

**GAMMA TIPLİ OPERATÖRLERİN YENİ BİR SINIFI**

**REYHAN ÖZÇELİK**

**DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN  
PROF. DR. EMRAH EVREN KARA**

**DÜZCE, 2023**

**T.C.**  
**DÜZCE ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**GAMMA TIPLİ OPERATÖRLERİN YENİ BİR SINIFI**

Reyhan ÖZÇELİK tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Prof. Dr. Emrah Evren KARA  
Düzce Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Prof. Dr. Emrah Evren KARA  
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Serkan DEMİRİZ  
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Prof. Dr. Mahmut AKYİĞİT  
Sakarya Üniversitesi

Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK  
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Fuat USTA  
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 23/06/2023

## BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

23/06/2023

Reyhan ÖZÇELİK

## TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması ve yazılması konusunda çok kıymetli görüş ve önerileriyle yol gösteren, lisans öğrenimimden itibaren beni yetiştirmek için değerli vaktini ayıran değerli hocam Prof. Dr. Emrah Evren KARA'ya en içten dileklerle teşekkür ederim.

Tezimin konusunun belirlenmesinde, araştırma aşamasında, yön tayininde ve tamamlanmasında bilimsel olarak her daim teşvik eden, kendisine ne zaman danışsam sabırla ve ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenin fazlasını sunan, birlikte çalışmaktan onur duyduğum çok değerli hocam Doç. Dr. Fuat USTA'ya en içten dileklerle teşekkür ederim.

Lisans öğrenimimden itibaren değerli bilgilerini benimle paylaşan, önerilerini, desteklerini, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen Doç. Dr. Merve İLKHAN KARA'ya şükranlarımı sunarım.

Bu çalışmam boyunca katkılarından dolayı Khursheed Jamal ANSARI'ye en içten dileklerle teşekkür ederim.

Hayatım boyunca maddi, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan sevgili eşim Kubilay ÖZÇELİK'e, hayatımın anlamı oğlum Mert Mete ÖZÇELİK'e, maddi desteğinin yanı sıra aramızda bambaşka bir bağ olan kardeşim Yasin SEVİL'e, ilgi ve sevgisini üzerimden hiçbir zaman eksik etmeyen annem Hatice SEVİL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

23/06/2023

Reyhan ÖZÇELİK

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ .....	vi
SİMGELER .....	vii
ÖZET .....	x
ABSTRACT .....	xi
EXTENDED ABSTRACT .....	xii
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE LİTERATÜR .....	5
2.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER .....	5
2.2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI .....	14
3. MODİFİYE GAMMA OPERATÖRÜ .....	38
3.1. VORONOVSKAYA TİPLİ YAKLAŞIM TEOREMİ.....	47
3.2. AĞIRLIKLI YAKLAŞIM .....	49
3.3. YAKINSAKLIK ORANI.....	52
3.4. LIPSCHITZ SINIFI FONKSİYONLAR YARDIMIYLA YAKLAŞIM HIZI.....	54
3.5. LIPSCHITZ TİPLİ MAKSİMAL FONKSİYONLAR YARDIMIYLA YAKLAŞIM HIZI.....	56
3.6. NÜMERİK SONUÇLAR .....	58
4. GAMMA TİPLİ OPERATÖRLERİN YENİ BİR SINIFI .....	60
4.1. OPERATÖRÜN OLUŞTURULMASI.....	61
4.2. AĞIRLIKLI YAKLAŞIM .....	76
4.3. VORONOVSKAYA TİPLİ YAKLAŞIM TEOREMİ.....	79
4.4. NÜMERİK SONUÇLAR .....	82
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	86
6. KAYNAKLAR.....	88
ÖZGEÇMİŞ.....	101

## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1. $[1, 2.5]$ aralığı üzerinde $n = 15$ için $T_n(f; x)$ ve $\mathcal{T}_n(f; x)$ ile $f(x) = xe^{-4x}$ hedef fonksiyona yaklaşım grafiği .....	58
Şekil 3.2. $[1, 2.5]$ aralığı üzerinde $n = 15$ için $T_n(f; x)$ ve $\mathcal{T}_n(f; x)$ ile $f(x) = \cos(x)e^{-3x}$ hedef fonksiyona yaklaşım grafiği .....	59
Şekil 4.1. $[2, 4]$ aralığı üzerinde $n = 15$ için $T_n(f; x)$ , $T_n^*(f; x)$ ve $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f; x)$ ile $f(x) = x^4 \ln(1 + x^4)$ hedef fonksiyona yaklaşım grafiği.....	82
Şekil 4.2. $[2, 4]$ aralığı üzerinde $n = 15$ için $T_n(f; x)$ , $T_n^*(f; x)$ ve $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f; x)$ ile $f(x) = e^{-x}(16x^3 - 24x + 5)$ hedef fonksiyona yaklaşım grafiği.....	83
Şekil 4.3. $[2, 4]$ aralığı üzerinde $n = 15$ için $T_n(f; x)$ , $T_n^*(f; x)$ ve $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f; x)$ ile $f(x) = x^2 \sin x$ hedef fonksiyona yaklaşım grafiği.....	84

## SİMGELER

$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_b[0, \infty)$	$[0, \infty)$ aralığında sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı
$\omega(f; \delta)$	Süreklilik modülü
$\omega_{x_1}(f; \delta)$	Standart süreklilik modülü
$\omega_\tau(f; \delta)$	Ağırlıklı süreklilik modülü
$\tilde{\omega}(f; x)$	Lipschitz tipli maksimal fonksiyonlar
$Lip_M f(s)$	Lipschitz sınıfı fonksiyonlar
$Lip_M^{\alpha, \beta}(s)$	Lipschitz tipli iki parametrelili fonksiyonlar uzayı
$\ \cdot\ $	Norm fonksiyonu
$\ \cdot\ _\Phi$	$\ f\ _\Phi = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{ f(x) }{\Phi(x)}$
$A_n(f; x)$	Balazs operatörünün Bleimann-Butzer ve Hahn operatör tipli bir genellemesi
$A_n(f; x; q, r, s)$	Szasz-Mirakyan operatörlerinin yeni bir modifikasyonu
$B_n(f; x)$	Bernstein operatörü
$B_n^\tau(f; x)$	Bernstein operatörünün farklı bir genellemesi
$B_n^*(u, x)$	Bernstein operatörünün yeni bir modifikasyonu
$B_\Phi(\mathbb{R}^+)$	Her $x \in \mathbb{R}^+$ için $ f(x)  \leq M_f \Phi(x)$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı
$B_{n,r}(f; x)$	Bernstein-Taylor operatörü
$B_{n,q}(f; x)$	$q$ -Bernstein operatörü
$B_{n,p,q}(f; x)$	$(p, q)$ -Bernstein operatörü
$B_{s,p}(f; x)$	Schurer operatörü
$C_n(f; x)$	Picard operatörü
$C_\Phi(\mathbb{R}^+)$	$B_\Phi(\mathbb{R}^+)$ uzayındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_\Phi^K(\mathbb{R}^+)$	$C_\Phi(\mathbb{R}^+)$ uzayındaki $\lim_{ x  \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\Phi(x)} = \kappa_f < \infty$ şartını sağlayan alt uzayı
$C^{(r)}[0, 1]$	$[0, 1]$ üzerinde tanımlı ve $r$ . mertebeden türevi sürekli fonksiyonların uzayı

