DÜZCE ÜNİVERSİTESİ | LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

JAİN OPERATÖRLERİNİN YENİ BİR SINIFI

MUHAMMET CİVELEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. FUAT USTA

DÜZCE, 2024

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LISANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

JAİN OPERATÖRLERİNİN YENİ BİR SINIFI

Muhammet CİVELEK tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Fuat USTA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Fuat USTA
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet GÜMÜŞ
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 04/06/2024

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim

04/06/2024

Muhammet CİVELEK

TEŞEKKÜR

Lisans öğretimimde desteklerinden dolayı YÖK’e ve TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programı Başkanlığı (BİDEB) 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında desteklerinden dolayı TÜBİTAK’a, TÜBİTAK kurs ve seminerlerinde yer alan eğitmenlere,ve ayrıca tüm lisans eğitmenlerime, desteklerini benden hiç esirgemeyen yüksek lisans danışman hocam Doç. Dr. Fuat USTA’ya ve değerli aileme teşekkürlerimi sunarım.

04/06/2024 **Muhammet CİVELEK**

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ vi
KISALTMALAR vii
ÖZET viii
ABSTRACT ix
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 4
2.1. LİNEER OPERATÖRLER 4
2.2. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN MONOTONLUK ÖZELLİĞİ... 5
2.3. METRİK UZAY 6
2.4. NORMLU UZAY 6
2.5. SINIRLI LİNEER OPERATÖRLER 7
2.6. LİNEER OPERATÖRLERİN SÜREKLİLİĞİ 8
2.7. SÜREKLİLİK MODULÜ 8
3. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKINSAMA ŞARTLARI 9
3.1. KOROVKİN TEOREMİ 9
3.2. BERNSTEİN OPERATÖRLERİ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ 11
3.3. SZASZ OPERATÖRÜ 16
4. JAİN OPERATÖRLERİ VE YENİ BİR YAPISI 20
4.1. JAİN OPERATÖRÜ 20
4.2. JAİN OPERATÖRLERİNİN YENİ BİR YAPISI 28
4.3. YAKINSAMA SONUÇLARI 36
4.4. VORONOVSKAYA TİPİ TEOREM 41
5. SAYISAL ÖRNEKLER 43
5.1. NÜMERİK ÖRNEK I 43
5.2. ÖRNEK II 45
6. SONUÇ 48
7. KAYNAKLAR 49
ÖZGEÇMİŞ 50

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 5.1. $u(x) = \dfrac{x^2}{x^2+25}$ fonksiyonu için yakınsama sonuçları.. 44
Şekil 5.2. $u(x) = \dfrac{x^2}{x^2+25}$ fonksiyonu için hata sonuçları.. 45
Şekil 5.3. $u(x) = x^3e^{-3x}$ fonksiyonu için yakınsama sonuçları.. 46
Şekil 5.4. $u(x) = x^3e^{-3x}$ fonksiyonu için hata sonuçları.. 47

KISALTMALAR

$B_n(f;x)$	Bernstein operatörü
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^2[a,b]$	$f,\ f',\ f'' \in C[a,b]$ olan fonksiyon uzayı
$L_n(u;x)$	Baskakov operatörü
$S_n(u;x)$	Szazs operatörü
$J_n^{[\mu]}(u;x)$	Jain operatörü
$\|.\|_\infty$	Banach normlu uzayı
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$	f_n fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(u;x)$	Jain Operatörünün yeni bir yapısı

ÖZET

JAİN OPERATÖRLERİNİN YENİ BİR SINIFI

Muhammet CİVELEK
Düzce Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Fuat USTA
Haziran 2024, 49 sayfa

Bu tez 7 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu kısımda tezde ele alınan başlangıçta Jain operatörleri olmak üzere tezin ilerleyen safhalarında verilecek olan diğer operatörler ile ilgili ek bilgiler verilecek olup, geçmişte bu konu ile ilgili yapılan çalışmalardan ve sonuçlarından bahsedilecektir. Tezin ikinci bölümünde ise tezimizin ilerleyen bölümlerinde kullanacak olacağımız bazı operatörlerin özellikleri ile ilgili olacak temel kavramlar, tanımlar ve teoremlere yer verilecektir.Üçüncü bölümde ise lineer Pozitif operatörlerin yakınsama şartları verilecek olup, yakınsama koşulları ile ilgili yapılmış çalışmalara yer verilecektir.Tezimizin de asıl konusu olan Jain tipi operatörlerin yakınsama koşulları ve yeniden yapılandırılmış haline tezin 4. bölümünde yer verilecektir.Yeni tanımlanmış olan operatörümüzün sayısal örnekleri ve bu örneklerin grafik üzerindeki gösterimleri, diğer operatörler ile grafik üzerindeki karşılaştırılmaları bölüm 5'de detaylı bir şekilde gösterilecektir.

Anahtar sözcükler: Bernstein Operatörü, Jain Operatörü,Lineer Pozitif Operatörler , Szalzs Operatörü, Szalzs-Mirakjan Operatorü, Vronoskaya Tipi Teorem, Korovkin-type Teorem, Ağırlık Fonksiyonu ve Yakınsaması

ABSTRACT

A NEW CONSTRUCTİON OF JAİN'S OPERATORS

Muhammet CİVELEK
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fuat USTA
June 2024, 49 pages

This thesis consist of 7 sections. The first section is dedicated to introduction. In introduction chapter, the knowledge of especially Jain Type operators and other given operators will be mentioned and also some of the studies related to these operators will be given.In the second chapter of our thesis there will be some definitions, theorems and terms which will be used in the further section of the dissertation. Approximation conditions of Linear Positive Operators and some of the researches related to these operators which were done in the history by a number of researchers and their studies will be given in chapter three. The main topic of our thesis and its direct approximation results, reshaped model of Jain Type operators will be mentioned in this chapter. In addition to all these things some of the proof and theorems related to Jain operators will be given. Numerical examples, graphics of these examples and comparison of our newly defined operator with other classic linear positive operators will be shown in detail on graphics.

Keywords: Bernstein operators, Jain Operators, Linear Positive Operators , Szalzs-Mirakjan Operators, Vronoskaya Type Theorem, Korovkin-Type Theorem, Weighted Approximation

1. GİRİŞ

Yakınsama teorisi matematik analiz alanında yapılan en önemli çalışmalardan bir tanesidir. Bu alanda şu ana kadar birçok çalışma yapılmış olup bu çalışmalar günümüzde de devam etmektedir. Bu çalışmaların bir çoğu lineer pozitif operatörler için Korovkin tipi operatörlere dayanmaktadır.

Fonksiyon uzaylarında ' sürekli fonksiyonlara yakınsama' proplemi ilk olarak Weierstrass tarafından ele alınmıştır. Bundan dolayı yakınsama teorisindeki en önemli teoremlerden biri olan Weierstrass yakınsama teoremi meydana çıkmıştır. 1885 yılında Weierstrass [a,b] aralığındaki her sürekli fonsiyona bir polinom fonksiyonunun yakınsayabileceğini söyledi. Bu rağmen Weierstrass bu polinomların ne tür polinomlar olduğunu ve ne tip özelliklere sahip olması gerektiği hakkında bilgi vermedi. Daha sonra bir grup matematikçi bu tip polinomları elde etmek için çalışmalar gerçekleştirdi. Bu tip polinomların açık formu Bernstein tarafından 1912 yılında verilmiştir. Bu form;

$$B_n(u;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}(x) u\left(\frac{k}{n}\right), \qquad x \in [0,1], \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

Bernstein $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için [0,1] aralığında sürekli bir fonksiyona yakınsamanın mümkün olabileceğini kanıtlamış oldu. Daha sonra bu operatör kullanılarak farklı operatörler tanıtılmıştır. Diğer yandan, Bohman ve Korovkin lineer pozitif operatörlerin sınırlı aralıktaki sürekli fonksiyonlara yakınsaması hakkında çok önemli teoremler vermiştir. Bu teoremlerde sınırlı bir aralıkta düzgün yakınsmanın meydana gelebilmesi için üç adımın yeterli olacağı gösterilmiştir. Korovkin teoremi yakınsma teorisi alanında yapılan çalışmalara oldukça fazla katkıda bulunmuştur. Daha sonra birtakım pozitif lineer operatörlerin değerleri (Mayer-König-Zeller operatörleri, Szasz- Mirakjan operatörleri, Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri) yukarıda tanıtılan Korovkin operatörü yardımı ile kontrol edilmiştir. Operatörler tanıtıldıktan sonra, bu operatörlerin birçok genellemeleri tartışılmıştır. Son yıllarda, Durrmayer ve Kantorovich tipi olarak tanınan integral tipi genellemeler literatürde çok fazla önem kazanmıştır.

Daha sonra 1972 yılında Jain, f $\in C(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu için Poisson tipi dağılım yardımı ile aşağıdaki operatörü tanımlamıştır.

$$J_n^{[\mu]}(u;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{nx(nx+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\mu)} u\left(\frac{k}{n}\right), \qquad x \geq 0, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

$\mu \in [0,1)$ ve $\mu \to 0, n \to\ infty$ Bu ifade Poisson tipi dağılım olarak literatürde yerini alır. Buna ek olarak $\mu = 0$ olarak seçilirse yukarıda tanıtılan Jain tipi operatör diğer bir operatör olan Szasz-Mirakyan operatörüne dönüşür.

Bu operatör ise;

$$S_n(u;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} e^{-(nx)} u\left(\frac{k}{n}\right), \qquad x \geq 0, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

Daha sonra Jain operatörlerinin asimptotik formulü Farcas tarafından tanıtılmıştır. 2013 yılına gelindiğinde Agratini Jain tipi operatörlerin istatistiksel yakınsama özelliklerini ve yerel yaklaşım sonuçlarını elde etti. Diğer bir yandan bu operatörün farklı genellmeleri ve iki değişkenli versiyonunun yakınsama özellikleri üzerine de çalışmalar vardır.

Tüm bunlara ek olarak, Cardenes-Morales klasik Korovkin test fonksiyonları olan $\{1,t,t^2\}$ yerine τ ya bağlı olarak $\{1,\tau,\tau^2\}$ değerlerini koruyan Bernstein tipi operatörlerinin yeni sınıfını göstermiştir. Bu bulgular ile birlikte ,diğer tip lineer pozitif operatörler olan Bernstein-Durmeyyer, Szasz-Mirakyan,Bernstein-Chlodowsky, Balazs, Baskakov, Meyer-König ve Zeller tipi operatörler için de farklı tipteki genellemeler gösterilmiştir.
Jain operatörleri için bu genellemlerden biri Olgun tarafından aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

$$J_n^{[\tau,\mu]}(u;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n\tau(x)(n\tau(x)+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(n\tau(x)+k\mu)} (\mu \circ \tau^{-1})\left(\frac{k}{n}\right) \tag{1.4}$$

$\mu \in [0,1)$ ve τ da aşağıdaki yönergeleri sağlayan sürekli bir fonksiyon.

A1) $\tau(0) = 0$ ve $\inf_{x\in\mathbb{R}} \tau'(x) \geq 0$

A2) τ, $\mathbb{R}^+$ da sınırsız türevlenebilen bir fonksiyon

Bu çalışmada lineer pozitif operatörler için Voronvskaya tipi teoremler gösterilip ispat edilecektir. Bunlara ek olarak ise $J_n^{[\tau,\mu]}(u;x)$ operatörünün bazı koruma özellikleri üzerine çalışmalar aktarılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tezimizin bu bölümünde ilerleyen bölümlerde kullanacak olan ve bahsedilecek bazı temel kavramlardan bahsedilip bilgi verilecektir.

2.1. LİNEER OPERATÖRLER

Tanım 2.1. X ve Y iki lineer fonksiyon uzayı olsun.

$$L : X \to Y \tag{2.1}$$

olacak şekilde L tanımlansın.Eğer X den alınan herbir f fonksiyonuna karşılık olarak Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı var ise bu durumda X uzayında bir operatör tanımlanmış olur ve

$$L(f;x) = g(x)$$

olarak gösterilir.
(2.1) de de görüleceği üzere X uzayı L operatörünün tanım bölgesidir ve X=D(L) olarak gösterilir. $L(f;x)$ Y uzayının bir elemanı olacağından L'nin görüntü kümesi olarak adlandırılır ve $R(L)$ olarak gösterilir.

Tanım 2.2. $\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ ve $\forall f_1, f_2 \in X$ olmak üzere

$$L(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2) = \beta_1 L(f_1) + \beta_2 L(f_2) \tag{2.2}$$

olarak yazılabiliyorsa L ye bir lineer operatör denir.

Tanım 2.3. Eğer $\forall f \geq 0$ için $L(f) \geq 0$ oluyorsa L operatörüne pozitif operatör denir. Diğer bir şekilde açıklayacak olursak $\forall t \in T_f$ için $f(t) \geq 0$ iken $L(f(t)) \geq 0$ oluyor ise L operatörüne pozitif lineer operatör denir.

$L : X \to$ Y

$$X^{+}=\{f \in X : f(t) \geq 0\}$$

$L(X^{+}) \subset Y^{+}$ ise L bir pozitif lineer operatördür.

