



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KONHAUSER BİORTOGONAL POLİNOMLARIN BAZI
ÖZELLİKLERİ**

YAHYA ÇİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ NEJLA ÖZMEN**

DÜZCE, 2018

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONHAUSER BİORTOGONAL POLİNOMLARIN BAZI
ÖZELLİKLERİ

Yahya ÇİN tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN

Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 20/07/2018

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

20 Temmuz 2018

Yahya ÇİN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

20 Temmuz 2018

Yahya ÇİN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
SİMGELER	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1. GAMMA FONKSİYONU	2
2.2. POCHAMMER SEMBOLÜ.....	2
2.3. HİPERGEOMETRİK FONKSİYON	2
2.4. BAZI HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARIN SERİ AÇILIMLARI	3
2.5. DOĞURUCU FONKSİYON	3
2.6. BAZI KULLANIŞLI ÖZDEŞLİKLER.....	4
2.7. ORTOGONAL POLİNOMLAR	4
3. BİORTOGONAL POLİNOMLAR.....	7
3.1. BİORTOGONAL POLİNOMLARIN TANIMI	7
3.2. BİORTOGONAL POLİNOMLARIN ÖZELLİKLERİ.....	8
3.3. BİORTOGONAL POLİNOMLARIN VARLIĞI İÇİN GEREK VE YETER KOŞUL.....	12
3.4. BİORTOGONAL POLİNOMLARIN SIFIRLARI	12
3.5. BİORTOGONAL POLİNOMLAR İÇİN REKÜRANS BAĞINTILARI.....	15
4. KONHAUSER BİORTOGONAL POLİNOMLARI	18
4.1. KONHAUSER BİORTOGONAL POLİNOMLARINA GİRİŞ.....	18
4.1.1. Konhauser Polinomları	18
4.2. KONHAUSER POLİNOMLARI İÇİN İNTEGRAL GÖSTERİMİ VE DOĞURUCU FONKSİYONLARI	26
4.3. KONHAUSER BİORTOGONAL POLİNOMLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ	30
4.4. KONHAUSER POLİNOMLARI İÇİN BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR	34
5. KONHAUSER POLİNOMUNUN BAĞINTILARI	43
5.1. KONHAUSER POLİNOMUNUN REKÜRANS BAĞINTILARI	43
5.2. KONHAUSER POLİNOMUNUN BAŞKA POLİNOMLARLA İLİŞKİSİ	45
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	50
7. KAYNAKLAR.....	51

ÖZGEÇMİŞ.....	53
----------------------	-----------



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 4.1. $x \in [-30,30]$ aralığında $Y_0^{(0,1,2,3,4)}(x; 1)$ polinomunun grafiği.....	32
Şekil 4.2. $x \in [-30,30]$ aralığında $Y_1^{(0,1,2,3,4)}(x; 1)$ polinomunun grafiği.....	32
Şekil 4.3. $x \in [-30,30]$ aralığında $Y_2^{(0,1,2,3,4)}(x; 1)$ polinomunun grafiği.....	33
Şekil 4.4. $x \in [-30,30]$ aralığında $Y_3^{(0,1,2,3,4)}(x; 1)$ polinomunun grafiği.....	33



SİMGELER

$D_z^n \{f(z)\}$	n . mertebeden Türev Operatörü
$G_n^{(\alpha)}(x, r, \beta, k)$	Srivastava-Singhal Polinomu
$h_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_r, \dots, x_r)$	Çok Değişkenli Lagrange-Hermite Polinomu
$L_n^{(\alpha)}(x)$	Laguerre Polinomu
$[n/p]$	Tam Değer Kısmı
$P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$	Meixner-Pollaczek Polinomu
$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	Klasik Jacobi Polinomu
$\Gamma(x)$	Gamma Fonksiyonu
$Y_n^{(\alpha)}(x; k)$	I. Tip Konhauser Polinomu
$Z_n^{(\alpha)}(x; k)$	II. Tip Konhauser Polinomu
${}_2F_1(\alpha, \beta; \lambda; x)$	Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu

ÖZET

KONHAUSER BİORTOGONAL POLİNOMLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Yahya ÇİN
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN
Temmuz 2018, 52 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde ön bilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar, lemmalar verilmiştir. Ayrıca ortogonalite için teoremler verildi. Üçüncü bölümde, biortogonal polinomlarının tanımı ve bazı özellikleri, verildi. Ayrıca, bu bölümde biortogonal polinomların varlığı için gerek ve yeter koşullar verildi. Dördüncü bölümde, Konhauser polinomları tanıtıldı. Bu polinomların integral gösterimi, bazı özellikleri ve birkaç özel değeri için grafikleri incelendi. Ayrıca Konhauser polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonu veren teoremler incelendi. Beşinci bölümde, bu polinomların türev içeren ve türev içermeyen rekürans bağıntıları verildi. Bunlara ek olarak, Konhauser polinomların bazı polinomlarla ilişkisi incelendi. Son bölümde bu tez için sonuç ve önerilere yer verildi.

Anahtar sözcükler: Bilateral doğurucu fonksiyon, Bilineer doğurucu fonksiyon, Konhauser polinomları, Rekürans bağıntıları.

ABSTRACT

SOME PROPERTIES OF BIORTHOGONAL KONHAUSER POLYNOMIALS

Yahya ÇİN

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master's Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Nejla ÖZMEN

July 2018, 52 pages

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, the introduction section is located. In the second chapter, preliminary information and some definitions or lemmas that will be used in other parts are given. In addition, there is a theorem for orthogonality. In the third chapter, the biorthogonal polynomials definition and some properties are given. Moreover, in this section, necessary and sufficient conditions are given for the existence of biorthogonal polynomials. In the fourth chapter, Konhauser polynomials were introduced. Graphs of these polynomials for integral representation, some properties, and some specific values are examined. Theorems on bilinear and bilateral generating functions for Konhauser polynomials were also examined. In the fifth chapter, these polynomials are given derivative and non-derivative recurrence relations. In addition to this, Konhauser polynomials are associated with some polynomials. In the last chapter, conclusions and recommendations were given for this thesis.

Keywords: Bilateral generating function, Bilinear generating function, Konhauser polynomials, Recurrence relations.

1. GİRİŞ

Spencer ve Fano ilk olarak 1951 yılında biortogonal polinomlarını tanımlamışlardır. Bunlar biortogonal polinomların herhangi bir özeliğini belirtmemiş, sadece c sıfır ve pozitif bir sayı olmak üzere $(0, \infty)$ aralığında $x^c e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre x ve x^2 şeklinde polinomların biortogonalılığı üzerinde çalışmışlardır [1]. Konhauser 1965 yılında biortogonal polinomların en genel özellikleri üzerinde çalışmış olup daha sonraki yıllarda bazı matematikçiler tarafından biortogonal polinomlar üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Özellikle, klasik ortogonal polinomlar kullanarak biortogonal polinom aileleri üzerinde çalışılmış ve bu polinom aileleri ile diğer polinom aileleri arasındaki bağıntılar, sağladıkları rekürans bağıntıları, Rodrigues formülleri gibi birçok özellikler elde edilmiştir.

1965 yılında Konhauser'in biortogonal polinomların genel özelliklerini vermesi, bu konu ile ilgili çalışmalar için bir başlangıç olmuştur. Daha sonraki süreçte Konhauser 1967'de biortogonal polinom ailesini tanımlamıştır. Laguerre tarafından verilen bu polinomlar Konhauser biortogonal polinomları olarak da bilinir. Bu tarihten sonra bazı matematikçiler tarafından ortogonal polinomlar üzerinden gösterilen biortogonal polinom aileleri verilmiştir. Daha sonraki süreçte bazı matematikçiler tarafından bu polinom aileleri ile ilgili birçok yeni özellik elde edilmiştir [2]-[16].

Bu tezde ilk olarak biortogonal polinomların özellikleri incelendi. Daha sonra Konhauser biortogonal polinomlarının genel özellikleri ve bu polinomların doğurucu fonksiyonu verildi. Konhauser polinomları için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonları veren teoremler elde edildi. Bu teoremler kullanılarak bazı doğurucu fonksiyon bağıntıları verildi. Bu polinomlar için rekürans bağıntıları ve başka polinomlarla ilişkisi incelendi. Son olarak sonuç ve önerilere yer verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. GAMMA FONKSİYONU

$Re(z) > 0$ olmak üzere Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır.

2.2. POCHHAMMER SEMBOLÜ

$(\lambda)_{\vartheta}$ Pochhammer sembolü, λ reel ya da kompleks bir sayı, ϑ sıfır ya da pozitif bir sayı olmak üzere

$$(\lambda)_{\vartheta} = \begin{cases} \lambda(\lambda+1)(\lambda+2) \cdots (\lambda+\vartheta-1), & \vartheta \geq 1 \\ 1, & \vartheta = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır.

2.3. HİPERGEOMETRİK FONKSİYON

α , β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanan hipergeometrik seri literatürde $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ ile gösterilir ve bu fonksiyona hipergeometrik fonksiyon denir. Genelleştirilmiş hipergeometrik seri,

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \dots (\gamma_q)_n} \frac{x^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanır.

2.4. BAZI HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARIN SERİ AÇILIMLARI

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)_n \frac{x^n}{n!} = {}_2F_1(\alpha, \beta; \beta; x) \quad (2.3)$$

$$\ln(1+x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (1)_n}{(2)_n} \frac{(-x)^n}{n!} = x \left[{}_2F_1(1, 1; 2; -x) \right] \quad (2.4)$$

hipergeometrik fonksiyonları şeklinde seri açılımlarına sahiptir.

2.5. DOĞURUCU FONKSİYON

İki değişkenli bir $f(x, t)$ fonksiyonu t nin kuvvetlerine göre

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) t^n$$

şeklinde bir seriye açılabilirse $F(x, t)$ fonksiyonuna $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar ailesinin bir doğurucu fonksiyonu denir. Burada c_n ler x ve t den bağımsız n nin bir fonksiyonu olup değişik parametreler içerebilirler.

Üç değişkenli $G(x, y, t)$ fonksiyonu, t nin kuvvetlerine göre

$$G(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x) h_k(y) t^k$$

şeklinde bir seriye açılabilirse $G(x, y, t)$ fonksiyonuna $h_k(x)$ ve $h_k(y)$ fonksiyonları için bilineer doğurucu fonksiyon denir.

Üç değişkenli $G(x, y, t)$ fonksiyonu, t nin kuvvetlerine göre

$$G(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x) g_k(y) t^k$$

şeklinde bir seriye açılabiliriyorsa $G(x, y, t)$ fonksiyonuna $h_k(x)$ ve $g_k(y)$ fonksiyonları için bilateral doğurucu fonksiyon denir.

$(r + 1)$ değişkenli $G(x_1, x_2, \dots, x_r, t)$ fonksiyonu, t nin kuvvetlerine göre

$$G(x_1, x_2, \dots, x_r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x_1) f_k(x_2) \dots f_k(x_r) t^k$$

şeklinde bir seriye açılabiliriyorsa $G(x_1, x_2, \dots, x_r, t)$ fonksiyonuna $f_k(x_1), f_k(x_2), \dots, f_k(x_r)$ fonksiyonları için multilineer doğurucu fonksiyon denir.

$(r + 1)$ değişkenli $G(x_1, x_2, \dots, x_r, t)$ fonksiyonu, t nin kuvvetlerine göre

$$G(x_1, x_2, \dots, x_r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_{1,k}(x_1) f_{2,k}(x_2) \dots f_{r,k}(x_r) t^k$$

şeklinde bir seriye açılabiliriyorsa $G(x_1, x_2, \dots, x_r, t)$ fonksiyonuna $f_{1,k}(x_1), f_{2,k}(x_2), \dots, f_{r,k}(x_r)$ fonksiyonları için multilateral doğurucu fonksiyon denir.

2.6. BAZI KULLANIŞLI ÖZDEŞLİKLER

Aşağıdaki bazı özdeşlikler ispatsız verilmiştir.

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} A(k, l) = \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} A(k + pl, l) \quad (2.5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n + pk) \quad (2.6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n - k) \quad (2.7)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n + k) \quad (2.8)$$

2.7. ORTOGONAL POLİNOMLAR

$n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ($a_n \neq 0$) sabit sayılar olsun. $p_n(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

olmak üzere

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona n –yinci dereceden polinom denir. Burada n doğal sayısı polinomun derecesi, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sayıları ise polinomun katsayılarıdır. Eğer $a_n = 1$ ise bu polinoma monik polinom denir.

Diğer yandan, $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\omega(x)$, I da tanımlı pozitif bir fonksiyon olsun.

$m, n \in \mathbb{N}$ ve $m \neq n$ olmak üzere,

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_I \omega(x) \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad (2.9)$$

sağlanıyorsa $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ polinom sistemine I aralığında $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir(diktir) denir.