$C_{n,r}(f;x)$	Chlodowsky-Taylor operatörü
$D_n(f;x)$	Durrmayer operatörü
$D_n^*(f;x)$	Baskakov-Durmeyer operatörü
$D_{n,\alpha,\beta}(f;x)$	Baskakov-Durmeyer-Stancu operatörü
$D_{n,p,q}(f;x)$	$(p,q)$ -benzeri Baskakov-Durmeyer operatörü
$D_{n,\alpha,\beta}^{p,q}(f;x)$	$(p,q)$ -benzeri Baskakov-Durmeyer-Stancu operatörü
$E_n(f;x)$	Derch operatörü
$E_{n,p,q}(f;x)$	$(p,q)$ -Baskakov operatörü
$F_n(f;x)$	Fejer operatörü
$F_{n,q}(f;x)$	$q$ -Szász-Mirakyan operatörü modifikasyonu
$F_{n,p,q}(f;x)$	$(p,q)$ -Kantorovich operatörü modifikasyonu
$H_n(f;x)$	Bleimann-Butzer-Hahn operatörü
$H_{n,q}(f;x)$	$q$ -Bleimann-Butzer-Hahn operatörü
$K_n(f;x)$	Kantorovich operatörü
$K_n^\beta(f;x)$	Jain-Baskakov tipli operatör
$K_n^{***}(f;x)$	Lupaş operatörünün Kantorovich tipli genellemesi
$L_n^*(f;x)$	Lupaş operatörü
$L_n^{**}(f;x)$	Lupaş operatörünün modifikasyonu
$L_n^{***}(f;x)$	Lupaş operatörünün modifikasyonu üzerinde Kantorovich tipli genellemesi
$L_{n,p}(f;x)$	Baskakov-Schurer-Szasz operatörü
$L_{n,p,q}(f;x)$	$(p,q)$ -Lupaş operatörü
$M_n(f;x)$	Meyer König-Zeller operatörü
$M_n^*(f;x)$	Mittag-Leffler operatörü
$N_n(f;x)$	Landau operatörü
$P_n(f;x)$	Poussin operatörü
$P_n^{[\beta]}(f;x)$	Jain tipli operatör
$P_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)$	Stancu operatörü
$R_n(f;x)$	Baskakov operatörü
$\mathfrak{R}_n(f;x)$	Chlodovsky operatörünün bir genellemesi
$R_n^{[\beta]}(f;x)$	Balazs-Szabados operatörü
$R_n^{**}(f;x)$	Balazs operatörü
$R_n^{***}(f;q,x)$	$q$ -Balázs-Szabados-Kantorovich operatörü

$S_n(f;x)$	Szasz-Mirakyan operatörü
$S_n^p(f;x)$	Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan operatörü
$S_{n,a_n}^*(f;x)$	Stancu-Chlodovsky operatörü
$S_{n,p,q}(f;x)$	$(p, q)$ -Stancu operatörü
$T_n\left((t)^k\right)$	k. moment
$T_n\left((t-x)^k\right)$	k. merkezi moment
$T_n(f;x)$	Temel Gamma operatörü
$T_n^*(f;x)$	Zeng tipli operatör
$T_n^{**}(f;x)$	Gamma operatörünün modifikasyonu
$T_n^{***}(f;x)$	Gamma operatörünün farklı bir modifikasyonu
$\mathcal{T}_n(f;x)$	Gamma operatörünün yeni bir modifikasyonu
$\mathcal{T}_n^*(f;x)$	Genelleştirilmiş Gamma operatörü
$\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f;x)$	Gamma operatörünün yeni bir sınıfı
$U_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$	$C_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$ uzayındaki $\frac{f(x)}{\Phi(x)}$ ifadesi düzgün sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$V_n(f;x)$	Volterra operatörü
$V_n^{\tau}(f;x)$	King tipli operatör
$\mathcal{V}_n(f, x)$	Genelleştirilmiş Bernstein operatörü
$Z_m^p(u; x)$	Meyer-König-Zeller operatörünün yeni bir sınıfı
$Z_n(f; x)$	Chlodovsky operatörü
$Z_n^*(u; x)$	Balazs tipli operatörlerin yeni bir genellemesi
$Z_{n,q}(f; x)$	$q$ -Baskakov operatörü

## ÖZET

### GAMMA TIPLİ OPERATÖRLERİN YENİ BİR SINIFI

Reyhan ÖZÇELİK

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Emrah Evren KARA

Haziran 2023, 100 sayfa

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde, tez çalışmasında kullanılan bazı temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. Daha sonra konuyla ilgili önceki çalışmalar, kapsamlı bir literatür taramasıyla detaylandırılmıştır. Üçüncü bölümde, klasik Gamma tipli operatörleri modifiye ederek, yeni bir Gamma tipli operatör tanımlanmıştır. Bu operatör için Voronovskaya tipli teorem, ağırlıklı yaklaşım, yaklaşım hızı, noktasal yakınsama gibi özellikler incelenmiştir. Daha sonra bu yeni modifiye operatörün klasik operatörlere göre etkinliğini belirtmek adına bazı nümerik sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölümde, literatürde bulunan Gamma tipli operatörlerin yeni bir sınıfı tanımlanmıştır. Bu operatör için quantitative ve Voronovskaya tipli yaklaşım teoremleri uygulanarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu yeni operatörün yaklaşım özelliklerini daha da somutlaştırabilme adına bazı nümerik sonuçlar verilmiştir. Son olarak beşinci bölümde, tezde yapılan çalışmalar özetlenmiş ve sonraki çalışmalar için bazı öneriler verilmiştir.

**Anahtar sözcükler:** Gamma operatörleri, Korovkin tipli teorem, Nümerik sonuçlar, Süreklilik modülü, Voronovskaya teorem.