Yukarıdaki tanım (2.2) ve (2.3)'den de anlaşılacağı üzere bir operatörün Lineer pozitif operatör olması için operatörün hem pozitiflik hem de Lineerlik özelliğini aynı anda sağlaması gerekmektedir.

2.2. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN MONOTONLUK ÖZELLİĞİ

Yardımcı Teorem 2.4. L Lineer pozitif operatör olsun. O halde $\forall f(t) \leq g(t)$ olacağından;

$$L(f(t);x) \leq L(g(t);x)$$

dir. Gerçekten de;
$\forall f(t) \leq g(t)$ olduğundan $0 \leq g(t) - f(t)$ dir.

$$\begin{aligned} L(g(t) - f(t)) &\geq 0 \\ L(g(t);x) - L(f(t);x) &\geq 0 \end{aligned}$$

Lineerlik özelliğinden

$$L(g(t);x) \geq L(f(t);x)$$

Özelliğine L operatörünün monotonluk özelliği denir.

Yardımcı Teorem 2.5. L Lineer Pozitif Operatörü için $|L(f)| \leq L|f|$
İspat.
L Lineer pozitif operatör olsun. L'nin monotonluğundan

$$-|f| \leq f \leq \text{ise } L(-|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

yazılabilir. L'nin lineerliğinden

$$-L(|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

yazılabilir. Buradan

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

dir. □

Teorem 2.6. Weierstrass Teoremi (1885)
[a,b] aralığı üzerinde tanımlı sürekli her fonksiyona düzgün yakınsayan bir polinom karşılık gelir. Yani

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists P \text{ (polinom)} \ni |f(x) - P(x)| < \varepsilon \text{ , } a \leq x \leq b$$

$C[a,b] = \{f|f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ sürekli } \}$ uzayı üzerinde tanımlı bir norm $\forall f \in C[a,b]$ için

$$||f||_c = max_{a \leq x \leq b}|f(x)|$$

ile tanımlanır.

2.3. METRİK UZAY

X bir küme olsun

N1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
N2) $\forall x,y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri)
N3) $\forall x,y,z \in X$ için $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlayan $d; X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik (X,d) ikilisine de metrik uzay denir.

2.4. NORMLU UZAY

X bir lineer uzay ve $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x,y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ için;

N1) $\|x\| \geq 0$
N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

N4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özellikleri ile tanımlanan $\|.\|$ fonksiyonuna X uzayı üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir.

(i) $X \subset \mathbb{R}$ kümesi üstten sınırlı ise $A = \{a \in \mathbb{R} : a' \ X\text{'in üst sınırıdır.}\}$ kümesinin minimum elemanınıa X kümesinin en küçük üst sınırı denir ve $supX$ olarak gösterilir.

(ii) $X \subset \mathbb{R}$ kümesi alttan sınırlı ise $A = \{a \in X : \ a \ \mathbb{R}\text{'in alt sınırıdır.}\}$ kümesinin maksimum elemanına X kümesinin en büyük alt sınırı denir ve $infX$ olarak gösterilir.

2.5. SINIRLI LİNEER OPERATÖRLER

X ve Y Lineer uzaylarlar ve

$$T : X \to Y$$

Olarak tanımlı Lineer bir operatör olsun. $D(T)$, T'nin tanım kümesi, X üzerindeki bir norm $\|.\|_x$ olarak Y üzerinde tanımlı norm ise $\|.\|_y$ olacak şekilde gösterelim.(Buradan X ve Y'nin normlu uzay olduğu anlaşılır.)

$\forall x \in D(x)$ için

$$\|T(x)\|_y \leq M\|x\|_x$$

Olacak şekilde bir $M \geq 0$ varsa T Lineer operatörü sınırlıdır denir.

$\frac{\|T(x)\|}{\|x|} \leq M$ olacağı açıktır.

Yukarıdan da anlaşılacağı üzere M sabiti eşitsizliğin sol tarafındaki ifadenin supremumu kadar büyük olabilir. O halde $M = \|T\|$ ile gösterir isek;

Burada T operatörünün normu

$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|T(X)\|}{\|x\|}$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.7. $\phi(z)$ D bölgesinde analitik bir fonksiyon olmak üzere;

$$\phi(z) = \phi(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\right]\left(f(z)\right)^k \phi'(z)\Big]_{z=0}\left(\frac{z}{f(z)}\right)^k \tag{2.3}$$

Eşitliğine Lagrange's formulü denir.

2.6. LİNEER OPERATÖRLERİN SÜREKLİLİĞİ

Tanım 2.8. X ve Y birer normlu uzay olsun. $T\colon$ X $\to Y$ olarak tanımlansın. O halde; $\forall\varepsilon > 0$ için bir $\delta(\varepsilon, f_0) > 0$ sayısı bulunabilir ise $\|f - f_0\|_x < \delta$ olduğunda $\|L(f) - L(f_0)\|_y < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyor ise L operatörüne $f_0 \in X$'de süreklidir denir.

Tanım 2.9. $\forall x \in (a,b)$ ve $\forall\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 var ise f_n dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \rightrightarrows f$ olarak gösterilir.

2.7. SÜREKLİLİK MODULÜ

Süreklilik modülünün önemli özellikleri sürekli fonksiyonlar için geçerli olsa da süreklilik modülü keyfi sınırlı fonksiyonlar için de tanımlanabilir.

Tanım 2.10. f [a,b]'de tanımlanmış sınırlı bir fonksiyon olsun.
Keyfi seçilen bir $\delta > 0$ için

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{t,x\in[a,b] \\ |t-x|<\delta}} |f(t) - f(x)| \tag{2.4}$$

olacak şekilde tanımlanan $\omega(f;\delta)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Ayrıca (2.4) de görüleceği üzere seçilen bir $\delta > 0$ için $\omega(f;\delta)$ negatif olmayan bir fonksiyon olacaktır. Buna ek olarak δ_1 ve δ_2 pozitif sayıları için $\delta_1 < \delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1) \le \omega(f;\delta_2)$ olduğu açıktır.

3. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKINSAMA ŞARTLARI

Bohman 1951 yılında Lineer Pozitif Operatör dizileri için yakınsaklık koşullarını aşağıdaki gibi vermiştir.

3.1. KOROVKİN TEOREMİ

f, [0,1] aralığında sürekli (f$\in C[a,b]$) fonksiyon $\alpha \in [0,1]$ $\quad 0 \leq \alpha_{(k,n)} \leq 1$ ve $k \leq r$ iken $\alpha_{n,k} \leq \alpha_{n,r}$ olmak üzere

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\alpha_{k,n}) p_{kn}(x); \qquad p_{kn}(x) \geq 0 \tag{3.1}$$

olacak şekilde tanımlanmış Lineer pozitif operatörler dizisi alalaım. L_n lineer Pozitif Operatörler dizisi $f \in C[0,1]$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şart $[0,1]$ aralığında düzfgün olarak

$$L_n(1;x) \to 1$$
$$L_n(t;x) \to x$$
$$L_n(t^2;x) \to x^2$$

Olması gerekir. Buradan da anlaşılacağı üzere operatörün $n \to \infty$ için $f \in [0,1]$ fonksiyonuna sürekli olması için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(1;x) - 1\|_{C[0,1]} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t;x) - x\|_{C[0,1]} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^2;x) - x^2\|_{C[0,1]} = 0$$

dir. Buradaki norm

$$\|f\|_{C[0,1]} = \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$$

Başka bir şekilde ifade edecek olursak $\forall f \in C[a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f;x) - f(x)\| = 0$$

olur.

Not: Burada seçilen L_n operatörü lineerliği ve $f \geq 0$ için $L_n \geq 0$ özellikleri sağlanır. Pozitiflik özelliği yukarıdaki Not kısmında da açık olarak yazıldığından L_n operatörünün Lineerlik özelliğini ispat edebiliriz.

İspat:

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $f,g \in C[0,1]$ için

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(a_{k,n}) p_{k_n}(x)$$

olduğunu biliyoruz.

$$L_n(af+bg;x) = \sum_{k=0}^{n} \Big(af(a_{k,n}) + bg(a_{k,n})\Big) p_{k_n}(x)$$

Buradan;

$$L_n(af+bg;x) = a\sum_{k=0}^{n} f(a_{k,n}) p_{k_n}(x) + b\sum_{k=0}^{n} g(a_{k,n}) p_{k_n}(x)$$

olacağı açıktır. Buradan;

$$L_n(af+bg;x) = aL_n(f;x) + bg(f;x)$$

olacaktır ve buradan L_n oeratörünün lineerliği görülmüş olur. Yukarıda yazdığımız Korovkin teoreminin benzer şeklini;

$$L_n(e_0;x) \rightrightarrows 1$$
$$L_n(e_1;x) \rightrightarrows x$$
$$L_n(e_2;) \rightrightarrows x^2$$

olarak da yazabiliriz.

3.2. BERNSTEİN OPERATÖRLERİ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bernstein 1912 yılına gelindiğinde B_n operatör dizilerini tanımlamış ve yakınsaklık özelliklerini incelemiştir.

$f \in C[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1]$ olsun

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanan lineer pozitif operatöre Bernstein Operatörü denir.

Teorem 3.1. (3.2)'deki ifade ile verilen Bernstein operatörleri $f \in C[0,1]$ olarak alınan f fonksiyonuna yine bu aralıkta düzgün yakınsar.

O halde $f \in C[0,1]$ ise

$B_n(f;x) \rightrightarrows f(x) \quad x \in [0,1]$

dir.

$B_n(f;x)$ operatörünün bir linner pozitif operatör olduğunu gösterelim.

ispat $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $f_1, f_2 \in C[a,b]$ olsun.

$$\begin{aligned}
B_n(a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t);x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(a_1 f_1\left(\frac{k}{n}\right) + a_2 f_2\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} a_1 f_1\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} a_2 f_2\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= a_1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f_1\left(\frac{k}{n}\right) + a_2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f_2\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= a_1 B_n(f_1(t);x) + a_2 B_n(f_2(t);x)
\end{aligned}$$

olacağı açıktır ve Bernstein operatçrünün lineerlik özelliği ispatlanmış olur.

Bunlara ek olarak alınan $k = 1,2,3,4,...,n \in \mathbb{N}$ ve $x \in C[0,1]$ için

$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$ ve $f \geq 0$

olduğundan $B_n(f;x) \geq 0$ olacağı aşıkardır. Buradan da operatörün pozitif operatör olduğu ispatlanır.

Bu iki ispatın ardından $B_n(f;x)$ operatörü için lineer pozitif operatör denilir. (3.1) de tanımlanan Korovkin Teoremi gereğince Bernstein operatörleri aşağıdaki

(i) $B_n(1;x) = 1$

(ii) $B_n(t;x) = x$

(iii) $B_n(t^2;x) = x^2$

şartları sağlamalıdır ve $B_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ olacaktır.

Bernstein operatörünün bu maddeleri sağladığını gösterelim.

ispat

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) ve f \in C[0,1] \tag{3.3}$$

olmak üzere

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (1-x+x)^n = 1$$

$B_n(1;x) \rightrightarrows 1$ ve buradan da $f(x) = 1$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
B_n(t;x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \, (k \to k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= x(x+1-x)^{n-1} \\
&= x1^{n-1} \\
&= x
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Buradan da $B_n(t;x) \rightrightarrows x$ olacaktır ve $f(x) = x$'dir.

$$\begin{aligned}
B_n(t^2;x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(\frac{k^2}{n^2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \left(\frac{k^2}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n-1}{(k-1)!(n-k)!}x^{k}(1-k)^{n-k}$$

Buradaki eşitlikte $k \rightarrow k+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}\right)\frac{n-1}{k!(n-k-1)!}x^{k+1}(1-x)^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}\right)\binom{n-1}{k}x^{k+1}(1-x)^{n-k-1} \\
&= x\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}\right)\binom{n-1}{k}x^{k}(1-x)^{n-k-1} \\
&= x\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n-1}{k}x^{k}(1-x)^{n-k-1}+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)\binom{n-1}{k}x^{k}(1-x)^{n-k-1}\Big] \\
&= x\Big[\left(\frac{1}{n}\right)(x+1-x)^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}x^{k}(1-x)^{n-k-1}\Big] \\
&= x\Big[\left(\frac{k}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}x^{k}(1-x)^{n-k-1}\Big]
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikte tekrar $k \rightarrow k+1$ olarak seçelim ve işlemlerimize devam edelim.

$$\begin{aligned}
&= x\Big[\left(\frac{1}{n}\right)+\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{(n-1)!}{k!(n-k-2)!}x^{k+1}(1-x)^{n-k-2}\Big] \\
&= x\Big[\left(\frac{1}{n}\right)+x\left(\frac{n-1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^{k}(1-x)^{n-k-2}\Big] \\
&= x\Big[\left(\frac{1}{n}\right)+x\left(\frac{n-1}{n}\right)(x+1-x)^{n-2}\Big] \\
&= x\Big[\left(\frac{1}{n}\right)+x\left(\frac{n-1}{n}\right)\Big] \\
&= \left(\frac{x}{n}+x^{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Olarak bulunacağı aşikardır. Burada $n \rightarrow \infty$ için $B_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$olur. Dolayısı ile Korovkin teoremi gereğince;

$\forall f \in C[0,1]$ için yine aynı $[0,1]$ aralığında $B_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ $(n \rightarrow \infty)$

olacağı gözükür.

