(z)\epsilon A$

konveks fonksiyonları sınıfı K(α) ile gösterilir.

Dikkat:

$$f(z)\epsilon K(a) \iff z.f'(z)\epsilon S^*(a) \tag{5.20}$$

$$f(z)\epsilon S^*(a) \iff \int_0^z \frac{f(t)}{t}dt\epsilon K(a) \tag{5.21}$$

### 5.1.3. Teorem 3

Eğer *(0≤a<1)*, *tϵC*, *(|t|≤1, t≠1)* için *f( z)ϵS(a,t)* ise, öyleyse

$$Re\left(\frac{(1-t)z.f'(z)}{f(z)-f(tz)}\right) > a, \quad (z\epsilon U) \tag{5.22}$$

dır.

### 5.1.4. Teorem 4

Eğer *f(z)ϵA* için

$$\sum_{k=2}^{\infty}\{|k-u_k|+(1-a)|u_k|\}\,|a_k| \le 1-a \tag{5.23}$$

ise, öyleyse *f(z)ϵS(a,t)*

$$u_k = 1+t+t^2+\cdots+t^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} t^j \tag{5.24}$$

İspat:

Eğer *f(z)* *(0≤a<1)*

$$\sum_{k=2}^{\infty}\{|k-u_k|+(1-a)|u_k|\}\,|a_k| \le 1-a \tag{5.25}$$

eşitsizliğini karşılaşırsa, öyleyse

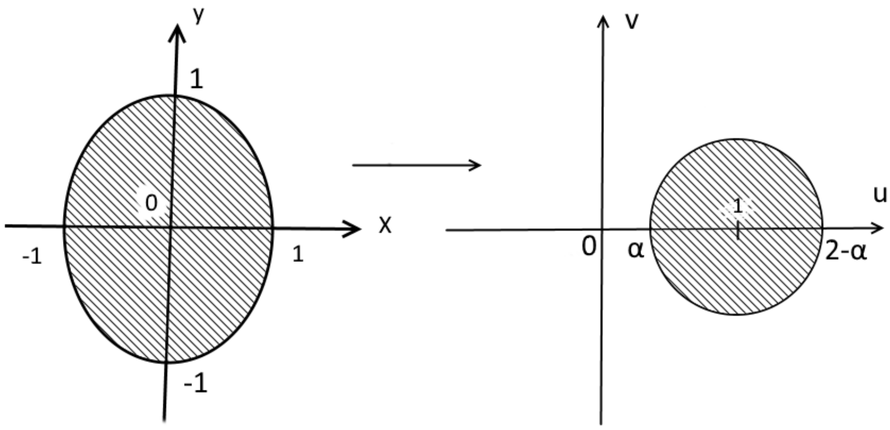
$$\left|\frac{(1-t)z.f'(z)}{f(z)-f(tz)}-1\right| < \frac{\sum_{k=2}^{\infty}|k-u_k||a_k|}{1-\sum_{k=2}^{\infty}|u_k||a_k|} \le 1-a \tag{5.26}$$

elde edilir.

Bu

$$\frac{(1-t)z.f'(z)}{f(z)-f(tz)} \quad \text{nin } (1-a) \tag{5.27}$$

yarıçapı ile 1'in merkezinin dairenin içine doğru açık birim diskiyle dönüşümü anlamına gelir.




Şekil 5.3. Çemberin çembere dönüşümü.

Bu nedenle,

$$\frac{(1-t)z.f'(z)}{f(z)-f(tz)} > a \quad (z\epsilon U) \tag{5.28}$$

olduğunu görürüz, yani *f(z)ϵS(a,t)*'dir.

### 5.1.5. Teorem 5

Eğer *f(z)ϵS(a,t)*

$$|a_k| \le \frac{\beta}{|v_k|}\{1+\beta\sum_{j=2}^{k-1}\frac{|u_j|}{|v_j|}+\beta^2\sum_{j_2>j_1}^{k-1}\sum_{j_1=2}^{k-2}\frac{|u_{j_1}u_{j_2}|}{|u_{j_1}u_{j_2}|} \tag{5.29}$$

$$+\beta^3\sum_{j_3>j_2}^{k-1}\sum_{j_2>j_1}^{k-2}\sum_{j_1=2}^{k-3}\frac{|u_{j_1}u_{j_2}u_{j_3}|}{|u_{j_1}u_{j_2}u_{j_3}|}+\cdots+\beta^{k-2}\sum_{j=2}^{k-1}\frac{|u_j|}{|v_j|} \tag{5.30}$$

$$\beta = 2(1-a), \qquad v_k = k-u_k \tag{5.31}$$

dir.

## 5.2. MAIN TEOREM

### 5.2.1. Teorem

Eğer

$$\sum_{k=2}^{\infty}\{|k-2u_k|+(1-a)|u_k|\}\ \ |A_{k+1}|\leq 1-a \tag{5.32}$$

için

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k \epsilon\ A \tag{5.33}$$

ise, öyleyse

$$Re\left(1+\frac{(1-t)z.f''(z)}{f'(z)-f'(tz)}\right)>a \text{ dır} \tag{5.34}$$

dir.