Teorem 2.1. $I \subset \mathbb{R}$ aralığında $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ polinom sisteminin $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olması için gerek yeter koşul,

$$\int_I \phi_n(x) \omega(x) x^k dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.10)$$

ifadesinin sağlanmasıdır [17].

İspat: ($\Rightarrow$) ϕ_n ve ϕ_m polinomları I aralığında $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal ise,

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_I \omega(x) \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

olduğu bilinmektedir. x in k –yıncı kuvveti

$$x^k = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + \cdots + a_k \phi_k(x) = \sum_{m=0}^k a_m \phi_m(x) \quad (2.11)$$

şeklinde $\phi_m(x)$ lerin sonlu bir toplamı olarak ifade edilebilir. Buradan Denklem (2.11)’in

Denklem (2.10)'da yerine yazılmasıyla, $0 \leq m \leq k < n$ için

$$\begin{aligned} \int_I \phi_n(x) \omega(x) x^k dx &= \int_I \phi_n(x) \omega(x) \left[\sum_{m=0}^k a_m \phi_m(x) \right] dx \\ &= \sum_{m=0}^k a_m \int_I \omega(x) \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $0 \leq m < n$ olmak üzere $\phi_m(x)$ ve $\phi_n(x)$ lerin Denklem (2.9)'da verilen ortogonalik tanımını kullanılmıştır.

($\Leftarrow$) İspatın ikinci kısmı için $0 \leq m < n$ alalım. $\phi_m(x)$, m -yinci dereceden bir polinom olduğundan

$$\phi_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k \quad (2.12)$$

şeklinde yazılabilecektir. Denklem (2.9)'ün ortogonalite bağıntısından Denklem (2.12)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \int_I \omega(x) \phi_n(x) \phi_m(x) dx &= \int_I \phi_n(x) \omega(x) \left[\sum_{k=0}^m a_k x^k \right] dx \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \int_I \omega(x) \phi_n(x) x^k dx = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Denklem (2.10)'dan dolayı ispat tamamlanır.

3. BİORTOGONAL POLİNOMLAR

Bu bölümde biortogonal polinomların tanımı, biortogonal polinomların genel özellikleri ve biortogonal polinomlarla ilgili bazı teoremler verilecektir.

3.1. BİORTOGONAL POLİNOMLARIN TANIMI

Tanım 3.1. $r(x)$ ve $s(x)$ sırasıyla x e göre $h > 0$ ve $k > 0$ inci dereceden reel değerli polinomlar olsunlar. $R_m(x)$ ve $S_n(x)$ de sırasıyla $r(x)$ ve $s(x)$ e göre m –yinci ve n –yinci dereceden polinomları gösterebilirler. Bu durumda $R_m(x)$ ve $S_n(x)$ sırasıyla x e göre mh –ıncı ve nk –yinci dereceden polinomlardır. $r(x)$ ve $s(x)$ polinomlarına temel polinomlar denir.

Gösterim 3.1. $[R_n(x)]$, $r(x)$ e göre $0,1,2,\dots$ inci dereceden olan $R_0(x), R_1(x), R_2(x), \dots$ polinomlarının bir kümesini, $[S_n(x)]$ de $s(x)$ e göre $0,1,2,\dots$ inci dereceden olan $S_0(x), S_1(x), S_2(x), \dots$ polinomların bir kümesini gösterebilirler.

Tanım 3.2. Eğer tüm

$$I_{i,j} = \int_a^b \rho(x) [r(x)]^i [s(x)]^j dx, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

momentleri mevcut ve

$$I_{0,0} = \int_a^b \rho(x) dx \neq 0$$

ise, sınırlı veya sınırsız bir (a, b) aralığı üzerinde reel değerli $\rho(x)$ fonksiyonuna uygun bir ağırlık fonksiyonu denir.

Denklem (3.1)'den görülür ki, $i, j = 0, 1, 2, \dots$ için $I_{i,j}$ momentleri mevcut ise

$$\int_a^b \rho(x) x^i dx, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

integralleri de mevcuttur.

Ortogonal polinomlar için $\rho(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığında pozitif olma şartı alışıl gelmiştir. Bu şart, ortogonal polinomların belirli özelliklerinin kurulmasında gereklidir. Bu özelliklerin biortogonal polinomlar için de benzeri elde edilirken görülmektedir ki, $\rho(x)$ fonksiyonun, $I_{0,0} \neq 0$ olmak üzere, (a, b) aralığında negatif veya pozitif olması gerekmektedir. Şimdi biortogonal polinomların tanımını verelim:

Tanım 3.3. $m, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere eğer

$$J_{m,n} = \begin{cases} \int_a^b \rho(x) R_m(x) S_n(x) dx = 0 & ; \quad m \neq n \\ \int_a^b \rho(x) R_m(x) S_n(x) dx \neq 0 & ; \quad m = n \end{cases} \quad (3.2)$$

ise, $[R_m(x)]$ ve $[S_n(x)]$ polinom kümelerine, (a, b) aralığı üzerinde, $\rho(x)$ uygun ağırlık fonksiyonu ve $r(x)$ ve $s(x)$ temel polinomlarına göre biortogonaldirler denir.

3.2. BİORTOGONAL POLİNOMLARIN ÖZELLİKLERİ

Aşağıdaki teoremden biortogonalite için Denklem (3.2)'ye eş değer olan koşulları verelim.

Teorem 3.1. $\rho(x)$, (a, b) aralığı üzerinde uygun bir ağırlık fonksiyonu olsun. $r(x)$ ve $s(x)$ temel polinomlar olmak üzere

$$\begin{cases} \int_a^b \rho(x) [r(x)]^j S_n(x) dx = 0, & j = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \int_a^b \rho(x) [r(x)]^j S_n(x) dx \neq 0, & j = n \end{cases} \quad (3.3)$$

ve

$$\begin{cases} \int_a^b \rho(x) [s(x)]^j R_m(x) dx = 0 & , j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ \int_a^b \rho(x) [s(x)]^j R_m(x) dx \neq 0 & , j = m \end{cases} \quad (3.4)$$

ifadelerin sağlanması için gerek ve yeter koşul $m, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$J_{m,n} = \begin{cases} \int_a^b \rho(x) R_m(x) S_n(x) dx = 0 & ; m \neq n \\ \int_a^b \rho(x) R_m(x) S_n(x) dx \neq 0 & ; m = n \end{cases} \quad (3.5)$$

olmasıdır [18].

İspat: Denklem (3.3) ve Denklem (3.4) sağlandığını kabul edelim. O halde $R_m(x)$, $r(x)$ temel polinomlarına göre m –yinci dereceden bir polinom olduğundan

$$R_m(x) = \sum_{j=0}^m c_{m,j} [r(x)]^j$$

dir. Burada $c_{m,j}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, m$) ler için $c_{m,m} \neq 0$ olan sabitlerdir. Eğer $m \leq n$ ise

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x) R_m(x) S_n(x) dx &= \int_a^b \rho(x) \left\{ \sum_{j=0}^m c_{m,j} [r(x)]^j \right\} S_n(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^m c_{m,j} \int_a^b \rho(x) [r(x)]^j S_n(x) dx \end{aligned}$$

olur. Denklem (3.3)’ten $j = n = m$ durumu hariç

$$\int_a^b \rho(x) [r(x)]^j S_n(x) dx = 0$$

elde edilir. $m > n$ olması durumunda ise, $d_{n,n} \neq 0$ olmak üzere, $d_{n,j} (j = 0, 1, 2, \dots, n)$ sabitleri için

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^n d_{n,j} [s(x)]^j$$

yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x) R_m(x) S_n(x) dx &= \int_a^b \rho(x) \left\{ \sum_{j=0}^n d_{n,j} [s(x)]^j \right\} R_m(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^n d_{n,j} \int_a^b \rho(x) [s(x)]^j R_m(x) dx \end{aligned}$$

olur. Denklem (3.4)'ten $0 \leq j \leq n$ ve $m > n$ için

$$\int_a^b \rho(x) [s(x)]^j R_m(x) dx = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla tüm durumlar için Denklem (3.5)'in sağlandığı görülür.

Tersine olarak, kabul edelim ki Denklem (3.5) sağlansın. O halde $R_m(x)$ ve $S_n(x)$ sırasıyla $r(x)$ ve $s(x)$ temel polinomlarına göre biortogonal polinomlar olduklarından, öyle $e_{m,i}$ ve $f_{n,i}$ sabitleri vardır ki

$$[r(x)]^j = \sum_{i=0}^j e_{m,i} R_i(x)$$

ve

$$[s(x)]^j = \sum_{i=0}^j f_{n,i} S_i(x)$$

yazılabilir. Eğer $0 \leq j \leq n$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}\int_a^b \rho(x) [r(x)]^j S_n(x) dx &= \int_a^b \rho(x) \left\{ \sum_{i=0}^j e_{m,i} R_i(x) \right\} S_n(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^j e_{m,i} \int_a^b \rho(x) R_i(x) S_n(x) dx\end{aligned}$$

olur. $i = 0, 1, 2, \dots, j$ için, eğer $j < n$ ise Denklem (3.5)'ten dolayı sağ yandaki her integral sıfır olur. Eğer $j = n$ ise sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla Denklem (3.3) sağlanır.

Diğer taraftan $0 \leq j \leq m$ için

$$\begin{aligned}\int_a^b \rho(x) [s(x)]^j R_m(x) dx &= \int_a^b \rho(x) \left\{ \sum_{i=0}^j f_{n,i} S_i(x) \right\} R_m(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^j f_{n,i} \int_a^b \rho(x) S_i(x) R_m(x) dx\end{aligned}$$

elde edilir. $i = 0, 1, \dots, j$ için, eğer $j < m$ ise Denklem (3.5)'ten dolayı sağ yandaki integral sıfır olur. Eğer $j = m$ ise integral sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla Denklem (3.4)'te elde edilmiş olur ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1. Eğer Denklem (3.3) ve Denklem (3.4) sağlanıyorsa, bu durumda

$$\int_a^b \rho(x) S_n(x) F_{n-1}(x) dx = 0$$

ve

$$\int_a^b \rho(x) R_m(x) G_{m-1}(x) dx = 0 \quad (3.6)$$

dir. Burada $F_{n-1}(x)$ ve $G_{m-1}(x)$ ler sırasıyla $r(x)$ ve $s(x)$ temel polinomlarına göre dereceleri en fazla $n - 1$ ve $m - 1$ olan keyfi polinomlardır.

3.3. BİORTOGONAL POLİNOMLARIN VARLIĞI İÇİN GEREK VE YETER KOŞUL

Ortogonal polinomlarda (a, b) aralığı verildiğinde (a, b) aralığı üzerinde $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan tek bir $P_n(x)$ polinomlar kümesi vardır. Biortogonal polinomlarda ise durum farklıdır. Gösterim 3.2’de tanımlanacak olan Δ_n determinanı, temel polinomlar, ağırlık fonksiyonu ve ortogonalite aralığına bağlıdır. Δ_n determinanı $n = 1, 2, 3, \dots$ için sıfırdan farklı olacak şekilde seçilirse, biortogonal polinom ailesinin varlığından bahsedebiliriz.

Gösterim 3.2. Δ_n ,

$$\begin{vmatrix} I_{0,0} & I_{0,1} & \cdot & \cdot & \cdot & I_{0,n-1} \\ I_{1,0} & I_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & I_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ I_{n-1,0} & I_{n-1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & I_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

determinantını gösterebiliriz. Eğer $\rho(x)$ uygun bir ağırlık fonksiyonu ise $\Delta_1 = I_{0,0} \neq 0$ dir.

Şimdi biortogonal polinomların varlığı için gerek yeter koşulu veren aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.2. $r(x)$ ve $s(x)$ temel polinomları ve (a, b) aralığı üzerinde uygun bir ağırlık fonksiyonu keyfi olarak verilsin. Bu durumda $[R_m(x)]$ ve $[S_n(x)]$ polinom kümelerinin Denklem (3.2)’nin biortogonalite şartını sağlaması için gerek yeter koşul $n = 1, 2, 3, \dots$ için Δ_n determinantın sıfırdan farklı olmasıdır. Dahası bu polinomların herbiri sabit çarpan farkıyla tektir [18].