Buradan;

$$\|B_n(1;x)-1\|_{C[0,1]} \to 0,\ (n\to\infty)$$
$$\|B_n(t;x)-x\|_{C[0,1]} \to 0,\ (n\to\infty)$$

elde edilecektir. Daha sonra

$(t-x)^2 = t^2 - 2xt + t^2$ ve B_n operatörünün lineerliğinden aşağıdaki eşitliği yazabilbiriz.

$$\begin{aligned} B_n((t-x)^2;x) &= B_n(t^2;x) - 2xB_n(t;x) + t^2B_n(1;x) \\ &= x^2 + \frac{x-x^2}{n} - 2x^2 + x^2 \\ &= \frac{x-x^2}{n} \end{aligned}$$

elde edilecektir.

Buradan $z = \frac{x-x^2}{n}$ olsun. z fonksiyonunun maksimumunu bulmak üzere $z' = \frac{1-2x}{n}$ olur.

$z' = 0$ ise $x = \frac{1}{2}$ olacaktır. Buradan;

$\max_{0\le x\le 1} B_n((t-x)^2;x) = max_{0\le x\le 1}\left(\frac{x-x^2}{n}\right) = \frac{1}{4n} \to 0\ (n\to\infty)$ olduğu görülür.

$$\|B_n(t^2;x) - x^2\|_{C(0,1)} = max_{0\le x\le 1}|\frac{x-x^2}{n}| = \frac{1}{4n} \to 0(n\to\infty)$$

sağlanır. Teorem (3.1)'e göre;

$$\|B_n(f;x) - f(x)\|_{C(0,1)} \to 0$$

sağlandığı görülür.

Teorem 3.2. $f \in C^2_[0,1]$ ve $\forall x \in [0,1]$ için

$$lim_{n\to\infty} nB_n\Big(f(t);x) - f(x)\Big) = \frac{x(1-x)}{2} f''(x)$$

dir.

Teorem 3.3. $f \in C[0,1]$ ise

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \tfrac{3}{2}\omega\big(f; \tfrac{1}{\sqrt[2]{n}}\big)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
B_n(f;x) - f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right]
\end{aligned}$$

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} |f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)|$$

$$\begin{aligned}
\omega(f;\delta) &= \sup_{|h| \leq \delta} |f(x+h) - f(x)| h \to t-x \\
&= \sup_{|t-x| \leq \delta} |f(t) - f(x)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(x)| &\leq \omega(f; |t-x|) \\
|B_n f(x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \omega\Big(f; \Big|\frac{k}{n} - x\Big| \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \omega\Big(f; \frac{|\frac{k}{n} - x|}{\delta} \delta\Big) \\
&\leq \omega(f;\delta) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \Big(1 + \frac{1}{\delta}\Big|\frac{k}{n} - x\Big|\Big) \\
&= \omega(f;\delta) \Big(1 + \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{n} \Big|\frac{k}{n} - x\Big| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\Big)
\end{aligned}$$

Eşitsizliğin devamını getirmek için burada Cauchy eşitsizliğini verelim;

$$\sum_{k=0}^{n} f_k g_k \leq \left(\sum_{k=0}^{n} f_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} g_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |\tfrac{k}{n} - x| \sqrt[2]{\tbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}} . \sqrt[2]{\tbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{k}{n} - x\right)^2 \tbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

olacaktır. Buradan $B_n((t-x)^2;x) = \frac{x(1-x)}{n}$ olacağından

$$= \frac{\sqrt[2]{x(1-x)}}{\sqrt[2]{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt[2]{n}}$$

olacaktır. Buradan

$$\leq \omega(f;\delta)\left(1 + \tfrac{1}{\delta} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt[2]{n}}\right)$$

$\delta = \frac{1}{\sqrt[2]{n}}$ olarak alınırsa;

$$= \omega\left(f; \tfrac{1}{\sqrt[2]{n}}\right) \cdot \tfrac{3}{2}$$

olarak ispatımız tamamlanır. □

SINIRSIZ FANKSİYONLARDA YAKLAŞIM

3.3. SZASZ OPERATÖRÜ

Bu bölümde ilk olarak Szasz-Mirakyan operatörü tanıtılarak Korovkin teoremi yardımı ile Bernstein operatörüne benzer yaklaşım özellikleri incelenecek ve ifade, ispat edilecektir.

Kabul edelim lki $x \in [0,\infty)$ ve $f \in C[0,\infty)$ sonksiyonu yine bu aralık üzerinde sınırlı ve sürekli olsun.

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \tag{3.4}$$

olacak şekilde tanımlanan lineer pozitif operatörlere Szasz operatörleri denir.

(3.4) ile tanımlanan Szasz operatörleri $A \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0,A]$ aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı eksende de sınırlı olan fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsaktır. O halde $f \in C[0,A]$ ise

$$S_n(f;x) \rightrightarrows f(x) \quad x \in [0,A]$$

olur. Korovkin teoremi gereğince tanımlanan Szasz operatörlerinin yakınsama koşulları;

(i) $S_n(1;,x) \rightrightarrows 1$
(ii) $S_n(t;x) \rightrightarrows x$
(iii) $S_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

olduğu gösterilirse $[0,A]$ aralığında $S_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ olduğu da gösterilmiş olacaktır. Yukarıdaki maddelerin ispatlarını vermeden önce Szasz operatörünün lineerlik ve pozitiflik koşuularının ispatını verelim.

Lineerlik özelliği
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C[0,A]$ için,

$$\begin{aligned} S_n((\alpha f(t)+\beta g(t));x) &= e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha f\left(\frac{k}{n}\right)+\beta g\left(\frac{k}{n}\right)\right)\frac{(nx)^k}{k!} \\ &= e^{-nx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\beta g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}\right) \\ &= \alpha e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}+\beta e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!} \\ &= \alpha S_n(f;x)+\beta S_n(g;x) \end{aligned}$$

koşulu sağlandığından operatör lineerdir.

Pozitiflik için;
$k = 0, 1, 2, 3, \ldots.., n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,A]$ için

$$e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}x^k \geq 0$$

olacaktır. Eğer $f \geq 0$ ise $S_n(f;x) \geq 0$'dır.

Yukarıdaki ispatdanoperatörün Lineer pozitif operatör olduğu açıkça gözükmektedir. Operatörün Korovkin teoremi gereğince yakınsama koşullarını gösterelim.

İspat.

$$S_n(1;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} 1 \frac{(nx)^k}{k!}$$

olur. Taylor serisi yardımı ile

$f(x) = e^{nx}$ seçelim. f fonksiyonunun k. mertebeden türevi olan $f^k(x) = n^k e^{nx}$ olacaktır buradan;

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \\ e^{nx} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \end{aligned}$$

her tarafı e^{-nx} ile genişletirsek

$$1 = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!}$$

olacaktır buradan da

$$S_n(1;x) = 1$$

olacağı görülür. □

Bundan sonraki aşamalarda $e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!}$ olarak alınacaktır.

$$\begin{aligned} S_n(t;x) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!} \\ &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{n^k x^k}{k!} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}x^{k}}{(k-1)!}\\
&= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!},\ (k\to k+1)\\
&= xe^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{k}x^{k}}{(k)!}\\
&= xe^{-nx}e^{nx}\\
&= x
\end{aligned}
$$

olacaktır.

$$
\begin{aligned}
S_n(t^2;x) &= e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{n^{k}x^{k}}{k!}\\
&= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\\
&= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{k-1}{n}+\frac{1}{n}\Big)\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\\
&= e^{-nx}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\Big)\\
&= e^{-nx}\Big(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\Big)\\
&= e^{-nx}\Big(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n^{k-2}x^{k-2}x^2}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\Big)
\end{aligned}
$$

lk seride $k\to k+2$ ikinci seride ise $k\to k+1$ yazalım.

$$
\begin{aligned}
&= e^{-nx}\Big(x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}+\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\Big)\\
&= x^2e^{-nx}e^{nx}+\frac{x}{n}e^{-nx}e^{nx}\\
&= x^2+\frac{x}{n}
\end{aligned}
$$

olacağı açıkça görünür. Buradan $S_n(t^2;x)=x^2+\frac{x}{n}$'dir.

Son olarak $S_n(t^2;x)=x^2(n\to\infty)$ sağlanır.

Koşullar sağlandığından Korovkin teoremi gereğince $\forall f\in C[0,A]$ için yine aynı aralık üzerinde;

$$S_n(f;x)\rightrightarrows f(x)\ \ (n\to\infty)$$

4. JAİN OPERATÖRLERİ VE YENİ BİR YAPISI

Bu bölümde giriş kısmında da bahsedilen Jain tipi lineer pozitif operatörlerin yakınsama şartlarından bahsedilip ispatlar ile birlikte verilecektir. Sonrasında ise operatörü yeniden yapılandırarak yani operatörün yakınsama şartları gösterilecektir.

4.1. JAİN OPERATÖRÜ

$$J_n^{[\mu]}(u;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\mu)} u\left(\frac{k}{n}\right),\ x \geq 0,\ n \in \mathbb{N}$$

Şeklinde tanımlanan operatöre Jain operatörleri denir. Bu operatörlerin lineer pozitif operatör olduklarını gösterelim.

Lineerlik

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $u_1, u_2 \in C[0,A]$ olsun

$$\begin{aligned}
J_n^{[\mu]}(au_1+bu_2;x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\mu)} \left(au_1\left(\frac{k}{n}\right) + bu_2\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} au_1\left(\frac{k}{n}\right) \frac{nx(nx+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\mu)} + bu_2\left(\frac{k}{n}\right) \frac{nx(nx+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\mu)} \\
&= a\sum_{k=0}^{\infty} u_1\left(\frac{k}{n}\right) \frac{nx(nx+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\mu)} + b\sum_{k=0}^{\infty} u_2\left(\frac{k}{n}\right) \frac{nx(nx+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\mu)} \\
J_n^{[\mu]}(au_1+bu_2;x) &= aJ_n^{[\mu]}(u_1;x) + bJ_n^{[\mu]}(u_2;x)
\end{aligned}$$

olacağı açıktır.

Pozitiflik

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,A]$ için;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\mu)} \geq 0$$

olacağı açıktır. Eğer operatördeki $u(\frac{k}{u}) \geq 0$ ise $J_n^{[\mu]}(u;x) \geq 0$ olcaktır.

Bu ispatla birlikte Jain operatörlerinin lineer pozitif operatörler olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi de Korovkin teoremi gereğince Jain tipi operatörlerin yakınsaklığını gösterelim.

$$J_n^{[\mu]}(1;x) \quad x \in [0,A]$$

Daha sonra Langrange formulü olarak bilinen;

$$\phi(z) = \phi(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(u(z))^k \phi'(z)\Big]_{z=0} \Big(\frac{z}{u(z)}\Big)^k$$

formülü ($\phi(z)$, $f(z)$ D bölgesinde analitik olmak üzere)

$$\phi(z) = e^{az} \text{ ve } f(z) = e^{\mu z}$$

olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
e^{az} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} e^{k\mu z} a e^{az}\Big]_{z=0} \Big(\frac{z}{e^{\mu z}}\Big)^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} a e^{k\mu z + az}\Big]_{z=0} \Big(\frac{z}{e^{\mu z}}\Big)^k \\
&= 1 + a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (a+k\mu)^{k-1} \Big(\frac{z}{e^{\mu z}}\Big)^k \\
&= 1 + a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (a+k\mu)^{k-1} e^{-k\mu z} z^k
\end{aligned}$$

Burada z=1 olarak alırsak

$$e^a = 1 + a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (a+k\mu)^{k-1} e^{k\mu}$$

Yukarıdaki eşitlikte seri kısmına var olan k=1 ifadesi yerine k=0 yazar isek yukarıdaki ifadenin aynısı elde edileceğinden aşağıdaki ifade rahatlık ile verilebilir.

$$e^a = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (a+k\mu)^{k-1} e^{k\mu}$$

her iki tarafı da e^{-a} ile çarparsak

$$1 = a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(a+k\mu)^{k-1}e^{(a+k\mu)}$$

Buradaki a yerine nx alırsak

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}nx(nx+k\mu)^{k-1}e^{-(nx+k\mu)}$$

elde edilecektir. Buradan $J_n^{[\mu]}(1;x) = 1$ olduğu gösterilmiş olur.
Jain operatörlerinin ikinci yakınsama şartı olan

$$J_n^{[\mu]}(u;x)$$

operatörünün eşitliğini incelemeden önce

$$\varphi(r,nx,\mu,e) = nx\varphi(r-1,nx,\mu,e)+\mu\varphi(r,nx+\mu,\mu,e) \tag{4.1}$$

ifadesini ispatlayalım.

