



**T.C.  
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN  
KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

**PINAR KÖSEM**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN  
DOÇ. DR. HÜSEYİN BUDAK**

**DÜZCE, 2020**

**T.C.**  
**DÜZCE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN**  
**KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

Pınar KÖSEM tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK  
Düzce Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK  
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA  
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ  
Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 20/08/2020

## BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

20/08/2020

Pınar KÖSEM

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Hüseyin BUDAK' a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

20/08/2020

Pınar KÖSEM

# İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ .....	vi
SİMGELER .....	vii
ÖZET .....	viii
ABSTRACT .....	ix
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	3
2.1. KONVEKS FONKSİYONLAR .....	3
2.1.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Tanımlar .....	3
2.1.2. Konveks Fonksiyonların Özellikleri .....	4
2.1.3. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları .....	6
2.2. HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ .....	8
2.3. <i>F</i> -KONVEKS FONKSİYONLAR .....	9
2.4. KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ VE İLGİLİ TEOREMLER .....	15
2.5. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ .....	17
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER .....	20
3.1. <i>F</i> -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN RIEMANN İNTEGRALLERİNİ İÇEREN HERMİTE-HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER .....	20
3.2. <i>F</i> -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİNİ İÇEREN HERMİTE-HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER .....	24
3.3. <i>F</i> -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN HERMİTE-HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER .....	32
4. <i>F</i> -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN YENİ HERMİTE-HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER .....	41
4.1. <i>F</i> -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN YENİ HERMİTE-HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER .....	41
4.2. <i>F</i> -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN YENİ HERMİTE-HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER .....	49
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	57
6. KAYNAKLAR .....	58
ÖZGEÇMİŞ .....	61

## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. Konveks fonksiyon şekli .....	5



## SİMGELER

$\mathcal{F}$	$F$ Fonksiyonlarının Ailesi
$I$	Reel Sayılarda bir aralık
$I^\circ$	$I$ aralığının içi
${}_a^+I_\varphi$	Sağ Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörü
${}_b^-I_\varphi$	Sol Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörü
$J_{a^+}^\alpha$	Sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü
$J_{b^-}^\alpha$	Sol Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\Gamma$	Gamma Fonksiyonu

## ÖZET

### GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Pınar KÖSEM

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin BUDAK

Ağustos 2020, 60 sayfa

Bu tez genelleştirilmiş konveks ( $F$ -konveks) fonksiyonlar yardımıyla elde edilen genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler üzerinedir. Beş bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın birinci bölümü giriş niteliğinde olup ikinci bölümde tez için gerekli bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Daha sonra Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ispatı verildikten sonra  $F$ -konveks fonksiyonların tanımı ve bazı özellikleri sunulmuştur. Diğer konveks fonksiyon sınıfları ile  $F$ -Konveks fonksiyonlar arasındaki ilişki incelenmiştir. Tez çalışmasının ana kısmında kullanılacak olan Kesirli İntegral Operatörüne ve Genelleştirilmiş kesirli integral operatörüne ikinci bölümde sırasıyla değinilmiştir. Üçüncü bölümde  $F$ -konveks fonksiyonlar için sırasıyla Riemann integralini, Riemann-Liouville kesirli integrallerini ve genelleştirilmiş kesirli integralleri içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunulacaktır. Dördüncü bölüm tezin ana kısmını oluşturmaktadır. Bu bölüm de  $F$ -konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville Kesirli İntegrallerini ve genelleştirilmiş kesirli integralleri içeren yeni bazı Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ispatlanacaktır. Tezin son kısmı olan beşinci bölümde ise bazı sonuçlar ve sonraki çalışmalar için öneriler verilmiştir.

**Anahtar sözcükler:** Genelleştirilmiş kesirli integraller,  $F$ -Konveks fonksiyonlar, Hermite-hadamard eşitsizliği.

## ABSTRACT

### FRACTIONAL INTEGRAL INEQUALITIES FOR GENERALIZED CONVEX FUNCTIONS

Pınar KÖSEM

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Hüseyin BUDAK

August 2020, 60 pages

This thesis is on generalized Hermite-Hadamard type inequalities obtained with the help of generalized convex ( $F$ -convex) functions. The first part of this study, which has been prepared as five chapters, is an introduction and some definitions and theorems are given in the second part. Later, after the proof of Hermite-Hadamard inequality, the definition and some properties of  $F$ -convex functions are presented. The relationship between other convex function classes and  $F$ -Convex functions has been examined. The fractional integral operator and generalized fractional integral operator to be used in the main part of the thesis study are mentioned in the second section, respectively. In the third chapter, Hermite-Hadamard type inequalities for  $F$ -convex functions, including Riemann integral, Riemann-Liouville fractional Integrals and generalized fractional integrals, will be presented, respectively. The fourth part is the main part of the thesis. In this section, some new Hermite-Hadamard type inequalities for  $F$ -convex functions, including Riemann-Liouville Fractional Integrals and generalized fractional integrals, will be proved. In the fifth chapter, which is the last part of the thesis, some results and suggestions for further studies are given.

**Keywords:** Generalized fractional integrals,  $F$ -Convex functions, Hermite-hadamard inequality.

## 1. GİRİŞ

22 Kasım 1881 de Charles Hermite (1822-1901) Mathesis dergisine bir mektup gönderdi. Bu mektubun bir özeti 1883 de derginin 3. sayısında yayımlandı. İçeriğinde şu bilgiler yer almaktadır:

“Sur deux limites d’une intégrale définie. Soit  $f(x)$  une fonction qui varie toujours dans le même sens de  $x = a$ , á  $x = b$ . On aura les relations

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x) dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x) dx > (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

sivant que la courbe  $y = f(x)$  tourne sa convexité ou sa concavité vers l’axe des abscisses. En faisant dans ces formules  $f(x) = 1/(1+x)$ ,  $a = 0$ ,  $b = x$  il vient

$$x - \frac{x^2}{x+2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}$$

Bu mektupta günümüzde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen ifade yer alıyordu. Yapılan araştırmalar sonucunda literatürde bu önemli eşitsizliğin Hermite’e ait olduğu yazılmıyordu. Öyle ki Hermite’in kendi makalelerinin yayımlandığı dergilerde dahi bu eşitsizlik yer almıyor.

E. F. Beckenbach, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafının 1893 te Hadamard tarafından ispatlandığını belirtmiştir. Aslında bu eşitsizliğin on yıl önce Hermite tarafından yayımlanmasına rağmen Beckenbach, bu eşitsizliğin Hadamard’a ait olduğunu ısrar ederek büyük çaba sarf etmiştir. Ancak şunu da belirtmek gerekir ki Beckenbach’in Hermite’in sonucundan haberi yoktu.

Fejer (1880-1959) 1906 da trigonometrik polinomlar üzerine çalışırken Hermite'in sonucundan hiç bahsetmeksizin Hermite'in eşitsizliğini genelleştiren bir eşitsizlik ispatladı. Onun bu ispatı aslında dolaylı olarak Hermit'in eşitsizliğini verir. Bu sonuç bahsedilen eşitsizliğin Hermite'e atfedilmemesinin bir başka sebebidir.

J.L.W.V. Jensen(1905-1906) Hermite'in eşitsizliğinin bir sonucu olan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğini baz alarak konveks fonksiyonları tanımlamıştır. Hermite'in eşitsizliği bu sebeplerden dolayı uzun yıllar sadece Hadamard eşitsizliği olarak bilindi. Hermite'in eşitsizliğini Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak tanımlayan ilk eserler "Hermite and Convexity" ve "Convex functions, Partial Orderings and Statistical Applications" adlı eserlerdir ([1], [2]).

Konvekslik matematiğin bir çok alanında kullanılan önemli bir konudur. Topoloji, Lineer Cebir, Analiz, Ekonomi ve mühendislik gibi birçok alanda karşımıza çıkar. Son yıllarda uygulamalı bilimlerin birçoğunda konveksliğin önemi fark edilmiş olup araştırmalar arasında yerini almıştır. Yıllar boyunca çeşitli konvekslik tanımları verilmiştir. Bunların bazıları için [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] referanslarına bakılabilir. Bu konvekslik tanımları için de Hermite-Hadamard eşitsizlikleri elde edilmiştir. [10] ve [11] de  $m$ -konveks, [12] de  $s$ -konveks ve [13] de  $h$ -konveks fonksiyonlar için Heermite-Hadamard eşitsizlikleri ispatlanmıştır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez için gerekli genel tanım ve teoremler sunulacaktır.

### 2.1. KONVEKS FONKSİYONLAR

Bu alt bölümde konvekslik kavramı ile ilgili temel tanım ve özellikler verilecektir.

#### 2.1.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Tanımlar

**Tanım 2.1 (Konveks Küme).**  $L$  bir lineer uzay ve  $A \subseteq L$  olmak üzere  $\forall x, y \in A$  için  $B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$  ise  $A$  kümesine konveks küme denir. Eğer  $z \in B$  ise  $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$  eşitliğindeki  $x$  ve  $y$  nin katsayıları için  $\alpha + (1 - \alpha) = 1$  bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki  $\alpha, 1 - \alpha$  yerine  $\alpha + \beta = 1$  şartını sağlayan ve negatif olmayan  $\alpha, \beta$  reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak  $B$  kümesi uç noktaları  $x$  ve  $y$  olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [14].

**Tanım 2.2 (J-Konveks Fonksiyon).**  $I, \mathbb{R}$  de bir aralık olmak üzere her  $x, y \in I$  için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

şartını sağlayan bir  $f$  fonksiyonuna  $I$  üzerinde Jensen anlamında konveks veya  $J$ -konveks fonksiyon denir [15].

**Tanım 2.3 (Kesin J-Konveks Fonksiyon).** Her  $x, y \in I$  ve  $x \neq y$  için,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa,  $f$  fonksiyonuna  $I$  üzerinde kesin  $J$ -konveks fonksiyon denir [15].

**Tanım 2.4 (Konveks Fonksiyon).**  $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$  ve  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olmak üzere  $x, y \in I$  ve  $t \in [0, 1]$  için

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

şartını sağlayan  $f$  fonksiyonuna konveks fonksiyon denir [2].

### 2.1.2. Konveks Fonksiyonların Özellikleri

- i. Kapalı aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.
- ii.  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konveks fonksiyon ise  $I^\circ$  ( $I$  nın içi) inde herhangi bir  $[a, b]$  aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında mutlak sürekli ve  $I^\circ$  de sürekli dir.
- iii.  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konveks fonksiyon ise,  $I^\circ$  de  $f'_-(x)$  ve  $f'_+(x)$  vardır ve artandır.
- iv.  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I$  açık aralığında konveks ise, sayılabilir bir  $E$  kümesi haricinde  $f'$  mevcuttur ve sürekli dir.
- v.  $k$  tane fonksiyon  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ye konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde

$$f(x) = \sum_{j=1}^k a_j f_j(x) \quad a_j > 0, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, k)$$

fonksiyonu da konvektir.

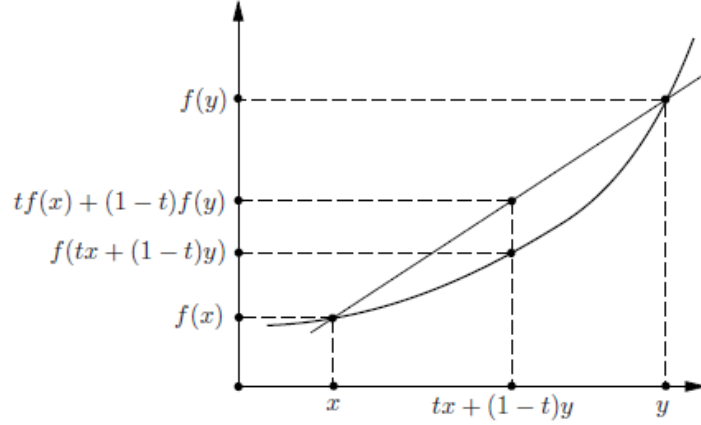
vi.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  azalmayan ve konveks fonksiyon ayrıca  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konveks olsun. Bu takdirde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (g \circ h)(x)$  olarak tanımlanan  $f$  bileşke fonksiyonu da konvektir.

vii.  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  konveks ve  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  fonksiyonu ise  $h(x) = Ax + B$  formunda konveks olmak üzere (burada  $A$  uygun matristir.)  $f(x) = g(h(x))$  fonksiyonu da konvektir.

**Örnek 2.5.**  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$  fonksiyonu  $I$  üzerinde bir konveks fonksiyondur.

**Sonuç 2.6.** Her konveks fonksiyon aynı zamanda bir  $J$ -konveks fonksiyondur.

$I$  üzerinde tanımlı bir  $f$  fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı  $(x, f(x))$  ve  $(y, f(y))$  noktalarını içeren  $I$  üzerindeki doğru parçasının  $f$  nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Bu durum Şekil 2.1 de görülmektedir



Şekil 2.1. Konveks fonksiyon şekli.

Eğer  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında tanımlı,  $[a, b]$  aralığında konveks (konkav) ve  $x_0$  noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise  $x \in (a, b)$  için,

$$f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0)$$

eşitsizliği yazılır.

**Tanım 2.7 (Eşlenik Konveks Fonksiyonlar).**  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu artan ve sürekli bir fonksiyon olsun ayrıca  $g(0) = 0$  ve  $x \rightarrow \infty$  iken  $g \rightarrow \infty$  şartlarını sağlasın. Bu durumda  $g^{-1}$  vardır ve  $g$  ile aynı şartları sağlar. Eğer  $f$  ve  $f^*$  fonksiyonları

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt \quad \text{ve} \quad f^*(y) = \int_0^y g^{-1}(s) ds$$

şeklinde tanımlanırsa bu iki fonksiyon da konveks olup  $f$  ve  $f^*$  fonksiyonlarına birbirinin konveks eşleniği denir [16].