5.2.1.1. *İspat:*

Eğer

$$f(z),\quad f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k \epsilon A \qquad 0\leq a<1 \text{ için} \tag{5.35}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\{|k-2u_k|+(1-a)|u_k|\}\ \ |A_{k+1}|\leq 1-a \tag{5.36}$$

eşitsizliğini karşılar, öyleyse

$$\left|\frac{(1-t)z.f''(z)}{f'(z)-f'(tz)}-1\right|<\frac{\sum_{k=2}^{\infty}|k-2u_k||A_{k+1}|}{1-\sum_{k=2}^{\infty}|u_k|\,|A_{k+1}|}\leq 1-a \tag{5.37}$$

dır.

Eğer *f(z)*'nin türevlerini alırsak,

$$\frac{(1-t)z.f''(z)}{f'(z)-f'(tz)}=\frac{(1-t)(2a_2z+6a_3z^2+12a_4z^3+20a_5z^4+30a_6z^5+\cdots)}{2a_2(1-t)z+3a_3(1-t^2)+\cdots} \tag{5.38}$$

$$= \frac{(1-t)(2a_2z + 6a_3z^2 + 12a_4z^3 + 20a_5z^4 + 30a_6z^5 + \cdots)}{(1-t)[2a_2z + 3a_3(1+t) + \cdots]} \tag{5.39}$$

$$= \frac{2a_2z + \sum_{k=2}^{\infty} k(k+1)a_{k+1}z^k}{2a_2z + \sum_{k=2}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(1+t+t^2+\cdots+t^{k-1})z^k} \tag{5.40}$$

$$= \frac{2a_2z[1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k+1)\frac{a_{k+1}}{a_2}z^{k-1}]}{2a_2z[1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)\frac{a_{k+1}}{a_2}u_kz^{k-1}} \tag{5.41}$$

elde edilir.

$\frac{a_{k+1}}{a_2}$ 'nin $A_{k+1}$ eşit olduğunu söylersek, o zaman aşağıdaki ifadeyi elde edilir.

$$\frac{1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k+1)A_{k+1}z^{k-1}}{1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)A_{k+1}u_kz^{k-1}} \tag{5.42}$$

O halde

$$\frac{(1-t)z.f''(z)}{f'(z) - f'(tz)} \tag{5.43}$$

durumunu ele alıp eşitliğin her iki tarafına *1* ekleyelim. Böylece o da

$$1 + \frac{(1-t)z.f''(z)}{f'(z) - f'(tz)} = \frac{2 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k+1)A_{k+1}z^{k-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} A_{k+1}u_kz^{k-1}}{1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)A_{k+1}u_kz^{k-1}} \tag{5.44}$$

$$1 + \frac{(1-t)z.f''(z)}{f'(z) - f'(tz)} - 2 = \frac{\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)(k-2u_k)A_{k+1}z^{k-1}}{1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)A_{k+1}u_kz^{k-1}} \tag{5.45}$$

$$\left|\frac{(1-t)z.f''(z)}{f'(z) - f'(tz)} - 1\right| < \frac{\sum_{k=2}^{\infty}|(k+1)||(k-2u_k)|\,|A_{k+1}||z^{k-1}|}{\sum_{k=2}^{\infty}|(k+1)|\,|A_{k+1}||u_k||z^{k-1}|} \tag{5.46}$$

$$\left|\frac{(1-t)z.f''(z)}{f'(z) - f'(tz)} - 1\right| < \frac{\sum_{k=2}^{\infty}|(k-2u_k)|\,|A_{k+1}|}{1 - \sum_{k=2}^{\infty}|A_{k+1}|\,|u_k|} \leq 1 - a \tag{5.47}$$

eşitliği elde edilir.

Bu

$$Re\left(1+\frac{(1-t)z.f''(z)}{f'^{(z)}-f'(tz)}\right) \tag{5.48}$$

nin yarıçapı $1$-$a$ ile $1$'in merkezinin daire içine doğru açık birim diskine dönüştürdüğünün manasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

# 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatürde tanımlanan fonksiyonun daha önce konvekse yakın fonksiyonlar için yapılan bir ispatı bulunmamaktadır. Bu çalışmamızda $0 \leq a < 1$ aralığında ilgili fonksiyonun konvekse yakın bir ispatı yapılmıştır. Mevcut olan fonksiyonu $0 \leq a < 1$ aralığında aldığımızda; çemberin içinde alınan bir noktayı fonksiyonda yerine yazarsak hangi kümede olduğunu bulabiliriz.

Bizim kompleks düzlemde yaptığımız bu çalışma konvekse yakın fonksiyonlar üzerinde yapılan çalışmalarda fayda sağlayacaktır. $0 \leq a < 1$ aralığında fonksiyonların konvekse yakınlığı araştırılabilir. Bu aralıkta araştırmalar yapılabilir.

# 7. KAYNAKLAR

[1] A. Dönmez, *Karmaşık fonksiyonlar kuramı,* 1. basım, İstanbul, Türkiye: Beta Basım Yayın Dağıtım, 1999.