## ABSTRACT

### A NEW CLASS OF GAMMA TYPE OPERATORS

Reyhan ÖZÇELİK

Düzce University

Graduate School, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Emrah Evren KARA

June 2023, 100 pages

This study consists of five parts. The introduction is given in the first part of the thesis. In the second part, the basic definitions and theorems to be used in this study are mentioned. Later, previous studies on the subject were detailed with a comprehensive literature review. In the third part, a new Gamma type operator has been identified, modifying classic Gamma type operators. Some features of this operator, such as Voronovskaya type theorem, weighted approximation, rate of convergence, pointwise estimated were examined. Later, this new modification was presented with numerical results to indicate the operators effectiveness over conventional operators. In the fourth section, a new class of Gamma-type operators in the literature was defined. The approach properties were examined by applying quantitative and Voronovskaya type approximation theorems for this operator. In addition, some numerical results have been given to further embody the approach properties of this new operator. Finally, in the fifth chapter, the studies carried out in the thesis are summarized and some suggestions for further studies are given.

**Keywords:** Gamma operators, Korovkin type theorem, Numerical results, Modulus of continuity, Voronovskaya theorem.

# EXTENDED ABSTRACT

## A NEW CLASS OF GAMMA TYPE OPERATORS

Reyhan ÖZÇELİK

Düzce University

Graduate School, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Emrah Evren KARA

June 2023, 100 pages

### 1. INTRODUCTION

Approximation theory has been studied by many mathematicians in the world for the last 150 years. This theory is an important and fascinating era of mathematical analysis. Approximation theory, which lights on scientific problems in many other areas, such as basic sciences and engineering sciences, has become increasingly important in the scientific community.

Approximation theory, the first study of this topic was examined by the Russian mathematician P. L. Chebyshev [1] in 1853. Then, the German mathematician K. Weierstrass [2] has made a huge improvement in mathematics, proving his own name-bearing Weierstrass approximation theory, in 1885. Weierstrass theorem is so long and complex, many of mathematicians have dealt with the proof of this theorem in different ways to make it simpler and more understandable [3]-[12]. One of the most important evidence of the Weierstrass theorem was given by S. Bernstein [13] in 1912. Thus, the famous Bernstein operator, whose is increasing his importance every day, has emerged. This is the first step in approach with positive linear operators. The Voronovskaya theorem was first introduced by E. Voronovskaya [14] to prove this theorem for Bernstein polynomials, which became the focus of many scientific studies in 1932. The question then emerged as a question of what conditions are required for the  $\{L_n\}$  sequence to properly converge to a continuous function. In 1951, H. Bohman [15] and 1953 P. P. Korovkin [16] found the answer to this question independently. Later, Szasz-Mirakyan operators, Baskakov operators, Schurer operators, Meyer-König-Zeller operators, Durrmeyer operators, Stancu operators, Balazs operators, Lupas operators, Phillips operators, Post-Widder operators Bleimann Butzer-Hahn operators  $q$ -analoq,

modified and generalized operators have been examined about their properties by many scientists.

In addition to this information, the Gamma function was identified by Leonard Euler [17] in 1738 to extend the value of factorial to non-integer real numbers. Later, with many mathematicians participation, Gamma and related functions have resulted in a long and impressive history of emergence and development.

Introduced by Lupas and Muller [18] in 1967, Gamma operators are one of the most common groups in approximation theory and are widely used to find a better approach to target function. A number of literature was then revealed in the treatment of new Gamma operators. This is shown to have newly defined operators [19]-[23] and similar approach properties. Later, by Zeng [24] identified a new Gamma operator class.

The last 20 years, they have studied quantitative Voronovskaya type approximation theory using a continuity module for any positive linear operator in compact areas [25]. Then, many scientists used different continuity modules to study quantitative, quantitative-Voronovskaya, Gruss and Gruss-Voronovskaya type theorems [26]-[37].

In this thesis, is aimed to define a new class of existing Gamma type operators and to provide some approximation properties (Voronovskaya theorem, weighted approximation, rate of convergence) of this newly defined operator. This new operator will help identify existing Gamma-type operators, both inclusive and new operators.

## **2. MATERIAL AND METHODS**

The introduction is given in the first part of the thesis. In the second part provides the basic concepts required. After a comprehensive literature review, previous studies on the subject are detailed in the third part of the thesis. Then, the concepts required for convergence such as positive linear operators and their approximation, continuity modules and properties, approximation of positive linear operators in weighted spaces, Lipschits class and properties are focused. As the main results are related to the approach, these areas are thoroughly reviewed.

## **3. RESULTS AND DISCUSSIONS**

The main results of this thesis are given in sections 3 and 4.

In Section 3, a new Gamma type operator has been identified by replacing traditional Gamma type operators. This operator preserves the fixed functions directly. The moment and central moment values of this operator have been obtained. Later, some of these operators were provided with convergence features, such as Voronovskaya type theory, weighted approximation, rate of convergence and pointwise estimates. Finally, some numerical examples were presented to verify their approximate properties. All of these numerical examples applied in MATLAB have shown that the newly created Gamma type operator has a good approximate to some functions compared to the classic one.

In Section 4. a more comprehensive Gamma type operator class has been defined. The moment and central moment values of this produced Gamma operator were obtained. Later, some of these operators are equipped with convergence features such as Voronovskaya type theory, predominantly approximate and approximate approach pattern. This newly defined Gamma operator also includes classic Gamma operators available in literature with appropriate parameter options. The theoretical and numerical results of this operator are reviewed and observed as an approximation procedure.

#### **4. CONCLUSION AND OUTLOOK**

A new class of existing  $q$ -Gamma type operators can be defined. This new operator can contribute to defining both inclusive and new operators of the  $q$ -Gamma type operators that exist in the literature.

# 1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi son 150 yıldır dünyadaki birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Bu teori matematiksel analizin önemli ve büyüleyici bir çağıdır. Başta matematik olmak üzere birçok farklı alanlarda problemlere ışık tutması, yaklaşım teorisinin önemini arttırmaktadır. Bu alanda yapılan çalışmalar teknolojinin de katkısıyla daha fazla güçlenerek, günümüzde de etkinliğini korumakta ve matematiğin her dalında özellikle analizde önemli gelişmeler göstermektedir. Ayrıca uygulamalı bilimler ve mühendisliğin birçok dalında önemli ve ilgi çekici uygulamaları da mevcuttur.