**Tanım 2.8 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar).**  $f, I$  aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.  $x_1 < x_2$  olan  $\forall x_1, x_2 \in I$  için

- i.  $f(x_2) > f(x_1)$  ise  $f$  fonksiyonu  $I$  üzerinde artandır,
- ii.  $f(x_2) < f(x_1)$  ise  $f$  fonksiyonu  $I$  üzerinde azalandır,
- iii.  $f(x_2) \geq f(x_1)$  ise  $f$  fonksiyonu  $I$  üzerinde azalmayandır,
- iv.  $f(x_2) \leq f(x_1)$  ise  $f$  fonksiyonu  $I$  üzerinde artmayandır,

denir.

**Teorem 2.9.**  $I, \mathbb{R}$  de bir aralık,  $f, I$  üzerinde sürekli ve  $I^\circ$  üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

- i.  $\forall x \in I^\circ$  için  $f'(x) > 0$  ise  $f$  fonksiyonu  $I$  üzerinde artandır.
- ii.  $\forall x \in I^\circ$  için  $f'(x) < 0$  ise  $f$  fonksiyonu  $I$  üzerinde azalandır.
- iii.  $\forall x \in I^\circ$  için  $f'(x) \geq 0$  ise  $f$  fonksiyonu  $I$  üzerinde azalmayandır.
- iv.  $\forall x \in I^\circ$  için  $f'(x) \leq 0$  ise  $f$  fonksiyonu  $I$  üzerinde artmayandır.

**Teorem 2.10.**  $f$  fonksiyonu  $(a, b)$  aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $f$  fonksiyonunun konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart  $f'$  nin artan (kesin artan) olmasıdır.

**Teorem 2.11.**  $f$  fonksiyonunun  $I$  açık aralığında ikinci türevi mevcutsa,  $f$  fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart  $\forall x \in I$  için,

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır.

### 2.1.3. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları

**Tanım 2.12.**  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon, burada  $S, \mathbb{R}^n$ 'nin konveks bir altkümesidir, eğer  $[0, 1]$  aralığındaki tüm  $\lambda$  ve  $S$  deki tüm  $x, y$  için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $\varepsilon > 0$  olmak üzere  $f$ ,  $\varepsilon$ -konveks fonksiyondur denir.

**Tanım 2.13.**  $x, y \in [a, b]$  ve  $t, \alpha \in [0, 1]$  için

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + (1-t^\alpha) f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\alpha$ -konveks fonksiyondur denir.

**Tanım 2.14 ( $h$ -Konveks Fonksiyon).**  $h \neq 0$  ve  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her  $x, y \in I, \alpha \in (0, 1)$  için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlayan negatif olmayan  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna bir  $h$ -konveks fonksiyon denir. Burada  $I$  ve  $J, \mathbb{R}$  de iki aralık  $(0, 1) \subseteq J$  dir [8].

Eğer  $h(\alpha) = \alpha$  seçilirse  $h$ -konveks fonksiyonu negatif olmayan konveks fonksiyona dönüşür.

**Tanım 2.15 ( $m$ -Konveks Fonksiyon).**  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $b > 0$  olsun. Her  $x, y \in [0, b], m, t \in [0, 1]$  için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $f$  fonksiyonuna bir  $m$ -konveks fonksiyon denir.  $f(0) \leq 0$  şartını sağlayan  $[0, b]$  aralığında tanımlı olan bütün  $m$ -konveks fonksiyonların sınıfı  $K_m(b)$  ile gösterilir [9].

Eğer  $m = 1$  seçilirse  $[0, b]$  aralığında  $m$ -konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

**Tanım 2.16 ( $(\alpha, m)$ -Konveks Fonksiyon).**  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $b > 0$  olsun. Her  $x, y \in [0, b], t \in [0, 1]$  ve  $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$  için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t\alpha f(x) + m(1-t\alpha)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $f$ -fonksiyonuna  $(\alpha, m)$ -konveks fonksiyon denir [7]. Burada  $\alpha$  ve  $m$  den en az biri 0 dan farklı olmalıdır.

$(\alpha, m) \in \{(1, m), (1, 1)\}$  için sırasıyla  $m$ -konveks ve konveks fonksiyon sınıflarının elde edildiği kolayca görülebilir.

## 2.2. HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

**Teorem 2.17.** [17] [18]  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konveks fonksiyon olmak üzere her  $a, b \in I$  ve  $a < b$  için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliğe Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Burada  $f$  fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir .

*İspat.*  $f$  fonksiyonu sürekli ve sınırlı olduğundan  $[a, b]$  aralığında integrallenebilir. Konvekslik tanımından

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının  $[0, 1]$  aralığında  $t$  ye göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 (f(ta + (1-t)b)) dt \leq \int_0^1 (tf(a) + (1-t)f(b)) dt = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

elde edilip soldaki eşitsizlikte  $x = ta + (1-t)b$ ,  $t \in [0, 1]$  dönüşümü uygulanırsa Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Sol tarafını ispat etmek için,

$$\frac{1}{b-a} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{b-a} \left[ \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right]$$

eşitsizliğinin sağındaki ifadeye sırasıyla  $x = a + \frac{t(b-a)}{2}$  ve  $x = b - \frac{t(b-a)}{2}$  değişken değişimi uygulanırsa

$$\frac{1}{b-a} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) dx + f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) \right] dt$$

$$\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilip, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur.  $\square$

[19] de Dragomir ve Agarwal Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı olan

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

farkı için, [20] de Kırmacı Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı olan

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

farkı için (sırasıyla Yamuk tipli ve Orta-Nokta tipli) üst sınırlar elde etmişlerdir.

### 2.3. $F$ -KONVEKS FONKSİYONLAR

Konvekslik, uygulamalı matematik ve uygulamalı matematiğin birçok dalında önemli bir kavramdır. Özellikle, birçok önemli integral eşitsizliği mutlak fonksiyonların konvekslik merkezli varsayımına dayanmaktadır. Jensen eşitsizliği, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Hardy-Littlewood-Pólya ayrılma eşitsizliği, Petrović'in eşitsizliği, Popoviciu'nin konveks fonksiyonlar eşitsizliği ve diğerleri. Ancak, birçok kişinin soruları için konvekslik yeterli değil. Bu durum, bu kavramı genişletme zorunluluğuna yol açar.

Son 60 yılda, konvekslik kavramının geliştirilmesine büyük önem verilmiştir. Bu alt bölümde belirli bir fonksiyona bağlı yeni bir konvekslik kavramı sunulmaktadır. Bu yeni kavram  $\varepsilon$ -konveks fonksiyon,  $\alpha$ -konveks fonksiyon,  $h$ -konveks fonksiyon ve diğerleri de dahil olmak üzere farklı konvekslik türlerini geliştirir. Üstelik bu yeni konvekslik kavramıyla bazı integral eşitsizlikleri kurulmaktadır. Özel durumlar olarak, literatürde var olan birkaç eşitsizlik aşağıda incelenmiştir.

**Tanım 2.18.** Aşağıdaki aksiyomları sağlayan  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümlerine  $\mathcal{F}$  ailesindenir denir [21].

(A1) Eğer  $u_i \in L^1(0, 1)$ ,  $i = 1, 2, 3$  ise her  $\lambda \in [0, 1]$  için

$$\int_0^1 F(u_1(t), u_2(t), u_3(t), \lambda) dt = F\left(\int_0^1 u_1(t) dt, \int_0^1 u_2(t) dt, \int_0^1 u_3(t) dt, \lambda\right),$$

(A2) Her  $u \in L^1(0, 1)$  için  $\omega \in L^\infty(0, 1)$  ve  $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$  olmak üzere

$$\int_0^1 F(w(t)u(t), w(t)z_1, w(t)z_2, t) dt = T_{F,w}\left(\int_0^1 w(t)u(t) dt, z_1, z_2\right),$$

burada  $T_{F,\omega} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(F, \omega)$  ye bağlı bir fonksiyondur ve ilk değişkene göre azalmayıdır.

(A3) Herhangi  $(\omega, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^4$ ,  $u_4 \in [0, 1]$  için

$$wF(u_1, u_2, u_3, u_4) = F(wu_1, wu_2, wu_3, u_4) + L_w.$$

Burada  $L_\omega \in \mathbb{R}$  sadece  $\omega$  ye bağlı bir sabittir.

**Tanım 2.19.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$  olmak üzere

$$F(f(tx + (1-t)y), f(x), f(y), t) \leq 0, (x, y, t) \in [a, b] \times [a, b] \times [0, 1]$$

ise  $f$  fonksiyonuna  $F \in \mathcal{F}$  ye göre konveks fonksiyon (veya kısaca  $F$ -konveks fonksiyon) denir [21].

**Sonuç 2.20.**  $\varepsilon > 0$  olsun.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  ve  $a < b$  olmak üzere  $\varepsilon$ -konveks olsun. Bu durumda

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon \quad (x, y, t) \in [a, b] \times [a, b] \times [0, 1]$$

eşitsizliği sağlanır. Burada  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

$$\begin{aligned} F(u_1, u_2, u_3, u_4) &= u_1 - u_4 u_2 - (1 - u_4) u_3 - \varepsilon \\ (u_1, u_2, u_3, u_4) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.1)$$

ile tanımlanan bir fonksiyondur.  $u_i \in L^1(0, 1)$ ,  $i = 1, 2, 3$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(u_1(t), u_2(t), u_3(t), \lambda) dt &= \int_0^1 (u_1(t) - \lambda u_2(t) - (1 - \lambda) u_3(t) - \varepsilon) dt \\
&= \int_0^1 u_1(t) dt - \lambda \int_0^1 u_2(t) dt \\
&\quad - (1 - \lambda) \int_0^1 u_3(t) dt - \varepsilon \\
&= F\left(\int_0^1 u_1(t) dt, \int_0^1 u_2(t) dt, \int_0^1 u_3(t) dt, \lambda\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $F$  fonksiyonu (A1) aksiyomunu sağlar.  $u \in L^1(0, 1)$ ,  $w \in L^\infty(0, 1)$  ve  $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$  olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(w(t)u(t), w(t)z_1, w(t)z_2, t) dt &= \int_0^1 (w(t)u(t) - tw(t)z_1 - (1-t)w(t)z_2 - \varepsilon) dt \\
&= \int_0^1 w(t)u(t) dt - z_1 \int_0^1 tw(t) dt \\
&\quad - z_2 \int_0^1 (1-t)w(t) dt - \varepsilon \\
&= T_{F,w}\left(\int_0^1 w(t)u(t) dt, z_1, z_2\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $T_{F,w} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
T_{F,w}(u_1, u_2, u_3) &= u_1 - \left(\int_0^1 tw(t) dt\right) u_2 - \left(\int_0^1 (1-t)w(t) dt\right) u_3 \\
&\quad - \varepsilon
\end{aligned} \tag{2.2}$$

ile tanımlansın.  $F$  fonksiyonu (A2) aksiyomunu sağlar.  $(w, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^4$  ve  $u_4 \in (0, 1)$  olsun.

$$wF(u_1, u_2, u_3, u_4) = w(u_1 - u_4 u_2 - (1 - u_4) u_3 - \varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
&= wu_1 - u_4(wu_2) - (1 - u_4)(wu_3) - w\varepsilon \\
&= (wu_1 - u_4(wu_2) - (1 - u_4)(wu_3) - \varepsilon) + (1 - w)\varepsilon \\
&= F(wu_1, wu_2, wu_3, u_4) + (1 - w)\varepsilon
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece

$$L_w = (1 - w)\varepsilon \quad (2.3)$$

ile (A3) aksiyomu sağlanır.  $F \in \mathcal{F}$  ispatlanmış olur. Diğer yandan  $f$  fonksiyonu  $\varepsilon$ -konveks olduğundan tüm  $(x, y, t) \in [a, b] \times [a, b] \times (0, 1)$  için

$$F(f(tx + (1 - t)y), f(x), f(y), t) = f(tx + (1 - t)y) - tf(x) - (1 - t)f(y) - \varepsilon \leq 0$$

elde edilir. Sonuç olarak  $f$ ,  $F$ -konveks fonksiyondur.