[2] M. Kamalı ve E. Kadıoğlu, *Genel Matematik*, 3. baskı, Erzurum, Türkiye: Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, 1998, ss. 400–420.

[3] P. Zengin, "Weierstrass Pe-Eliptik fonksiyonun n. mertebeden türevleri ile Zeta-yarı Eliptik Fonksiyonu arasındaki bağıntılar," Yüksek lisans tezi, Matematik Anabilim Dalı, Düzce Üniversitesi, Düzce, Türkiye, 2012.

[4] P. L. Duren, *Univalent Functions*, 2.nd ed., New York, USA: Sipringer-Verlag, 1983.

[5] L. Brand. (2018, March 24). *Tek ve çift fonksiyonlar, Yüksek Matematik*, (M. Can, Çev.), 2018, ss. 191.

[Online]. Available:http://www.ozelgeometri.com/FileUpload/ks120250/File/teorem_ispatlari.pdf

[6] R. Ocak, *Kompleks Analiz*, Erzurum, Türkiye: Atatürk Üniversitesi Yayınları, 1993, ss. 43-99.

[7] T. Başkan, *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, 7. baskı, Bursa, Türkiye: Dora Basım Yayın, 2012.

[8] J. W. Brown and R.V. Churchill, *Complex Varıables and Applıcatıons,* 8th ed., Michigan, USA: Tata McGraw – Hill Education, 2009, pp. 63-69, 190-199.

[9] M. Sat, "Ters univalent fonksiyonların katsayıları," Yüksek lisans tezi, Matematik Anabilim Dalı, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye, 2007.

[10] Z. Nehari, *Conformal Mapping*, 1.st, New York, USA: McGraw HillBook Co, 1952.

[11] S. D. Bernard, "Convexand starlike univalent functions," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 135, pp. 429-446, 1969.

[12] M. Obradović and S. Owa, "On certain properties for some classes of Starlike functions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 145, no. 2, pp. 357-364, 1990.

[13] J. M. F. O'Farrill. (2018, March 24). *Complex analysis.*

[Online]. Available:http://www.maths.ed.ac.uk/~jmf/Teaching/MT3/ComplexAnalysis.

pdf

[14] H. E. Özkan, Kompleks analiz 1 İstanbul Kültür Üniversitesi Uzaktan Öğretim Desteği UDES, *Ders Notları*, İstanbul.

[15] Ö. Sarıoğlu, "Univalent fonksiyonlar," Yüksek lisans tezi, Matematik Anabilim Dalı, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye, 2001.

[16] P. L. Duren, "Coefficients of univalent functions," *American Mathematıcal Society*, vol. 83, no.5, pp. 891-906, 1977.

[17] L. Branges, “A proof of the Bieberbach conjecture,” *Acta Mathematica*, vol. 154, no. 1-2, pp. 137-152, 1985.

[18] L. Branges. (2018, March 03). *A proof of the Bieberbach conjecture.*

[Online]. Available:https://projecteuclid.org/euclid.acta/1485890348

[19] Anonymous. (2018, March 24). *Bieberbach Conjecture, Wolfram Math World.*

[Online]. Available:http://mathworld.wolfram.com/BieberbachConjecture.html

[20] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten Derjenigen Potenzreihen, Welcheeineschlichte Abbildungdes Einheitskreises vermitteln*, 1.st, Berlin, Germany: *Sitzungsber, Preuss Akademia der Wissenschaften*, 1916.

[21] J. Korevaar, “Ludwig Bieberbach's conjecture and its proof by Louis de Branges,” *The American Mathematical Monthly*, vol. 93, pp. 505-514, 1986.

[22] R. Garabedian and M. Schiffer, “A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient,” *Journal Rational mechanical analysis,* vol. 4, pp. 427-465, 1955.

[23] R. Pederson and M. Schiffer, “A Proof of the Bieberbach Conjecture for the Fifth Coefficient,” *Archive Rational mechanical analysis*, vol. 45, pp. 161-193, 1972.

[24] M. Ozawa, “On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient,” Kodai mathematical Seminer Reports, Japan, Rap. 21, 1969.

[25] R. N. Pederson, “On unitary properties of Grunsky's matrix,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* vol. 29, pp. 370-377, 1968.

[26] S. Owa, and J. Nishiwaki, “Coefficient estimates for certain classes of analytic functions,” *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics,* Vol. 29, no. 5, pp. 285-290, 2002.

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER

| | |
|---|---|
| Adı Soyadı | : Hilal AY |
| Doğum Tarihi ve Yeri | : 1992-BAKIRKÖY |
| Yabancı Dili | : İNGİLİZCE |
| E-posta | : h.hilalay92@gmail.com |

## ÖĞRENİM DURUMU

| **Derece** | **Alan** | **Okul/Üniversite** | **Mezuniyet Yılı** |
|---|---|---|---|
| Y. Lisans | Matematik | Düzce Üniversitesi | 2018 |
| Lisans | Matematik | Düzce Üniversitesi | 2015 |
| Lise | Sayısal | Cumhuriyet Lisesi | 2010 |