3.4. BİORTOGONAL POLİNOMLARIN SIFIRLARI

Ortogonal polinomlarda, ağırlık fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde tek işaretli olması şartıyla, $P_n(x)$ polinomlarının n tane sıfırı da reel, basit ve (a, b) aralığı içindedir. Biortogonal polinomlarda ise ağırlık fonksiyonunun uygun ve (a, b) aralığında negatif ya da pozitif olması koşuluyla birlikte, $r(x)$ ve $s(x)$ polinomlarının birinci türevlerinin (a, b) aralığı içinde sıfır olmaması, biortogonal polinom ailesinin (a, b) aralığı içinde n tane basit sıfıra sahip olmalarını gerektirir. $R_n(x)$, $r(x)$ temel polinomuna göre n –yinci

dereceden olup, $r(x)$ in derecesi ile n nin çarpımı kadar reel sifıra sahip olabilirler. Göstereceğiz ki, gerekli koşullar sağlandığında $R_n(x)$ in reel sıfırlarından kesinlikle n tanesi (a, b) aralığının içindedirler ve basittirler. Benzer düşünceyle, $R_n(x)$ ve $S_n(x)$ in rolleri değiştirilerek, $S_n(x)$ in sıfırlarının n tanesinin (a, b) aralığının içinde ve basit olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.3. Eğer $\rho(x)$ uygun ağırlık fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde negatif ya da pozitif ise ve eğer $r(x)$ ve $s(x)$ temel polinomlarının $r'(x)$ ve $s'(x)$ türevleri (a, b) aralığının içinde sıfır olmuyorsa, $R_n(x)$ ve $S_n(x)$ polinomlarının herbiri (a, b) içinde tam n tane basit sifıra sahiptirler. Geriye kalan bütün sıfır yerleri (a, b) aralığının dışındadırlar [18].

İspat: İspatı $R_n(x)$ polinomu için verelim. İlk olarak,

$$\int_a^b \rho(x) R_n(x) dx \quad (3.7)$$

integralini göz önüne alalım. Burada hipotez gereği $\rho(x)$, (a, b) aralığı üzerinde tek işaretlidir ve $I_{0,0} \neq 0$ dır. Eğer $n > 0$ ise Denklem (2.10)'da belirtilen ortogonallikten Denklem (3.7)'nin integrali sıfır olur. Bu da $R_n(x)$ polinomunun (a, b) aralığında en az bir iç noktasında işaret değiştirdiğini gösterir. Dolayısıyla $R_n(x)$, (a, b) nin içinde en az bir sıfır yerine sahiptir.

$R_n(x)$ polinomu, $r(x)$ e göre n –yinci dereceden olduğundan ve ortalama değer teoreminden

$$\begin{aligned} R_n(x) &= c_{n,n}(r - r_1)(r - r_2) \dots (r - r_n) \\ &= c_{n,n}(x - x_1)r_1^*(x - x_2)r_2^* \dots (x - x_n)r_n^* , \quad c_{n,n} \neq 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. $r'(x)$ türevi hipotezden dolayı (a, b) aralığı içinde sıfır olmadığından $r_1^*r_2^* \dots r_n^* \neq 0$ dır. Dolayısıyla $R_n(x)$, (a, b) aralığı içinde n taneden fazla sifıra sahip olamaz.

Kabul edelim ki $R_n(x)$, (a, b) aralığı içinde $x_1, x_2, \dots, x_q$, $q \leq n$ noktalarında işaret değiştirsın. Bu durumda $x_1, x_2, \dots, x_q$ noktaları $R_n(x)$ in (a, b) içinde tek katlılığa sahip sıfırlarıdır. $x_1, x_2, \dots, x_q$ noktalarının katlılıkları sırasıyla $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ olsun. Bu durumda

$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_q \leq n$ olup $R_n(x)$ polinomu

$$R_n(x) = (x - x_1)^{\sigma_1} (x - x_2)^{\sigma_2} \dots (x - x_q)^{\sigma_q} R^* \quad (3.8)$$

olarak yazılabilir. Burada R^* , (a, b) aralığı içinde tek işaretlidir.

Şimdi $s(x)$ e göre q -yuncu dereceden

$$G_q(x) = \prod_{i=1}^q [s(x) - s(x_i)] \quad (3.9)$$

polinomunu tanımlayalım. Denklem (3.6)'dan eğer $q < n$ ise

$$\int_a^b \rho(x) R_n(x) G_q(x) dx = 0 \quad (3.10)$$

olur. Diğer yandan $G_q(x)$, Denklem (3.9) gereğince ortalama değer teoreminden

$$G_q(x) = (x - x_1)s_1^*(x - x_2)s_2^* \dots (x - x_q)s_q^* \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir. Hipotezden, (a, b) içinde $s'(x) \neq 0$ olduğundan $s_1^*s_2^* \dots s_q^* \neq 0$ olur.

Denklem (3.10) ifadesinde $R_n(x)$ ve $G_q(x)$ polinomları yerine sırasıyla Denklem (3.8)

ve Denklem (3.11) ifadelerini yazarsak,

$$\int_a^b \rho(x) \prod_{i=1}^q (x - x_i)^{1+\sigma_i} \prod_{i=1}^q s_i^* R^* dx \quad (3.12)$$

elde edilir. Böylece Denklem (3.12) ifadesi, R^* (a, b) aralığının içinde tek işaretli, (a, b) üzerinde $s_i^* \neq 0, i = 1, 2, \dots, q$ ve $1 + \sigma_i$ çift iken sıfır olamaz. Fakat bu Denklem (3.10) ifadesi ile çelişir. Dolayısıyla $q = n$ olmalıdır. Yani her σ_i değeri 1 dir. Bu nedenle $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n = n$ olur. Bu ise $R_n(x)$ in (a, b) aralığı içinde n tane basit sifira sahip olduğunu gösterir.

$S_n(x)$ polinomları için eşdeğer bir ispat $R_n(x)$ ve $S_n(x)$ in rolleri değiştirilerek verilebilir

3.5. BİORTOGONAL POLİNOMLAR İÇİN REKÜRANS BAĞINTILARI

Ortogonal polinomlar için üç ardışık polinoma bağlı rekürans bağıntısı her zaman mevcuttur. Biortogonal polinomlarda benzer basit ilişki yok gibi görülür. Rekürans bağıntısı, $r(x)$ ve $s(x)$ temel polinomlarına bağlı olarak bulunabilecek üç ya da daha çok ardışık polinoma bağlıdır. Genel olarak, biortogonal polinomlar için rekürans bağıntılarının varlığı, aşağıdaki teoremden görülen temel polinomlar dışında bilinmemektedir.

Teorem 3.4. $s(x)$, $r(x)$ e göre k –yıncı dereceden bir $\omega(x)$ polinomunu göstermek üzere $r(x)$ ve $s(x)$ ler temel polinomlar olsunlar. Eğer $[R_n(x)]$ ve $[S_n(x)]$, (a, b) aralığı üzerinde bir $\rho(x)$ uygun fonksiyonu için biortogonal polinom kümeleri iseler bu durumda herbiri $k + 2$ ardışık polinom içeren

$$\omega(x) R_n(x) = \sum_{i=n-1}^{n+k} a_{n,i} R_i(x) \quad (3.13)$$

ve

$$\omega(x) S_n(x) = \sum_{i=n-k}^{n+1} b_{n,i} S_i(x) \quad (3.14)$$

rekürans bağıntıları vardır. Burada $a_{n,i}$ ve $b_{n,i}$ katsayıları x e bağlı olmayıp n nin fonksiyonlarıdır [18].

İspat: $R_n(x)$ polinomu $r(x)$ temel polinomuna göre n –yinci derecedendir. Hipotezden dolayı

$$s(x) = [r(x)]^k = \omega(x)$$

dır. Böylece $\omega(x)R_n(x)$ çarpımı $r(x)$ e göre $(n + k)$ –yıncı dereceden olur ve

$$\omega(x)R_n(x) = \sum_{i=0}^{n+k} a_{n,i} R_i(x) \quad (3.15)$$

olacak şekilde $a_{n,i}$ sabitleri mevcuttur. Denklem (3.15)’in her iki tarafı $\rho(x)S_j(x)$ ile

çarpılır ve (a, b) aralığı üzerinde integral alınır, ortogonallikten

$$\begin{aligned}
\int_a^b \rho(x) \omega(x) R_n(x) S_j(x) dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n+k} a_{n,i} R_i(x) \rho(x) S_j(x) dx \\
&= \sum_{i=0}^{n+k} a_{n,i} \int_a^b \rho(x) R_i(x) S_j(x) dx \\
&= \sum_{\substack{i=0 \\ i=j}}^{n-2} a_{n,i} \int_a^b \rho(x) R_i(x) S_j(x) dx \\
&\quad + \sum_{\substack{i=n-1 \\ i=j}}^{n+k} a_{n,i} \int_a^b \rho(x) R_i(x) S_j(x) dx \\
&= \sum_{\substack{i=n-1 \\ i=j}}^{n+k} a_{n,i} \int_a^b \rho(x) R_i(x) S_j(x) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. $\omega(x)S_j(x)$ çarpımı $S_{j+1}(x), S_j(x), \dots, S_0(x)$ in lineer kombinasyonudur ve $j+1 < n$ için $R_n(x), \omega(x)S_j(x)$ e ortogonaldır. Buradan $j = 0, 1, 2, \dots, n-2$ için $a_{n,j} = 0$ olur ve Denklem (3.15)'in toplamı $n-1$ den $n+k$ ya yazılabilir ki bu da $k+2$ tane ardışık $R_n(x)$ polinomlarının oluşturduğu Denklem (3.13) formunda bir rekürans bağıntısının varlığını gösterir.

Denklem (3.14) ifadesini elde etmek için, $s(x)$ temel polinomuna göre $(n+1)$ –inci dereceden olan $\omega(x)S_n(x)$ polinomunu göz önüne alalım. Buradan

$$\omega(x)S_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_{n,i} S_i(x) \quad (3.16)$$

olacak şekilde $b_{n,i}$ sabitleri mevcuttur. Denklem (3.16)'nın her iki tarafını $\rho(x)R_j(x)$ ile çarpıp ve (a, b) aralığı üzerinde integral alınır, ortogonallikten

$$\begin{aligned}
\int_a^b \rho(x) \omega(x) R_j(x) S_n(x) dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n+1} b_{n,i} R_j(x) \rho(x) S_i(x) dx \\
&= \sum_{\substack{i=0 \\ i=j}}^{n+1} b_{n,i} \int_a^b \rho(x) R_j(x) S_i(x) dx \\
&\quad + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n+1} b_{n,i} \int_a^b \rho(x) R_j(x) S_i(x) dx \\
&= \sum_{\substack{i=0 \\ i=j}}^{n-k-1} b_{n,i} \int_a^b \rho(x) R_i(x) S_j(x) dx \\
&\quad + \sum_{\substack{i=n-k \\ i=j}}^{n+1} b_{n,i} \int_a^b \rho(x) R_i(x) S_j(x) dx \\
&= \sum_{\substack{i=n-k \\ i=j}}^{n+1} b_{n,i} \int_a^b \rho(x) R_i(x) S_j(x) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. $\omega(x)R_j(x)$ çarpımı $R_{j+k}(x), R_{j+k-1}(x), \dots, R_0(x)$ polinomlarının bir lineer kombinasyonudur. Ortogonallikten $\omega(x)R_j(x)$ çarpımı, $j+k < n$ için $S_n(x)$ ile ortogonaldır. Dolayısıyla $j = 0, 1, \dots, n-k-1$ için $b_{n,j} = 0$ olur ve Denklem (3.16)'nın toplamı $n-k$ dan $n+1$ e yazılabilir. Bu da $k+2$ tane ardışık $S_n(x)$ polinomlarına bağlı Denklem (3.14)'ün formunda bir rekürans bağıntısının varlığını gösterir.

4. KONHAUSER BİORTOGONAL POLİNOMLARI

Bu bölümde ilk olarak Konhauser biortogonal polinomların ailesi verilecek. Daha sonra bu polinomlarla ilgili bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonları veren teoremler verilecektir. Ayrıca Konhauser polinom ailesinden olan $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ polinomunun doğurucu fonksiyonu n , α ve k nın farklı değerleri için grafikleri incelenmiştir.

4.1. KONHAUSER BİORTOGONAL POLİNOMLARINA GİRİŞ

4.1.1. Konhauser Polinomları

Tanım 4.1. $k \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha > -1$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere Konhauser polinomları

$$Z_n^{(\alpha)}(x; k) = \frac{\Gamma(kn + \alpha + 1)}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{x^{kj}}{\Gamma(kj + \alpha + 1)} \quad (4.1)$$

$$Y_n^{(\alpha)}(x; k) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} \left(\frac{j + \alpha + 1}{k} \right)_n \quad (4.2)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 4.1. $m, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere Konhauser polinomları $(0, \infty)$ aralığında $x^\alpha e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre biortogonaldır. Yani

$$\begin{cases} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} Y_m^{(\alpha)}(x; k) Z_n^{(\alpha)}(x; k) dx = 0 & ; \quad m \neq n \\ \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} Y_m^{(\alpha)}(x; k) Z_n^{(\alpha)}(x; k) dx \neq 0 & ; \quad m = n \end{cases} \quad (4.3)$$

gerçekleşir [19].