**Sonuç 2.21.**  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  ve  $a < b$  olsun.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , fonksiyonu  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere

$$f(tx + (1 - t)y) \leq t^\alpha f(x) + (1 - t^\alpha)f(y) \quad (x, y, t) \in [a, b] \times [a, b] \times [0, 1]$$

$\alpha$ -konveks fonksiyon olsun. Burada  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1]$  olmak üzere

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1 - u_4^\alpha u_2 - (1 - u_4^\alpha)u_3 \quad (2.4)$$

ile tanımlanan bir fonksiyon olsun.  $u_i \in L^1(0, 1)$ ,  $i = 1, 2, 3$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(u_1(t), u_2(t), u_3(t), \lambda) dt &= \int_0^1 (u_1(t) - \lambda^\alpha u_2(t) - (1 - \lambda^\alpha)u_3(t)) dt \\
&= \int_0^1 u_1(t) dt - \lambda^\alpha \int_0^1 u_2(t) dt - (1 - \lambda^\alpha) \int_0^1 u_3(t) dt \\
&= F\left(\int_0^1 u_1(t) dt, \int_0^1 u_2(t) dt, \int_0^1 u_3(t) dt, \lambda\right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece  $F$  fonksiyonu (A1) aksiyomunu sağlar.  $u \in L^1(0, 1)$ ,  $w \in L^\infty(0, 1)$  ve  $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$  olsun.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(w(t)u(t), w(t)z_1, w(t)z_2, t) dt &= \int_0^1 (w(t)u(t) - t^\alpha w(t)z_1 - (1-t^\alpha)w(t)z_2) dt \\
&= \int_0^1 w(t)u(t) dt - z_1 \int_0^1 t^\alpha w(t) dt \\
&\quad - z_2 \int_0^1 (1-t^\alpha)w(t) dt \\
&= T_{F,w} \left( \int_0^1 w(t)u(t) dt, z_1, z_2 \right)
\end{aligned}$$

ulaşılır. Burada  $T_{F,w} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  olmak üzere

$$T_{F,w}(u_1, u_2, u_3) = u_1 - \left( \int_0^1 t^\alpha w(t) dt \right) u_2 - \left( \int_0^1 (1-t^\alpha) w(t) dt \right) u_3 \quad (2.5)$$

ile tanımlansın.  $F$  fonksiyonu (A2) aksiyomunu sağlar.  $(w, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^4$  ve  $u_4 \in (0, 1)$  olsun.

$$\begin{aligned}
wF(u_1, u_2, u_3, u_4) &= w(u_1 - u_4^\alpha u_2 - (1 - u_4^\alpha)u_3) \\
&= wu_1 - u_4^\alpha (wu_2) - (1 - u_4^\alpha)(wu_3) \\
&= F(wu_1, wu_2, wu_3, u_4)
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece  $L_w = 0$  ile (A3) aksiyomu sağlanır.  $F \in \mathcal{F}$  ispatlanmış olur. Diğer yandan  $f$  fonksiyonu  $\alpha$ -konveks olduğundan tüm  $(x, y, t) \in [a, b] \times [a, b] \times (0, 1)$  için

$$F(f(tx + (1-t)y), f(x), f(y), t) = f(tx + (1-t)y) - t^\alpha f(x) - (1-t^\alpha)f(y) \leq 0$$

elde edilir. Sonuç olarak  $f$ ,  $F$ -konveks fonksiyondur.

**Sonuç 2.22.**  $h : J \rightarrow [0, \infty)$ , 0 ile özdeş olmayan bir fonksiyon olsun.  $J$ ,  $\mathbb{R}$  de bir aralık olmak üzere  $(0, 1) \subseteq J$  dir.  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  ve  $a < b$  olmak üzere

$h$ -konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y), \quad (x, y, t) \in [a, b] \times [a, b] \times (0, 1)$$

eşitsizliği vardır.  $h \in L^1(0, 1)$  olduğu varsayılınsın. Burada  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1]$  olmak üzere

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1 - h(u_4)u_2 - h(1-u_4)u_3 \quad (2.6)$$

ile tanımlanır.  $u_i \in L^1(0, 1)$ ,  $i = 1, 2, 3$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(u_1(t), u_2(t), u_3(t), \lambda) dt &= \int_0^1 (u_1(t) - h(\lambda)u_2(t) - h(1-\lambda)u_3(t)) dt \\ &= \int_0^1 u_1(t) dt - h(\lambda) \int_0^1 u_2(t) dt - h(1-\lambda) \int_0^1 u_3(t) dt \\ &= F\left(\int_0^1 u_1(t) dt, \int_0^1 u_2(t) dt, \int_0^1 u_3(t) dt, \lambda\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sayede  $F$  fonksiyonu (A1) aksiyomunu sağlar.  $u \in L^1(0, 1)$ ,  $w \in L^\infty(0, 1)$  ve  $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$  olsun.

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(w(t)u(t), w(t)z_1, w(t)z_2, t) dt &= \int_0^1 (w(t)u(t) - h(t)w(t)z_1 - h(1-t)w(t)z_2) dt \\ &= \int_0^1 w(t)u(t) dt - z_1 \int_0^1 h(t)w(t) dt \\ &\quad - z_2 \int_0^1 h(1-t)w(t) dt \\ &= T_{F,w}\left(\int_0^1 w(t)u(t) dt, z_1, z_2\right) \end{aligned}$$

burada  $T_{F,w} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

$$T_{F,w}(u_1, u_2, u_3) = u_1 - \left(\int_0^1 h(t)w(t) dt\right) u_2 - \left(\int_0^1 h(1-t)w(t) dt\right) u_3 \quad (2.7)$$

ile tanımlansın.  $F$  fonksiyonu (A2) aksiyomunu sağlar.  $(w, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^4$  ve  $u_4 \in (0, 1)$  olsun. Buradan

$$\begin{aligned} wF(u_1, u_2, u_3, u_4) &= w(u_1 - h(u_4)u_2 - h(1 - u_4)u_3) \\ &= wu_1 - h(u_4)(wu_2) - h(1 - u_4)(wu_3) \\ &= F(wu_1, wu_2, wu_3, u_4) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece  $L_w = 0$  ile (A3) aksiyomu sağlanır.  $F \in \mathcal{F}$  ispatlanmış olur. Diğer yandan  $f$  fonksiyonu  $h$ -konveks olduğundan tüm  $(x, y, t) \in [a, b] \times [a, b] \times (0, 1)$  için

$$F(f(tx + (1-t)y), f(x), f(y), t) = f(tx + (1-t)y) - h(t)f(x) - h(1-t)f(y) \leq 0$$

elde edilir. Sonuç olarak  $f$ ,  $F$ -konveks fonksiyondur.

## 2.4. KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ VE İLGİLİ TEOREMLER

Bu alt bölümde Riemann-Liouville kesirli integral tanımı ve ilgili eşitsizlikler vereilecektir.

**Tanım 2.23. (Gamma Fonksiyonu):** Gamma fonksiyonu  $n > 0$  için

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanır. Bu integral  $n > 0$  için yakınsaktır. Gamma fonksiyonun bazı önemli özelliklerini aşağıdaki gibidir:

**i.**  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

**ii.**  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

**iii.**  $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$

**iv.**  $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$

**Tanım 2.24.** [22]  $f \in L_1[a, b]$  olsun.  $J_{a+}^\alpha f$  ve  $J_{b-}^\alpha f$  Riemann-Liouville kesirli integralleri  $\alpha > 0$  olmak üzere

$$J_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a$$

ve

$$J_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b$$

ile tanımlanır.

Burada  $\Gamma(\alpha)$  Gamma fonksiyonudur ve  $J_{a+}^0 f(x) = J_{b-}^0 f(x) = f(x)$  dir.

Kesirli integraller için daha fazla bilgi için [22], [23], [24] nolu kitaplara bakılabilir.

Kesirli integraller için Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

**Teorem 2.25.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  pozitif bir fonksiyon ve  $0 \leq a < b$  olmak üzere  $f \in L_1[a, b]$  olsun. Eğer  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında konveks fonksiyon ise kesirli integraller için  $\alpha > 0$  olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.8)$$

eşitsizliği geçerlidir [25].

**Lemma 2.26.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a, b)$  aralığında diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve  $a < b$  olsun. Eğer  $f' \in L[a, b]$  ise, bu durumda  $\alpha > 0$  olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 [(1-t)^\alpha - t^\alpha] f'(ta + (1-t)b) dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

eşitliği vardır [25].

**Teorem 2.27.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $(a, b)$  aralığında diferansiyellenebilir ve  $a < b$  olsun. Eğer  $|f'|$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında konveks ise, Bu durumda  $\alpha > 0$  için

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] \right| \quad (2.10)$$

$$\leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) [|f'(a)| + |f'(b)|]$$

eşitsizliği vardır [25].

**Teorem 2.28.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $0 \leq a < b$  olmak üzere  $f \in L_1 [a, b]$  olsun. Eğer  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında konveks fonksiyon ise kesirli integraller için  $\alpha > 0$  olmak üzere

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right] \\ &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

eşitsizliği sağlanır [26].

**Teorem 2.29.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $0 \leq a < b$  olmak üzere  $f \in L_1 [a, b]$  olsun. Eğer  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında konveks fonksiyon ise kesirli integraller için  $\alpha > 0$  olmak üzere

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{a^+}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + J_{b^-}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \\ &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

eşitsizliği sağlanır [27].

## 2.5. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ

Bu alt bölümde genelleştirilmiş kesirli integral tanımı ve bu kesirli integralleri içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunulacaktır.

**Tanım 2.30.** [28]  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  bir fonksiyon olmak üzere  ${}_a^+ I_\varphi f(x)$  ve  ${}_b^- I_\varphi f(x)$  sol ve sağ taraf genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri sırasıyla

$${}_a^+ I_\varphi f(x) = \int_a^x \frac{\varphi(x-t)}{x-t} f(t) dt, \quad x > a, \quad (2.13)$$

ve

$${}_b^- I_\varphi f(x) = \int_x^b \frac{\varphi(t-x)}{t-x} f(t) dt, \quad x < b. \quad (2.14)$$

olarak tanımlanır.

Genelleştirilmiş kesirli integrallerin en önemli özelliği, Riemann-Liouville kesirli integral,  $k$ -Riemann-Liouville kesirli integral, Katugampola kesirli integraller, Hadamard kesirli integraller ve benzeri bazı kesirli integralleri genelleştirmeleridir [28].

**Teorem 2.31.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında konveks bir fonksiyon olsun, genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_{a^+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b^-}I_{\varphi}f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad (2.15)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada  $\Lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümü

$$\Lambda(x) = \int_0^x \frac{\varphi((b-a)t)}{t} dt \quad (2.16)$$

ile tanımlanır [28].

**Lemma 2.32.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $(a, b)$  aralığında diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer  $f' \in L[a, b]$  ise genelleştirilmiş kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_{a^+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b^-}I_{\varphi}f(a)] \\ &= \frac{(b-a)}{2\Lambda(1)} \int_0^1 [\Lambda(1-t) - \Lambda(t)] f'(ta + (1-t)b) dt \end{aligned} \quad (2.17)$$

eşitliği geçerlidir [28].

**Teorem 2.33.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $(a, b)$  aralığında diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer  $|f'|$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında konveks ise genelleştirilmiş kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_{a^+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b^-}I_{\varphi}f(a)] \right| \\ & \leq \frac{(b-a)}{\Lambda(1)} \int_0^1 t |\Lambda(1-t) - \Lambda(t)| dt \left( \frac{|f'(a)| + |f'(b)|}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

eşitsizliği geçerlidir [28].

**Teorem 2.34.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $(a, b)$  aralığında diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer  $|f'|^q$ ,  $q > 1$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında konveks ise genelleştirilmiş kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_a^+ I_\varphi f(b) + {}_b^- I_\varphi f(a)] \right| \quad (2.19) \\ & \leq \frac{(b-a)}{2\Lambda(1)} \left( \int_0^1 |\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|^p dt \right) \left( \frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [28].

Genelleştirilmiş kesirli integraller için elde edilmiş diğer eşitsizlikler [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35] nolu çalışmalara bakılabilir.

### 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde  $F$ -konveks fonksiyonlar için sırasıyla Riemann integralini, Riemann-Liouville Kesirli İntegrallerini ve genelleştirilmiş kesirli integralleri içeren Hermite-Hadamard eşitsizlikleri sunulacaktır.  $F$ -konveks fonksiyonlar için elde edilen diğer eşitsizlikler için [36], [37], [38], [39], [40], [41] referanslarına bakılabilir.

#### 3.1. F-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN RIEMANN İNTEGRALLERİNİ İÇEREN HERMITE-HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde, Samet [21] tarafından elde edilen,  $F$ -konveks fonksiyonlar için Riemann integralini içeren bazı Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir.

Bu bölümde aşağıdaki lemmaya ihtiyaç duyulacaktır:

**Lemma 3.1.**  $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $(a, b) \in I^\circ \times I^\circ$  fonksiyonu  $I^\circ$  dönüşümü üzerinde diferansiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) f'(ta + (1-t)b) dt$$

eşitliği vardır [19].

**Teorem 3.2.**  $f \in L_1[a, b]$  olsun.  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$  olmak üzere  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $F$ -konveks ise

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \frac{1}{2}\right) \leq 0 \quad (3.1)$$

ve

$$T_{F,1}\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, f(a), f(b)\right) \leq 0 \quad (3.2)$$

eşitsizlikleri vardır [21].

*İspat.*  $f$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan her  $u, v \in [a, b]$  için

$$F\left(f\left(\frac{1}{2}u + \left(1 - \frac{1}{2}\right)v\right), f(u), f(v), \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

yazılır.

$$u = ta + (1-t)b \text{ ve } v = tb + (1-t)a \quad t \in [0, 1]$$

alınırsa

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), f(ta + (1-t)b), f(tb + (1-t)a), \frac{1}{2}\right) \leq 0,$$

eşitsizliğine ulaşılır.  $[0, 1]$  aralığında integral alınıp, (A1) aksiyomu kullanılırsa

$$F\left(\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) dt, \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt, \int_0^1 f(tb + (1-t)a) dt, \frac{1}{2}\right) \leq 0,$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt = \int_0^1 f(tb + (1-t)a) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (3.3)$$

olduğundan,

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

ifadesine ulaşılır ve (3.1) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır.

Benzer şekilde  $f$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan her  $t \in (0, 1)$  için

$$F(f(ta + (1-t)b), f(a), f(b), t) \leq 0$$

dir.  $[0, 1]$  aralığında  $t$  değişkenine göre integral alınıp,  $w \equiv 1$  için (A2) aksiyomu kullanılırsa

$$T_{F,1}\left(\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt, f(a), f(b)\right) \leq 0 \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.3) eşitliği (3.4) eşitsizliğinde kullanılırsa (3.2) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.  $\square$

**Teorem 3.3.**  $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  da diferansiyellenebilir ve  $(a, b) \in I^\circ \times I^\circ$ ,  $a < b$  olsun. Ayrıca

(i)  $|f'|$  fonksiyonu  $F \in \mathcal{F}$  için  $[a, b]$  aralığında  $F$ -konvektir.