Yaklaşım teorisi ele alınan keyfi bir fonksiyonun daha basit ve daha çok kullanışlı özelliklere sahip (integrallenebilme, süreklilik, türevlenebilme gibi) başka bir fonksiyon cinsinden gösterimini elde etmeyi amaçlamaktadır. Bu şekilde elde edilen gösterimler daha çok bilgiye daha kolay ulaşmamızı sağlamaktadır. Aksi halde o fonksiyon için bilgi sahibi olmaya çalışılırken karmaşık hatta işin içinden çıkılması zor ispatlarla karşılaşılabilir. Böyle durumlar nedeniyle polinom yaklaşımı tercih edilmektedir. Polinom ailesi bu durumda daha iyi özelliklere sahip fonksiyon tanımını üstlenmiş olur. Dolayısıyla yaklaşım teorisi elemanları iyi özellikli olmayan fonksiyonları, elemanları iyi özellikli olan fonksiyonlar cinsinden elde etmeyi amaçlamaktadır.

Yaklaşım teorisindeki ilk çalışma 1853 yılında Rus matematikçi P. L. Chebyshev [1] tarafından incelenmiştir. Daha sonra 1885 yılında Alman matematikçi K. Weierstrass [2] kendi adını taşıyan Weierstrass yaklaşım teorisini kanıtlayarak matematikte büyük bir gelişme kaydetmiştir. Weierstrass teoremi o kadar uzun ve karmaşıktır ki birçok matematikçi bu teoremin kanıtını daha basit ve daha anlaşılır hale getirmek için farklı şekillerde ele almıştır [3]-[12]. Weierstrass teoreminin verilen ispatlar içerisinde en önemli olanlardan bir tanesi de 1912 yılında S. Bernstein [13] tarafından verilmiştir. Böylece önemini her geçen gün artıran ünlü Bernstein operatörü ortaya çıkmıştır. Bu durum pozitif lineer operatörlerle yaklaşımın ilk adımıdır. Daha sonraki yıllarda kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara yaklaşabilmek için pozitif lineer operatörler yaygın bir şekilde

kullanılmaya başlanmıştır. Voronovskaya teoremi ilk olarak 1932 yılında E. Voronovskaya [14] tarafından birçok bilimsel çalışmanın odağı haline gelen Bernstein polinomları için bu teoremi ispat etmesiyle ortaya çıkmıştır. Bu şekilde elde edilen sonuçlar ilerleyen zamanlarda birçok bilim insanının ilgisini çekmiş ve farklı operatörler için de bu teorem ispatlanmıştır. Öte yandan " $\{L_n\}$  dizisinin sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsak olması için gerekli şartlar nelerdir?" sorusu akla gelmiştir. Bu sorunun cevabını 1952 yılında H. Bohman [15] ve 1953 yılında P. P. Korovkin [16], [38] birbirinden bağımsız olarak bulmuşlardır. Bu teorem bir pozitif lineer operatör dizisinin belirli şartlar altında birim operatöre yakınsayıp yakınsamayacağını belirtir.

Szasz-Mirakyan operatörleri, Baskakov operatörleri, Schurer operatörleri, Meyer-König-Zeller operatörleri, Durrmeyer operatörleri, Stancu operatörleri, Balazs operatörleri, Lupaş operatörleri, Phillips operatörleri, Post-Widder operatörler, Bleimann Butzer-Hahn gibi operatörler ve bu operatörlerin modifiye edilmiş halleri tanımlanmış ve bu operatörlerin çeşitli yaklaşım özellikleri de birçok bilim insanı tarafından araştırılmıştır.

Gamma fonksiyonu  $x > 0$  için Euler integrali de denilen

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

integrali ile tanımlanır.

1967 yılında A. Lupaş ve M. Müller [18] tarafından tanımlanan Gamma operatörleri, yaklaşım teorisinde en yaygın kullanılan gruptan biridir. Ayrıca bu operatörler hedef fonksiyona daha iyi bir yaklaşım bulmak için yaygın olarak kullanılmaktadır.

$x \in \mathbb{R}^+$ ,  $n \in \mathbb{N}$  için

$$K_n(x, u) = \frac{x^{n+1}}{\Gamma(n+1)} e^{-xu} u^n$$

olmak üzere Lupaş ve Müller'e tarafından tanımlanan Temel Gamma operatörü

$$T_n(f; x) = \int_0^{\infty} K_n(x, u) f\left(\frac{n}{u}\right) du \quad (1.1)$$

şeklindedir. Bu operatör yeni Gamma operatörlerinin tanımlanmasında temel teşkil etmiştir.

X. M. Zeng [24] Gamma operatörünün yeni bir sınıfı olan bir operatör tanımlamıştır. Bu operatör  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $n \in \mathbb{N}$  için

$$K_n^*(x, u) = \frac{1}{x^n \Gamma(n)} e^{-\frac{u}{x}} u^{n-1}$$

olmak üzere

$$T_n^*(f; x) = \int_0^{\infty} K_n^*(x, u) f\left(\frac{u}{n}\right) du \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu tezde literatürde bulunan Gamma tipli operatörlerin yeni bir sınıfını tanımlamak ve bu yeni tanımlanan operatörün bazı yaklaşım özelliklerini (Voronovskaya teoremi, ağırlıklı yaklaşım, yaklaşım hızı) vermek hedeflenmiştir. Bu yeni operatör, literatürde bulunan Gamma tipli operatörleri hem kapsayacak hem de yeni operatörler tanımlamaya yardımcı olacaktır. Bu operatörün genel formu

$$R_n^*(f; x) = \alpha_n(x) \int_0^{\infty} e^{\beta_n(x)u} u^n f\left(\frac{n}{n}\right) du$$

şeklinde olup asıl amaç buradaki  $\alpha_n(x)$  ve  $\beta_n(x)$  fonksiyonlarını belirlemek olacaktır. Bu fonksiyonları belirledikten sonra yeni tanımlanan Gamma operatörünün Korovkin teoremine göre polinomları koruyup korumadığı incelenecektir. Ayrıca merkezi moment değerleri ilerleyen bölümlerde kullanılmak üzere hesaplanacaktır. Bu hesaplanan değerler ile birlikte yaklaşım teorisinin temel özellikleri olan yaklaşım hızı, ağırlıklı yaklaşım ve Voronovskaya tipli teoremler verilecektir. Son olarak bu yeni operatörün yaklaşım özelliklerini daha da somutlaştırabilme adına bazı nümerik sonuçlar verilecektir.

Bu çalışma aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

Tezin ilk bölümünde konuyla ilgili giriş yapılmıştır.

Tezin ikinci bölümünde ilk olarak temel kavramlara yer verilmiştir. Daha sonra yaklaşım teorisinin ortaya çıkışı, tarihsel gelişimi, lineer pozitif operatör olan Gamma operatörünün gelişimi ve operatörlerin genelleştirilmesi süreci detaylandırılmıştır.