İspat:

$$J_{m,n} = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} Y_m^{(\alpha)}(x; k) Z_n^{(\alpha)}(x; k) dx \quad (4.4)$$

olsun. Denklem (4.4)'te Denklem (4.1) ve Denklem (4.2)'de tanımlı olan $Z_n^{(\alpha)}(x; k)$ ve $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ polinomlarını yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} J_{m,n} &= \frac{\Gamma(kn + \alpha + 1)}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{1}{\Gamma(kj + \alpha + 1)} \\ &\times \frac{1}{m!} \sum_{r=0}^m \frac{1}{r!} \sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} \left(\frac{s + \alpha + 1}{k} \right)_m \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha + kj + r} dx \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. Denklem (4.5)'te Denklem (2.1)'de verilen $\Gamma(x)$ fonksiyonun tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} J_{m,n} &= \frac{\Gamma(kn + \alpha + 1)}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{1}{\Gamma(kj + \alpha + 1)} \\ &\times \frac{1}{m!} \sum_{r=0}^m \frac{1}{r!} \sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} \left(\frac{s + \alpha + 1}{k} \right)_m \Gamma(kj + \alpha + r + 1) \end{aligned} \quad (4.6)$$

sonucuna ulaşılır. Daha sonra

$$\frac{\Gamma(kj + \alpha + r + 1)}{r! \Gamma(kj + \alpha + 1)} = \frac{(kj + \alpha + 1)!}{r! (kj + \alpha)!} = \binom{kj + r + \alpha}{r}$$

olduğu göz önüne alınırsa, Denklem (4.6) ifadesi

$$\begin{aligned} J_{m,n} &= \frac{\Gamma(kn + \alpha + 1)}{n! m!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \\ &\times \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} \left(\frac{s + \alpha + 1}{k} \right)_m \binom{kj + \alpha + r}{r} \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. $f(x)$ m –inci dereceden bir polinom ise

$$f(x) = \sum_{r=0}^m \binom{x}{r} \Delta^r f(0)$$

şeklinde ifade edilebilir [20]. Burada

$$\Delta^r f(0) = \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} f(s)$$

dir. Özel olarak $f(x) = \left(\frac{x+\alpha+1}{k}\right)_m$ alınırsa

$$\left(\frac{x+\alpha+1}{k}\right)_m = \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{x}{r} \sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} \left(\frac{s+\alpha+1}{k}\right)_m$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} (-1)^r \binom{x}{r} &= (-1)^r \frac{x!}{r! (x-r)!} = \frac{(-x)(-x+1) \dots (-x+r-1)}{r!} \\ &= \frac{(-x)_r}{r!} = \binom{-x+r-1}{r} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\left(\frac{x+\alpha+1}{k}\right)_m = \sum_{r=0}^m \binom{-x+r-1}{r} \sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} \left(\frac{s+\alpha+1}{k}\right)_m$$

elde edilir. $x = -kj - \alpha - 1$ alınırsa,

$$(-j)_m = \sum_{r=0}^m \binom{kj+\alpha+r}{r} \sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} \left(\frac{s+\alpha+1}{k}\right)_m$$

olur. Bu ifadeyi Denklem (4.7)'de yerine yazarsak

$$J_{m,n} = \frac{\Gamma(kn + \alpha + 1)}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{(-j)_m}{m!} \quad (4.8)$$

elde edilir. Öte yandan Denklem (4.8)'de

$$\frac{(-j)_m}{m!} = (-1)^m \frac{j!}{m! (j-m)!} = (-1)^m \binom{j}{m}$$

eşitliği kullanılırsa

$$J_{m,n} = (-1)^m \frac{\Gamma(kn + \alpha + 1)}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \binom{j}{m} \quad (4.9)$$

ve Denklem (4.9)'ün sağındaki toplam ifadesinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \binom{j}{m} &= \binom{n}{m} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{(n-m)!}{(n-j)! (j-m)!} \\ &= \binom{n}{m} \sum_{j=m}^n (-1)^j \binom{n-m}{j-m} \\ &= (-1)^m \binom{n}{m} \sum_{j=0}^{n-m} (-1)^j \binom{n-m}{j} \\ &= (-1)^m \binom{n}{m} (1-1)^{n-m} \end{aligned}$$

elde edilir. Son bulunan bu ifade Denklem (4.9)'da göz önüne alınırsa

$$J_{m,n} = \frac{\Gamma(kn + \alpha + 1)}{n!} \delta_{n,m}$$

bulunur. Böylece Denklem (4.3)'ün sağlandığını gösterir.

Denklem (4.3) ve Teorem (3.1) göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2. Denklem (4.1) ve Denklem (4.2)'de tanımlanan $Z_n^{(\alpha)}(x; k)$ ve $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ polinomları $(0, \infty)$ aralığında $x^\alpha e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} Z_n^{(\alpha)}(x; k) x^i dx = 0 \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} Z_n^{(\alpha)}(x; k) x^i dx \neq 0 \quad ; \quad i = n \end{array} \right. \quad (4.10)$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} Y_n^{(\alpha)}(x; k) x^{ki} dx = 0 \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} Y_n^{(\alpha)}(x; k) x^{ki} dx \neq 0 \quad ; \quad i = n \end{array} \right. \quad (4.11)$$

denklemleri ortogonallik bağıntılarını sağlarlar [19].

İspat: Denklem (4.10)'ün sol tarafında Denklem (4.1) ile verilen $Z_n^{(\alpha)}(x; k)$ polinomu yerine yazılır ve Denklem (2.1)'de verilen $\Gamma(x)$ fonksiyonun tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} Z_n^{(\alpha)}(x; k) x^i dx \\ &= \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} \frac{\Gamma(kn + \alpha + 1)}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{x^{kj}}{\Gamma(kj + \alpha + 1)} x^i dx \\ &= \frac{\Gamma(kn + \alpha + 1)}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{1}{\Gamma(kj + \alpha + 1)} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{kj+\alpha+i} dx \\ &= \frac{\Gamma(kn + \alpha + 1)}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{\Gamma(kj + \alpha + i + 1)}{\Gamma(kj + \alpha + 1)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan

$$D^i x^{kj+\alpha+i} \Big|_{x=1} = (kj + \alpha + i)(kj + \alpha + i - 1) \dots (kj + \alpha + 1) x^{kj+\alpha} \Big|_{x=1}$$

$$\begin{aligned}
&= (kj + \alpha + i)(kj + \alpha + i - 1) \dots (kj + \alpha + 1) \frac{\Gamma(kj + \alpha + 1)}{\Gamma(kj + \alpha + 1)} \\
&= \frac{\Gamma(kj + \alpha + i + 1)}{\Gamma(kj + \alpha + 1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklem (4.12) ifadesi dikkate alınır

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} Z_n^{(\alpha)}(x; k) x^i dx &= \frac{\Gamma(kn + \alpha + 1)}{n!} \left\{ \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} D^j x^{kj+\alpha+i} \right\} \Big|_{x=1} \\
&= \frac{\Gamma(kn + \alpha + 1)}{n!} \left\{ D^i x^{\alpha+i} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} x^{kj} \right\} \Big|_{x=1} \\
&= \frac{\Gamma(kn + \alpha + 1)}{n!} D^i x^{\alpha+i} (1 - x^k)^n \Big|_{x=1}
\end{aligned}$$

olur. Bu da $i = 0, 1, \dots, n-1$ için sıfır, $i = n$ için sıfırdan farklı olur. Bu ise Denklem (4.10)'ün sağlandığını gösterir.

Şimdi Denklem (4.11)'in ispatını yapmak için tümevarım yöntemini kullanalım.

$n = 0$ için Denklem (4.2) ifadesi ele alındığında,

$$Y_0^{(\alpha)}(x; k) = 1$$

elde edilir. Denklem (4.11)'de $i = 0$ alınır,

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = \Gamma(\alpha + 1) \neq 0$$

elde edilir. Bu ise Denklem (4.11)'in sıfırdan farklı olduğunu gösterir.

$n = 1$ için, Denklem (4.11)'in $i = 0$ için sıfır ve $i = 1$ için sıfırdan farklı olması gerekir.

Bu Denklem (4.11)'i hesaplamak için Konhauser tarafından Denklem (4.2) için bulunan

$$k(n+1)Y_{n+1}^{(\alpha)}(x; k) = xDY_n^{(\alpha)}(x; k) + (kn + \alpha + 1 - x)Y_n^{(\alpha)}(x; k) \quad (4.13)$$

türev içeren rekürans bağıntısı kullanılır [19]. Denklem (4.13)'te $n = 0$ yazarsak,

$$Y_1^{(\alpha)}(x; k) = k^{-1} \left(xDY_0^{(\alpha)}(x; k) + (\alpha + 1 - x)Y_0^{(\alpha)}(x; k) \right)$$

$$= k^{-1}(\alpha + 1 - x)$$

olur. $i = 0$ için Denklem (4.11) göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} Y_1^{(\alpha)}(x; k) dx &= \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} k^{-1}(\alpha + 1 - x) dx \\ &= k^{-1} \left[(\alpha + 1) \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx - \int_0^{\infty} x^{\alpha+1} e^{-x} dx \right] \\ &= k^{-1} [(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1) - \Gamma(\alpha + 2)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $i = 1$ için yerine yazalım

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} Y_1^{(\alpha)}(x; k) x^k dx &= \int_0^{\infty} x^{\alpha+k} e^{-x} k^{-1}(\alpha + 1 - x) dx \\ &= k^{-1} \left[(\alpha + 1) \int_0^{\infty} x^{\alpha+k} e^{-x} dx - \int_0^{\infty} x^{\alpha+k+1} e^{-x} dx \right] \\ &= k^{-1} [(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + k + 1) - \Gamma(\alpha + k + 2)] \\ &= -\Gamma(\alpha + k + 1) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $n = 1$ için Denklem (4.11) doğrudur. Tümevarım yöntemini tamamlamak için göstermeliyiz ki

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} Y_{n+1}^{(\alpha)}(x; k) x^{ki} dx = 0 & ; i = 0, 1, \dots, n \\ \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} Y_{n+1}^{(\alpha)}(x; k) x^{ki} dx \neq 0 & ; i = n + 1 \end{cases} \quad (4.14)$$

sağlanmalıdır. Hipotezden $0 \leq i < n$ için $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ nın x^{ki} ile ortogonal olduğunu biliyoruz. Bu yüzden Denklem (4.14)'teki integralin $i = n$ için sıfır ve $i = n + 1$ için sıfırdan farklı olduğunu göstermemiz gerekiyor. Denklem (4.13)'te $Y_{n+1}^{(\alpha)}(x; k)$ yalnız

bırakılır ve Denklem (4.14)'ün sol tarafında yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} Y_{n+1}^{(\alpha)}(x; k) x^{ki} dx &= k^{-1}(n+1)^{-1} \int_0^{\infty} x^{\alpha+ik+1} e^{-x} DY_n^{(\alpha)}(x; k) dx \\ &+ k^{-1}(n+1)^{-1} \int_0^{\infty} (kn + \alpha + 1 - x) x^{\alpha+ik} e^{-x} Y_n^{(\alpha)}(x; k) dx \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. Denklem (4.15)'te $u = x^{\alpha+ik+1} e^{-x}$ ve $dv = DY_n^{(\alpha)}(x; k) dx$ denilip kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} Y_{n+1}^{(\alpha)}(x; k) x^{ki} dx &= k^{-1}(n+1)^{-1} x^{\alpha+ik+1} e^{-x} Y_n^{(\alpha)}(x; k) \Big|_0^{\infty} \\ &+ k^{-1}(n+1)^{-1} \int_0^{\infty} [x - (ik + \alpha + 1) + (kn + \alpha + 1 - x)] \\ &\times x^{\alpha+ik} e^{-x} Y_n^{(\alpha)}(x; k) dx \\ &= (n+1)^{-1} \int_0^{\infty} x^{\alpha+ik} e^{-x} (n - i) Y_n^{(\alpha)}(x; k) dx \end{aligned} \quad (4.16)$$

bulunur.

Denklem (4.16)'da $i = n$ için sıfır ve $i = n + 1$ için ise,

$$-(n+1)^{-1} \int_0^{\infty} x^{\alpha+kn+k} e^{-x} Y_n^{(\alpha)}(x; k) dx \quad (4.17)$$

integral değerine eşit olur. Denklem (4.17)'de Denklem (4.13)'teki rekürans bağıntısı n defa uygulanırsa ve her bir uygulamaya takiben kısmi integrasyon kullanılırsa,

$$-(n+1)^{-1} \int_0^{\infty} x^{\alpha+kn+k} e^{-x} Y_n^{(\alpha)}(x; k) dx = (-1)^{n+1} \Gamma(\alpha + kn + k + 1)$$

elde edilirki, bu $i = n + 1$ için Denklem (4.16)'nın sıfırdan farklı olduğunu gösterir. O halde Denklem (4.11) tümevarım yöntemi ile ispatlanmış olur.

Tezin buraya kadar olan kısmında Konhauser biortogonal polinomlarının çifti ele alınmıştır. Bundan sonraki kısımda ise Konhauser polinomlarından biri olan $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ polinomu ele alınacaktır.

4.2. KONHAUSER POLİNOMLARI İÇİN İNTEGRAL GÖSTERİMİ VE DOĞURUCU FONKSİYONLARI

Bu bölümde $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ Konhauser polinomlarının integral gösterimi ve doğurucu fonksiyonları verilecektir.