(ii)  $\omega(t) = |1 - 2t|$  olmak üzere  $t \in (0, 1) \rightarrow L_{\omega(t)}$  fonksiyonu  $L^1(0, 1)$  aittir.

koşulları sağlansın. Bu durumda

$$T_{F,w} \left( \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|, |f'(a)|, |f'(b)| \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \quad (3.5)$$

eşitsizliği vardır [21].

*İspat.*  $|f'|$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan

$$F \left( |f'(ta + (1-t)b)|, |f'(a)|, |f'(b)|, t \right) \leq 0, \quad t \in (0, 1) \quad (3.6)$$

yazılır. (3.6) eşitsizliği  $w(t)$  ile çarpılıp, (A3) aksiyomunu uygulanırsa

$$F \left( w(t) |f'(ta + (1-t)b)|, w(t) |f'(a)|, w(t) |f'(b)|, t \right) + L_{\omega(t)} \leq 0 \quad t \in (0, 1)$$

eşitsizliğine ulaşılır.  $[0, 1]$  aralığında  $t$  değişkenine göre integral alınıp, (A2) aksiyomunu uygulanırsa

$$T_{F,w} \left( \int_0^1 w(t) |f'(ta + (1-t)b)| dt, |f'(a)|, |f'(b)| \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan Lemma 3.1 den

$$\frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_0^1 w(t) |f'(ta + (1-t)b)| dt$$

dir.  $T_{F,w}$  dönüşümü ilk değişkene göre azalmayan olduğu için

$$T_{F,w} \left( \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|, |f'(a)|, |f'(b)| \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

ifadesi ispatlanmış olur. □

**Teorem 3.4.**  $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^\circ$  da diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve  $(a, b) \in I^\circ \times I^\circ$ ,  $a < b$  olsun. Eğer  $p > 1$  olmak üzere  $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$  fonksiyonu  $F \in \mathcal{F}$  için  $[a, b]$  aralığında  $F$ -konveks ve  $|f'| \in L^{\frac{p}{p-1}}(a, b)$  ise

$$T_{F,1} \left( A(p, f), |f'(a)|^{p/(p-1)}, |f'(b)|^{p/(p-1)} \right) \leq 0$$

eşitsizliği vardır. Burada  $A(p, f)$

$$A(p, f) = \left( \frac{2}{b-a} \right)^{\frac{p}{p-1}} (p+1)^{\frac{1}{p-1}} \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|^{\frac{p}{p-1}}$$

olarak tanımlanır [21].

*İspat.*  $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$  bir  $F$ -konveks fonksiyon olduğundan

$$F \left( |f'(ta + (1-t)b)|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}, t \right) \leq 0, \quad t \in (0, 1)$$

eşitsizliği vardır.  $t$  değişkenine göre  $(0, 1)$  aralığı üzerinden integral alınıp,  $w \equiv 1$  için (A2) aksiyomu kullanılırsa

$$T_{F,1} \left( \int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)|^{\frac{p}{p-1}} dt, |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right) \leq 0$$

elde edilir. Diğer yandan Lemma 3.1 ve Hölder Eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2}{b-a} \right)^{\frac{p}{p-1}} (p+1)^{\frac{1}{p-1}} \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|^{\frac{p}{p-1}} \\ & \leq \int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)|^{\frac{p}{p-1}} dt \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır ve buradan

$$A(p, f) \leq \int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)|^{\frac{p}{p-1}} dt$$

olur.  $T_{F,1}$  ilk değişkene göre azalmayan olduğu için

$$T_{F,1} \left( A(p, f), |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right) \leq 0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.  $\square$

### 3.2. F-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİNİ İÇEREN HERMİTE-HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde, Budak ve ark. [42] tarafından elde edilen,  $F$ -konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren bazı Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunulacaktır.

**Teorem 3.5.**  $I \subseteq \mathbb{R}, f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $I^\circ$  da bir dönüşüm ve  $a, b \in I^\circ, a < b$  olsun. Ayrıca  $F \in \mathcal{F}$  dönüşümü ilk üç değişkenine göre lineer olmak üzere, eğer  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $F$ -konveks ise, bu durumda  $\alpha > 0$  için

$$F \left( f \left( \frac{a+b}{2} \right), \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{a^+}^\alpha f(b), \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{b^-}^\alpha f(a), \frac{1}{2} \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \quad (3.7)$$

ve

$$T_{F,w} \left( \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)], f(a) + f(b), f(a) + f(b) \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \quad (3.8)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  dir [42].

*İspat.*  $f$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan

$$F \left( f \left( \frac{x+y}{2} \right), f(x), f(y), \frac{1}{2} \right) \leq 0, x, y \in [a, b]$$

yazılır.

$$x = ta + (1-t)b, \text{ ve } y = tb + (1-t)a,$$

için

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), f(ta+(1-t)b), f(tb+(1-t)a), \frac{1}{2}\right) \leq 0, t \in [0, 1]$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliği  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  ile çarpıp (A3) aksiyomu kullanılırsa,  $t \in [0, 1]$  için

$$F\left(\alpha t^{\alpha-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right), \alpha t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b), \alpha t^{\alpha-1} f(tb+(1-t)a), \frac{1}{2}\right) + L_{w(t)} \leq 0,$$

elde edilir.  $t$  değişkenine göre  $[0, 1]$  üzerinde integral alınıp ve (A1) aksiyomu kullanılırsa

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} dt, \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b) dt, \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} f(tb+(1-t)a) dt, \frac{1}{2}\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b) dt = \frac{1}{(b-a)^\alpha} \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} f(x) dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} J_{a^+}^\alpha f(b)$$

ve

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} f(tb+(1-t)a) dt = \frac{1}{(b-a)^\alpha} \int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} J_{b^-}^\alpha f(a),$$

eşitlikleri kullanılarak

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{a^+}^\alpha f(b), \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{b^-}^\alpha f(a), \frac{1}{2}\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu da (3.7) eşitsizliğinin ispatını tamamlar.

Diğer yandan  $f$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan

$$F(f(ta+(1-t)b), f(a), f(b), t) \leq 0, t \in [0, 1]$$

ve

$$F(f(tb+(1-t)a), f(b), f(a), t) \leq 0, t \in [0, 1]$$

eşitsizlikleri vardır.  $F$  dönüşümünün lineerliği kullanılırsa

$$F(f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a), f(a) + f(b), f(a) + f(b), t) \leq 0, t \in [0, 1]$$

elde edilir.  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  için (A3) aksiyomunu yardımıyla,  $t \in [0, 1]$  için

$$F(\alpha t^{\alpha-1} [f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a)], \alpha t^{\alpha-1} [f(a) + f(b)],$$

$$\alpha t^{\alpha-1} [f(a) + f(b)], t) + L_{w(t)} \leq 0,$$

eşitsizliği bulunur.  $[0, 1]$  üzerinden integral alınıp (A2) aksiyomu kullanılırsa

$$T_{F,w} \left( \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} [f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a)] dt, f(a) + f(b), f(a) + f(b) \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

bulunur. Buradan

$$T_{F,w} \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(b-a)^\alpha} J_{a^+}^\alpha f(b) + \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(b-a)^\alpha} J_{b^-}^\alpha f(a), f(a) + f(b), f(a) + f(b) \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.  $\square$

**Sonuç 3.6.** Teorem 3.5 de  $F(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1 - u_4 u_2 - (1 - u_4) u_3 - \varepsilon$  seçilirse,  $f$  fonksiyonu  $\varepsilon \geq 0$  olmak üzere  $[a, b]$  aralığında  $\varepsilon$ -konveks olur ve

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \varepsilon \leq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

*İspat.*  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  için (2.3) eşitliğinden

$$\int_0^1 L_{w(t)} dt = \varepsilon \int_0^1 (1 - \alpha t^{\alpha-1}) dt = 0 \quad (3.9)$$

olur. (2.1) ve (3.7) eşitlikleri (3.9) da yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &\geq F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{a^+}^\alpha f(b), \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{b^-}^\alpha f(a), \frac{1}{2}\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] - \varepsilon, \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \varepsilon \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)]$$

eşitsizliğine ulaşılır. Diğer yandan  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  ve  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$  için (2.2) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} T_{F,w}(u_1, u_2, u_3) &= u_1 - \alpha \left( \int_0^1 t^\alpha dt \right) u_2 - \alpha \left( \int_0^1 (1-t)t^{\alpha-1} dt \right) u_3 \\ &\quad - \varepsilon \\ &= u_1 - \frac{\alpha u_2 + u_3}{\alpha+1} - \varepsilon \end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir. Böylece (3.8) ve (3.10) ifadelerinden

$$\begin{aligned} 0 &\geq T_{F,w}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)], f(a) + f(b), f(a) + f(b)\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] - \frac{1}{\alpha+1} [\alpha(f(a) + f(b)) + (f(a) + f(b))] - \varepsilon \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] - (f(a) + f(b)) - \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \leq f(a) + f(b) + \varepsilon$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

**Sonuç 3.7.** Sonuç 3.6 de  $\varepsilon = 0$  seçilirse  $f$  fonksiyonu konveks olur ve (2.8) eşitsizliği sağlanır.

**Sonuç 3.8.** Teorem 3.5 de  $F(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1 - h(u_4)u_2 - h(1 - u_4)u_3$  seçilirse  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $h$ -konveks olur ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \\ &\leq \alpha \left( \int_0^1 [h(t) + h(1-t)] t^{\alpha-1} dt \right) \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

*İspat.*  $L_{w(t)} = 0$  ve (2.3) ifadeleri (3.7) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &\geq F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{a^+}^\alpha f(b), \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{b^-}^\alpha f(a), \frac{1}{2}\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) - h\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)], \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)]$$

bulunur. Diğer yandan  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  için (2.7) ve (3.8) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &\geq T_{F,w}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)], f(a) + f(b), f(a) + f(b)\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] - \alpha \left[ \int_0^1 h(t) t^{\alpha-1} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 h(1-t) t^{\alpha-1} dt \right] [f(a) + f(b)] \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] - \alpha \left( \int_0^1 [h(t) + h(1-t)] t^{\alpha-1} dt \right) [f(a) + f(b)] \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \leq \alpha \left( \int_0^1 [h(t) + h(1-t)] t^{\alpha-1} dt \right) [f(a) + f(b)]$$

olur ve ispat tamamlanır. □

**Teorem 3.9.**  $I \subseteq \mathbb{R}$  bir aralık,  $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I^\circ$  üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve  $a, b \in I^\circ, a < b$  olsun. Eğer  $|f'|$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $F$ -konveks fonksiyon ise,

bu durumda  $t \in [0, 1] \rightarrow L_{w(t)}$  fonksiyonu  $L^1[0, 1]$  aittir ve

$$T_{F,w} \left( \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \right|, |f'(a)|, |f'(b)|, t \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \quad (3.11)$$

eşitsizliği vardır. Burada  $w(t) = |(1-t)^\alpha - t^\alpha|$  dır.

*İspat.*  $|f'|$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan,

$$F(|f'(ta + (1-t)b)|, |f'(a)|, |f'(b)|, t) \leq 0, t \in [0, 1]$$

yazılır.  $w(t) = |(1-t)^\alpha - t^\alpha|$  için (A3) aksiyomu kullanılırsa

$$F(w(t) |f'(ta + (1-t)b)|, w(t) |f'(a)|, w(t) |f'(b)|, t) + L_{w(t)} \leq 0, t \in [0, 1]$$

eşitsizliği elde edilir.  $[0, 1]$  da integral alınarak ve (A2) aksiyomu kullanılırsa

$$T_{F,w} \left( \int_0^1 w(t) |f'(ta + (1-t)b)| dt, |f'(a)|, |f'(b)|, t \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0, t \in [0, 1]$$

elde edilir. Lemma 2.26 den

$$\begin{aligned} & \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \right| \\ & \leq \int_0^1 w(t) |f'(ta + (1-t)b)| dt \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.  $T_{F,w}$  ilk değişkene göre azalmayan olduğundan

$$T_{F,w} \left( \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \right|, |f'(a)|, |f'(b)|, t \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

eşitsizliğine ulaşılır ve ispat tamamlanır. □

**Sonuç 3.10.** Teorem 3.9 in varsayımları altında  $F(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1 - u_4 u_2 - (1 - u_4) u_3 - \varepsilon$  seçilirse,  $\varepsilon \geq 0$  için  $|f'|$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $\varepsilon$ -konveks olur ve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \right| \\ & \leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) [|f'(a)| + |f'(b)| + 2\varepsilon] \end{aligned} \quad (3.12)$$

eşitsizliği sağlanır.

*İspat.*  $w(t) = |(1-t)^\alpha - t^\alpha|$  için (2.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \int_0^1 L_{w(t)} dt &= \varepsilon \int_0^1 (1 - |(1-t)^\alpha - t^\alpha|) dt \\ &= \varepsilon \left[ \int_0^{1/2} (1 - (1-t)^\alpha + t^\alpha) dt + \int_{1/2}^1 (1 + (1-t)^\alpha - t^\alpha) dt \right] \\ &= \varepsilon \left( 1 - \frac{2}{\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.  $w(t) = |(1-t)^\alpha - t^\alpha|$  ve  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$  için (2.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} T_{F,w}(u_1, u_2, u_3) &= u_1 - \alpha \left( \int_0^1 t |(1-t)^\alpha - t^\alpha| dt \right) u_2 \\ &\quad - \alpha \left( \int_0^1 (1-t) |(1-t)^\alpha - t^\alpha| dt \right) u_3 - \varepsilon \\ &= u_1 - \frac{1}{\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) (u_2 + u_3) - \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu eşitlikler Teorem 3.9 de yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &\geq T_{F,w} \left( \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \right|, |f'(a)|, |f'(b)|, t \right) \\ &+ \int_0^1 L_{w(t)} dt \\ &= \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \right| \\ &- \frac{1}{\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) [|f'(a)| + |f'(b)|] - \varepsilon + \varepsilon \left(1 - \frac{2}{\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)\right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar. □

**Sonuç 3.11.** Sonuç 3.10 da  $\varepsilon = 0$  seçilirse  $|f'|$  fonksiyonu konveks olur ve (3.12) eşitsizliği Sarıkaya ve ark. [25] tarafından ispatlanan (2.10) eşitsizliğine dönüşür.