Tezin üçüncü ve dördüncü bölümünde, modifiye edilmiş Gamma operatörünün ve literatürde bulunan Gamma tipli operatörlerin yeni bir sınıfı tanımlanmış olup bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiş bazı teoremleri sağladığı gösterilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde, tezden elde edilen sonuçlar ve öneriler ifade edilmiştir.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR VE LİTERATÜR

### 2.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

**Tanım 2.1.**  $\mathbb{F}$  bir cisim ve  $V$  boş olmayan bir küme olsun. Eğer

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$(x, y) \rightarrow (x + y)$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$$

$$(\alpha, x) \rightarrow (\alpha x)$$

ile tanımlı dönüşümler

$$(V_1) \text{ Her } v_1, v_2, v_3 \in V \text{ için } v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3,$$

$$(V_2) \text{ Her } v \in V \text{ için } v + \theta = \theta + v = v \text{ olacak şekilde bir } \theta \in V \text{ vardır,}$$

$$(V_3) \text{ Her } v \in V \text{ için } v + (-v) = (-v) + v = \theta \text{ olacak şekilde bir } (-v) \in V \text{ vardır,}$$

$$(V_4) \text{ Her } v_1, v_2 \in V \text{ için } v_1 + v_2 = v_2 + v_1,$$

$$(V_5) \text{ Her } \alpha \in \mathbb{F} \text{ ve } v_1, v_2 \in V \text{ için } \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2,$$

$$(V_6) \text{ Her } \alpha, \beta \in \mathbb{F} \text{ ve } v \in V \text{ için } (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v,$$

$$(V_7) \text{ Her } \alpha, \beta \in \mathbb{F} \text{ ve } v \in V \text{ için } (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v),$$

$$(V_8) \text{ Her } v \in V \text{ için } 1v = v = v1 \text{ olacak şekilde } (1 \in \mathbb{F}) \text{ vardır}$$

koşullarını sağlıyorsa  $V$  ye  $\mathbb{F}$  üzerinde vektör uzayı denir [39].

**Tanım 2.2.**  $V$  bir vektör uzayı olsun.  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu her  $x, y \in V$  ve her  $\alpha \in \mathbb{F}$  için

$$(N_1) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(N_2) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$(N_3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartları sağlanıyorsa  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $V$  üzerinde bir norm,  $(V, \|\cdot\|)$  ikilisine de normlu uzay denir [39].

**Örnek 2.3.**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere

$$l_p = \{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

uzayı

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

normu ile bir normlu uzaydır.

**Tanım 2.4.**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $a \in A$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  sayısı için  $|x - a| < \delta$  olduğunda  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  olacak şekilde öyle bir  $\delta > 0$  sayısı varsa  $f$  fonksiyonuna  $a \in A$  noktasında süreklidir denir [40].

**Tanım 2.5.**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $t \in A$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  sayısı için  $|x - t| < \delta$  eşitsizliğini sağlayan  $\forall x, t \in A$  için  $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$  olacak şekilde öyle bir  $\delta > 0$  sayısı varsa  $f$  fonksiyonuna  $A$  üzerinde düzgün süreklidir denir [40].

**Tanım 2.6.**  $X$  ve  $Y$  reel değerli iki fonksiyon uzayı olsun.  $X$  'den alınmış herhangi bir  $f$  fonksiyonuna  $Y$  'de bir fonksiyona karşılık getiren kurala operatör denir ve operatörün  $x$  noktasında aldığı değer için  $T(f; x)$  gösterimi kullanılır [39].

**Tanım 2.7.**  $A \subset \mathbb{R}$  olmak üzere  $f$  fonksiyonu  $A$  kümesi üzerinde tanımlı olsun.  $M > 0$  ve her  $x \in A$  için  $|f(x)| \leq M$  oluyorsa  $f$  fonksiyonuna  $A$  kümesi üzerinde sınırlıdır denir [41].

**Tanım 2.8.**  $X$  bir metrik uzay olsun.  $X$  uzayındaki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse  $X$  uzayına kompakttır denir [39].

**Tanım 2.9.** Sonlu boyutlu normlu bir  $X$  uzayında, herhangi bir  $M \subset X$  alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul  $M$  kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır [39].

**Tanım 2.10.** Elemanları fonksiyonlardan oluşan bir  $X$  kümesi için lineer uzay olma şartlarını sağlaması durumunda  $X$  kümesine fonksiyon uzayı denir [39].

**Tanım 2.11.**  $p$  ile  $q$  reel sayıları  $1 < p < \infty$  için  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  koşullarını sağlayan iki reel sayı olmak üzere  $x = (x_n) \in l_p$ ,  $y = (y_n) \in l_q$  için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}$$

şeklinde Hölder eşitsizliği tanımlanır.  $p = q = 2$  durumunda bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir [39].

**Tanım 2.12.**  $X$  metrik uzay,  $M$  de  $X$ 'in bir alt kümesi,  $\varepsilon > 0$  ve  $x_0 \in X$  olsun.  $x_0$ 'ın her  $\varepsilon$  komşuluğu,  $x_0$  dan farklı en az bir  $y \in M$  noktası içerirse  $x_0$  noktasına  $M$  nin bir yığılma noktası denir [39].

**Tanım 2.13.**  $M$ 'nin noktalarıyla,  $M$ 'nin yığılma noktalarından oluşan kümeye  $M$ 'nin kapanışı denir ve  $\bar{M}$  ile gösterilir.  $\bar{M}$ ,  $M$ 'yi içeren en küçük kapalı kümedir [39].

**Tanım 2.14.**  $y = f(x)$  fonksiyonu  $a$  noktasını içeren bir aralıkta  $(n + 1)$ . dereceden türevlere sahip olsun. Bu durumda Taylor formülü

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

şeklinde tanımlanır [40].

**Tanım 2.15.**  $X$  ve  $Y$  aynı  $\mathbb{F}$  cismi üzerinde lineer fonksiyon uzayları olmak üzere  $T : X \rightarrow Y$  şeklindeki operatör ele alınsın.

( $T_1$ )  $f, g \in X$  ve  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$  olmak üzere  $T(\alpha f + \beta g; x) = \alpha T(f; x) + \beta T(g; x)$  koşulu sağlanıyorsa  $T$  operatörüne lineer operatör denir [39].

( $T_2$ )  $f \in X$  olmak üzere her  $f \geq 0$  fonksiyonu için  $T(f; x) \geq 0$  koşulu sağlanıyorsa  $T$  operatörüne pozitif operatör denir [42].