İspat.

$$\begin{aligned}
\varphi(r-1,nx,\mu,e) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx+\mu k)^{k+r-2}}{k!}e^{-(nx+\mu k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx+\mu k)^{-1}(nx+\mu k)^{k+r-1}}{k!}e^{-(nx+\mu k)} \\
&= (nx+\mu k)^{-1}\varphi(r,nx,\mu,e) \\
(nx+\mu k)\varphi(r-1,nx,\mu,e) &= \varphi(r,nx,\mu,e)
\end{aligned}$$

□

$$\varphi(r,nx,\mu,e) = nx\varphi(r-1,nx,\mu,e)+\mu k\varphi(r-1,nx,\mu,e) \tag{4.2}$$

olacaktır. Şimdi de eşitliğin sağ tarafındaki ifadeyi düzenleyip (4.1) ifadesini elde edelim.

$$\begin{aligned}
\mu k\varphi(r-1,nx,\mu,e) &= \mu k\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx+\mu k)^{k+r-2}}{k!}e^{-(nx+\mu k)}\\
&= \mu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(nx+\mu k)^{k+r-2}}{k!}e^{-(nx+\mu k)}\\
&= \mu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nx+\mu k)^{k+r-2}}{(k-1)!}e^{-(nx+\mu k)}\ k\to k+1\\
&= \mu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx+\mu+\mu k)^{k+r-1}}{k!}e^{-(nx+\mu+\mu k)}\\
&= \mu\varphi(r,nx+\mu,\mu,e)
\end{aligned}$$

ifadesinin doğruluğu gösterilmiş olur. Buradan (4.2) ifadesinde bulunan ifade yerine yazılır ise;

$$\varphi(r,nx,\mu,e)=nx\varphi(r-1,nx,\mu,e)+\mu\varphi(r,nx+\mu,\mu,e) \tag{4.3}$$

olduğu görülür. Şimdi de yukarıda verlienler doğrultusunda $J_n^{[\mu]}(u;x)$ ifadesinin eşitini bulalım. $J_n^{[\mu]}(u;x)$ ifadesi için;

$$\varphi(r,nx,\mu,e)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx+k\mu)^{k+r-1}}{k!}e^{-(nx+k\mu)}$$

olarak tanımlayalım Yukarıda yaptığımız ispat ile

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{nx(nx+k\mu)^{k-1}}{k!}e^{-(nx+k\mu)}=nx\varphi(r,nx,\mu,e)=1$$

olduğunu görmüştük.

$$\begin{aligned}
\varphi(r,nx,\mu,e) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx+k\mu)(nx+k\mu)^{(k+r-2)}}{k!}e^{-(nx+k\mu)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{nx(nx+k\mu)^{k+r-2}}{k!}e^{-(nx+k\mu)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(nx+k\mu)^{k+r-2}}{(k-1)!}e^{-(nx+k\mu)},\ k\to k+1\\
&= nx\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx+k\mu)^{k+r-2}}{k!}e^{-(nx+k\mu)}+\mu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx+\mu+k\mu)^{k+r-1}}{k!}e^{-(nx+\mu+k\mu)}\\
&= nx\varphi(r-1,nx,\mu,e)+\mu\varphi(r,nx+\mu,\mu,e)
\end{aligned}$$

olacağı görülür.

$$\begin{aligned}
\mu\varphi(r,nx+\mu,\mu,e) &= \mu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx+\mu+k\mu)(nx+\mu+k\mu)^{k+r-2}}{k!}e^{-(nx+\mu+k\mu)}\\
&= \mu\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx+k\mu)(nx+\mu+k\mu)^{k+r-2}}{k!}e^{-(nx+\mu+k\mu)}\\
&\quad+\mu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nx+\mu+k\mu)^{k+r-2}}{(k-1)!}e^{-(nx+\mu+k\mu)}\Big)
\end{aligned}$$

Eşitliğin sağ tarafına $k\to k+1$ yazar isek eşitliğin yeni hali ;

$$\begin{aligned}
&= nx\varphi(r-1,nx,\mu,e)+\mu[(nx+k\mu)\varphi(r-1,nx+\mu,\mu,e)+\mu\varphi(r,nx+2\mu,\mu,e)]\\
&= nx\varphi(r-1,nx,\mu,e)+\mu(nx+k\mu)\varphi(r-1,nx+\mu,\mu,e)+\mu^2\varphi(r,nx+2\mu,\mu,e)
\end{aligned}$$

olacağı açıktır.Yukarıdaki $\varphi(r,nx+2\mu,\mu,e)$ ifadesinin eşleniğini (4.3)'deki ifade cinsinden yazalım.

$$\varphi(r,nx+2\mu,\mu,e)=(nx+2\mu)\varphi(r-1,nx+2\mu,\mu,e)+\mu\varphi(r,nx+3\mu,\mu,e)$$

Buna ek olarak $\varphi(r,nx+3\mu,\mu,e)$ ifadesini de benzer metod ile inceler isek;

$$\varphi(r,nx+3\mu,\mu,e)=(nx+3\mu)\varphi(r-1,nx+3\mu,\mu,e)+\mu\varphi(r,nx+4\mu,\mu,e)$$

olacaktır. Bulunan bu ifadeler yerine yazılır ise;

$$\begin{aligned}
&= nx\varphi(r-1,nx,\mu,e)+\mu(nx+k\mu)\varphi(r-1,nx+k\mu,\mu,e)\\
&\quad+\mu^2[(nx+2\mu)\varphi(r-1,nx+2\mu,\mu,e)+\mu\varphi(r,nx+3\mu,\mu,e)]
\end{aligned}$$

olacaktır. Buradan;

$$\begin{aligned}
&= nx\varphi(r-1,nx,\mu,e)+\mu(nx+k\mu)\varphi(r-1,nx+k\mu,\mu,e)+\mu^2(nx+2\mu)\varphi(r-1,nx+2\mu,\mu,e)\\
&\quad+\mu^3[(nx+3\mu)\varphi(r-1,nx+3\mu,\mu,e)+\mu\varphi(r,nx+4\mu,\mu,e)]\\
&= nx\varphi(r-1,nx,\mu,e)+\mu(nx+k\mu)\varphi(r-1,nx+k\mu,\mu,e)+\mu^2(nx+2\mu)\varphi(r-1,nx+2\mu,\mu,e)\\
&\quad+\mu^3(nx+3\mu)\varphi(r-1,nx+3\mu,\mu,e)+\mu^4\varphi(r,nx+4\mu,\mu,e)
\end{aligned}$$

olacaktır.O halde;

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (nx+k\mu)\varphi(r-1, nx+k\mu, \mu, e)$$

olur. ve buradan yeni ispatladığımız eşitlik;

$$\varphi(r, nx, \mu, e) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (nx+k\mu)\varphi(r-1, nx+k\mu, \mu, e) \tag{4.4}$$

olacaktır.

$$\begin{aligned} J_n^{[\mu]}(u;x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+k\mu)} \frac{k}{n} \\ &= x\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+k\mu)^{k-1}}{(k-1)!} e^{(nx+k\mu)}\Big) \\ &= x\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+\mu+k\mu)^k}{k!} e^{-(nx+\mu+k\mu)}\right) \\ &= x\varphi(1, nx+\mu, \mu, e) \end{aligned}$$

olduğu görülür.(4.1)'deki eşitliği kullanarak;

$$\varphi(1, nx+\mu, \mu, e) = (nx+\mu)\varphi(0, nx+\mu, \mu, e) + \mu\varphi(1, nx+2\mu, \mu, e)$$

(4.4)'deki ifade ile birlikte

$$(nx+\mu)(\varphi(0, nx+\mu, \mu, e) = 1 \tag{4.5}$$

olacağından

$$\begin{aligned} &= 1+\mu[(nx+2\mu)\varphi(0, nx+2\mu, \mu, e) + \mu\varphi(1, nx+3\mu, \mu, e)] \\ &= 1+\mu+\mu^2[(nx+3\mu)\varphi(0, nx+3\mu, \mu, e) + \mu\varphi(1, nx+4\mu, \mu, e)] \\ &= 1+\mu+\mu^2+\mu^3[(nx+4\mu)\varphi(0, nx+4\mu, \mu, e) + \mu\varphi(1, nx+5\mu, \mu, e)] \\ &= 1+\mu+\mu^2+\mu^3+\ldots \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k = \frac{1}{1-\mu}$$

ifadesi ile birlikte

$$\begin{aligned} J_n^{[\mu]}(u;x) &= x\varphi(1, nx+\mu, \mu, e) = \frac{x}{1-\mu} \\ J_n^{[\mu]}(u;x) &= x\,(\mu \to \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_n^{[\mu]}(u^2;x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx(nx+\mu k)^{k-1}}{k!} e^{-(nx+\mu k)} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ &= \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(nx+\mu k)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-(nx+\mu k)} \\ &= \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+\mu+\mu k)^k}{k!} e^{-(nx+\mu+\mu k)} (k+1) \\ &= \frac{x}{n} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(nx+\mu+\mu k)^k}{k!} e^{-(nx+\mu+\mu k)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+\mu+\mu k)^k}{k!} e^{-(nx+\mu+\mu k)} \right] \\ &= \frac{x}{n} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx+\mu+\mu k)^k}{(k-1)!} e^{-(nx+\mu+\mu k)} + \varphi(1, nx+\mu, \mu, e) \right] \\ &= \frac{x}{n} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+2\mu+\mu k)^{k+1}}{k!} e^{-(nx+2\mu+\mu k)} + \varphi(1, nx+\mu, \mu, e) \right] \\ &= \frac{x}{n} [\varphi(2, nx+2\mu, \mu, e) + \varphi(1, nx+\mu, \mu, e)] \end{aligned}$$

Daha önce de ispat edlilen eşitlikliklerden

$$\varphi(1, nx+\mu, \mu, e) = \frac{1}{1-\mu}$$

olarak bulunmuştu. Tüm bunlardan haraket ile

$$\begin{aligned} \varphi(2, nx+2\mu, \mu, e) &= (nx+2\mu)\varphi(1, nx+2\mu, \mu, e) + \mu\varphi(2, nx+3\mu, \mu, e) \\ &= (nx+2\mu)\frac{1}{1-\mu} + \mu\left[(nx+3\mu)\varphi(1, nx+3\mu, \mu, e) + \mu\varphi(2, nx+4\mu, \mu, e)\right] \\ &= \frac{nx+2\mu}{1-\mu} + \mu\frac{nx+3\mu}{1-\mu} + \mu^2\frac{nx+4\mu}{1-\mu} + \mu^3\frac{nx+5\mu}{1-\mu} + \dots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \frac{nx+(k+2)\mu}{1-\mu} \\
&= \frac{nx}{1-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k + \frac{1}{1-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\mu^{k+1} \\
&= \frac{nx+2\mu}{(1-\mu)^2} + \frac{\mu^2}{(1-\mu)^3}
\end{aligned}
$$

Olacağı açıktır. Buradan

$$
\begin{aligned}
J_n^{[\mu]}(u^2;x) &= \frac{x}{n}\left[\varphi(2,nx+2\mu,\mu,e)+\varphi(1,nx+\mu,\mu,e)\right] \\
&= \frac{x}{n}\left[\frac{nx+2\mu}{(1-\mu)^2}+\frac{\mu^2}{(1-\mu)^3}\right]+\varphi(1,nx+\mu,\mu,e) \\
&= \frac{x}{n}\left[\frac{nx+2\mu-nx\mu-2\mu^2+1-2\mu+\mu^2+\mu^2}{(1-\mu)^3}\right] \\
&= \frac{x}{n}\left[\frac{nx(1-\mu)}{(1-\mu)^3}+\frac{1}{(1-\mu)^3}\right] \\
&= \frac{x^2}{(1-\mu)^2}+\frac{x}{n(1-\mu)^3}
\end{aligned}
$$

olacaktır. Genelleyecek olursak

$$
\begin{aligned}
J_n^{[\mu]}(1;x) &= 1 \\
J_n^{[\mu]}(u;x) &= \frac{x}{1-\mu} \\
J_n^{[\mu]}(u^2;x) &= \frac{x^2}{(1-\mu)^2}+\frac{x}{n(1-\mu)^3}
\end{aligned}
$$

olacak şekilde bulunmuştur. Yukarıdaki μ ifadesi yerine μ_n alalım.$f \in C[0,A]$için

$$
\begin{aligned}
J_n^{[\mu]}(1;x) &= 1 \\
J_n^{[\mu]}(u;x) &= \frac{x}{1-\mu_n} \\
J_n^{[\mu]}(u^2;x) &= \frac{x^2}{(1-\mu_n)^2}+\frac{x}{n(1-\mu)^3}
\end{aligned}
$$

Sonuç olarak $(n \to \infty]$ için;

$$
J_n^{[\mu]}(e_0;x) \rightrightarrows 1
$$

$$
\begin{aligned}
J_n^{[\mu]}(e_1;x) &\rightrightarrows x \\
J_n^{[\mu]}(e_2;x) &\rightrightarrows x^2
\end{aligned}
$$

İfadeleri sağlanacağından $J_n^{[\mu]}(u;x)[0,A]$ ($A \in \mathbb{R}^+$) aralığından alınan bir f fonksiyonuna yine bu aralıkta düzgün yakınsar.

$$
J_n^{[\mu]}(u;x) \rightrightarrows f(x) \qquad f \in C[0,A]
$$

olacaktır. Bu alt bölümde yeni tanımlayacak olduğumuz lineer pozitif Jain operatörü verilecektir ve buna ek olarak yakınsama, lineerlik, pozitiflik koşulları incelenecek ve son olarak da yakınsama ile ilgili olarak bazı grafiklere yer verilecektir.