**Sonuç 3.12.** Teorem 3.9 in varsayımları altında, eğer  $F(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1 - h(u_4)u_2 - h(1 - u_4)u_3$  seçilirse,  $|f'|$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $h$ -konveks olur ve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \right| \\ & \leq \frac{b-a}{2} \left( \int_0^1 h(t) |(1-t)^\alpha - t^\alpha| dt \right) [|f'(a)| + |f'(b)|] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

*İspat.*  $w(t) = |(1-t)^\alpha - t^\alpha|$  ve  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$  için (2.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned} T_{F,w}(u_1, u_2, u_3) &= u_1 - \left( \int_0^1 h(t) |(1-t)^\alpha - t^\alpha| dt \right) u_2 \\ &\quad - \left( \int_0^1 h(1-t) |(1-t)^\alpha - t^\alpha| dt \right) u_3 \\ &= u_1 - \left( \int_0^1 h(t) |(1-t)^\alpha - t^\alpha| dt \right) u_2 \\ &\quad - \left( \int_0^1 h(t) |t^\alpha - (1-t)^\alpha| dt \right) u_3 \\ &= u_1 - \left( \int_0^1 h(t) |(1-t)^\alpha - t^\alpha| dt \right) (u_2 + u_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.9 den

$$\begin{aligned} & T_{F,w} \left( \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \right|, |f'(a)|, |f'(b)|, t \right) \\ &= \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \right| \\ &\quad - \left( \int_0^1 h(t) |(1-t)^\alpha - t^\alpha| dt \right) [|f'(a)| + |f'(b)|] \leq 0 \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır. □

### 3.3. F-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN HERMİTE-HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde, Budak ve ark. [38] tarafından elde edilen,  $F$ -konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren bazı Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunulacaktır.

**Teorem 3.13.**  $I \subseteq \mathbb{R}$  bir aralık,  $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I^\circ$  üzerinde bir dönüşüm ve  $a, b \in I^\circ$ ,  $a < b$  olsun. Ayrıca  $F \in \mathcal{F}$  dönüşümü ilk üç değişkenine göre lineer olmak üzere, eğer  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $F$ -konveks ise

$$F \left( f \left( \frac{a+b}{2} \right), \frac{1}{\Lambda(1)} {}_{a+}I_{\varphi}f(b), \frac{1}{\Lambda(1)} {}_{b-}I_{\varphi}f(a), \frac{1}{2} \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \quad (3.13)$$

ve

$$\begin{aligned} & T_{F,w} \left( \frac{1}{\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)], f(a) + f(b), f(a) + f(b) \right) \\ & + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada  $w(t) = \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)}$  dir [38].

*İspat.*  $f$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan

$$F \left( f \left( \frac{x+y}{2} \right), f(x), f(y), \frac{1}{2} \right) \leq 0, \quad \forall x, y \in [a, b]$$

eşitsizliği vardır.

$$x = ta + (1-t)b \text{ ve } y = tb + (1-t)a,$$

için

$$F \left( f \left( \frac{a+b}{2} \right), f(ta + (1-t)b), f(tb + (1-t)a), \frac{1}{2} \right) \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1] \quad (3.15)$$

bulunur. (3.15) eşitsizliğinin her iki yanı  $w(t) = \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)}$  ile çarpılıp (A3) aksiyomu uygulanırsa tüm  $t \in [0, 1]$  için

$$F\left(\frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)}f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)}f(ta+(1-t)b), \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)}f(tb+(1-t)a), \frac{1}{2}\right) + L_{w(t)} \leq 0,$$

eşitsizliği elde edilir.  $t$  değişkenine göre  $[0, 1]$  aralığı üzerinde integral alınıp ve (A1) aksiyomu uygulanırsa

$$F\left[\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\Lambda(1)}\int_0^1\frac{\varphi((b-a)t)}{t}dt, \frac{1}{\Lambda(1)}\int_0^1\frac{\varphi((b-a)t)}{t}f(ta+(1-t)b)dt, \frac{1}{\Lambda(1)}\int_0^1\frac{\varphi((b-a)t)}{t}f(tb+(1-t)a)dt, \frac{1}{2}\right] + \int_0^1L_{w(t)}dt \leq 0$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada

$$\int_0^1\frac{\varphi((b-a)t)}{t}f(ta+(1-t)b)dt = \int_a^b\frac{\varphi(b-x)}{b-x}f(x)dx = {}_{a+}I_{\varphi}f(b)$$

ve

$$\int_0^1\frac{\varphi((b-a)t)}{t}f(tb+(1-t)a)dt = \int_a^b\frac{\varphi(x-a)}{x-a}f(x)dx = {}_{b-}I_{\varphi}f(a),$$

eşitliklerini kullanılarak (3.13) eşitsizliği olan

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{1}{\Lambda(1)}{}_{a+}I_{\varphi}f(b), \frac{1}{\Lambda(1)}{}_{b-}I_{\varphi}f(a), \frac{1}{2}\right) + \int_0^1L_{w(t)}dt \leq 0$$

elde edilir.

Diğer yandan  $f$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan

$$F(f(ta+(1-t)b), f(a), f(b), t) \leq 0, \forall t \in [0, 1]$$

ve

$$F(f(tb+(1-t)a), f(b), f(a), t) \leq 0, \forall t \in [0, 1]$$

eşitsizliklerine vardır.  $F$  nin lineerliği yardımıyla  $\forall t \in [0, 1]$  için

$$F(f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a), f(a) + f(b), f(a) + f(b), t) \leq 0 \quad (3.16)$$

eşitsizliği bulunur. (3.15) eşitsizliğinin her iki yanını  $w(t) = \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)}$  ile çarpılıp (A3) aksiyomu uygulanırsa her  $t \in [0, 1]$  için

$$F\left[\frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)}[f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a)], \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)}[f(a) + f(b)], \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)}[f(a) + f(b)], t\right] + L_{w(t)} \leq 0,$$

eşitsizliği elde edilir.  $[0, 1]$  aralığı üzerinde integral alınarak (A2) aksiyomu kullanılırsa

$$T_{F,w}\left(\int_0^1 \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)}[f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a)]dt, f(a) + f(b), f(a) + f(b)\right) + \int_0^1 L_{w(t)}dt \leq 0,$$

ifadesine ulaşılır. Buradan

$$T_{F,w}\left(\frac{1}{\Lambda(1)}[{}_a I_\varphi f(b) + {}_b I_\varphi f(a)], f(a) + f(b), f(a) + f(b)\right) + \int_0^1 L_{w(t)}dt \leq 0$$

sonucuna ulaşılır ve Teorem 3.13 in ispatı tamamlanmış olur.  $\square$

**Sonuç 3.14.** Eğer Teorem 3.13 de  $\varphi(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$  alınırsa (3.13) ve (3.14) eşitsizlikleri sırasıyla (3.7) ve (3.8) eşitsizliklerine indirgenir.

**Sonuç 3.15.** Eğer Teorem 3.13 de  $\varphi(t) = \frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$  alınırsa  $k$ -Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} I_{a^+, k}^\alpha f(b), \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} I_{b^-, k}^\alpha f(a), \frac{1}{2}\right) + \int_0^1 L_{w(t)}dt \leq 0$$

ve

$$T_{F,w}\left(\frac{\Gamma_k(\alpha+1)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} [I_{a^+, k}^\alpha f(b) + I_{b^-, k}^\alpha f(a)], f(a) + f(b), f(a) + f(b)\right) + \int_0^1 L_{w(t)}dt \leq 0$$

eşitsizliklerine ulaşılır. Burada  $w(t) = \frac{\alpha}{k} t^{\frac{\alpha}{k}-1}$  dir.

**Sonuç 3.16.**  $\varepsilon \geq 0$  olmak üzere eğer Teorem 3.13 de  $F(e_1, e_2, e_3, e_4) = e_1 - e_4 e_2 - (1 - e_4) e_3 - \varepsilon$  seçilirse,  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığı üzerinde  $\varepsilon$ -konveks olur ve

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varepsilon \leq \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.17)$$

eşitsizliği sağlanır.

*İspat.*  $w(t) = \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)}$  için (2.3) eşitliğinden

$$\int_0^1 L_{w(t)} dt = \varepsilon \int_0^1 \left(1 - \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)}\right) dt = 0 \quad (3.18)$$

eşitliğine ulaşılır. (2.1), (3.13) ve (3.18) ifadeleri kullanılarak

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{1}{\Lambda(1)} {}_{a+}I_{\varphi}f(b), \frac{1}{\Lambda(1)} {}_{b-}I_{\varphi}f(a), \frac{1}{2}\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

elde edilir. Böylece

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)] - \varepsilon \leq 0,$$

ve

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varepsilon \leq \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)]$$

eşitsizlikleri bulunur. Diğer yandan  $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}$  ve  $w(t) = \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)}$  için (2.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} T_{F,w}(e_1, e_2, e_3) &= e_1 - \left(\int_0^1 t \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)} dt\right) e_2 \\ &\quad - \left(\int_0^1 (1-t) \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)} dt\right) e_3 - \varepsilon \end{aligned} \quad (3.19)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.14) ve (3.19) ifadelerinden

$$0 \geq T_{F,w}\left(\frac{1}{\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)], f(a) + f(b), f(a) + f(b)\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)] - \left( \int_0^1 t \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)} dt \right) [f(a) + f(b)] \\
&\quad - \left( \int_0^1 (1-t) \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)} dt \right) [f(a) + f(b)] - \varepsilon \\
&= \frac{1}{\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)] - [f(a) + f(b)] - \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)] \leq f(a) + f(b) + \varepsilon$$

sonucu bulunur ve ispat tamamlanır.  $\square$

**Sonuç 3.17.** Eğer Sonuç 3.16 de  $\varepsilon = 0$  seçilirse  $f$  fonksiyonu konveks olur ve (3.17) eşitsizliği (2.15) eşitsizliğine dönüşür.

**Sonuç 3.18.** Eğer Teorem 3.13 de  $F(e_1, e_2, e_3, e_4) = e_1 - h(e_4)e_2 - h(1 - e_4)e_3$  seçilirse,  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $h$ -konveks olur ve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)] \\
&\leq \frac{[f(a) + f(b)]}{2\Lambda(1)} \int_0^1 \frac{\varphi((b-a)t)}{t} [h(t) + h(1-t)] dt \quad (3.20)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

*İspat.*  $L_{w(t)} = 0$ , (2.7) ve (3.13) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
0 &\geq F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{1}{\Lambda(1)} {}_{a+}I_{\varphi}f(b), \frac{1}{\Lambda(1)} {}_{b-}I_{\varphi}f(a), \frac{1}{2}\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right) - h\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)]$$

elde edilir. Diğer yandan  $w(t) = \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)}$  için (2.7) eşitliği (3.14) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &\geq T_{F,w} \left( \frac{1}{\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)], f(a) + f(b), f(a) + f(b) \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \\
&= \frac{1}{\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)] \\
&\quad - \left[ \int_0^1 h(t) \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)} dt + \int_0^1 h(1-t) \frac{\varphi((b-a)t)}{t\Lambda(1)} dt \right] [f(a) + f(b)] \\
&= \frac{1}{\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)] \\
&\quad - \frac{1}{\Lambda(1)} \left( \int_0^1 [h(t) + h(1-t)] \frac{\varphi((b-a)t)}{t} dt \right) [f(a) + f(b)]
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\frac{1}{\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)] \leq \frac{[f(a) + f(b)]}{\Lambda(1)} \left( \int_0^1 [h(t) + h(1-t)] \frac{\varphi((b-a)t)}{t} dt \right)$$

ifadesine ulaşılarak ispat tamamlanır.  $\square$

**Teorem 3.19.**  $I \subseteq \mathbb{R}$  bir aralık ve  $a, b \in I, a < b$  olmak üzere  $f : I^{\circ} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I^{\circ}$  da diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun.  $|f'|$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $F$ -konveks ise  $t \in [0, 1] \rightarrow L_{w(t)}$  ifadesi  $L^1 [0, 1]$  e ait olur ve  $w(t) = \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)}$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
&T_{F,w} \left( \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_{a+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b-}I_{\varphi}f(a)] \right|, \right. \\
&\quad \left. |f'(a)|, |f'(b)|, t \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \tag{3.21}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [38].

*İspat.*  $|f'|$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan

$$F(|f'(ta + (1-t)b)|, |f'(a)|, |f'(b)|, t) \leq 0, \forall t \in [0, 1]$$

elde edilir. (A3) aksiyomu ile  $w(t) = \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)}$  kullanılarak

$$F(w(t) |f'(ta + (1-t)b)|, w(t) |f'(a)|, w(t) |f'(b)|, t) + L_{w(t)} \leq 0, \forall t \in [0, 1]$$

ulaşılır.  $[0, 1]$  aralığı üzerinde integral alarak (A2) aksiyomunu kullanılırsa

$$T_{F,w} \left( \int_0^1 w(t) |f'(ta + (1-t)b)| dt, |f'(a)|, |f'(b)|, t \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0, t \in [0, 1]$$

elde edilir. Lemma 2.32 den

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_{a^+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b^-}I_{\varphi}f(a)] \right| \right. \\ & \left. \leq \int_0^1 w(t) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right. \end{aligned}$$

bulunur.  $T_{F,w}$  ilk değişkene göre azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} & T_{F,w} \left( \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_{a^+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b^-}I_{\varphi}f(a)] \right|, |f'(a)|, |f'(b)|, t \right) \\ & + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \end{aligned}$$

yazılır. Böylece Teorem 3.19 in ispatı tamamlanır.  $\square$

**Sonuç 3.20.** Eğer Teorem 3.19 de  $\varphi(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$  seçilirse, (3.21) eşitsizliği (3.11) eşitsizliğine indirgenir.