( $T_1$ ) ve ( $T_2$ ) şartların her ikisinde sağlanıyorsa  $T$  operatörüne pozitif lineer operatör denir [43].

Şimdi pozitif lineer operatörlerin özelliklerini ifade eden bir yardımcı teorem verelim.

**Yardımcı Teorem 2.16.**  $T$  pozitif lineer operatör olsun.

( $P_1$ ) Pozitif lineer operatörler monoton artandır. Yani;  $f \leq g \implies T(f) \leq T(g)$  dir [43].

( $P_2$ ) Her  $f \in X$  için  $|T(f)| \leq T(|f|)$  eşitsizliği sağlanır [43].

**Tanım 2.17.**  $K(t; x)$ ,  $t$  değişkenine göre sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$T(f; x) = \int_a^b f(t)K(t; x)dt$$

şeklinde  $T$  operatörü tanımlansın. Bu durumda  $K(t;x)$  e  $T$  operatörünün çekirdeği denir [43].

**Yardımcı Teorem 2.18.**  $K(t;x)$ ,  $t$  değişkenine göre sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$T(f;x) = \int_a^b f(t)K(t;x)dt$$

şeklinde  $T$  operatörü tanımlansın.  $T$  nin pozitif operatör olması için gerek ve yeter şart  $K(t;x)$  in (çekirdeğinin) pozitif olmasıdır [43].

**Tanım 2.19.**  $X$  ve  $Y$  fonksiyon uzayları olmak üzere  $T : X \rightarrow Y$  şeklinde  $T$  operatörü ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\{T_n\}$  operatör dizisi verilsin. ( $k = 1, 2, \dots$ ) olmak üzere

$$T_n \left( (t-x)^k, x \right)$$

ile tanımlanan ifadelere  $\{T_n\}$  operatör dizisinin  $k$ . merkezi momenti denir [44].

**Tanım 2.20.**  $T : X \rightarrow Y$  pozitif lineer operatör olsun.  $p$  ile  $q$  reel sayıları  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  koşullarını sağlayan iki reel sayı olmak üzere pozitif lineer operatörler için Hölder eşitsizliği her  $f, g \in X$ ,

$$T(|f \cdot g|) \leq (T(|f|^p))^{1/p} (T(|g|^q))^{1/q}$$

şeklinde tanımlanır [39].

**Tanım 2.21.** Yardımcı Teorem 2.16 nın ( $P_2$ ) özelliği kullanılarak ve Tanım 2.20 de  $p = 2$  olarak pozitif lineer operatörler için Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$|T(f \cdot g, x)| \leq \sqrt{T(f^2, x)} \sqrt{T(g^2, x)}$$

şeklinde tanımlanır [39].

**Tanım 2.22.**  $f \in C[a, b]$  iken  $(f_n(x))$  de  $C[a, b]$  lineer normlu uzayında fonksiyonların dizisi olsun. Her  $x \in [a, b]$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

ise  $(f_n(x))$  fonksiyonlar dizisine  $f$  fonksiyonuna  $C[a, b]$  lineer normlu uzayında düzgün yakınsaktır denir. Düzgün yakınsaklık  $f_n \Rightarrow f$  şeklinde gösterilir [39].

**Tanım 2.23.**  $X$  ve  $Y$  normlu uzaylar ve  $D(T) \subset X$  olmak üzere  $T : D(T) \rightarrow Y$  lineer operatör olsun. Her  $x \in D(T)$  için

$$\|T(f; x)\|_Y \leq c_x \|f\|_X$$

olacak şekilde öyle bir  $c_x > 0$  sayısı varsa  $T$  operatörüne sınırlı lineer operatör denir. Bu  $c_x$  sabitlerinin en küçüğüne  $T$  operatörünün normu denir ve  $\|T\|$  şeklinde gösterilir [39].

1951 yılında H. Bohman [15],  $x \in [0, 1]$  için  $0 \leq (t_{k,n}) \leq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ve  $u_k(x) \geq 0$  olmak üzere

$$T_n(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t_{k,n}) u_k(x)$$

şeklinde olan pozitif lineer operatörler dizisinin  $n \rightarrow \infty$  için  $[0, 1]$  aralığında sürekli  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şartın

$$T_n(1; x) \Rightarrow 1,$$

$$T_n(t; x) \Rightarrow x,$$

$$T_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$$

olması gerektiğini gösterdi. Burada H. Bohman'ın üzerinde çalıştığı operatörlerin değeri,  $f$  fonksiyonunun  $[0, 1]$  aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır.

1953 yılında P. P. Korovkin [16], H. Bohman'ın ifade ettiği koşulların genel halde de geçerli olduğunu ispatlamıştır.

**Teorem 2.24.** Tüm reel ekseninde her  $x \in \mathbb{R}$  için  $|f(x)| \leq M_f$  ve  $f \in C[a, b]$  olsun.  $\{T_n\}$  pozitif lineer operatör dizisi, her  $x \in [a, b]$  ve  $k = 0, 1, 2$  için  $e_k = t^k$  olmak üzere

$$T_n(e_k; x) \Rightarrow x^k$$

şartlarını sağladığında  $[a, b]$  aralığında

$$T_n(f; x) \Rightarrow f(x)$$

gerçeklenir [16].

Daha sonraki yıllarda Baskakov,  $M_f$  sabiti,  $[a, b]$  aralığı üzerinde sürekli  $f$  fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$|f(x)| \leq M_f (1 + x^2)$$

eşitsizliğini gerçekleyen  $f$  fonksiyonu için Korovkin teoreminin sağlandığını ispatlamıştır.

Baskakov bu teoremiyle  $f$  fonksiyonunun tüm reel ekseninde sınırlı olması şartını değiştirerek  $1 + x^2$  fonksiyonuyla sınırlı olması durumunda da yine düzgün yakınsamanın elde edildiğini ispatlamıştır.

**Tanım 2.25.**  $f \in C[a, b]$  olsun.  $x, t \in [a, b]$  olmak üzere her  $\delta > 0$  için  $f$  fonksiyonunun süreklilik modülü  $\omega(f, \delta)$  şeklinde gösterilir ve

$$\omega(f; \delta) = \sup_{|t-x| \leq \delta} |f(t) - f(x)|$$

şeklinde tanımlıdır.  $f \in C_b[0, \infty)$  için  $\delta \rightarrow 0$  olduğunda  $\omega(f; \delta) \rightarrow 0$  olduğu açıktır [45].