4.2. JAİN OPERATÖRLERİNİN YENİ BİR YAPISI

$X \subset [0,\infty), u \quad \mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli fonksiyon, $n_0 \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{N} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ ve $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x) \quad \forall x \in X$ ve $n \in \mathrm{N}$ için X üzerinde reel değerli ve pozitif fonksiyonlar olsun.

$$
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(u;x) = \mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)}(u \circ \tau^{-1})\left(\frac{k}{n}\right) \; x \geq 0,\, n \in \mathbb{N} \quad (4.6)
$$

$\mu \in [0,1)$ ve τ (A1) ve (A2) şartlarını sağlamalıdır.
Yukarıda tanıttığımız operatörün lineer pozitif operatör olması için bu şartları sağlamalıdır.
O halde İspat olarak bu iki şartları verelim.

İspat Lineerlik

$a,b \in \mathbb{R}$ ve $u_1,u_2 \in C[0,\infty)$ olsun

$$
\begin{aligned}
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(u;x) &= \mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}u(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)}(u \circ \tau^{-1})\left(\frac{k}{n}\right) \\
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(au_1+bu_2;x) &= \mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(au_1+bu_2)(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)}(au_1+bu_2) \circ \tau^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)}\left(au_1 \circ \tau^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) + bu_2 \circ \tau^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)} a(u_1 \circ \tau^{-1})\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_n(x)(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!}e^{-(\beta_n(x)+k\mu)}b(u_2\circ\tau^{-1})\left(\frac{k}{n}\right)\\
=\;& a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_n(x)(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!}e^{-(\beta_n(x)+k\mu)}(u_1\circ\tau^{-1})\left(\frac{k}{n}\right)\\
&+b\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_n(x)(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!}e^{-(\beta_n(x)+k\mu)}(u_2\circ\tau^{-1})\left(\frac{k}{n}\right)\\
=\;& au_1(x)+bu_2(x)\\
=\;& a\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(u_1;x)+b\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(u_2;x)
\end{aligned}
$$

Pozitiflik

$k=0,1,2,3...n\in\mathbb{N}\quad x\in[0,\infty)$ olsun

$$
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(u;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_n(x)(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!}e^{-(\beta_n(x)+k\mu)}\geq 0
$$

eğer $(u\circ\tau^{-1})\left(\frac{k}{n}\right)\geq 0$ ise $\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(u;x)\geq 0$ olacaktır. Buradan İspatlarımız tamamlanmış olur ve. Yeni yapılandırdığımız operatörümüzün lineer pozitif bir operatör olduğunu görmüş oluruz.

Yukarıda tanımlanan Jain operatörlerinin yakınsama süreci olabilmesi için bu operatörlerin karşılamamsı gereken koşullar vardır. Bunun için bazı genellemeler yaparak operaörlerin yakınsama koşullarını inceleyelim.

İlk olarak aşağıdaki genellemeyi yapalım;

$$
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(1;x)=1+p_n(x),\qquad x\in X
$$

$p_n:X\to\mathbb{R}$ ve $n\in\mathrm{N}$, $\alpha_n-\beta_n\geq 0$ olacak şekilde α_n ve β_n X üzerinde sürekli fonksiyonlardır. Yukarıdaki ifadeyi (4.6) deki ifadeye göre uygular isek:

$$
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(1;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_n(x)(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!}e^{-(\beta_n(x)+k\mu)}
$$

Daha sonra (2.4)'deki Langrange teoremini $\phi(z) = e^{\alpha_n(x)z}$ ve $u(z) = e^{\mu z}$ olarak alırsak;

$$e^{a_n(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n(x)(a_n(x)+\mu k)^{k-1}}{k!} \left(\frac{z}{e^{\mu z k}}\right)^k$$

her tarafı $e^{\beta_n(x)}$ ile bölersek

$$e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n(x)(a_n(x)+\mu k)^{k-1}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)}$$

Sonuç olarak $n \in \mathrm{N}$ ve $\forall x \in X$ için;

$$e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)} = 1 + p_n(x) \tag{4.7}$$

elde edilecektir.

Benzer şekilde τ sürekli fonksiyonunu $\mathscr{I}_n^{[\tau,\mu]}$ ifadesine uygulayacak olursak ;

$$\mathscr{I}_n^{[\tau,\mu]}(\tau;x) = \tau(x) + q_n(x) \qquad x \in X \tag{4.8}$$

$q_n : X \to \mathbb{R}$ ifadesi elde edilir.

Daha sonra (4.8) deki operatörü kullanarak τ fonksiyonunu uygular isek $(\tau \circ \tau^{-1})\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}$ olacaktır. Buradan ifademizin son halini yazabiliriz.

$$\mathscr{I}_n^{[\tau,\mu]}(\tau;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n(x)(a_n(x)+\mu k)^{k-1}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)} \left(\frac{k}{n}\right)$$

ifadesi elde edilecektir.

Yukarıdaki ifadenin eşitini bulmak için aşağıdaki ifadeleri öncelikle verelim.

$$\varphi(m, \alpha_n(x), \beta_n(x), \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n(x)+\mu k)^{k+m-1}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)}$$

olarak tanımlayalım o halde

$$e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)} = \alpha_n(x)\varphi(0,\alpha_n(x),\beta_n(x),\mu)$$

Kolaylıkla görülür. Buradan;

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n(x)+\mu k)^{k+m-1}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n(x)+k\mu)(a_n(x)+\mu k)^{k+m-2}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n(x) \frac{(a_n(x)+\mu k)^{k+m-2}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)} + \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n(x)+\mu k)^{k+m-2}}{(k-1)!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n(x) \frac{(a_n(x)+\mu k)^{k+m-2}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)} + \mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n(x)+k+\mu k)^{k+m-1}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k+k\mu)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n(x) \frac{(a_n(x)+\mu k)^{k+m-2}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(a_n(x)+k+\mu k)(a_n(x)+k+\mu k)^{k+m-2}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k+k\mu)}
\end{aligned}$$

Seri çözümü ilerledikçe;

$$\varphi(m,\alpha_n(x),\beta_n(x),\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k(\alpha_n(x)+k\mu)\varphi(m-1,\alpha_n(x)+k\mu,\beta_n(x)+k\mu,\mu) \quad (4.9)$$

Yukarıdaki seri çözümünü kullanarak aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}
\varphi(1,\alpha_n(x),\beta_n(x),\mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_n(x)+k\mu)^k}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k(\alpha_n(x)+k\mu)\varphi(0,\alpha_n(x)+k\mu,\beta_n(x)+k\mu,\mu) \\
&= \alpha_n(x)\varphi(0,\alpha_n(x),\beta_n(x),\mu) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k(\alpha_n(x)+k\mu)\varphi(0,\alpha_n(x)+k\mu,\beta_n(x)+k\mu,\mu) \\
&= e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)} + \mu(\alpha_n(x)+\mu)\varphi(0,\alpha_n(x)+\mu,\beta_n(x)+\mu,\mu) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \mu^k(\alpha_n(x)+k\mu)\varphi(0,\alpha_n(x)+k\mu,\beta_n(x)+k\mu,\mu) \\
&= e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)} + \mu e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)} + \mu^2 e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)} + \ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\right)\\
&= e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\frac{1}{1-\mu}
\end{aligned}
$$

olur.Buradan;

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!}e^{-(\beta_m(x)+k\mu)}\frac{k}{n} &= e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\frac{1}{1-\mu}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_n(x)(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!}e^{-(\beta_m(x)+k\mu)}\frac{k}{n}\\
&= \alpha_n(x)e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\frac{1}{n(1-\mu)}
\end{aligned}
$$

olacaktır. Toparlayacak olursak ifademizin son hali için ;

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!}e^{-(\beta_m(x)+k\mu)}\frac{k}{n} = \alpha_n(x)e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\frac{1}{n(1-\mu)}
$$

(4.8)'deki ifadeyi uygulayacak olursak ifademizin son hali için;

$$
\alpha_n(x)e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\frac{1}{n(1-\mu)} = \mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\tau;x) = \tau(x)+q_n(x)
$$

$\forall x \in X$ ve $n \in \mathrm{N}$

ifadesi ilde edilecektir buradan (4.7) ve (4.8) deki ifadeler ile birlikte;

$$
\begin{aligned}
\alpha_n(x) &= n(1-\mu)\frac{\tau(x)+q_n(x)}{1+p_n(x)}\\
\alpha_n(x)-\beta_n(x) &= \log_e 1+p_n(x)\\
\beta_n(x) &= n(1-\mu)\frac{\tau(x)+q_n(x)}{1+p_n(x)} - \ln(1+p_n(x))
\end{aligned}
$$

$p_n(x) > -1, \forall x \in X$ ve $n \in \mathrm{N}$ için olacaktır.

elde edilen sonuçlar (4.6)'ya uygulanır ise ;

$$
\sum_{k=0}^{\infty} n(1-\mu)(\tau(x)+q_n(x))\frac{\left(n(1-\mu)\frac{\tau(x)+q_n(x)}{1+p_n(x)}+k\mu\right)^{k-1}}{k!}e^{-(n(1-\mu)\frac{\tau(x)+q_n(x)}{1+p_n(x)}+k\mu)}\left(u\circ\tau^{-1}\right)\left(\frac{k}{n}\right)
$$

$\forall x \in X$ ve $n \in \mathrm{N}$

Tanitilan operatörün yakınsama süreci oluşturabilmesi için bu $p_n(x)$ ve $q_n(x)$

fonksiyonlarının sağlaması gereken kurallar vardır.

Diğer yandan

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} q_n(x) = 0 \tag{4.10}$$

$\forall x \in X$ için $|p_n(x)| \le p_n(x)$ ve $|q_n(x)| \le q_n(x)$ şartları ağırlıklı yakınsama süreci elde edilmesi için sağlanmalıdır. α_n ve β_n kullanılarak yukarıda elde edilen yukarıdaki ifadeler bize yeni tanıtılan Jain tipi $\mathscr{J}^{[\tau,\mu]}{}_{n\ge n_0}$ operatörünün Korovkin teoremince X üzerinde bir yakınsama süreci olduğunu gösterir.Böylece, yeni tanıtılan Jain operatörlerinde paramtrelerin doğru seçimi ile bazı var olan operatörler elde edilebilir ve buna benzer yeni tipteki operatörler de bulunabilinir.

$$\mathscr{J}_n^{[\tau^2,\mu]} = \frac{(\tau(x)+q_n(x))^2}{1+p_n(x)} + \frac{\tau(x)+q_n(x)}{n(1-\mu)^2}$$

olacaktır. Bu ifadenin eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
\mathscr{J}_n^{[\tau^2,\mu]} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
&= \alpha_n(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
&= \frac{\alpha_n(x)}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha_n(x)+k\mu)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)} k \\
&= \frac{\alpha_n(x)}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_n(x)+k\mu+\mu)^{k}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+k\mu)} (k+1) \\
&= \frac{\alpha_n(x)}{n^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_n(x)+k\mu+\mu)^{k}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+\mu+k\mu)} k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_n(x)+k\mu+\mu)^{k}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+\mu+k\mu)}\right] \\
&= \frac{\alpha_n(x)}{n^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_n(x)+k\mu+2\mu)^{k+1}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+2\mu+k\mu)}\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_n(x)+k\mu+\mu)^{k}}{k!} e^{-(\beta_n(x)+\mu+k\mu)}\right] \\
&= \frac{\alpha_n(x)}{n^2} \left(\varphi(2,\alpha_n(x)+2\mu,\beta_n(x)+2\mu,\mu) + \varphi(1,\alpha_n(x)+\mu,\beta_n(x)+\mu,\mu)\right)
\end{aligned}$$

ilk olarak $\varphi(2,\alpha_n(x)+2\mu,\beta_n(x)+2\mu,\mu)$ ifadesinin eşitliğini araştıralım.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\alpha_n(x)+(k+2)\mu)\varphi(1,\alpha_n(x)+2\mu+k\mu,\beta_n(x)+2\mu+k\mu,\mu)\\
&= (\alpha_n(x)+2\mu)\varphi(1,\alpha_n(x)+2\mu,\beta_n(x)+2\mu,\mu)+\mu(\alpha_n(x)+3\mu)\varphi(1,\alpha_n(x)+3\mu,\beta_n(x)+3\mu,\mu)\\
&\quad +\mu^2(\alpha_n(x)+4\mu)\varphi(1,\alpha_n(x)+4\mu,\beta_n(x)+4\mu,\mu)+...\\
&= (\alpha_n(x)+2\mu)e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\frac{1}{1-\mu}+\mu(\alpha_n(x)+3\mu)e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\frac{1}{1-\mu}\\
&\quad +\mu^2(\alpha_n(x)+4\mu)e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\frac{1}{1-\mu}+...\\
&= e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\frac{1}{1-\mu}\left((\alpha_n(x)+2\mu)+\mu(\alpha_n(x)+3\mu)+\mu^2(\alpha_n(x)+4\mu)+...\right)\\
&= e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\frac{1}{1-\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\alpha_n(x)+(k+2)\mu)\\
&= e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\frac{1}{1-\mu}\left[\alpha_n(x)\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k+\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\mu^{k+1}\right]\\
&= e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\left(\frac{\alpha_n(x)+2\mu}{(1-\mu)^2}+\frac{\mu^2}{(1-\mu)^3}\right)
\end{aligned}$$

olacaktır.Daha sonra $\varphi(1,\alpha_n(x)+\mu,\beta_n(x)+\mu,\mu)$ ifadesinin eşitliğini aynı metod ile araştırırsak;

$$\varphi(1,\alpha_n(x)+\mu,\beta_n(x)+\mu,\mu)=e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\frac{1}{1-\mu}$$

olacaktır.Buradan yukarıdaki eşitliği tekrar yazacak olursak;