**Sonuç 3.21.** Eğer Teorem 3.19 de  $\varphi(t) = \frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$  seçilirse  $k$ -Riemann-Liouville kesirli integrali için elde edilir:

$$\begin{aligned} & T_{F,w} \left( \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha+1)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} [I_{a^+,k}^{\alpha}f(b) + I_{b^-,k}^{\alpha}f(a)] \right|, |f'(a)|, |f'(b)|, t \right) \\ & + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada  $w(t) = \left| (1-t)^{\frac{\alpha}{k}} - t^{\frac{\alpha}{k}} \right|$  dir.

**Sonuç 3.22.** Teorem 3.19 in varsayımları altında  $\varepsilon \geq 0$  olmak üzere  $F(e_1, e_2, e_3, e_4) = e_1 - e_4e_2 - (1 - e_4)e_3 - \varepsilon$  seçilirse  $|f'|$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $\varepsilon$ -konveks olur ve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_{a^+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b^-}I_{\varphi}f(a)] \right| \\ & \leq \frac{(b-a)}{2\Lambda(1)} \left( \int_0^1 t |\Lambda(1-t) - \Lambda(t)| dt \right) [|f'(a)| + |f'(b)|] \\ & + \varepsilon \frac{(b-a)}{2\Lambda(1)} \int_0^1 |\Lambda(1-t) - \Lambda(t)| dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

eşitsizliği sağlanır.

*İspat.*  $w(t) = \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)}$  için (2.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \int_0^1 L_{w(t)} dt &= \varepsilon \int_0^1 \left(1 - \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)}\right) dt \\ &= \varepsilon \left(1 - \int_0^1 \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)} dt\right) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır.  $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $w(t) = |\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|$  için (2.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} T_{F,w}(e_1, e_2, e_3) &= e_1 - \left(\int_0^1 t \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)} dt\right) e_2 \\ &\quad - \left(\int_0^1 (1-t) \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)} dt\right) e_3 - \varepsilon \\ &= e_1 - \left(\int_0^1 t \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)} dt\right) (e_2 + e_3) - \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik Teorem 3.19 te kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &\geq T_{F,w} \left( \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_a^+ I_{\varphi} f(b) + {}_b^- I_{\varphi} f(a)] \right|, |f'(a)|, |f'(b)|, t \right) \\ &\quad + \int_0^1 L_{w(t)} dt \\ &= \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_a^+ I_{\varphi} f(b) + {}_b^- I_{\varphi} f(a)] \right| \\ &\quad - \left( \int_0^1 t \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)} dt \right) [|f'(a)| + |f'(b)|] + \varepsilon \left( 1 - \int_0^1 \frac{(|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|)}{\Lambda(1)} dt \right) - \varepsilon \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır ve ispat tamamlanır. □

**Sonuç 3.23.** Eğer Sonuç 3.22 de  $\varepsilon = 0$  seçilirse  $|f'|$  konveks olur ve (3.22) eşitsizliği (2.18) eşitsizliğine dönüşür.

**Sonuç 3.24.** Teorem 3.19 in varsayımları altında  $F(e_1, e_2, e_3, e_4) = e_1 - h(e_4)e_2 - h(1 - e_4)e_3$  seçilirse  $|f'|$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $h$ -konveks olur ve Ali ve ark. [29] tarafından

elde edilen

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_a^+ I_{\varphi} f(b) + {}_b^- I_{\varphi} f(a)] \right| \\ & \leq \frac{(b-a)}{\Lambda(1)} \left[ \frac{|f'(a)| + |f'(b)|}{2} \right] \left( \int_0^1 h(t) |\Lambda(1-t) - \Lambda(t)| dt \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

eşitsizliği sağlanır.

*İspat.*  $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $w(t) = |\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|$  için (2.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned} T_{F,w}(e_1, e_2, e_3) &= e_1 - \left( \int_0^1 h(t) \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)} dt \right) e_2 \\ &\quad - \left( \int_0^1 h(1-t) \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)} dt \right) e_3 \\ &= e_1 - \left( \int_0^1 h(t) \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)} dt \right) e_2 \\ &\quad - \left( \int_0^1 h(t) \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)} dt \right) e_3 \\ &= e_1 - \left( \int_0^1 h(t) \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)} dt \right) (e_2 + e_3) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik Teorem 3.19 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} & T_{F,w} \left( \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_a^+ I_{\varphi} f(b) + {}_b^- I_{\varphi} f(a)] \right|, |f'(a)|, |f'(b)|, t \right) \\ &= \frac{2}{b-a} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} [{}_a^+ I_{\varphi} f(b) + {}_b^- I_{\varphi} f(a)] \right| \\ &\quad - \left( \int_0^1 h(t) \frac{|\Lambda(1-t) - \Lambda(t)|}{\Lambda(1)} dt \right) [|f'(a)| + |f'(b)|] \leq 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır. □

## 4. $F$ -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN YENİ HERMITE-HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde genellerştirilmiş konveks ( $F$ -konveks) fonksiyonlar için sırasıyla Riemann-Liouville kesirli integralleri ve Genelleştirilmiş kesirli integralleri içeren yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilecektir.

### 4.1. $F$ -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN YENİ HERMITE-HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde  $F$ -konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilecektir.

**Teorem 4.1.**  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $I^\circ$  da bir dönüşüm ve  $a, b \in I^\circ$   $a < b$  olsun. Ayrıca  $F \in \mathcal{F}$  dönüşümü ilk üç değişkenine göre lineer olmak üzere, eğer  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $F$ -konveks ise, bu durumda  $\alpha > 0$  için

$$F \left( f \left( \frac{a+b}{2} \right), \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b), \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a), \frac{1}{2} \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \quad (4.1)$$

ve

$$T_{F,w} \left( \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right], f(a) + f(b), f(a) + f(b) \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \quad (4.2)$$

eşitsizlikleri vardır. Burada  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  dir.

*İspat.*  $f$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan

$$F \left( f \left( \frac{x+y}{2} \right), f(x), f(y), \frac{1}{2} \right) \leq 0, \quad x, y \in [a, b]$$

eşitsizliği sağlanır.  $t \in [0, 1]$  için

$$x = \frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b \text{ ve } y = \frac{t}{2}b + \frac{2-t}{2}a$$

seçilirse

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), f\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right), f\left(\frac{t}{2}b + \frac{2-t}{2}a\right), \frac{1}{2}\right) \leq 0 \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) eşitsizliğini her iki yanı  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  ile çarpılıp (A3) aksiyomunu kullanılırsa

$$F\left(\alpha t^{\alpha-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right), \alpha t^{\alpha-1} f\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right), \alpha t^{\alpha-1} f\left(\frac{t}{2}b + \frac{2-t}{2}a\right), \frac{1}{2}\right) + L_{w(t)} \leq 0,$$

eşitsizliğine ulaşılır.  $[0, 1]$  aralığı üzerinde  $t$  değişkenine göre integral alınarak (A1) aksiyomunu kullanılırsa

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} dt, \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right) dt, \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\frac{t}{2}b + \frac{2-t}{2}a\right) dt, \frac{1}{2}\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right) dt \\ &= \frac{2^\alpha}{(b-a)^\alpha} \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} f(x) dx \\ &= \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) \end{aligned} \quad (4.4)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\frac{t}{2}b + \frac{2-t}{2}a\right) dt \\ &= \frac{2^\alpha}{(b-a)^\alpha} \int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \quad (4.5)$$

eşitlikleri yardımıyla

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b), \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a), \frac{1}{2}\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

eşitsizliği bulunur ve (4.1) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır.

Diğer yandan  $f$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan

$$F\left(f\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right), f(a), f(b), \frac{t}{2}\right) \leq 0, t \in [0, 1]$$

ve

$$F\left(f\left(\frac{t}{2}b + \frac{2-t}{2}a\right), f(b), f(a), \frac{t}{2}\right) \leq 0, t \in [0, 1]$$

eşitsizliklerine vardır.  $F$  dönüşümünün lineerliği kullanılarak  $t \in [0, 1]$  için

$$F\left(f\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right) + f\left(\frac{t}{2}b + \frac{2-t}{2}a\right), f(a) + f(b), f(a) + f(b), \frac{t}{2}\right) \leq 0$$

elde edilir.  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  olmak üzere (A3) aksiyomu uygulanırsa  $t \in [0, 1]$  için

$$F\left(\alpha t^{\alpha-1} \left[f\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right) + f\left(\frac{t}{2}b + \frac{2-t}{2}a\right)\right], \alpha t^{\alpha-1} [f(a) + f(b)], \alpha t^{\alpha-1} [f(a) + f(b)], \frac{t}{2}\right)$$

$$+ L_{w(t)} \leq 0,$$

eşitsizliği elde edilir.  $[0, 1]$  aralığında integral alınır ve (A2) aksiyomu kullanılırsa

$$T_{F,w}\left(\int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} \left[f\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right) + f\left(\frac{t}{2}b + \frac{2-t}{2}a\right)\right] dt, f(a) + f(b), f(a) + f(b)\right)$$

$$+ \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

sonucuna ulaşılır. (4.4) ve (4.5) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$T_{F,w}\left(\frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a), f(a) + f(b), f(a) + f(b)\right)$$

$$+ \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.  $\square$

**Sonuç 4.2.**  $\varepsilon \geq 0$  olmak üzere eğer Teorem 4.1 de  $F(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1 - u_4 u_2 - (1 - u_4) u_3 - \varepsilon$  seçilirse  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $\varepsilon$ -konveks olur ve

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \varepsilon &\leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right] \\ &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

*İspat.*  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  için (2.3) eşitliğinden

$$\int_0^1 L_{w(t)} dt = \varepsilon \int_0^1 (1 - \alpha t^{\alpha-1}) dt = 0 \quad (4.7)$$

bulunur. (2.1), (4.7) ve (4.1) ifadelerinden

$$\begin{aligned} 0 &\geq F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b), \frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a), \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \int_0^1 L_{w(t)} dt \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right] - \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \varepsilon \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right]$$

eşitsizliğine ulaşılır. Diğer yandan  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  için (2.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} T_{F,w}(u_1, u_2, u_3) &= u_1 - \alpha \left( \int_0^1 t^\alpha dt \right) u_2 \\ &\quad - \alpha \left( \int_0^1 (1-t)t^{\alpha-1} dt \right) u_3 - \varepsilon \\ &= u_1 - \frac{\alpha u_2 + u_3}{\alpha+1} - \varepsilon \end{aligned} \quad (4.8)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece (4.8) ve (4.2) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
0 &\geq T_{F,w} \left( \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right], \right. \\
&\quad \left. f(a) + f(b), f(a) + f(b) \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \\
&= \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right] - \frac{1}{\alpha+1} [\alpha (f(a) + f(b)) \\
&\quad + (f(a) + f(b))] - \varepsilon \\
&= \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right] - (f(a) + f(b)) - \varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right] \leq f(a) + f(b) + \varepsilon$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır.  $\square$

**Sonuç 4.3.** Eğer sonuç 4.2 da  $\varepsilon = 0$  alınırsa  $f$  konveks olur ve (4.6) eşitsizliği (2.11) eşitsizliğine dönüşür.

**Sonuç 4.4.** Eğer Teorem 4.1 de  $F(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1 - h(u_4)u_2 - h(1-u_4)u_3$  seçilirse  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $h$ -konveks olur ve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right] \\
&\leq \alpha \left( \int_0^1 [h(t) + h(1-t)] t^{\alpha-1} dt \right) \frac{f(a) + f(b)}{2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

*İspat.*  $L_{w(t)} = 0$  (2.3) ve (4.1) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &\geq F \left( f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b), \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a), \frac{1}{2} \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right) - h\left(\frac{1}{2}\right) \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right]$$

eşitsizliği bulunur.  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  için (2.7) ve (4.2) ifadelerinden

$$\begin{aligned} 0 &\geq T_{F,w} \left( \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right], f(a) + f(b), \right. \\ &\quad \left. f(a) + f(b) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \right) \\ &= \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right] - \alpha \left[ \int_0^1 h(t) t^{\alpha-1} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 h(1-t) t^{\alpha-1} dt \right] [f(a) + f(b)] \\ &= \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right] \\ &\quad - \alpha \left[ \int_0^1 [h(t) + h(1-t)] t^{\alpha-1} dt \right] [f(a) + f(b)] \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right] \leq \alpha \left( \int_0^1 [h(t) + h(1-t)] t^{\alpha-1} dt \right) [f(a) + f(b)]$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır.  $\square$

**Teorem 4.5.**  $I \subseteq \mathbb{R}, f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $I^\circ$  da bir dönüşüm ve  $a, b \in I^\circ, a < b$  olsun. Ayrıca  $F \in \mathcal{F}$  dönüşümü ilk üç değişkenine göre lineer olmak üzere, eğer  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $F$ -konveks ise, bu durumda  $\alpha > 0$  için

$$\begin{aligned} &F \left( f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{a^+}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{b^-}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{1}{2} \right) \\ &+ \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

ve

$$\begin{aligned} &T_{F,w} \left( \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{a^+}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + J_{b^-}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right], f(a) + f(b), f(a) + f(b) \right) \\ &+ \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  dır.