**Yardımcı Teorem 2.26.** Süreklilik modülün için aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (S<sub>1</sub>)  $\omega(f; \delta)$  fonksiyonu monoton artandır,
- (S<sub>2</sub>)  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$ ,
- (S<sub>3</sub>)  $m \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$ ,
- (S<sub>4</sub>)  $\lambda > 0$  reel sayısı için  $\omega(f; \lambda\delta) \leq (1 + \lambda)\omega(f; \delta)$ ,
- (S<sub>5</sub>)  $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$ ,
- (S<sub>6</sub>)  $|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$ ,
- (S<sub>7</sub>)  $\delta > 0$  için  $\omega(f; \delta)$  negatif olmayan bir fonksiyondur [45].

2008 yılında Holhoş [46] tarafından sunulan ağırlıklı süreklilik modülünün tanımı aşağıda verilmiştir.

**Tanım 2.27.** Her  $f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  ve  $\delta > 0$  için  $f$  fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü

$$\omega_\tau(f; \delta) = \sup_{|\tau(t) - \tau(x)| \leq \delta; t, x \in \mathbb{R}^+} \frac{|f(t) - f(x)|}{\lambda(t) + \lambda(x)}$$

ile tanımlanır.  $\omega_\tau(f; \delta)$  fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) Her  $f \in U_\lambda(\mathbb{R}^+)$  için

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\tau(f; \delta) = 0,$$

(ii) Her  $f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  olmak üzere  $\delta \geq 0$  ve  $\gamma \geq 0$  için

$$\omega_\tau(f; \gamma\delta) \leq (2 + \gamma)\omega_\tau(f; \delta),$$

(iii) Her  $f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  olmak üzere  $\delta > 0$  ve  $x, t \geq 0$  için

$$|f(t) - f(x)| \leq (\lambda(t) + \lambda(x)) \left( 2 + \frac{\tau(t) - \tau(x)}{\delta} \right) \omega_\tau(f; \delta).$$

Ayrıca her  $f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  için  $\omega_\tau(f; 0) = 0$  ve  $f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  için,  $\omega_\tau(f; \delta)$ ,  $\delta$  ya göre negatif olmayan ve azalmayan bir fonksiyondur [46].

Korovkin teoremi reel eksenin sonlu ve kapalı alt aralığında verilmektedir. Fakat sınırsız aralıklar üzerinde tanımlanan operatörler için bu teorem geçerli değildir.

1976 yılında A.D. Gadjiev [47] Korovkin teoreminin tüm  $\mathbb{R}$  de hangi koşullar altında gerçekleştiğini aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Her  $x \in \mathbb{R}^+$  için  $\Phi(x) = 1 + x^2$  fonksiyonu  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi(x) = \infty$  ve  $\Phi(x) \geq 1$  olacak şekilde  $\mathbb{R}$  üzerinde sürekli olsun. Bu durumda  $M_f$  de  $f$  fonksiyonuna bağlı pozitif bir sabit olmak üzere

$$B_\Phi(\mathbb{R}^+) = \{f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : |f(x)| \leq M_f \Phi(x), x \in \mathbb{R}^+\}$$

ve

$$C_\Phi(\mathbb{R}^+) = \{f \in B_\Phi(\mathbb{R}^+) : f, \mathbb{R} \text{ de sürekli}\} = C_\Phi(\mathbb{R}^+) \cap B_\Phi(\mathbb{R}^+)$$

fonksiyon uzaylarını göz önüne alınsın. Bu uzaylar

$$\|f\|_{\Phi} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{\Phi(x)}$$

normu ile birer normlu uzaylardır. Burada  $\Phi$  ya ağırlık fonksiyonu,  $B_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$  ve  $C_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$  uzaylarına ise ağırlıklı uzaylar denir. Ayrıca  $\kappa_f$  de  $f$  fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$C_{\Phi}^{\kappa}(\mathbb{R}^+) = \{f \in C_{\Phi}(\mathbb{R}^+) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\Phi(x)} = \kappa_f \text{ var ve sonlu}\}$$

olarak tanımlanan fonksiyon uzayı  $C_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$  uzayının bir alt uzayı olur. Özel olarak  $\kappa_f = 0$  olduğunda  $C_{\Phi}^0$  alt uzayı elde edilir. Bu uzayın elemanları;  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\Phi(x)} = 0$  şeklindedir.

Ayrıca

$$U_{\Phi}(\mathbb{R}^+) = \{f \in C_{\Phi}(\mathbb{R}^+) : \frac{f(x)}{\Phi(x)} \text{ düzgün sürekli}\}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece  $C_{\Phi}^{\kappa}(\mathbb{R}^+) \subset U_{\Phi}(\mathbb{R}^+) \subset C_{\Phi}(\mathbb{R}^+) \subset B_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$  sağlanır [47].

**Yardımcı Teorem 2.28.**  $\{T_n\}$  pozitif lineer operatörler dizisi için  $\Phi(x) = 1 + x^2$  ve  $M_{\Phi}$  pozitif bir sabit olmak üzere

$$T_n : C_{\Phi}(\mathbb{R}^+) \rightarrow B_{\Phi}(\mathbb{R}^+) \iff \|T_n(\Phi; x)\|_{\Phi} \leq M_{\Phi}$$

gerçeklenir [48].

**Teorem 2.29.**  $C_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$  uzayından  $B_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$  uzayına dönüşüm yapan  $\{T_n\}$  pozitif lineer operatörler dizisi  $\Phi(x) = 1 + x^2$  ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $k = 0, 1, 2$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^k; x) - x^k\|_{\Phi} = 0$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda herhangi bir  $f \in C_{\Phi}^{\kappa}(\mathbb{R}^+)$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; x) - f(x)\|_{\Phi} = 0$$

gerçeklenir [47].

**Tanım 2.30.**  $f, A \subseteq \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı, reel değerli, sürekli bir fonksiyon olsun. Her  $x, t \in A$  ve  $s \in (0, 1]$  için

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t - x|^s$$

eşitsizliğini sağlayan  $M > 0$  sabiti varsa  $f$  ye  $s$ . basamaktan Lipschitz sürekli fonksiyon denir. Bu fonksiyon sınıfı için  $Lip_M(s)$  gösterimi kullanılır [49].

**Yardımcı Teorem 2.31.**  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında tanımlı ve  $s \in (0, 1], M > 0$  olsun.  $Lip_M(s)$  fonksiyon sınıfı aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(L<sub>1</sub>)  $f \in Lip_M(s)$  ise  $f$  sürekli dir.

(L<sub>2</sub>)  $f$  türevlenebilir ve  $|f'(x)| \leq M$  ise  $f \in Lip_M(1)$  dir.