Konhauser, 1967 yılındaki çalışmasında, $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ polinomlarının integral gösterimini

$$Y_n^{(\alpha)}(x; k) = \frac{k}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-xt}(t+1)^{\alpha+kn}}{[(t+1)^k - 1]^{n+1}} dt \quad (4.18)$$

şeklinde vermiştir [19]. Denklem (4.18)'de, C , t –kompleks düzleminde bir dairedir. Şimdi Cauchy integral formülünü verelim.

$$D_z^n \{f(z)\} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \quad (4.19)$$

şekline verilir [21]. Burada C , t de bir dairedir. Denklem (4.18) ve Denklem (4.19) göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} Y_n^{(\alpha)}(x; k) &= \frac{k}{2\pi i} \int_C \frac{\frac{e^{-xt}(t+1)^{\alpha+kn}}{(t^{k-1} + kt^{k-2} + \dots + k)^{n+1}}}{[(t+1)^k - 1]^{n+1}} dt \\ &= \frac{k}{n!} \left\{ \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-xt}(t+1)^{\alpha+kn}}{t^{n+1}} dt \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k}{n!} \left\{ \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-xt}(t+1)^{\alpha+kn}}{(t^{k-1} + kt^{k-2} + \dots + k)^{n+1} t^{n+1}} dt \right\} \\
&= \frac{k}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ \frac{e^{-xt}(t+1)^{\alpha+kn}}{(t^{k-1} + kt^{k-2} + \dots + k)^{n+1}} \right\}_{t=0} \\
&= \frac{k}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ \frac{e^{-xt}(t+1)^{\alpha+kn}}{\left(\frac{(t+1)^k - 1}{t} \right)^{n+1}} \right\}_{t=0} \\
Y_n^{(\alpha)}(x; k) &= \frac{k}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ \frac{e^{-xt}(t+1)^{\alpha+kn} t^{n+1}}{[(t+1)^k - 1]^{n+1}} \right\}_{t=0} \tag{4.20}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir [19].

Şimdi $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ polinomlarının bir doğurucu fonksiyonunu verelim. Doğurucu fonksiyonunu bulmamızda kullanacağımız “Lagrange genişlemesi”

$$\frac{f(t)}{1 - \omega \phi'(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dt^n} [f(t) \phi(t)^n] \right\}_{t=0} \tag{4.21}$$

şeklinde olur [22]. Burada $\omega = \frac{t}{\phi(t)}$ ve $\phi(t) = a_0 + a_1 t + \dots$ ($a_0 \neq 0$) dır.

$$f(t) = \frac{e^{-xt}(t+1)^{\alpha} t}{(t+1)^k - 1}$$

ve

$$\phi(t) = \frac{(t+1)^k t}{(t+1)^k - 1}$$

alınırsa

$$\begin{aligned}
1 - \omega \phi'(t) &= 1 - \frac{t}{\phi(t)} \frac{[(t+1)^k + tk(t+1)^{k-1}][(t+1)^k - 1]}{[(t+1)^k - 1]^2} \\
&\quad - \frac{tk(t+1)^{2k-1}}{[(t+1)^k - 1]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{(t+1)^k - 1}{(t+1)^k} \frac{[(t+1)^k + tk(t+1)^{k-1}][(t+1)^k - 1]}{[(t+1)^k - 1]^2} \\
&= 1 - \frac{1}{(t+1)^k} \frac{(t+1)^k \left[(t+1)^k - 1 - \frac{tk}{(t+1)} \right]}{[(t+1)^k - 1]} \\
&= 1 - \frac{\left[(t+1)^k - 1 - \frac{tk}{(t+1)} \right]}{(t+1)[(t+1)^k - 1]}
\end{aligned}$$

$$1 - \omega \phi'(t) = \frac{tk}{(t+1)[(t+1)^k - 1]}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{f(t)}{1 - \omega \phi'(t)} = \frac{\frac{e^{-xt}(t+1)^\alpha t}{(t+1)^k - 1}}{\frac{tk}{(t+1)[(t+1)^k - 1]}} = \frac{1}{k} e^{-xt} (t+1)^{\alpha+1} \quad (4.22)$$

olur. Denklem (4.20) ve Denklem (4.22), Denklem (4.21)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} e^{-xt} (t+1)^{\alpha+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\frac{e^{-xt} (t+1)^{\alpha+kn} t^{n+1}}{[(t+1)^k - 1]^{n+1}} \right] \right\}_{t=0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \frac{n!}{k} Y_n^{(\alpha)}(x; k) \\
e^{-xt} (t+1)^{\alpha+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n Y_n^{(\alpha)}(x; k) \quad (4.23)
\end{aligned}$$

elde edilir [20]. $\omega = \frac{t}{\phi(t)} = 1 - (t+1)^{-k}$ eşitliğinden t çekilirse ve Denklem (4.23)'te yerine yazılırsa

$$(1 - \omega)^{-(\alpha+1)/k} \exp\{x[1 - (1 - \omega)^{-1/k}]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n Y_n^{(\alpha)}(x; k) \quad , |\omega| < 1 \quad (4.24)$$

Konhauser polinomları için bir doğurucu fonksiyon elde edilmiş olur [20].

Şimdi $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ polinomları için bir başka doğurucu fonksiyon bağıntısı verelim.

Denklem (4.24)'te ω gördüğümüz yere $\omega + u$ yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha)}(x; k)(\omega + u)^n = (1 - u - \omega)^{-(\alpha+1)/k} \exp\{x[1 - (1 - u - \omega)^{-1/k}]\}$$

olur. Diğer yandan

$$(\omega + u)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \omega^{n-m} u^m$$

açılımı kullanılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \omega^{n-m} u^m Y_n^{(\alpha)}(x; k) &= (1 - \omega)^{-(\alpha+1)/k} \left(1 - \frac{u}{1 - \omega}\right)^{-(\alpha+1)/k} \\ &\times \exp\left\{x \left[1 - (1 - \omega)^{-1/k} \left(1 - \frac{u}{1 - \omega}\right)^{-1/k}\right]\right\} \\ &= (1 - \omega)^{-(\alpha+1)/k} \exp\{x[1 - (1 - \omega)^{-1/k}]\} \\ &\times \left(1 - \frac{u}{1 - \omega}\right)^{-(\alpha+1)/k} \exp\left\{x \left[(1 - \omega)^{-1/k} \left(1 - \left(1 - \frac{u}{1 - \omega}\right)^{-1/k}\right)\right]\right\} \\ &= (1 - \omega)^{-(\alpha+1)/k} \exp\{x[1 - (1 - \omega)^{-1/k}]\} \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} Y_m^{(\alpha)}(x(1 - \omega)^{-1/k}; k) \left(\frac{u}{1 - \omega}\right)^m \end{aligned}$$

olur. Denklem (2.8) ifadesi ve iki polinomun eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} Y_{n+m}^{(\alpha)}(x; k) \omega^n u^m &= (1 - \omega)^{-(\alpha+1)/k} \\ &\times \exp\{x[1 - (1 - \omega)^{-1/k}]\} \sum_{m=0}^{\infty} Y_m^{(\alpha)}(x(1 - \omega)^{-1/k}; k) \left(\frac{u}{1 - \omega}\right)^m \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} Y_{n+m}^{(\alpha)}(x; k) \omega^n = (1-\omega)^{-m-(\alpha+1)/k} \times \exp\{x[1 - (1-\omega)^{-1/k}]\} Y_m^{(\alpha)}(x(1-\omega)^{-1/k}; k) \quad (4.25)$$

bulunur [23], [24].

4.3. KONHAUSER BİORTOGONAL POLİNOMLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ Konhauser polinomlarının bazı değerleri ve bu değerlere karşılık gelen grafikler verilecektir.

n ve k nın farklı değerleri için $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ Konhauser polinomlarının değerlerini bulmak için $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ polinomunun tanımını ve Denklem (4.13)'te verilen rekürans bağıntısını kullanalım.

Öncelikle $n = 0$ ve $k = 1$ için $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ polinomlarının değerini bulalım. Denklem (4.2)'de $n = 0$ ve $k = 1$ alınırsa

$$Y_0^{(\alpha)}(x; 1) = 1 \quad (4.26)$$

bulunur [24]. Diğer yandan Denklem (4.13)'te $n = 0$ ve $k = 1$ alınıp ve Denklem (4.26) göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} Y_1^{(\alpha)}(x; 1) &= xDY_0^{(\alpha)}(x; 1) + (\alpha + 1 - x)Y_0^{(\alpha)}(x; 1) \\ &= -x + \alpha + 1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde edilir [24]. Benzer şekilde Denklem (4.13)'te $n = 1$ ve $k = 1$ alınırsa ve Denklem (4.27) kullanıp ve gerekli işlemler yapılırsa,

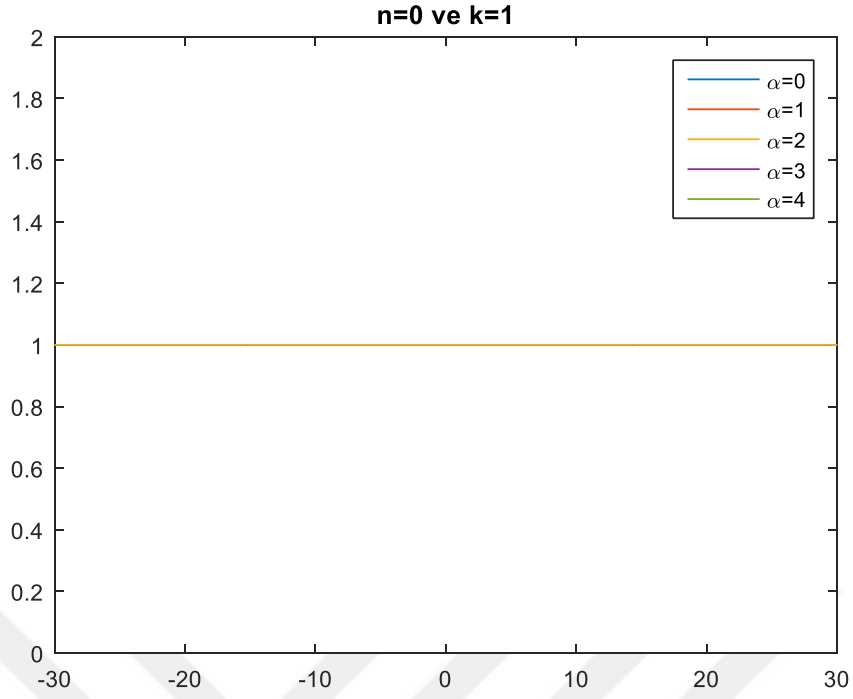
$$\begin{aligned} 2Y_2^{(\alpha)}(x; 1) &= xDY_1^{(\alpha)}(x; 1) + (\alpha + 2 - x)Y_1^{(\alpha)}(x; 1) \\ &= xD(-x + \alpha + 1) + (-x + \alpha + 2)(-x + \alpha + 1) \\ Y_2^{(\alpha)}(x; 1) &= \frac{1}{2}(x^2 - x(2\alpha + 4) + \alpha^2 + 3\alpha + 2) \end{aligned} \quad (4.28)$$

bulunur [24].