*İspat.* Bu teoremin ispatı Teorem 4.1 daki gibi yapılabilir.  $f$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan

$$F\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right), f(x), f(y), \frac{1}{2}\right) \leq 0, x, y \in [a, b]$$

eşitsizliği sağlanır.  $t \in [0, 1]$  için

$$x = \frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b, \text{ ve } y = \frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a,$$

alınırsa

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right), f\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right), \frac{1}{2}\right) \leq 0 \quad (4.11)$$

elde edilir. İlk olarak (4.11) eşitsizliğinin her iki yanını  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  ile çarpılıp (A3) aksiyomu kullanıldıktan sonra, elde edilen sonucun  $[0, 1]$  aralığı üzerinde integral alınıp (A1) aksiyomu uygulanırsa

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} dt, \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) dt, \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right) dt, \frac{1}{2}\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{a^+}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} J_{b^-}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{1}{2}\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

sonucuna ulaşılır ve (4.9) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır.

Diğer yandan  $f$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan  $t \in [0, 1]$  için

$$F\left(f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right), f(a), f(b), \frac{1+t}{2}\right) \leq 0$$

ve

$$F\left(f\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right), f(b), f(a), \frac{1+t}{2}\right) \leq 0$$

yazılır.  $F$  dönüşümünün lineerliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & F\left(f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) + f\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right), f(a) + f(b),\right. \\ & \left. f(a) + f(b), \frac{1+t}{2}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (4.11) eşitsizliğinin her iki yanı  $w(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  ile çarpılıp (A3) aksiyomu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & F\left(\alpha t^{\alpha-1}\left[f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) + f\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right)\right], \alpha t^{\alpha-1}\left[f(a) + f(b)\right],\right. \\ & \left. \alpha t^{\alpha-1}\left[f(a) + f(b)\right], \frac{1+t}{2}\right) + L_{w(t)} \leq 0, \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.  $[0, 1]$  aralığı üzerinde integral alınıp (A2) aksiyomu yardımıyla

$$\begin{aligned} & T_{F,w}\left(\int_0^1 \alpha t^{\alpha-1}\left[f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) + f\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right)\right] dt, f(a) + f(b), f(a) + f(b)\right) \\ & + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ve teoremin ispatı tamamlanır.  $\square$

**Sonuç 4.6.** Eğer teorem 4.5 de  $\varepsilon \geq 0$  olmak üzere  $F(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1 - u_4 u_2 - (1 - u_4) u_3 - \varepsilon$  seçilirse  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $\varepsilon$ -konveks olur ve

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \varepsilon & \leq \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{a^+}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + J_{b^-}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \\ & \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Sonuç 4.7.** Eğer Sonuç 4.6 da  $\varepsilon = 0$  alınırsa  $f$  konveks olur ve (4.12) eşitsizliği (2.12) eşitsizliğine dönüşür.

**Sonuç 4.8.** Teorem 4.1 de  $F(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1 - h(u_4)u_2 - h(1 - u_4)u_3$  seçilirse  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $h$ -konveks olur ve

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{a^+}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + J_{b^-}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \\ &\leq \alpha \left( \int_0^1 [h(t) + h(1-t)] t^{\alpha-1} dt \right) \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

## 4.2. $F$ -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN YENİ HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde  $F$ -konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integralleri içeren yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilecektir.

**Teorem 4.9.**  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  fonksiyonu tanımlansın  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $I^\circ$  da bir dönüşüm ve  $a, b \in I^\circ$ ,  $a < b$  olsun. Ayrıca  $F \in \mathcal{F}$  dönüşümü ilk üç değişkenine göre lineer olmak üzere, eğer  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $F$ -konveks ise, bu durumda

$$\begin{aligned} &F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{1}{\Lambda(1)} \left(\frac{a+b}{2}\right)^+ I_\varphi f(b), \frac{1}{\Lambda(1)} \left(\frac{a+b}{2}\right)^- I_\varphi f(a), \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

ve

$$\begin{aligned} &T_{F,w}\left(\frac{1}{\Lambda(1)} \left[ \left(\frac{a+b}{2}\right)^+ I_\varphi f(b) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^- I_\varphi f(a) \right], f(a) + f(b), \right. \\ &\left. f(a) + f(b) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada  $w(t) = \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t\Lambda(1)}$  dir.

*İspat.*  $f$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan

$$F\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right), f(x), f(y), \frac{1}{2}\right) \leq 0, \quad \forall x, y \in [a, b]$$

eşitsizliği vardır.  $t \in [0, 1]$  için

$$x = \frac{t}{2}a + \left(\frac{2-t}{2}\right)b \quad \text{ve} \quad y = \left(\frac{2-t}{2}\right)a + \frac{t}{2}b,$$

alınırsa

$$F \left( f \left( \frac{a+b}{2} \right), f \left( \frac{t}{2}a + \left( \frac{2-t}{2} \right) b \right), f \left( \left( \frac{2-t}{2} \right) a + \frac{t}{2}b \right), \frac{1}{2} \right) \leq 0 \quad (4.15)$$

yazılır. (4.15) eşitsizliği  $w(t) = \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t\Lambda(1)}$  ile çarpılıp (A3) aksiyomu kullanılırsa,

$$F \left( \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t\Lambda(1)} f \left( \frac{a+b}{2} \right), \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t\Lambda(1)} f \left( \frac{t}{2}a + \left( \frac{2-t}{2} \right) b \right), \right. \\ \left. \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t\Lambda(1)} f \left( \left( \frac{2-t}{2} \right) a + \frac{t}{2}b \right), \frac{1}{2} \right) + L_{w(t)} \leq 0$$

eşitsizliği elde edilir.  $t$  değişkenine göre  $[0, 1]$  aralığında integral alınarak (A1) aksiyomu kullanılırsa

$$F \left( \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\Lambda(1)} \int_0^1 \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t} dt, \frac{1}{\Lambda(1)} \int_0^1 \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t} f \left( \frac{t}{2}a + \left( \frac{2-t}{2} \right) b \right) dt, \right. \\ \left. \frac{1}{\Lambda(1)} \int_0^1 \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t} f \left( \left( \frac{2-t}{2} \right) a + \frac{t}{2}b \right) dt, \frac{1}{2} \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

bulunur. Buradan

$$\int_0^1 \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t} f \left( \frac{t}{2}a + \left( \frac{2-t}{2} \right) b \right) dt \\ = \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{\varphi(b-x)}{b-x} f(x) dx \\ = \left(\frac{a+b}{2}\right)^+ I\varphi f(b) \quad (4.16)$$

ve

$$\int_0^1 \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t} f \left( \left( \frac{2-t}{2} \right) a + \frac{t}{2}b \right) dt \\ = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{\varphi(x-a)}{x-a} f(x) dx$$

$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^{-1} I_{\varphi} f(a), \quad (4.17)$$

eşitlikleri yardımıyla (4.13) eşitsizliğine ulaşılır.

Diğer yandan  $f$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan  $t \in [0, 1]$  için

$$F\left(f\left(\frac{t}{2}a + \left(\frac{2-t}{2}\right)b\right), f(a), f(b), t\right) \leq 0$$

ve

$$F\left(f\left(\left(\frac{2-t}{2}\right)a + \frac{t}{2}b\right), f(a), f(b), t\right) \leq 0$$

eşitsizlikleri vardır.  $F$  dönüşümünün lineerliği kullanılarak

$$F\left(f\left(\frac{t}{2}a + \left(\frac{2-t}{2}\right)b\right) + f\left(\left(\frac{2-t}{2}\right)a + \frac{t}{2}b\right), f(a) + f(b), f(a) + f(b), t\right) \leq 0$$

eşitsizliği yazılır. Eşitsizliğin her iki yanını  $w(t) = \frac{\varphi\left(\frac{(b-a)}{2}t\right)}{t\Lambda(1)}$  ile çarpılıp (A3) aksiyomunu uygulanırsa

$$F\left(\frac{\varphi\left(\frac{(b-a)}{2}t\right)}{t\Lambda(1)} \left[ f\left(\frac{t}{2}a + \left(\frac{2-t}{2}\right)b\right) + f\left(\left(\frac{2-t}{2}\right)a + \frac{t}{2}b\right) \right], \frac{\varphi\left(\frac{(b-a)}{2}t\right)}{t\Lambda(1)} [f(a) + f(b)], \frac{\varphi\left(\frac{(b-a)}{2}t\right)}{t\Lambda(1)} [f(a) + f(b)], t\right) + L_{w(t)} \leq 0$$

elde edilir.  $[0, 1]$  aralığında integral alınıp (A2) aksiyomu uygulanırsa

$$T_{F,w}\left(\int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{(b-a)}{2}t\right)}{t\Lambda(1)} \left[ f\left(\frac{t}{2}a + \left(\frac{2-t}{2}\right)b\right) + f\left(\left(\frac{2-t}{2}\right)a + \frac{t}{2}b\right) \right] dt, f(a) + f(b), f(a) + f(b)\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan (4.16) ve (4.17) eşitlikleri yardımıyla

$$T_{F,w}\left(\frac{1}{\Lambda(1)} \left[ \left(\frac{a+b}{2}\right)^+ I_{\varphi} f(b) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^- I_{\varphi} f(a) \right], f(a) + f(b), f(a) + f(b)\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

yazılır ve Teorem 4.9 ispatı tamamlanır.  $\square$

**Sonuç 4.10.** Teorem 4.9, de  $\varphi(t) = t$  seçilirse aşağıdaki

$$F \left( f \left( \frac{a+b}{2} \right), \frac{2}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) dt, \frac{2}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt, \frac{1}{2} \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \quad (4.18)$$

ile

$$T_{F,w} \left( \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) dt, f(a) + f(b), f(a) + f(b) \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \quad (4.19)$$

eşitsizlikleri elde edilir ve burada  $w(t) = 1$  dir.

**Sonuç 4.11.** Eğer Teorem 4.9 de  $\varphi(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$  seçilirse (4.13) ve (4.14) eşitsizlikleri sırasıyla (4.1) ve (4.2) eşitsizliklerine dönüşür.

**Sonuç 4.12.** Teorem 4.9 de  $\varphi(t) = \frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$  alınırsa  $k$ -Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$F \left( f \left( \frac{a+b}{2} \right), \frac{2^{\frac{\alpha}{k}} \Gamma_k(\alpha+k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} I_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha, {}_k f(b), \frac{2^{\frac{\alpha}{k}} \Gamma_k(\alpha+k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} I_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha, {}_k f(a), \frac{1}{2} \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

ve

$$T_{F,w} \left( \frac{2^{\frac{\alpha}{k}} \Gamma_k(\alpha+k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[ I_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha, {}_k f(b) + I_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha, {}_k f(a) \right], f(a) + f(b), f(a) + f(b) \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

eşitsizlikler elde edilir. Burada  $w(t) = \frac{\alpha}{k} t^{\frac{\alpha}{k}-1}$  dir.

**Teorem 4.13.**  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  fonksiyonu tanımlansın  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $I^\circ$  da bir dönüşüm ve  $a, b \in I^\circ$ ,  $a < b$  olsun. Ayrıca  $F \in \mathcal{F}$  dönüşümü ilk üç değişkenine göre lineer olmak üzere, eğer  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $F$ -konveks ise, bu durumda

$$F \left( f \left( \frac{a+b}{2} \right), \frac{1}{\Lambda(1)} {}_a I_\varphi f \left( \frac{a+b}{2} \right), \frac{1}{\Lambda(1)} {}_b I_\varphi f \left( \frac{a+b}{2} \right), \frac{1}{2} \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \quad (4.20)$$

ve

$$T_{F,w} \left( \frac{1}{\Lambda(1)} [a+I_{\varphi} f \left( \frac{a+b}{2} \right) + b-I_{\varphi} f \left( \frac{a+b}{2} \right)], f(a) + f(b), f(a) + f(b) \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \quad (4.21)$$

elde edilir. Burada  $w(t) = \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t\Lambda(1)}$  dir.

*İspat.*  $f$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan

$$F \left( f \left( \frac{x+y}{2} \right), f(x), f(y), \frac{1}{2} \right) \leq 0, \forall x, y \in [a, b]$$

yazılır.  $t \in [0, 1]$  için

$$x = \left( \frac{1+t}{2} \right) a + \left( \frac{1-t}{2} \right) b \text{ ve } y = \left( \frac{1-t}{2} \right) a + \frac{1+t}{2} b$$

seçilirse

$$F \left( f \left( \frac{a+b}{2} \right), f \left( \left( \frac{1+t}{2} \right) a + \left( \frac{1-t}{2} \right) b \right), f \left( \left( \frac{1-t}{2} \right) a + \frac{1+t}{2} b \right), \frac{1}{2} \right) \leq 0 \quad (4.22)$$

olur. (4.22) eşitsizliğinin her iki yanını  $w(t) = \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t\Lambda(1)}$  ile çarpılıp (A3) aksiyomu kullanılırsa

$$F \left( \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t\Lambda(1)} f \left( \frac{a+b}{2} \right), \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t\Lambda(1)} f \left( \left( \frac{1+t}{2} \right) a + \left( \frac{1-t}{2} \right) b \right), \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t\Lambda(1)} f \left( \left( \frac{1-t}{2} \right) a + \left( \frac{1+t}{2} \right) b \right), \frac{1}{2} \right) + L_{w(t)} \leq 0$$

eşitsizliği elde edilir.  $t$  değişkenine göre  $[0, 1]$  aralığında integral alınarak (A1) aksiyomu kullanılırsa

$$F \left( \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\Lambda(1)} \int_0^1 \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t} dt, \frac{1}{\Lambda(1)} \int_0^1 \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t} f \left( \left( \frac{1-t}{2} \right) a + \left( \frac{1+t}{2} \right) b \right) dt, \frac{1}{\Lambda(1)} \int_0^1 \frac{\varphi\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)t\right)}{t} f \left( \left( \frac{1+t}{2} \right) a + \left( \frac{1-t}{2} \right) b \right) dt, \frac{1}{2} \right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0 \quad (4.23)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{(b-a)t}{2}\right)}{t} f\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)a + \left(\frac{1-t}{2}\right)b\right) dt \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{a+b}{2} - x\right)}{\frac{a+b}{2} - x} f(x) dx \\
&= {}_{a+}I_{\varphi}f\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{(b-a)t}{2}\right)}{t} f\left(\left(\frac{1-t}{2}\right)a + \frac{1+t}{2}b\right) dt \\
&= \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{\varphi\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{x - \frac{a+b}{2}} f(x) dx \\
&= {}_{b-}I_{\varphi}f\left(\frac{a+b}{2}\right),
\end{aligned} \tag{4.25}$$

eşitlikleri (4.23) eşitsizliğinde yazılırsa (4.20) eşitsizliğine ulaşılır.