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_n(x)}{n^2}\left(\varphi(2,\alpha_n(x)+2\mu,\beta_n(x)+2\mu,\mu)+\varphi(1,\alpha_n(x)+\mu,\beta_n(x)+\mu,\mu)\right)\\
&= \frac{\alpha_n(x)}{n^2}\left[e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\frac{1}{1-\mu}\left(\frac{\alpha_n(x)+2\mu}{(1-\mu)^2}+\frac{\mu^2}{(1-\mu)^3}+\frac{1}{1-\mu}\right)\right]\\
&= \frac{\alpha_n(x)}{n^2}\left[e^{\alpha_n(x)-\beta_n(x)}\frac{1}{1-\mu}\left(\frac{\alpha_n(x)}{(1-\mu)^2}+\frac{1}{(1-\mu)^3}\right)\right]\\
&= \frac{(\tau(x)+p_n(x))^2}{(1+p_n(x)}+\frac{\tau(x)+p_n(x)}{n(1-\mu)^2}
\end{aligned}$$

olduğu gösteriilmiş olur.

Sonuç olarak genellem yapar isek;

Yardımcı Teorem 4.1.

$$\begin{aligned}
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(1;x) &= 1+p_n(x)\\
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\tau;x) &= \tau(x)+p_n(x)\\
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\tau^2;x) &= \frac{(\tau(x)+q_n(x))^2}{1+p_n(x)}+\frac{\tau(x)+q_n(x)}{n(1-\mu)^2}\\
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\tau^3;x) &= \frac{(\tau(x)+q_n(x))^3}{(1+p_n(x))^2}+\frac{3(\tau(x)+q_n(x))^2}{(1+p_n(x))n(1-\mu)^2}+\frac{(1+2\mu)(\tau(x)+q_n(x))}{n^2(1-\mu)^4}
\end{aligned}$$

olacaktır. (4.6)'da tanıtılan Jain operatörleri için moment ve merkezi moment değerlerini tanımlayalım. Bunun için ilk olarak merkezi moment değerini tanımlayalım.

$$\psi_x^l(t)=(\tau(t)-\tau(x))^l \qquad l\in\mathbb{N} \tag{4.11}$$

olsun. Daha sonra $\forall x\in X$ için (4.6)'da tanıtılan operatör aşağıda belirtilenleri sağlayacaktır.

$$\begin{aligned}
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\psi_x^0(t);x) &= 1+p_n(x)\\
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\psi_x^1(t);x) &= \mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}((\tau(t)-\tau(x));x)=\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}((\tau(t);x)-\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}((\tau(x);x)\\
&= \mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}((\tau(t);x)-\tau(x)\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(1;x)=q_n(x)-\tau(x)p_n(x)\\
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\psi_x^2(t);x) &= \mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}((\tau(t)-\tau(x))^2;x)=\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\tau(t)^2-2\tau(t)\tau(x)+\tau(x)^2;x)\\
&= \mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\tau(t)^2;x)-2\tau(x)\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\tau(t);x)+\tau(x)^2\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(1;x)\\
&= \frac{(\tau(x)+q_n(x))^2}{1+p_n(x)}+\frac{\tau(x)+q_n(x)}{n(1-\mu)^2}+\tau(x)^2-2\tau(x)q_n(x)+\tau(x)^2p_n(x)\\
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\psi_x^3(t);x) &= \mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\tau(t)-\tau(x))^3;x)=\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\tau(t)^3-3\tau(t)^2\tau(x)+3\tau(t)\tau(x)^2-\tau(x)^3;x)\\
&= \mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\tau(t)^3;x)-3\tau(x)\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\tau(t)^2;x)+3\tau(x)^2\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\tau(t);x)\\
&\quad +\tau(x)^3\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(1;x)\\
&= \frac{(\tau(x)+q_n(x))^3}{(1+p_n(x))^2}+\frac{3(\tau(x)+q_n(x))^2}{(1+p_n(x))n(1-\mu)^2}+\frac{(1+2\mu)(\tau(x)+q_n(x))}{n^2(1-\mu)^4}\\
&\quad -3\tau(x)\left(\frac{(\tau(x)+q_n(x))^2}{1+p_n(x)}+\frac{\tau(x)+q_n(x)}{n(1-\mu)^2}\right)+3\tau(x)^2(\tau(x)+q_n(x))\\
&\quad -\tau(x)^3(1+p_n(x))\\
\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu]}(\psi_x^3(t);x) &= \frac{(\tau(x)+q_n(x))^4}{(1+p_n(x))^3}+\frac{6(\tau(x)+q_n(x))^3}{n(1-\mu)^2(1+p_n(x))}+\frac{7+8\mu)(\tau(x)+q_n(x))^2}{n^2(1-\mu)^4}+\\
&\quad \frac{1+8\mu+6\mu^2)(\tau(x)+q_n(x))}{n^3(1-\mu)^6}-4\tau(x)\Big(\frac{(\tau(x)+q_n(x))^3}{1+p_n(x))^2}+\frac{3(\tau(x)+q_n(x))^2}{n(1-\mu)^2(1+p_n(x))}\Big)
\end{aligned}$$

$$-4\tau(x)^3(\tau(x)+q_n(x))+\tau(x)^4(1+p_n(x))$$

Not 4.2. (i) (4.6)'daki $p_n(x)=0$ ve $q_n(x)=\frac{\tau(x)\mu}{1-\mu}$ olarak seçilirse $\mathscr{J}^{[\tau,\mu]}{}_{n\geq n_0}$ operatörü (1.4)'deki operatöre dönüşür.

(ii) (4.6)'daki $p_n(x)=0$ ve $q_n(x)=\frac{\tau(x)\mu}{1-\mu}$ ve $\tau(x)=x$ olarak seçilirse $\mathscr{J}^{[\tau,\mu]}{}_{n\geq n_0}$ operatörü (1.2)'deki klasik Jain operatörlerine dönüşecektir.

(iii) (4.6)'daki $p_n(x)=0\,q_n(x)=0$ ve $\tau(x)=x$ olarak seçilirse $\mathscr{J}^{[\tau,\mu]}{}_{n\geq n_0}$ operatörü [3] de belirtilen operatöre dönüşür.

(iv) (4.6)'da $\mu=0$ olarak seçilirse $\mathscr{J}^{[\tau,\mu]}{}_{n\geq n_0}$ operatörü [4] de belirtilen operatöre dönüşür.

(v) (4.6)'da $p_n(x)=0$, $q_n(x)=\frac{\tau(x)\mu}{1-\mu}$ ve $\mu=0$ olarak seçilirse $\mathscr{J}^{[\tau,\mu]}{}_{n\geq n_0}$ operatörü [5] de belirtilen operatöre dönüşür.

(vi) (4.6)'da $p_n(x)=0$, $q_n(x)=\frac{\tau(x)\mu}{1-\mu}$ ve $\tau(x)=0\mu=0$ olarak seçilirse $\mathscr{J}^{[\tau,\mu]}{}_{n\geq n_0}$ operatörü (1.3)'deki Szasz-Mirakyan operatörlerine dönüşür.

(vii) (4.6)'da $p_n(x)=0$, $q_n(x)=-\frac{1}{2n}+\frac{\sqrt{4n^2\tau^2+1}}{2n}-\tau(x)$, $\tau(x)=x$, $\mu=0$olarak seçilirse $\mathscr{J}^{[\tau,\mu]}{}_{n\geq n_0}$ operatörü [7] de belirtilen modifiye edilmiş Szasz-Mirakyan operatörüne dönüşür.

(viii) (4.6)'da $p_n(x)=\frac{1}{nx-1}$, $q_n(x)=0$, $\tau(x)=x$ ve $\mu=0$ olarak seçilirse $\mathscr{J}^{[\tau,\mu]}{}_{n\geq n_0}$ operatörü [8] de belirtilen bir diğer modifiye edilmiş Szasz-Mirakyan operatörüne dönüşür.

(ix) (4.6)'da $p_n(x)=0$, $q_n(x)=n\tau(x)\frac{\log a}{1-\mu\log a}$, $\tau(x)=x$ ve ,$1<a\leq e$ olarak seçilirse $\mathscr{J}^{[\tau,\mu]}{}_{n\geq n_0}$ operatörü modifiye edilmiş Jain Tipi operatöre dönüşür.

(x) $p\geq 0$ için (4.6)'da $p_n(x)=0$, $q_n(x)=\tau(x)\frac{n+p+\mu-1}{1-\mu}$, $\tau(x)=x$ olarak seçilirse $\mathscr{J}^{[\tau,\mu]}{}_{n\geq n_0}$ operatörü Jain-Schurer operatörüne dönüşür.

4.3. YAKINSAMA SONUÇLARI

Bu bölümün amacı yeni tanıtılan Jain tipi operatörümüz için direk yakınsama teoremi elde etmek olacaktır. Bu tip teoremler ilk olarak Gadjiev [13] ve Holhoş [14] tarafından verilmiştir. Bu bölüme geçiş yapmadan önce Gadjiev ve Holhoş'un teoremlerinin sonuçlarını özetleyelim.

τ , (A_1) ve (A_2) şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. τ'nun bu şartları sağlıyor olması fonksiyonun positif reel eksende artan ve sürekli olduğunu ve $\lim_{x\to\infty}\tau(x)=\infty$ olacağını gösterir. Bunlara ek olarak, $\sigma(x) = 1 + \tau^2(x)$ olarak tanımlanan bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu sonuç ile birlikte normu;

$$\|u\| = sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{|u(x)|}{\sigma(x)}$$

olarak tanımlanan normlu uzay için $B_\sigma(\mathbb{R}^+)$ ağırlık uzayını şu şekilde tanımlayalım.

$$B_\sigma(\mathbb{R}^+) = \{u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : |u(x)| \leq C_u \sigma(x)\,, x \in \mathbb{R}^+\}$$

C_u sadece u'ya bağlı positif fonksiyon. Tüm bunlara ek olarak, $B_\sigma(\mathbb{R}^+)$'daki tüm alt uzaylar $D_\sigma(\mathbb{R}^+)$ tarafından kapsanacaktır. Ayrica $E_\sigma(\mathbb{R}^+)$, $D_\sigma(\mathbb{R}^+)$'daki tüm σ fonksiyonunun alt uzayı olsun ve

$$E_\sigma(\mathbb{R}^+) =: \{\sigma : \sigma \in D_\sigma(\mathbb{R}^+), \lim_{x\to\infty} \frac{u(x)}{\sigma(x)} = m_\sigma\}$$

m_σ σ'ya bağlı sabit bir fonksiyon olsun.Diğer yandan $F_\sigma(\mathbb{R}^+)$ için

$$F_\sigma(\mathbb{R}^+) = \{\sigma : \sigma \in D_\sigma(\mathbb{R}^+), \tfrac{u(x)}{\sigma(x)} \text{ düzgün sürekli } \}$$

sonuç olarak $E_\sigma(\mathbb{R}^+) \subset F_\sigma(\mathbb{R}^+) \subset D_\sigma(\mathbb{R}^+) \subset B_\sigma(\mathbb{R}^+)$ ifadesini elde edebiliriz.

Yardımcı Teorem 4.3. $x \in \mathbb{R}^+$ ve H_n n'ye bağlı pozitif sabit bir fonksiyon olmak üzere; $(L_n)_{n\geq 1}$ lineer pozitif operatörünün $D_\sigma(\mathbb{R}^+)$'dan $B_\sigma(\mathbb{R}^+)$'a doğru haraket etmesi için gerek ve yeter şart;

$$|L_n(\sigma;x| \leq H_n \sigma(x)$$

olmasıdır.

Teorem 4.4. Yukarıdaki yardımcı teorem sağlansın ve $(L_n)_{n\geq 1}$aşağıdaki özelikleri sağlasın;

$$\lim_{x\to\infty} \|L_n(\tau^s) - \tau^s\|_\sigma = 0 \quad s = 0, 1, 2.$$

Bu sonuç ile birlikte $\forall u \in D_\sigma(\mathbb{R}^+)$ için

$$\lim_{x\to\infty} \|L_n(u) - u\|_\sigma = 0$$

sağlanacaktır.