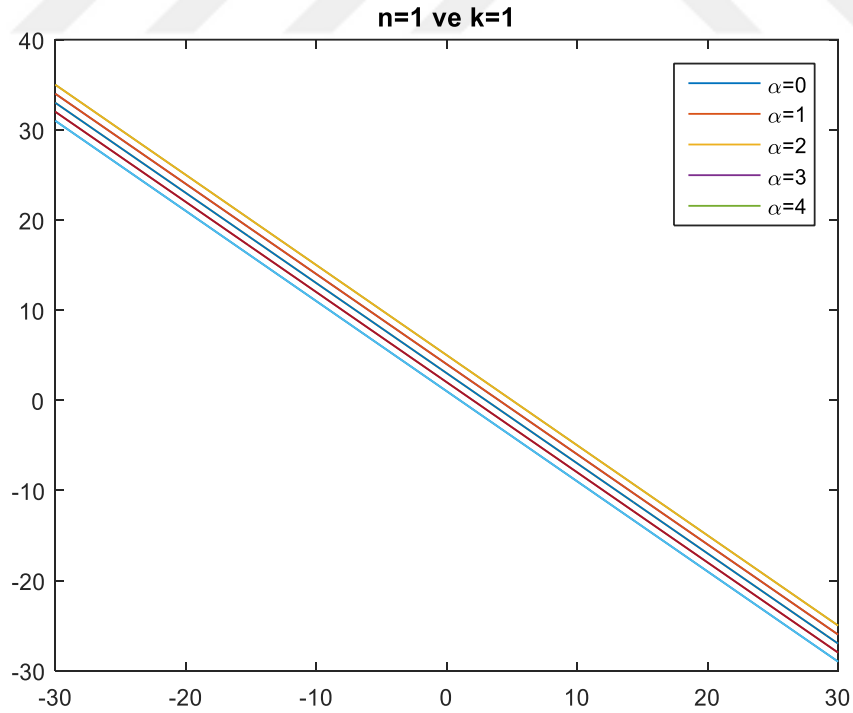
Son olarak Denklem (4.13)'te $n=2$ ve $k=1$ alınır ve Denklem (4.28) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
3Y_3^{(\alpha)}(x; 1) &= xDY_2^{(\alpha)}(x; 1) + (\alpha + 3 - x)Y_2^{(\alpha)}(x; 1) \\
6Y_3^{(\alpha)}(x; 1) &= xD[(x^2 - x(2\alpha + 4) + \alpha^2 + 3\alpha + 2)] \\
&\quad + (-x + \alpha + 3)(x^2 - x(2\alpha + 4) + \alpha^2 + 3\alpha + 2) \\
&= [2x(x - \alpha - 2) + (-x + \alpha + 3) \\
&\quad \times (x^2 - x(2\alpha + 4) + \alpha^2 + 2)] \\
&= [2x^2 - 2\alpha x - 4x + 3x^2 + 3\alpha^2 + 9\alpha + 6] \\
&\quad + [\alpha x^2 - 2\alpha^2 x - 4\alpha x + \alpha^3 + 2\alpha - x^3 + 2\alpha x^2] \\
&\quad - [\alpha^2 x + 3\alpha x + 12x + 2x - 4x^2 + 6\alpha x] \\
&= [-x^3 + 9x^2 + 3\alpha x^2 - 18x - 15\alpha x - 3\alpha^2 x] \\
&\quad + [\alpha^3 + 6\alpha^2 + 11\alpha + 6] \\
Y_3^{(\alpha)}(x; 1) &= \frac{1}{6}[-x^3 + 3x^2(\alpha + 3) - 3x(\alpha^2 + 5\alpha + 6)] \\
&\quad + \frac{1}{6}[\alpha^3 + 6\alpha^2 + 11\alpha + 6] \tag{4.29}
\end{aligned}$$

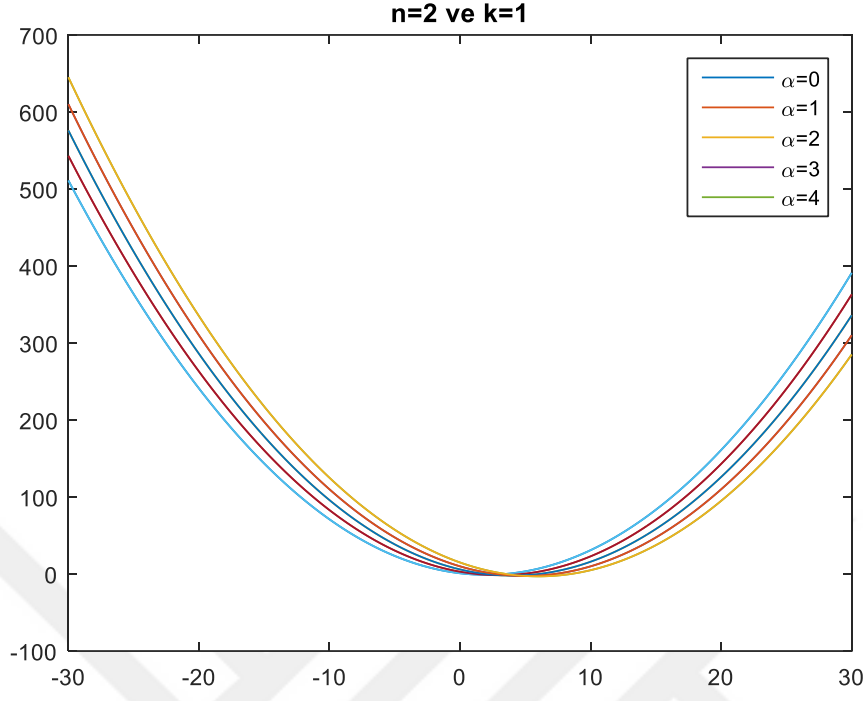
elde edilir [24]. Şimdi Denklem (4.26), Denklem (4.27), Denklem (4.28) ve Denklem (4.29) ifadelerin grafiklerini aşağıdaki şekilde verelim [24].



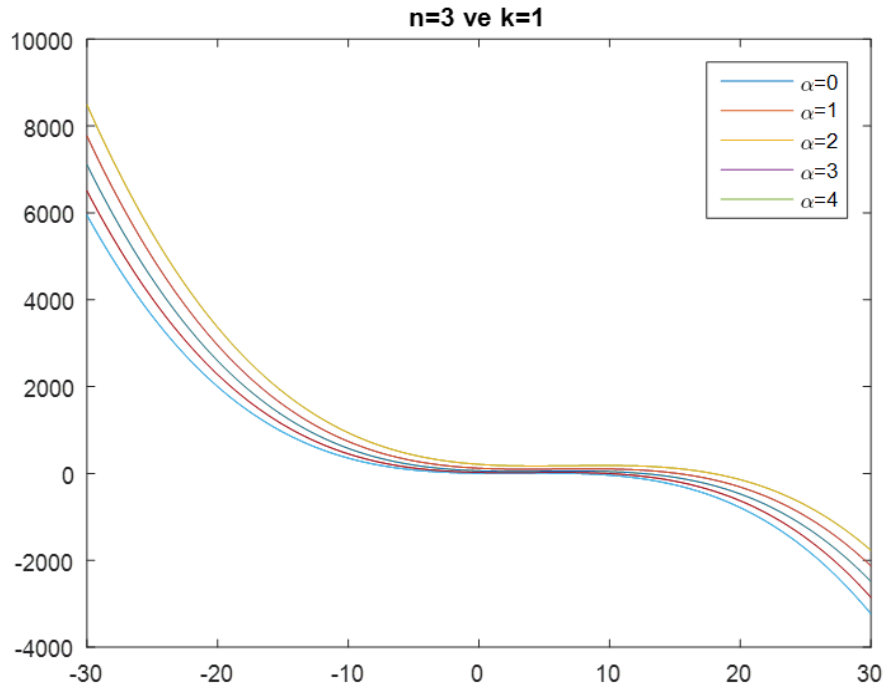
Şekil 4.1. $x \in [-30,30]$ aralığında $Y_0^{(0,1,2,3,4)}(x; 1)$ polinomunun grafiği.



Şekil 4.2. $x \in [-30,30]$ aralığında $Y_1^{(0,1,2,3,4)}(x; 1)$ polinomunun grafiği.



Şekil 4.3. $x \in [-30,30]$ aralığında $Y_2^{(0,1,2,3,4)}(x; 1)$ polinomunun grafiği.



Şekil 4.4. $x \in [-30,30]$ aralığında $Y_3^{(0,1,2,3,4)}(x; 1)$ polinomunun grafiği.

4.4. KONHAUSER POLİNOMLARI İÇİN BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Bu bölümde $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ polinomu için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar ve bazı uygulamaları verilecektir.

Teorem 4.3. $Y_n^{(\alpha)}(x; k)$ polinomları aşağıdaki bağıntıya sahiptir [23].

$$Y_n^{(\alpha_1+\alpha_2+1)}(x_1+x_2; k) = \sum_{m=0}^n Y_{n-m}^{(\alpha_1)}(x_1; k) Y_m^{(\alpha_2)}(x_2; k) \quad (4.30)$$

İspat: Denklem (4.24)'te α yerine $\alpha_1 + \alpha_2 + 1$ ve x yerine $x_1 + x_2$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha_1+\alpha_2+1)}(x_1+x_2; k) t^n \\ &= (1-t)^{-\frac{(\alpha_1+\alpha_2+2)}{k}} \exp\left\{(x_1+x_2) \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{k}}\right]\right\} \\ &= (1-t)^{-\frac{(\alpha_1+1)}{k}} \exp\left\{x_1 \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{k}}\right]\right\} \\ & \quad \times (1-t)^{-\frac{(\alpha_2+1)}{k}} \exp\left\{x_2 \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{k}}\right]\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha_1)}(x_1; k) t^n \sum_{m=0}^{\infty} Y_m^{(\alpha_2)}(x_2; k) t^m \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan Denklem (2.7) ve iki polinomun eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha_1+\alpha_2+1)}(x_1+x_2; k) t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n Y_{n-m}^{(\alpha_1)}(x_1; k) Y_m^{(\alpha_2)}(x_2; k) t^{n-m+m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n Y_{n-m}^{(\alpha_1)}(x_1; k) Y_m^{(\alpha_2)}(x_2; k) t^n \end{aligned}$$

$$Y_n^{(\alpha_1+\alpha_2+1)}(x_1+x_2; k) = \sum_{m=0}^n Y_{n-m}^{(\alpha_1)}(x_1; k) Y_m^{(\alpha_2)}(x_2; k)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4. μ -üncü basamaktan r kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1, \dots, y_r)$ ($r \in \mathbb{N}$) fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(y_1, \dots, y_r; \zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \zeta^k$$

$$(a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C})$$

ve $p \in \mathbb{N}$

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x; u; y_1, \dots, y_r; \xi) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k Y_{n-pk}^{(\alpha)}(x; u) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \xi^k \quad (4.31)$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi} \left(x; u; y_1, \dots, y_r; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n \\ &= (1-t)^{-\frac{(\alpha+1)}{u}} \exp \left\{ x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{u}} \right] \right\} \\ & \quad \times \Lambda_{\mu,\psi}(y_1, \dots, y_r; \eta) \end{aligned} \quad (4.32)$$

olur [24].

İspat: Denklem (4.32)'nin sol tarafına S diyelim. Denklem (4.31)'i, Denklem (4.32)'de yerine yazıp ve Denklem (2.6) kullanılırsa,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k Y_{n-pk}^{(\alpha)}(x; u) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k Y_{n-pk}^{(\alpha)}(x; u) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \eta^k t^{n-pk} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k Y_n^{(\alpha)}(x; u) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \eta^k t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha)}(x; u) t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \eta^k \\
&= (1-t)^{-\frac{(\alpha+1)}{u}} \exp \left\{ x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{u}} \right] \right\} \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_r; \eta)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4.1. Teorem 4.4'te $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ ve $y_i = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$)

$$\Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) = h_{\mu+\psi k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k Y_{n-pk}^{(\alpha)}(x; u) h_{\mu+\psi k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(y_1, \dots, y_r) \eta^k t^{n-pk} \\
&= (1-t)^{-\frac{(\alpha+1)}{u}} \exp \left\{ x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{u}} \right] \right\} \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_r; \eta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $h_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r)$, çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomudur. Çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomunun doğurucu fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\prod_{j=0}^r \{(1 - x_j t^j)^{-\alpha_j}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) t^n \\
\{\alpha &\in \mathbb{C}; |t| < \min(|x_1|^{-1}, |x_2|^{-1/2}, \dots, |x_r|^{-1/r})\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır [25].

Uyarı 4.1. Örnek 4.1’de $a_k = 1$, $\mu = 0$, $\psi = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} Y_{n-pk}^{(\alpha)}(x; u) h_k^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(y_1, \dots, y_r) \eta^k t^{n-pk} \\ &= (1-t)^{-\frac{(\alpha+1)}{u}} \exp \left\{ x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{u}} \right] \right\} \prod_{j=0}^r \{(1-y_j \eta^j)^{-\alpha_j} \\ & \quad \{ \alpha \in \mathbb{C} ; |\eta| < \min(|y_1|^{-1}, |y_2|^{-1/2}, \dots, |y_r|^{-1/r}) \} \end{aligned}$$

elde edilirki, bu bağıntı Konhauser polinomları ile çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomları arasında bir bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısıdır [24].

Örnek 4.2. Teorem 4.4’te $r = 1$ ve $y_1 = y$

$$\Omega_{\mu+\psi k}(y) = Y_{\mu+\psi k}^{(\varphi)}(x_1; u_1)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k Y_{n-pk}^{(\alpha)}(x; u) Y_{\mu+\psi k}^{(\varphi)}(x_1; u_1) \eta^k t^{n-pk} \\ &= (1-t)^{-\frac{(\alpha+1)}{u}} \exp \left\{ x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{u}} \right] \right\} \Lambda_{\mu, \psi}(x_1; u_1; \eta) \end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı 4.2. Örnek 4.2’de $a_k = 1$, $\mu = 0$, $\psi = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} Y_{n-pk}^{(\alpha)}(x; u) Y_k^{(\varphi)}(x_1; u_1) \eta^k t^{n-pk} \\ &= (1-t)^{-\frac{(\alpha+1)}{u}} \exp \left\{ x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{u}} \right] \right\} \\ & \quad \times (1-\eta)^{-\frac{(\varphi+1)}{u_1}} \exp \left\{ x_1 \left[1 - (1-\eta)^{-\frac{1}{u_1}} \right] \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu bağıntı Konhauser polinomları için bilineer doğurucu fonksiyon

bağıntısıdır.