Diğer yandan  $f$  fonksiyonu  $F$ -konveks olduğundan  $t \in [0, 1]$  için

$$F\left(f\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)a + \left(\frac{1-t}{2}\right)b\right), f(a), f(b), t\right) \leq 0$$

ve

$$F\left(f\left(\left(\frac{1-t}{2}\right)a + \frac{1+t}{2}b\right), f(a), f(b), t\right) \leq 0$$

yazılır.  $F$  nin lineerliğinden

$$F\left(f\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)a + \left(\frac{1-t}{2}\right)b\right) + f\left(\left(\frac{1-t}{2}\right)a + \frac{1+t}{2}b\right),\right.$$

$$\left. f(a) + f(b), f(a) + f(b), t\right) \leq 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik  $w(t) = \frac{\varphi\left(\frac{(b-a)t}{2}\right)}{t\Lambda(1)}$  ile çarpılıp (A3) aksiyomunu uygulanırsa

$$F\left(\frac{\varphi\left(\frac{(b-a)t}{2}\right)}{t\Lambda(1)}\left[f\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)a + \left(\frac{1-t}{2}\right)b\right) + f\left(\left(\frac{1-t}{2}\right)a + \left(\frac{1+t}{2}\right)b\right)\right],\right. \\ \left.\frac{\varphi\left(\frac{(b-a)t}{2}\right)}{t\Lambda(1)}[f(a) + f(b)], \frac{\varphi\left(\frac{(b-a)t}{2}\right)}{t\Lambda(1)}[f(a) + f(b)], t\right) + L_{w(t)} \leq 0$$

bulunur.  $[0, 1]$  aralığı üzerinde integral alınıp (A2) aksiyomu kullanılırsa

$$T_{F,w}\left(\int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{(b-a)t}{2}\right)}{t\Lambda(1)}\left[f\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)a + \left(\frac{1-t}{2}\right)b\right) + f\left(\left(\frac{1-t}{2}\right)a + \left(\frac{1+t}{2}\right)b\right)\right] dt, f(a) + f(b), f(a) + f(b)\right) \\ + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0,$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan (4.24) ve (4.25) eşitlikleri yardımıyla

$$T_{F,w}\left(\frac{1}{\Lambda(1)}\left[a_+ I_{\varphi} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + b_- I_{\varphi} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right], f(a) + f(b), f(a) + f(b)\right) + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

sonucuna ulaşılır ve teoremin ispatı tamamlanır.  $\square$

**Sonuç 4.14.** Eğer Teorem 4.13 de  $\varphi(t) = t$  alınırsa (4.20) ile 4.21) eşitsizlikleri sırasıyla (4.18) ve (4.19) eşitsizliklerine dönüşür.

**Sonuç 4.15.** Eğer Teorem 4.9 de  $\varphi(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$  alınırsa (4.20) ile 4.21) eşitsizlikleri sırasıyla (4.9) ve (4.10) eşitsizliklerine dönüşür.

**Sonuç 4.16.** Eğer Teorem 4.13 de  $\varphi(t) = \frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$  alınırsa  $k$ -Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$F\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{2^{\frac{\alpha}{k}}\Gamma_k(\alpha+k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} I_{b^-}^{\alpha}, kf\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{2^{\frac{\alpha}{k}}\Gamma_k(\alpha+k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} I_{a^+}^{\alpha}, kf\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{1}{2}\right) \\ + \int_0^1 L_{w(t)} dt \leq 0$$

ve

$$T_{F,w} \left( \frac{2^{\frac{\alpha}{k}} \Gamma_k(\alpha + k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[ I_{a^+, k}^{\alpha} f \left( \frac{a+b}{2} \right) + I_{b^-, k}^{\alpha} f \left( \frac{a+b}{2} \right) \right], f(a) + f(b), f(a) + f(b) \right) \\ + \int_0^1 L_w(t) dt \leq 0$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada  $w(t) = \frac{\alpha}{k} t^{\frac{\alpha}{k}-1}$  dir.



## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında  $F$ -konveks fonksiyonlar için Riemann İntegralleri, Riemann Liouville Kesirli İntegralleri ve Genelleştirilmiş Kesirli İntegralleri içeren Hermite-Hadamard eşitsizlikleri üzerinde durulmuştur. Bu eşitsizliklerin özel durumlarının literatürde var olan bir çok sonucu verdiği gösterilmiştir.

Sonraki çalışmalarda  $F$ -konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville Kesirli integralleri ve Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller içeren Orta-Nokta ve Yamuk tipli eşitsizlikler elde edilebilir.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] D. Mitrinović and I. Lacković, “Hermite and convexity,” *Aequationes mathematicae*, vol. 28, no. 1, pp. 229–232, 1985.
- [2] J. E. Pecaric and Y. L. Tong, *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*. San Diego, USA: Academic Press, 1992.
- [3] B. Defnetti, “Sulla strati cazioni convesse,” *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, vol. 30, pp. 173–183, 1949.
- [4] D. H. Hyers, G. Isac, and T. M. Rassias, “Approximately convex functions,” in *Stability of Functional Equations in Several Variables*. Springer, 1998, pp. 166–179.
- [5] H. Hudzik and L. Maligranda, “Some remarks ons-convex functions,” *Aequationes Mathematicae*, vol. 48, no. 1, pp. 100–111, 1994.
- [6] O. L. Mangasarian, “Pseudo-convex functions,” in *Stochastic Optimization Models in Finance*. Elsevier, 1975, pp. 23–32.
- [7] V. Mihesan, “A generalization of the convexity,” in *Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca, Romania*, 1993.
- [8] S. Varošanec, “On h-convexity,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 326, no. 1, pp. 303–311, 2007.
- [9] G. Toader, “On a generalization of the convexity,” *Mathematica*, vol. 30, no. 53, pp. 83–87, 1988.
- [10] S. Dragomir, “On some new inequalities of hermite-hadamard type for  $m$ -convex functions,” *Tamkang Journal of Mathematics*, vol. 33, no. 1, pp. 55–66, 2002.
- [11] S. Dragomir and G. Toader, “Some inequalities for  $m$ -convex functions,” *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, vol. 38, no. 1, pp. 21–28, 1993.
- [12] S. D.-S. Fitzpatrick, “The hadamard’s inequality for  $s$ -convex functions in the second sense,” *Demonstratio Mathematica*, vol. 32, no. 4, pp. 687–696, 1999.
- [13] M. Z. Sarikaya, A. Saglam, and H. Yildirim, “On some hadamard-type inequalities for  $h$ -convex functions,” *Journal of Mathematical Inequalities*, vol. 2, no. 3, pp. 335–341, 2008.
- [14] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*. Ankara, Türkiye: Gazi Kitapevi, 2018.
- [15] D. S. Mitrinovic and P. M. Vasic, *Analytic inequalities*. Berlin/New York: Springer, 1970, vol. 61.
- [16] A. W. Roberts, *Convex functions*. North Holland: Elsevier, 1993.

- [17] B. G. Pachpatte, *Analytic inequalities: recent advances*. Amsterdam, Paris: Atlantis press, 2012, vol. 3.
- [18] S. S. Dragomir and C. Pearce, “Selected topics on hermite-hadamard inequalities and applications,” *Mathematics Preprint Archive*, vol. 2003, no. 3, pp. 463–817, 2003.
- [19] S. Dragomir and R. Agarwal, “Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 11, no. 5, pp. 91–95, 1998.
- [20] U. S. Kirmaci, “Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 147, no. 1, pp. 137–146, 2004.
- [21] B. Samet, “On an implicit convexity concept and some integral inequalities,” *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2016, no. 1, pp. 1–16, 2016.
- [22] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006, vol. 204.
- [23] R. Gorenflo and F. Mainardi, “Fractional calculus,” in *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*. Springer, 1997, pp. 223–276.
- [24] K. S. Miller and B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. New York, USA: Wiley, 1993.
- [25] M. Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz, and N. Başak, “Hermite–hadamard’s inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities,” *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 57, no. 9-10, pp. 2403–2407, 2013.
- [26] M. Z. Sarikaya and H. Yildirim, “On hermite-hadamard type inequalities for riemann-liouville fractional integrals,” *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 17, no. 2, pp. 1049–1059, 2016.
- [27] S. S. Dragomir, “Some inequalities of hermite-hadamard type for symmetrized convex functions and riemann-liouville fractional integrals,” *RGMIA Res. Rep. Coll*, vol. 20, p. 15, 2017.
- [28] M. Z. Sarikaya and F. Ertugral, “On the generalized hermite–hadamard inequalities,” *Annals of the University of Craiova Mathematics and Computer Science Series*, vol. 47, no. 1, pp. 193–213, 2020.
- [29] M. A. Ali, H. Budak, M. Abbas, M. Z. Sarikaya, and A. Kashuri, “Hermite-hadamard type inequalities for h-convex functions via generalized fractional integrals,” *Journal of Mathematical Extension*, vol. 14, no. 4, 2019.
- [30] F. Ertuğral, M. Z. Sarikaya, and H. Budak, “On hermite hadamard type inequalities associated with the generalized fractional integrals,” yayına gönderildi.
- [31] P. Mohammed, “On new trapezoid type inequalities for h-convex functions via generalized fractional integral,” *Fractional Differential Calculus*, vol. 6, no. 4, pp. 125–128, 2018.

- [32] P. O. Mohammed and M. Z. Sarikaya, “On generalized fractional integral inequalities for twice differentiable convex functions,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 372, p. 112740, 2020.
- [33] F. Qi, P. O. Mohammed, J.-C. Yao, and Y.-H. Yao, “Generalized fractional integral inequalities of hermite–hadamard type for  $(\alpha, m)$ -convex functions,” *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2019, no. 1, pp. 1–17, 2019.
- [34] A. Kashuri, M. A. Ali, M. Abbas, and H. Budak, “New inequalities for generalized  $m$ -convex functions via generalized fractional integral operators and their applications,” *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, vol. 10, no. 2, pp. 275–299, 2019.
- [35] A. Kashuri, E. Set, and R. Liko, “Some new fractional trapezium-type inequalities for preinvex functions,” *Fractal and Fractional*, vol. 3, no. 1, p. 12, 2019.
- [36] H. Budak and M. Z. Sarikaya, “On ostrowski type inequalities for  $f$ -convex function,” in *AIP Conference Proceedings*, vol. 1833, no. 1. AIP Publishing LLC, 2017, p. 020057.
- [37] H. Budak, T. Tunc, and M. Z. Sarikaya, “On hermite-hadamard type inequalities for  $f$ -convex function,” *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 20, no. 1, pp. 169–191, 2019.
- [38] H. Budak, M. A. Ali, and A. Kashuri, “Hermite-hadamard type inequalities for  $f$ -convex functions involving generalized fractional integrals,” p. Basımda, 2020.
- [39] P. O. Mohammed and M. Z. Sarikaya, “Hermite–hadamard type inequalities for  $f$ -convex function involving fractional integrals,” *Journal of inequalities and applications*, vol. 2018, no. 1, pp. 1–33, 2018.
- [40] M. Z. Sarikaya, T. Tunc, and H. Budak, “Simpson’s type inequality for  $f$  convex function,” *Mathematics and Informatics - Facta Universitatis, Series*, vol. 32, no. 5, pp. 747–753, 2017.
- [41] E. Set and I. Mumcu, “Hermite-hadamard type inequalities for  $f$ -convex functions via katukampola fractional integral,” 2018, yayına gönderildi.
- [42] H. Budak, M. Z. Sarikaya, and M. K. Yıldız, “Hermite-hadamard type inequalities for  $f$ -convex function involving fractional integrals,” *Filomat*, vol. 32, no. 16, pp. 5509–5518, 2018.

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Pınar KÖSEM  
Doğum Tarihi ve Yeri : İstanbul 1995  
Yabancı Dili : İngilizce  
Eposta : pinarksm18@gmail.com

## ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2020
Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2018
Lise		Mehmetçik Anadolu Lisesi	2013

### A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A1.Hüseyin Budak, Pınar Kösem ve Artion Kashuri, “New inequalities for F-convex functions pertaining generalized fractional integrals,” *Mathematica Moravica*, Basımda.

A2.Hüseyin Budak, Ebru Pehlivan ve Pınar Kösem, “On extensions of generalized fractional Hermite-Hadamard inequalities,” *Bulletin of the Allahabad Mathematical Society*, Basımda.

A3.Hüseyin Budak, Ebru Pehlivan ve Pınar Kösem, “On new extensions of Hermite-Hadamard inequalities for generalized fractional integrals,” *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, Basımda.