İspat. Eğer u $\in E_{\sigma}(\mathbb{R}^{+})$ ise $\forall x \geq 0$ için $|u(x)| \leq M_{u}\sigma(x)$ olacaktır. O halde şu ilişkiyi verebiliriz;

$$\mathscr{J}_{n}^{[\tau,\mu_n]}(\sigma;x) = 1 + p_n(x) + \frac{(\tau(x)+q_n(x))^2}{1+p_n(x)} + \frac{\tau(x)+q_n(x)}{n(1-\mu_n)^2}$$

Yeni tip jain operatörünün yakınsama sonuçlarından elde edilenler ile operatör $D_{\sigma}(\mathbb{R}^{+})$ uzayından $B_{\sigma}(\mathbb{R}^{+})$ uzayına haraket edecektir. Bu durumda, ispatı tamamlamak için aşağıdaki eşitliği verebiliriz;

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathscr{J}_{n}^{[\tau,\mu_n]}(\tau^{s}) - \tau^{s}\|_{\sigma} = 0 \qquad s = 0,1,2.$$

$s = 0$ ile başlayacak olursak

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathscr{J}_{n}^{[\tau,\mu_n]}(1) - 1\|_{\sigma} = 0$$

Sonrasında, $s = 1$ için işlemimize devam edelim;

$$\|\mathscr{J}_{n}^{[\tau,\mu_n]}(\tau) - \tau\|_{\sigma} = q_n$$

Daha sonra (4.10) yardımı ile yukarıdaki limitin eşitinin sıfır olduğu anlaşılacaktır. Son olarak $s = 2$ olarak eşitliğimize devam eder isek;

$$\|\mathscr{J}_{n}^{[\tau,\mu_n]}(\tau^2) - \tau^2\|_{\sigma} = \frac{(\tau+q_n)^2}{1+p_n)} + \frac{\tau+q_n}{n(1-\mu_n)^2} - \tau^2$$

olacaktır. $\lim_{n\to\infty}\mu_n = 0$ ve tekrar(4.10)'u uygular isek yukarıdaki limitin sonucunun sıfır olduğu görülecektir. Sonuç olarak yukarıdaki bulgular ile ispatımız tamamlanmış olur. □

Tanım 4.5. $\forall u \in D_{\sigma}(\mathbb{R}^{+})$ ve $\delta \geq 0$ Holhoş aşağıdaki süreklilik modulünü vermiştir.

$$\omega_{\tau}(u;\delta) = \sup_{\substack{|\tau(t)-\tau(x)|\leq\delta \\ t,x\in\mathbb{R}^{+}}} \frac{|f(t)-f(x)|}{\sigma(t)+\sigma(x)}$$

Daha sonrasında aşağıdaki ilişki verilmiştir.

(i) $\forall a \in D_\sigma \mathbb{R}^+, t, x \geq 0$ ve $\delta > 0$

$$|a(t) - a(x)| \leq (\sigma(t) + \sigma(x)) \left(2 + \frac{|\tau(t) + \tau(x)|}{\delta}\right) \omega_\tau(f; \delta)$$

(ii) $\forall a \in D_\lambda(\mathbb{R}^+)$ ve $\alpha, \delta \geq 0$

$$\omega_\tau(f; \alpha\delta)0 = (2 + \alpha)\omega_\tau(a; \delta)$$

(iii) $\forall a \in F_\sigma(\mathbb{R}^+)$

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_\tau(a; \delta) = 0$$

$\forall D_\lambda(\mathbb{R}^+)$ için $\omega_\tau(a; 0) = 0$ olduğu açıktır. Bununla birlikte δ'ya göre $\omega_\tau(a; \delta)$ fonksiyonu negatif olmayan artan bir fonksiyondur. Yukarıdaki tanım doğrultusunda sonraki teorem Holhoş tarafından verilmiştir.

Teorem 4.6. $A_n : D_\lambda(\mathbb{R}^+) \to B_\lambda(\mathbb{R}^+)$ pozitif lineer operatör dizisi ve $e_n, f_n, g_n, h_n \quad n \to \infty$ için diziler 0'a giderken;

$$\begin{aligned}
\|L_n(\tau^0 - \tau^0\|_{\theta^0} &= e_n \\
\|L_n(\tau^1 - \tau^1\|_{\theta^{\frac{1}{2}}} &= f_n \\
\|L_n(\tau^2 - \tau^2\|_{\theta^1} &= g_n \\
\|L_n(\tau^3 - \tau^3\|_{\theta^{\frac{3}{2}}} &= h_n
\end{aligned}$$

$\forall a \in D_\lambda(\mathbb{R}^+)$ için özel olarak seçilen

$$\delta_n = 2\sqrt{(e_n + 2f_n + g_n)(1 + e_n)} + e_n + 3f_n + h_n$$

için

$$\|L_n(a) - a\|_{\theta^{\frac{3}{2}}} \leq (7 + 4e_n + 2g_n)\omega_\tau(a; \delta_n) + \|a\|_\theta e_n,$$

sağlanmış olur.

Yukarıdaki teoremin sağlandığını kabul edelim.

$\forall u \in F_\lambda(\mathbb{R}^+)$ ve $\lim_{\delta\to 0}\omega(u;\delta)=0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(u)-u\|_{\theta^{\frac{3}{2}}}=0$$

ifadesi sağlanmış olur. Şimdi de aşağıdaki teoremi verebliriz.

Teorem 4.7. $\forall u \in F_\lambda(\mathbb{R}^+)$ için

$$\begin{aligned}
\delta_n &= 2\sqrt{\left(p_n+2q_n+\left(q_n^2+2q_n+\frac{2q_n}{n(1-\mu_n)^2}+\frac{2}{n(1-\mu_n)^2}\right)\right)(1+p_n)}\\
&\quad +p_n+3q_n+3\left(q_n^2+2q_n+\frac{2q_n}{n(1-\mu_n)^2}+\frac{2}{n(1-\mu_n)^2}\right)\\
&\quad +q_n^3+3q_n^2+3q_n+\frac{6q_n^2}{n(1-\mu_n)^2}+\frac{12q_n}{n(1-\mu_n)^2}+\frac{6}{n(1-\mu_n)^2}+\frac{4(1+2\mu_n)q_n}{n^2(1-\mu_n)^4}+\frac{4(1+2\mu_n)}{n^2(1-\mu_n)^4}
\end{aligned}$$

olduğunda

$$\|\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}(u)-u\|\leq\left(7+4p_n+2\left(q_n^2+2q_n+\frac{2q_n}{n(1-\mu_n)^2}+\frac{2}{n(1-\mu_n)^2}\right)\right)\omega_\tau(u;\delta_n)+\|u\|_\theta e_n$$

sağlanacaktır.

İspat. İspata başlamak için e_n, f_n, g_n, h_n'lerin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için teorem (4.5)'i yeni tanımlanan Jain operatörüne uygulamamız gerekecektir.Yardımcı teorem (4.1)'den;

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}(\tau^0-\tau^0\|_{\theta^0} &= \sup_{x\in X}p_n(x)\leq p_n=e_n\\
\|\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}(\tau^0-\tau^0\|_{\theta^{\frac{1}{2}}} &= \sup_{x\in X}\frac{q_n(x)}{\sqrt{1+\tau^2}}\leq q_n=f_n\\
\|\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}(\tau^2-\tau^2\|_{\theta} &\leq q_n^2+2q_n+\frac{2q_n}{n(1-\mu_n)^2}+\frac{2}{n(1-\mu_n)^2}=g_n\\
\|\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}(\tau^3-\tau^3\|_{\theta^{\frac{3}{2}}} &\leq q_n^3+3q_n32+3q_n+\frac{6q_n^2}{n(1-\mu_n)^2}+\frac{12q_n}{n(1-\mu_n)^2}+\frac{6}{n(1-\mu_n)^2}+\frac{4(1+2\mu_n)q_n}{n^2(1-\mu_n)^4}\\
&\quad +\frac{4(1+2\mu_n)}{n^2(1-\mu_n)^4}=h_n
\end{aligned}$$

Yukarıdaki bulguları teorem (4.6)'ya uygular isek istenilen sonuç elde edilmiş olur ve ispat tamamlanır. $\square$

Not 4.8. $\mu_n \in [0,1)$ ve $\lim_{n\to\infty}\mu_n = 0$ olsun. $\forall u \in F_\lambda((\mathbb{R}^+)$ için

$$\|\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}(u) - u\|_{\theta^{\frac{3}{2}}} = 0$$

olacağı açıkça gözükecektir.

4.4. VORONOVSKAYA TİPİ TEOREM

Yakınsama teorisinin bir diğer önemli konusu olan lineer pozitif operatörlerinin yakınsama oranıdır. Bu bölümde yeni tanımlanan Jain tipi operatör için voronovskaya tipi teoremi gösterip ispat edelim.Tüm bunlara ek olarak $\lim_{n\to\infty}\mu_n = 0$ olarak alalım.

Teorem 4.9. $\mu_n \in [0,1)$ ve $\lim_{n\to\infty} = 0$ olsun. Aynı zamnada $u \in D_\lambda(\mathbb{R}^+)$ ve $u\circ\tau^{-1}$ ifadesinin birinci ve ikinci türevleri $\tau(x)$ 'de yer alsın.Eğer $(u\circ\tau^{-1})'$ ifadesi $\mathbb{R}^+$ üzerinde sınırlı ise;

$$\lim_{n\to\infty} np_n(x) = \mu \; ve \; \lim_{n\to\infty} nq_n(x) = \xi$$

iken

$$lim_{n\to\infty} n\Big(\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]} - u(x)\Big) = \mu u(x) + (\mu - \tau(x)\xi)(u\circ\tau^{-1})'(\tau(t) + \frac{\tau(x)}{2}(u\circ\tau^{-1})'(\tau(t))$$

İspat. $\tau \in \mathbb{R}^+$ iken $u\circ\tau^{-1}$ fonksiyonunun taylor seri açılımına bakalım

$$X_x(t) \;\; = \;\; \frac{(u\circ\tau-1)''(\tau(p)) - (u\circ\tau-1)''(\tau(x))}{2}$$

iken

$$\begin{aligned} u(t) \;\; = \;\; & (u\circ\tau^{-1})(\tau(t)) = (u\circ\tau^{-1})(\tau(x)) + (u\circ\tau^{-1})'(\tau(t)(\tau(t) - \tau(x)) \\ & + \frac{1}{2}(u\circ\tau^{-1})''(\tau(t))(\tau(t) - \tau(x))^2 + X_x(t)(\tau(t) - \tau(x))^2 \end{aligned}$$

olur..

Yukarıdaki ifadeler ve u üzerinde alınan varsayımlar $\lim_{t\to x} X_x(t) = 0$ olan tüm t'ler için $|X_x| \leq H$ olduğunu gösterir. Sonrasında ise yeni tanımlanan $(\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]})_{n\geq 1}$ operatörü yukarıdaki ifadeye uygular isek;

$$\begin{aligned} n\Big(\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]} - u(x)\Big) &= \mu u(x)p_n(x) + (u\circ\tau{-}1)'(\tau(t))n\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}((\tau(t)-\tau(x));x) \\ &+\frac{1}{2}(u\circ\tau{-}1)''(\tau(t))n\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}((\tau(t)-\tau(x))^2;x) \\ &+n\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}(X_x(t)(\tau(t)-\tau(x))^2;x) \end{aligned}$$

(4.11)'deki sonuçlarımızı operatörümüze uygular isek;

$$\begin{aligned} n\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}((\tau(t)-\tau(x));x) &= \mu-\tau(x)\xi \qquad , \\ n\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}((\tau(t)-\tau(x))^2;x) &= \tau(x) \end{aligned}$$

ve sonuç olarak elde edeceğimiz yeni eşitlik;

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty}n\Big(\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]} - u(x)\Big) &= \mu u(x) + (\mu-\tau(x)\xi)(u\circ\tau^{-1})'(\tau(t)) + \frac{\tau(x)}{2}(u\circ\tau^{-1})''(\tau(t)) \\ &+lim_{n\to\infty}n\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}(|X_x(t)|(\tau(t)-\tau(x))^2;x) \end{aligned}$$

olacaktır.

Sonuç olarak $\forall\varepsilon>0$, $\delta>0$ ve $lim_{t\to x}X_x=0$ için $\left|\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}(|X_x(t)|(\tau(t)-\tau(x))^2;x)\right|$ ifadesini bulmalıyız.Cauchy - Schwarz eşitsizliği ile birlikte

$$\begin{aligned} n\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}(|X_x(t)|(\tau(t)-\tau(x))^2;x) &= \varepsilon lim_{n\to\infty}n\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}((\tau(t)-\tau(x))^2;x) \\ &+\frac{H}{\delta^2}lim_{n\to\infty}n\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}((\tau(t)-\tau(x))^4;x) \end{aligned}$$

(4.11)'deki sonuçlardan

$$lim_{n\to\infty}n\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}((\tau(t)-\tau(x))^4;x)=0$$

olacaktır. Tüm bunların sonucu olarak

$$\mathscr{J}_n^{[\tau,\mu_n]}(|X_x(t)|(\tau(t)-\tau(x))^2;x)=0$$

olarak bulunur ve ispatımız da tamamlanmış olur. □

5. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde, tanımlamış olduğumuz jain operatörünün etkinliği hakkında bazı örnekler ve buna bağlı grafikler verilecektir. Bu örneklerde seçilen test fonksiyonları tanımlanan Jain operatörüne uygulanarak operatörün performansı önceki klasik tip jain operatörü ile görsel olarak karşılaştırılacaktır. Verilen aralıklar üzerinde yeni tanımlanan Jain operatörünün klasik Jain operatörüne göre çok daha iyi bir performansa sahip olduğu grafiklerde açıkça görülecektir ve bu da operatörün alternatif olarak kullanılabileceğini göstermektedir. Tüm bunlara ek olarak tüm örneklerde MATLAB 2020b test fonksiyonlarının hesaplamalarında kullanılmıştır.