Teorem 4.5. μ -üncü basamaktan r kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1, \dots, y_r)$ ($r \in \mathbb{N}$) fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\mu, \psi, \alpha, \beta}^{n, p}(x_1 + x_2; u; y_1, \dots, y_r; t) \\ &:= \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k Y_{n-pk}^{(\alpha+\beta+1)}(x_1 + x_2; u) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) t^k \end{aligned} \quad (4.33)$$

$a_k \neq 0$, $\mu, \psi, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $n, p \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l Y_{n-k}^{(\alpha)}(x_1; u) Y_{k-pl}^{(\beta)}(x_2; u) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) z^l \\ &= \Lambda_{\mu, \psi, \alpha, \beta}^{n, p}(x_1 + x_2; u; y_1, \dots, y_r; z) \end{aligned} \quad (4.34)$$

ifadesi elde edilir [24].

İspat: Denklem (4.34) ifadesinin sol yanına T diyelim. Denklem (2.5) ifadesini kullanırsak,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l Y_{n-k}^{(\alpha)}(x_1; u) Y_{k-pl}^{(\beta)}(x_2; u) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) z^l \\ &= \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} a_l Y_{n-k-pl}^{(\alpha)}(x_1; u) Y_{k-pl+pl}^{(\beta)}(x_2; u) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) z^l \end{aligned}$$

elde edilir. Denklem (4.30) ve Denklem (4.33) ile verilen eşitlikleri kullanırsak,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l \left(\sum_{k=0}^{n-pl} Y_{n-pl-k}^{(\alpha)}(x_1; u) Y_k^{(\beta)}(x_2; u) \right) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) z^l \\ &= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l Y_{n-pl}^{(\alpha+\beta+1)}(x_1 + x_2; u) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) z^l \end{aligned}$$

$$= \Lambda_{\mu, \psi, \alpha, \beta}^{n, p}(x_1 + x_2; u; y_1, \dots, y_r; z)$$

elde edilir.

Örnek 4.3. Teorem 4.5'te $r = 1$, ve $y_1 = x_3$

$$\Omega_{\mu + \psi l}(x_3) = Y_{\mu + \psi l}^{(\omega)}(x_3; u)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l Y_{n-k}^{(\alpha)}(x_1; u) Y_{k-pl}^{(\beta)}(x_2; u) Y_{\mu + \psi l}^{(\omega)}(x_3; u) z^l \\ &= \Lambda_{\mu, \psi, \alpha, \beta}^{n, p}(x_1 + x_2; u; x_3; u; z) \end{aligned}$$

elde edilir [24].

Uyarı 4.3. Örnek 4.3'te $a_l = 1$, $\mu = 0$, $\psi = 1$, $p = 1$, $z = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k Y_{n-k}^{(\alpha)}(x_1; u) Y_{k-l}^{(\beta)}(x_2; u) Y_l^{(\omega)}(x_3; u) \\ &= \sum_{k=0}^n Y_{n-k}^{(\alpha)}(x_1; u) \sum_{l=0}^k Y_{k-l}^{(\beta)}(x_2; u) Y_l^{(\omega)}(x_3; u) \\ &= \sum_{k=0}^n Y_{n-k}^{(\alpha)}(x_1; u) Y_k^{(\beta + \omega + 1)}(x_2 + x_3; u) \\ &= Y_n^{(\alpha + \beta + \omega + 2)}(x_1 + x_2 + x_3; u) \end{aligned}$$

elde edilirki, bu bağıntı Konhauser polinomları için bir başka toplam ifadesidir [24].

Teorem 4.6. μ -üncü basamaktan r kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_r)$ ($r \in \mathbb{N}$) fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,p,q}(x; u; y_1, \dots, y_r; z) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i Y_{m+qi}^{(\alpha)}(x; u) \Omega_{\mu+pi}(y_1, \dots, y_r) z^i$$

$$(a_i \neq 0, \mu \in \mathbb{C}, m, p, q \in \mathbb{N})$$

ve

$$\Theta_{\mu,p,q}(y_1, \dots, y_r; z) := \sum_{j=0}^{[i/q]} \binom{m+i}{i-qj} a_j \Omega_{\mu+pj}(y_1, \dots, y_r) z^j \quad (4.35)$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} Y_{i+m}^{(\alpha)}(x; u) \Theta_{\mu,p,q}(y_1, \dots, y_r; z) t^i \\ &= (1-t)^{-\frac{(a+mu+1)}{u}} \exp \left\{ x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{u}} \right] \right\} \\ & \quad \times \Lambda_{\mu,p,q} \left(x(1-t)^{-\frac{1}{u}}; u; y_1, \dots, y_r; z \left(\frac{t}{1-t} \right)^q \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

olur [24].

İspat: Denklem (4.36)'nın sol tarafına H diyelim. Daha sonra Denklem (4.35) ifadesi Denklem (4.36)'da yerine yazılır ve Denklem (4.25) ile Denklem (2.6) eşitlikleri kullanılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=0}^{\infty} Y_{i+m}^{(\alpha)}(x; u) \Theta_{\mu,p,q}(y_1, \dots, y_r; z) t^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} Y_{i+m}^{(\alpha)}(x; u) \sum_{j=0}^{[i/q]} \binom{m+i}{i-qj} a_j \Omega_{\mu+pj}(y_1, \dots, y_r) z^j t^i \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+i+qj}{i} Y_{i+m+qj}^{(\alpha)}(x; u) t^i \right) a_j \Omega_{\mu+pj}(y_1, \dots, y_r) (zt^q)^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} a_j (1-t)^{-\frac{(\alpha+(m+qj)u+1)}{u}} \exp \left\{ x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{u}} \right] \right\} \\
&\quad \times Y_{m+qj}^{(\alpha)} \left[x(1-t)^{-\frac{1}{u}}; u \right] \Omega_{\mu+pj}(y_1, \dots, y_r) (zt^q)^j \\
&= (1-t)^{-\frac{(\alpha+mu+1)}{u}} \exp \left\{ x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{u}} \right] \right\} \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} a_j Y_{m+qj}^{(\alpha)} \left[x(1-t)^{-\frac{1}{u}}; u \right] \Omega_{\mu+pj}(y_1, \dots, y_r) \left(\frac{zt^q}{(1-t)^q} \right)^j \\
&= (1-t)^{-\frac{(\alpha+mu+1)}{u}} \exp \left\{ x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{u}} \right] \right\} \\
&\quad \times \Lambda_{\mu,p,q} \left(x(1-t)^{-\frac{1}{u}}; u; y_1, \dots, y_r; z \left(\frac{t}{1-t} \right)^q \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4.4. Teorem 4.6’da $r = 1$, $y_1 = y$

$$\Omega_{\mu+pj}(y) = P_{\mu+pj}^{(\alpha,\beta)}(y)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\infty} Y_{m+i}^{(\alpha)}(x; u) \Theta_{\mu,p,q}(y; z) t^i \\
&= (1-t)^{-\frac{(\alpha+mu+1)}{u}} \exp \left\{ x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{u}} \right] \right\} \\
&\quad \times \Lambda_{\mu,p,q} \left(x(1-t)^{-\frac{1}{u}}; u; y; z \left(\frac{t}{1-t} \right)^q \right)
\end{aligned}$$

bulunur [24]. Burada $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ polinomu klasik Jacobi polinomudur. Söz edilen polinomun doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) t^n = \frac{2^{\alpha+\beta}}{\rho} (1-t+\rho)^{-\alpha} (1+t+\rho)^{-\beta}$$

$$\{\rho = (1-2xt+t^2)^{1/2}, \quad |\rho| < 1 \}$$

şeklindedir [26].

5. KONHAUSER POLİNOMUNUN BAĞINTILARI

5.1. KONHAUSER POLİNOMUNUN REKÜRANS BAĞINTILARI

Bu bölümde Konhauser polinomlarının türev içeren ve türev içermeyen rekürans bağıntıları ve bazı polinomlarla arasındaki bağıntılar verilecektir.

Denklem (4.24)'ün her iki tarafı x e göre türevi alınır ve Denklem (2.3) ile Denklem (2.7) eşitlikleri göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^n &= (1-t)^{-\frac{(\alpha+1)}{k}} \left(1 - (1-t)^{-\frac{1}{k}} \right) \exp \left\{ x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{k}} \right] \right\} \\
 &= \left(1 - (1-t)^{-\frac{1}{k}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^n - (1-t)^{-\frac{1}{k}} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^n - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{k}\right)_m}{m!} t^m \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\left(\frac{1}{k}\right)_m}{m!} Y_{n-m}^{(\alpha)}(x; k) t^n
 \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitlikte iki polinomun eşitliği kullanılırsa

$$\frac{d}{dx} Y_n^{(\alpha)}(x; k) = Y_n^{(\alpha)}(x; k) - \sum_{m=0}^n \frac{\left(\frac{1}{k}\right)_m}{m!} Y_{n-m}^{(\alpha)}(x; k)$$

elde edilir [24].

Daha sonra Denklem (4.24)'ün her iki tarafı α ya göre türevi alınır ve Denklem (2.2) ile

Denklem (2.4) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\alpha} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^n &= \left(-\frac{1}{k}\right) (1-t)^{-\frac{(\alpha+1)}{k}} \ln(1-t) \exp\left\{x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{k}}\right]\right\} \\
&= -\frac{\ln(1-t)}{k} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^n \\
&= \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1)_m (1)_m}{(2)_m} \frac{t^{m+1}}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^n \\
&= \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1)_m (1)_m}{(2)_m m!} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^{n+m+1} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1}\right) Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^{n+m+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte Denklem (2.7) ve iki polinomun eşitliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\alpha} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^n &= \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{m+1}\right) Y_{n-m-1}^{(\alpha)}(x; k) t^n \\
\frac{d}{d\alpha} Y_n^{(\alpha)}(x; k) &= \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{Y_{n-m-1}^{(\alpha)}(x; k)}{m+1} \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

elde edilir [24].

Son olarak Denklem (4.24)'ün ve her iki tarafı t ye göre türevi alınır Denklem (2.2), Denklem (2.3) ve Denklem (2.7) eşitlikleri göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) Y_{n+1}^{(\alpha)}(x; k) t^n &= \frac{(\alpha+1)}{k} (1-t)^{-\frac{(\alpha+1)}{k}-1} \exp\left\{x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{k}}\right]\right\} \\
&\quad - \frac{x}{k} (1-t)^{-\frac{(\alpha+k+2)}{k}} \exp\left\{x \left[1 - (1-t)^{-\frac{1}{k}}\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\alpha + 1)}{k} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1)_m}{m!} t^m \\
&\quad - \frac{x}{k} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^n \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1+k}{k} \right)_p \frac{t^p}{p!} \\
&= \frac{(\alpha + 1)}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1)_m}{m!} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^{n+m} \\
&\quad - \frac{x}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1+k}{k} \right)_p \frac{1}{p!} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^{n+p} \\
&= \frac{(\alpha + 1)}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^{n+m} \\
&\quad - \frac{x}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1+k}{k} \right)_p \frac{1}{p!} Y_n^{(\alpha)}(x; k) t^{n+p} \\
&= \frac{(\alpha + 1)}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n Y_{n-m}^{(\alpha)}(x; k) t^n \\
&\quad - \frac{x}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n \left(\frac{1+k}{k} \right)_p \frac{1}{p!} Y_{n-p}^{(\alpha)}(x; k) t^n
\end{aligned}$$

elde edilir. İki polinomun eşitliği uygulanırsa

$$(n + 1)Y_{n+1}^{(\alpha)}(x; k) = \frac{(\alpha + 1)}{k} \sum_{m=0}^n Y_{n-m}^{(\alpha)}(x; k) - \frac{x}{k} \sum_{p=0}^n \left(\frac{1+k}{k} \right)_p \frac{Y_{n-p}^{(\alpha)}(x; k)}{p!}$$

türev içermeyen rekürans bağıntısı elde edilir [24].

5.2. KONHAUSER POLİNOMUNUN BAŞKA POLİNOMLARLA İLİŞKİSİ

Bu kısımda Konhauser polinomlarının, Laguerre ve Srivastava-Singhal polinomları arasındaki bağıntılar verilecektir.

Teorem 5.1. Laguerre polinomları ile Konhauser polinomları arasında

$$Y_n^{(\alpha)}(x; 1) = L_n^{(\alpha)}(x) \quad (5.1)$$

şeklinde bir bağıntı vardır [27].

İspat: Laguerre polinomlarının tanımı

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{(\alpha + 1)_k} \frac{x^k}{k!}$$

şeklindedir [28]. İspatı basitleştirmek için Denklem (5.1)'in sol tarafından başlayalım. Denklem (4.2)'de $k = 1$ alınırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} Y_n^{(\alpha)}(x; 1) &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (j + \alpha + 1)_n \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \left\{ (\alpha + 1)_n - i(\alpha + 2)_n + \frac{1}{2!} i(i-1)(\alpha + 3)_n \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3!} i(i-1)(i-2)(\alpha + 4)_n + \dots + (-1)^i (\alpha + i + 1)_n \right\} \\ &= \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \left\{ 1 - \frac{i(\alpha + n + 1)}{(\alpha + 1)} + \frac{1}{2!} i(i-1) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(\alpha + n + 1)(\alpha + n + 2)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} + \dots + (-1)^i \frac{(\alpha + n + 1)_i}{(\alpha + 1)_i} \right\} \\ &= \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} \left\{ 1 + \frac{(-n)_1}{(\alpha + 1)_1} x + \frac{(-n)_2}{(\alpha + 1)_2} \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-n)_n}{(\alpha + 1)_n} \frac{x^n}{n!} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen eşitliğin sağ tarafı $L_n^{(\alpha)}(x)$ polinomlarının açık şekli olduğundan

$$Y_n^{(\alpha)}(x; 1) = L_n^{(\alpha)}(x)$$

olduğu sonucuna varılır.

Teorem 5.2. Srivastava-Singhal polinomları ile Konhauser polinomları arasında

$$Y_n^{(\alpha)}(x; k) = k^{-n} G_n^{(\alpha+1)}(x, 1, 1, k) \quad (5.2)$$

şeklinde bir bağıntı vardır [29]. Burada $\alpha > -1$ ve $k = 1, 2, \dots$ şeklindedir.

İspat: Srivastava-Singhal polinomları

$$G_n^{(\alpha)}(x, r, \beta, k) = \frac{k^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\beta x^r)^m}{m!} \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \left(\frac{\alpha + rj}{k} \right)_n \quad (5.3)$$

şeklinde bir tanıma sahiptir [30]. İspatı kolaylaştırmak için Denklem (5.3)'te $r = \beta = 1$ ve α yerine $\alpha + 1$ alınıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} G_n^{(\alpha+1)}(x, 1, 1, k) &= \frac{k^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{m!} \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \left(\frac{\alpha + j + 1}{k} \right)_n \\ &= \frac{k^n}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \left(\frac{\alpha + j + 1}{k} \right)_n \end{aligned}$$

olur. Denklem (4.2) göz önünde bulundurularak gerekli işlemler yapılırsa,

$$k^{-n} G_n^{(\alpha+1)}(x, 1, 1, k) = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \left(\frac{\alpha + j + 1}{k} \right)_n$$

$$k^{-n} G_n^{(\alpha+1)}(x, 1, 1, k) = Y_n^{(\alpha)}(x; k)$$

elde edilir.

Teorem 5.3. Laguerre polinomu ile II. tip $Z_n^{(\alpha)}(x; k)$ Konhauser polinomu arasında

$$Z_n^{(\alpha)}(x; 1) = L_n^{(\alpha)}(x) \quad (5.4)$$

şeklinde bir bağıntı vardır [27].

İspat: Denklem (4.1)'de $Z_n^{(\alpha)}(x; k)$ tanımında $k = 1$ alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$Z_n^{(\alpha)}(x; 1) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{x^j}{\Gamma(j + \alpha + 1)}$$

olur. Diğer yandan

$$\Gamma(\alpha + n + 1) = \alpha! (\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n) = \alpha! (\alpha + 1)_n$$

ve

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \frac{(-n)_j}{j!}$$

ifadeleri göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} Z_n^{(\alpha)}(x; 1) &= \frac{\alpha! (\alpha + 1)_n}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j}{j!} \frac{x^j}{\alpha! (\alpha + 1)_j} \\ &= \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j}{(\alpha + 1)_j} \frac{x^j}{j!} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomları olduğundan

$$Z_n^{(\alpha)}(x; 1) = L_n^{(\alpha)}(x)$$

olduğu açıktır.

Sonuç 5.1. Laguerre polinomu ile Meixner-Pollaczek polinomları arasında

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\phi \rightarrow 0} P_n^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}\left(-\frac{x}{2\phi}; \phi\right) \quad (5.5)$$

şeklinde bir bağıntı vardır [31]. Sözü edilen Meixner-Pollaczek polinomu $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ ile gösterilir ve ifadesi

$$\begin{aligned} P_n^{(\lambda)}(x; \phi) &= \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\phi} {}_2F_1(-n, \lambda + ix; 2\lambda; 1 - e^{-2i\phi}) \\ (\lambda > 0, \quad 0 < \phi < \pi \quad n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

şeklinde verilir [32]. Diğer taraftan Laguerre polinomu ile klasik Jacobi polinomları arasında

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{|\beta| \rightarrow 0} \left\{ P_n^{(\alpha, \beta)} \left(1 - \frac{2x}{\beta} \right) \right\} \quad (5.6)$$

şeklinde bir bağıntı vardır [21].

Sonuç 5.2. Denklem (5.1), Denklem (5.2), Denklem (5.4), Denklem (5.5) ve Denklem (5.6)'daki eşitlikler göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} Y_n^{(\alpha)}(x; 1) &= G_n^{(\alpha+1)}(x, 1, 1, 1) = L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\phi \rightarrow 0} P_n^{(\frac{\alpha+1}{2})} \left(-\frac{x}{2\phi}; \phi \right) \\ &= \lim_{|\beta| \rightarrow 0} \left\{ P_n^{(\alpha, \beta)} \left(1 - \frac{2x}{\beta} \right) \right\} = Z_n^{(\alpha)}(x; 1) \end{aligned}$$

şeklinde bir bağıntı elde edilir.

Sonuç 5.3. Yukarıdaki sonuçlardan görüleceği üzere Laguerre ve Srivastava-Singhal polinomlarının ilişkili olduğu polinomların aynı zamanda Konhauser polinomlarıyla ilişkili olduğu kanaatine varılır.

Sonuç 5.4. Teorem 5.1 ve Teorem 5.2 göz önünde bulundurularak Konhauser polinomları için verilen bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları Laguerre ve Srivastava-Singhal polinomları içinde yazılabilir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Konhauser biortogonal polinomları ve bazı uygulamaları incelenmiştir. Konhauser biortogonal polinomlarının bazı özellikleri verildikten sonra bu polinomların grafikleri, bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntılarını veren teoremler elde edilmiştir. Ayrıca bu teoremlerin özel durumları incelendikten sonra bu polinomların yeni rekürans bağıntıları ve özel tipten bazı polinomların Konhauser biortogonal polinomlarıyla ilişkileri verilmiştir.

Bu tezde yapılanların doğrultusunda gelecekte farklı polinomların grafikleri, doğurucu fonksiyonları, rekürans bağıntıları gibi farklı özellikleri de incelenebilir. Aynı zamanda burada kullanılan yöntemlerle başka polinomların diğer polinomlarla ilişkisi araştırılabilir.

7. KAYNAKLAR

- [1] L. V. Spencer and U. Fano, "Penetration and diffusion of X-rays. calculation of spatial distributions by polynomial expansion," *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, vol. 46, no. 6, pp. 446–456, 1951.
- [2] R. Koekoek, "Generalizations of a q-analogue of Laguerre polynomials," *J. Approx. Theory*, vol. 69, no. 1, pp. 55–83, 1992.
- [3] W. A. Al-Salam and A. Verma, "q-Konhauser polynomials," *Pacific J. Math.*, vol. 108, no. 1, pp. 1–7, 1983.
- [4] H. C. Madhekar and N. K. Thakare, "Biorthogonal polynomials suggested by the Jacobi polynomials," *Pacific J. Math.*, vol. 100, no. 2, pp. 417–424, 1982.
- [5] D. S. Moak, "The q-analogue of the Laguerre polynomials," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 81, no. 1, pp. 20–47, 1981.
- [6] T. M. Rassias and H. M. Srivastava, "A certain class of biorthogonal polynomials associated with the Laguerre polynomials," *Appl. Math. Comput.*, vol. 128, no. 2–3, pp. 379–385, 2002.
- [7] H. M. Srivastava, "Some biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre polynomials," *Pacific J. Math.*, vol. 98, no. 1, pp. 235–250, 1982.
- [8] H. M. Srivastava, "On the Konhauser set of biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre polynomials," *Pacific J. Math.*, vol. 49, no. 2, pp. 489–492, 1973.
- [9] H. M. Srivastava, "A note on the Konhauser sets of biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre polynomials," *Pacific J. Math.*, vol. 90, no. 1, pp. 197–200, 1980.
- [10] W. A. Al-Salam and A. Verma, "A pair of biorthogonal sets of polynomials," *Rocky Mt. J. Math.*, vol. 13, no. 2, pp. 273–279, 1983.
- [11] V. K. Jain and H. M. Srivastava, "New results involving a certain class of q-orthogonal polynomials," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 166, no. 2, pp. 331–344, 1992.
- [12] T. M. Rassias and H. M. Srivastava, "Some general families of generating functions for the Laguerre polynomials," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 174, no. 2, pp. 528–538, 1993.
- [13] H. M. Srivastava, "A multilinear generating function for the Konhauser by the Laguerre polynomials," *Pacific J. Math.*, vol. 117, no. 1, pp. 183–191, 1985.
- [14] B. Şekeroğlu, "Biortogonal polinomların bazı özellikleri," Doktora tezi, Matematik Bölümü, Ankara Üniversitesi, Ankara, Türkiye, 2006.
- [15] S. Varma, "Biortogonal ve q-biortogonal polinomlar," Yüksek lisans tezi, Matematik Bölümü, Ankara Üniversitesi, Ankara, Türkiye, 2008.
- [16] H. S. Yetiş, "q-biorthogonal polynomials," M.S. thesis, Math Partition, Near East University, Nicosia, Northern Cyprus Turkish Republic, 2013.

- [17] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, 4th ed., Vol. 23, Rhode Island, USA: American Mathematical Society, 1975.
- [18] J. D. E. Konhauser, "Some properties of biorthogonal polynomials," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 11, pp. 242–260, 1965.
- [19] J. D. E. Konhauser, "Biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre polynomials," *J. Math. Analysis Appl.*, vol. 21, no. 2, pp. 303–314, 1967.
- [20] L. Carlitz, "A note on certain biorthogonal polynomials," *Pacific J. Math.*, vol. 24, no. 3, pp. 425–430, 1968.
- [21] H. M. Srivastava and H. L. Moncho, *A Treatise on Generating Functions*, New York, USA: Ellis Horwood Limited, 1984.
- [22] G. Pólya and G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 1st ed., Berlin, Germany: 1925.
- [23] T. R. Prabhakar, "On the other set of the biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre polynomials," *Pacific J. Math.*, vol. 37, no. 3, pp. 801–804, 1971.
- [24] N. Özmen and Y. Cin, "On the Konhauser biorthogonal polynomials," *Math. Comput. Sci.*, vol. 7, no. 2, pp. 48–55, 2017.
- [25] A. Altın and E. Erkuş, "On a multivariable extension of the Lagrange-Hermite polynomials," *Integral Transform. Spec. Funct.*, vol. 17, no. 4, pp. 239–244, 2006.
- [26] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 3, New York, Toronto, London, USA: McGraw-Hill Book Company INC., 1955.
- [27] S. Preisner, "An investigation of biorthogonal polynomials derivable from ordinary differential equations of the third order," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 4, no. 1, pp. 38–64, 1962.
- [28] E. D. Rainville, *Special Functions*, New York, USA: The Macmillan Company, 1960.
- [29] H. M. Srivastava and J. -L. Lavoie, "A certain method of obtaining bilateral generating functions," *Mathematics*, vol. 78, no. 4, pp. 304–320, 1975.
- [30] H. M. Srivastava and J. P. Singhal, "A class of polynomials defined by generalized Rodrigues' formula," *Ann. di Mat. Pura ed Appl.*, vol. 90, no. 1, pp. 75–85, 1971.
- [31] R. Koekoek, P. L. Lesky and R. F. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*, New York, USA: Springer-Verlag, 2010.
- [32] F. Pollaczek, "Sur une famille de polynômes orthogonaux qui contient les polynômes d'Hermite et de Laguerre comme cas limites," *Comptes Rendus de l'Académie des Sci.*, vol. 230, pp. 1563–1565, 1950.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Yahya ÇİN
Doğum Tarihi ve Yeri : 05.05.1989 Tekman\ ERZURUM
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : yahyacin2525@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2018
Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2015
Lise	Fen Bilimleri	Dudullu 75. Yıl Cumhuriyet Lisesi	2006

Bildiri

N. Özmen and Y. Cin, “On the Konhauser biorthogonal polynomials,” *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME)*, Şanlıurfa, Turkey, 2017, pp. 810

Yayın

N. Özmen and Y. Cin, “On the Konhauser biorthogonal polynomials,” *Turkish J. Math. Comput. Sci.*, vol. 7, no. 2, pp. 48–55, 2017.

N. Özmen and Y. Cin, “On the Srivastava-Singhal Polynomials,” *Turkish J. Ineq.*, vol. 1, no. 1, pp 1 –9, 2017.