5.1. NÜMERİK ÖRNEK I

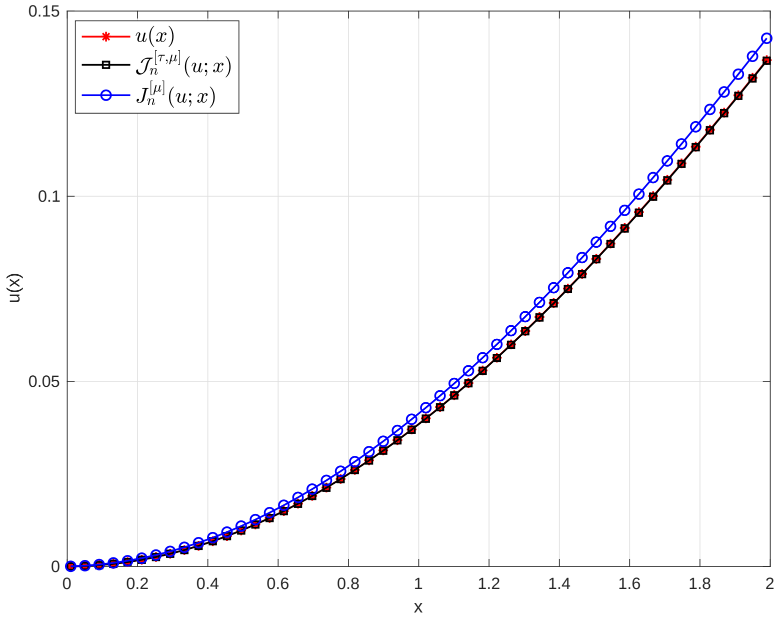
İlk örnekte bir test fonksiyonunu ele alıyoruz. Fonksiyonumuz

$$u(x) = \frac{x^2}{x^2+25},$$

olup parametreleri

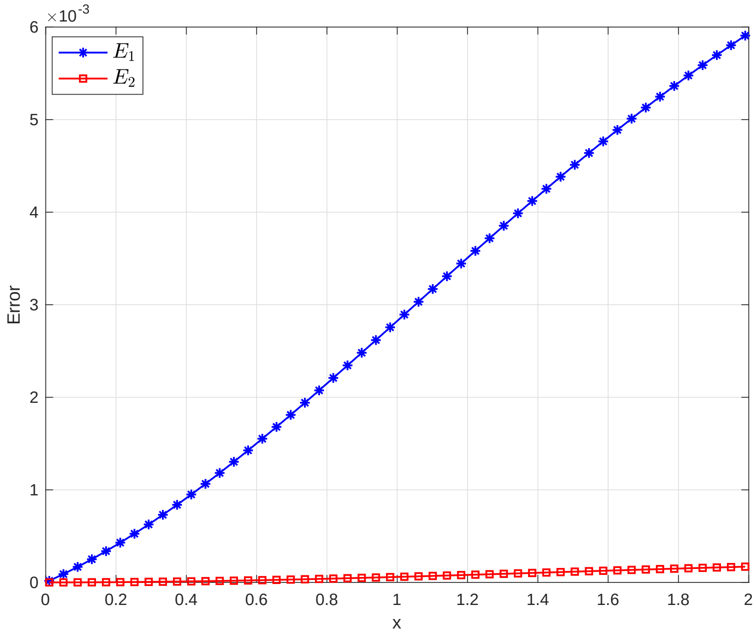
$$\tau(x) = x^2, \quad p_n(x) = \frac{x}{n^8}, \quad q_n(x) = \frac{x}{n^7} \quad \text{and} \quad \mu_n = \frac{1}{2n},$$

şeklindedir, öyle ki $n = 25$ olup tanım aralığı $[0,2]$'dır.



Şekil 5.1. $u(x) = \dfrac{x^2}{x^2+25}$ fonksiyonu için yakınsama sonuçları

Şekil 5.1, hem standart Jain operatörünün hem de yeni tanımlanmış Jain tipi operatörlerin aynı parametreler ve aralıkla görsel performansını göstermektedir. Bu şekilden, yeni operatör kullanılarak yapılan yaklaşımın test fonksiyonuna iyi bir yakınsama gösterdiği gözlemlenebilir.



Şekil 5.2. $u(x) = \dfrac{x^2}{x^2+25}$ fonksiyonu için hata sonuçları

Öte yandan, hem klasik Jain operatörlerinin hem de yeni tanımlanan Jain operatörlerinin yaklaşım hatasını Şekil 5.2'de sunuyoruz. Burada

$$E_1 = |J_n^{[\mu]}(u;x) - u(x)|, \quad \text{and} \quad E_2 = |\mathcal{J}_n^{[\tau,\mu]}(u;x) - u(x)|$$

sırasıyla klasik Jain operatörleri ve yeni tanımlanan Jain tipi operatörler tarafından yapılan yaklaşımların hata fonksiyonlarıdır. Şimdi ikinci örnekle devam edelim.

5.2. ÖRNEK II

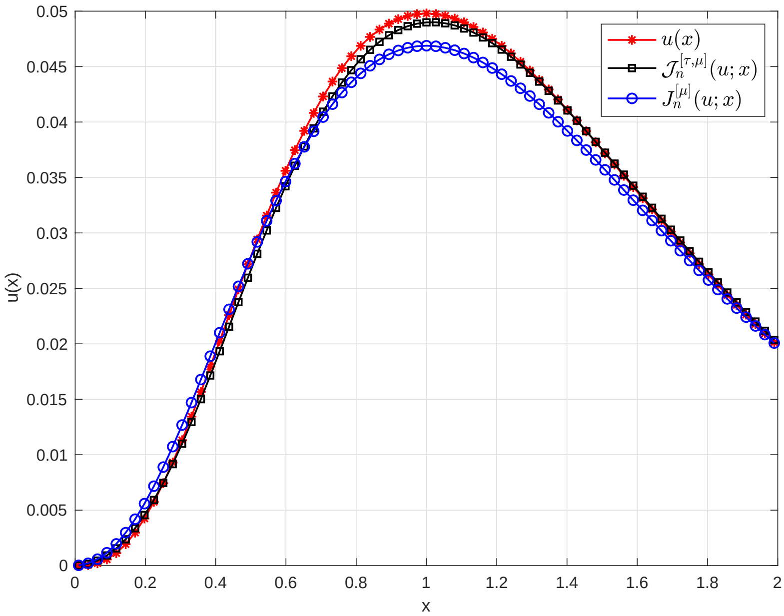
Benzer şekilde ikinci örnekte yeni bir test fonksiyonunu ele alıyoruz. Bu fonksiyon

$$u(x) = x^3 e^{-3x},$$

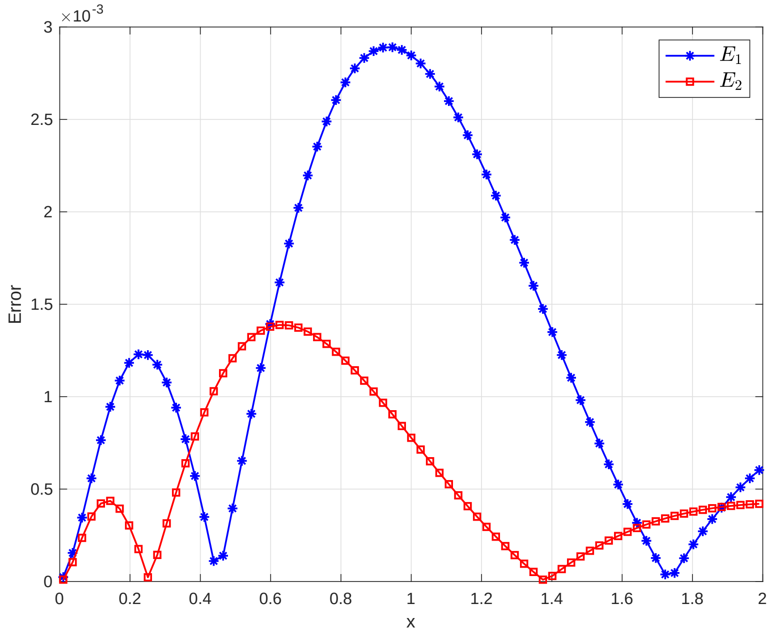
olup parametreleri

$$\tau(x) = x^2, \quad p_n(x) = \frac{x^2}{n^3}, \quad q_n(x) = \frac{x^3}{n^5} \quad \text{and} \quad \mu_n = \frac{1}{5n},$$

şeklindedir, öyle ki $n = 25$ olup tanım aralığı $[0,2]$'dir. Şekil 5.3'de yeni tanımlanan Jain operatörü ile klasik Jain operatörünün yakınsama performansları karşılaştırılırken, Şekil 5.4'de bu iki operatörün hata oranları karşılaştırılmıştır. İlk örnekte olduğu gibi yeni tanımlanan operatörün de benzer şekilde performans gösterdiği ikinci örnekten rahatlıkla görülebilmektedir.



Şekil 5.3. $u(x) = x^3 e^{-3x}$ fonksiyonu için yakınsama sonuçları



Şekil 5.4. $u(x) = x^3e^{-3x}$ fonksiyonu için hata sonuçları

6. SONUÇ

Bu tezde çokça bilinen bazı lineer pozitif operatörler ile birlikte yakınsaklık durumları ve ispatları verilmiştir ve bunlara ek olarak klasik tipteki Jain operatörü verilmiş ve yakınsaklık durumu da incelenmiştir. Sonrasında τ'ya bağlı olan yeni tipteki Jain tipi operatörümüz tanıtılmış ve yakınsama sonuçları örnekler ile incelenmiştir. Tezde yeni tanıtılan operatörümüzün geçerliliğigni kanıtlayacak tarzda örnekler anlaşılır bir tarzda verilmiş bulunmaktadır.

7. KAYNAKLAR

[1] P. P. Korovkin, "On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions", *Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.)*, c. 90, ss. 961-964, 1953.

[2] A. Olgun, F. Tasdelen, A. Erencin, "A generalization of Jain's operators", *Appl. Math. Comput.*, 266, (2015) 6–11.

[3] O. Dogru, R.N. Mohapatra, M. Orkcu, "Approximation properties of generalized Jain operators", *Filomat*, 30(9) (2016), 2359–2366

[4] A. Aral, G. Ulusoy, E. Deniz, "A new construction of Szász-Mirakyan operators", *Numer. Algor.*, 77 (2018), 313–326

[5]] A. Aral, D. Inoan, I. Raşa, "On the generalized Szász–Mirakyan operators", RM 65(3-4) (2014), 441–452

[6] O. Szász, "Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite intervals." *J. Research Nat. Bur. Standarts*, 45 (1950),239-245

[7] O. Duman, M.A. Ozarslan, "Szász–Mirakyan type operators providing a better error estimation", *Appl. Math. Lett*. 20(12)(2007), 1184–1188

[8] P. Braica, L. Piscoran, A. Indrea, A.," Graphical lectures of some king type operators". *Acta Univ. Apulensis* 34 (2013), 163–171

[9] P. Patel, V. N. Mishra, "On generalized Szász-Mirakyan operators", arXiv preprint arXiv:1508.07896.

[10] A. D. Gadjev, " Theorems of the types of P. P. Korovkin's theorems," *Matematicheskie Zametki*, c.20, s.5, ss. 781-786, 1976.

[11] A. Ciupa, "A Voronoskaja type theorem for a positive linear operator," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, ss. 1-7, 2006 .

[12] V. A. Baskakov, " An instance of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions", *Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.)*, c. 113, ss. 249–251, 1957

[13] A. Gadjiev, "A problem on the convergence of a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems that are analogous to P.P. Korovkin's theorem." *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 218 (1974), 1001-1004.

[14] A. Holhos, "Quantitative estimates for positive linear operators in weighted spaces", *General Math.* 16(4) (2008), 99–110

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Muhammet Civelek
Yabancı Dili	: İngilizce, Almanca

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik.	DÜZCE Üniversitesi	2024
Lisans	Matematik.	Düzce Üniversitesi	2017
Lise		Düzce Cumhuriyet Anadolu Lisesi	2013

TEZDEN ÇIKAN YAYIN

K. J. Ansari, M. Civelek, F. Usta" Jain’s operator: A new construction and applications in approximation theory "*Mathematical Methods in the Applied Sciences* (2023)