(L<sub>3</sub>)  $f \in Lip_M(s) \iff \omega(f; \delta) \leq M\delta^s$ .

(L<sub>4</sub>)  $s < k$  ise  $M$  den bağımsız olarak  $Lip(k) \subset Lip(s)$  dir [49].

**Tanım 2.32.**  $s \in (0, 1]$  olmak üzere  $x \in (0, \infty)$  için Lipschitz tipli  $s$ . dereceden maksimal fonksiyonlar

$$\tilde{\omega}_s(f; x) = \sup_{0 \leq t < \infty; t \neq x} \frac{|f(t) - f(x)|}{|t - x|^s}$$

biçiminde tanımlıdır[50].

**Tanım 2.33.**  $s \in (0, 1]$  ve  $M$  pozitif bir sabit olmak üzere Lipschitz tipli fonksiyonlar uzayı

$$Lip_M^*(s) = \left\{ f \in C[0, \infty) : |f(t) - f(x)| \leq M \frac{|t - x|^s}{(t + x)^{s/2}}; x, t \in (0, \infty) \right\}$$

şeklinde tanımlıdır [49].

**Tanım 2.34.**  $\alpha, \beta > 0, s \in (0, 1]$  ve  $M$  pozitif bir sabit olmak üzere Lipschitz tipli iki parametrelili fonksiyonlar uzayı

$$Lip_M^{\alpha, \beta}(s) = \left\{ f \in C[0, \infty) : |f(t) - f(x)| \leq M \frac{|t - x|^s}{(\alpha x^2 + \beta x + t)^{s/2}}; x, t \in (0, \infty) \right\}$$

şeklinde tanımlıdır [51].

## 2.2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Yaklaşım teorisinin öncülerinden P. L. Chebyshev [1] buhar makinasının lineer hareketini tekerleğin dairesel hareketine dönüştürme düzeneği üzerinde çalıştığı sırada henüz polinomlarla yaklaşımın varlığı hakkında herhangi bir çalışma yokken 1853 yılında kapalı aralıkta verilen keyfi sürekli fonksiyona en iyi yaklaşımı veren  $m$ -inci dereceden polinomu bulmaya çalışmıştır. Açık şekilde ifade edilirse;

“ $f$ ,  $[a, b]$  kapalı aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon ve  $m$  pozitif tamsayı olmak üzere

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)|$$

ifadesini minimum yapacak şekilde derecesi en fazla  $m$  olan

$$P(x) = \sum_{s=0}^m c_s x^s$$

şeklinde bir polinom bulunabilir mi?” sorusunun cevabı aranmaktadır. P. L. Chebyshev’in bu çalışması ile yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip olan en iyi yaklaşım problemi anlam kazanmıştır.

1885 yılında Alman Matematikçi K. Weierstrass kendi ismini taşıyan Weierstrass [2] yaklaşım teoremi,  $[a, b]$  kompakt aralığında düzgün sürekli her fonksiyona  $[a, b]$  aralığında düzgün olarak yakınsayan bir  $\{P_n(x)\}$  polinomlar dizisinin varlığını ispatlamıştır. Açık şekilde ifade edilirse, “ $f \in C[a, b]$  keyfi bir fonksiyon olmak üzere her  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $x \in [a, b]$  için öyle bir cebirsel  $P_n(x)$  polinomu vardır ki

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

sağlanır.” K. Weierstrass bu teoremi benzer şekilde sürekli periyodik fonksiyonlara trigonometrik polinomlarla yaklaşım teoremini ele alarakta ispatlamıştır. Ek olarak Weierstrass, kendi ismini taşıyan yaklaşım teoremini ispatlamasıyla P. L. Chebyshev

den sonra matematikte reel değişkenli fonksiyonlarla yaklaşım teorisinin temelini atmış, uzun ve büyüleyici bir yolunda önünü açmıştır.

Weierstrass teoreminin ispatı oldukça karmaşık ve uzun olduğundan kavramak oldukça güçtür. Bu nedenle böyle bir karmaşa birçok ünlü matematikçiyi daha basit ve daha anlaşılır bir ispat elde edebilmek için bu teorem üzerinde çalışmaya teşvik etmiştir. Matematikçi C. Z. Runge [3], K. Weierstrass'tan bağımsız olarak aynı yılda teoremin başka bir ispatını vermiştir. Farklı ispatlar yapan diğer matematikçilerde şu şekildedir:

1891 yılında E. Picard [4] tarafından  $x_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonksiyonu olmak üzere  $n \in \mathbb{N}$  için terimleri

$$C_n(f; x) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x^{n-1}(t)) dt$$

şeklinde verilen polinomlar dizisi tanımlanmıştır.

1897 yılında V. Volterra [5] tarafından  $K(x, t)$  çekirdek fonksiyon olmak üzere

$$V_n(f; x) = g(x) + \int_a^x K(x, t) f(t) dt$$

şeklinde polinomlar yardımıyla ispatı elde etmiştir. Bir diğer matematikçi H. Lebesgue [6] 1898 yılında benzer şekilde polinomlarla yaklaşım üzerine çalışarak farklı bir ispat elde etmiştir.

1900 yılında L. Fejer [7] tarafından  $f$  sürekli bir fonksiyon olmak üzere  $f \in C_{2\pi}$  için Fejer Polinomları

$$F_n(f; x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

biçiminde tanımlandı.

1900 yılında İsviçreli matematikçi G. Mittag- Leffler [8] tarafından  $f$  sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$M_n(f;x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-1)_{n-k} 2^k (f(t))^k$$

biçiminde polinomlar dizisi tanımlanmıştır.

1903 yılında M. Lerch [9] tarafından kendi ismini taşıyan polinomlar dizisi

$$E_n(f;x) = \sum_{k=1}^n \frac{k!}{n!} s(n,k) \binom{k+x-1}{k} f(t)^k$$

şeklinde ifade edilmiştir.

1905 yılında E. Borel [10] polinomlarla sürekli fonksiyonlara yaklaşımı incelerken polinomu

$$\sum \Phi_{n,s}(x) f\left(\frac{s}{n}\right)$$

şeklinde almış ve bu biçimdeki polinomlarla ilgili ispatı elde etmiştir.

1908 yılında C. J. De La Vallee Poussin [11]  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere Poussin Polinomlarını

$$P_n(f;x) = \frac{1}{n} \sum_{j=n+1}^{2n} s_j(f)(x)$$

biçiminde tanımlamıştır.

1908 yılında E. Landau [12] tarafından terimleri

$$N_n(f;x) = \frac{\int_0^1 (1-(t-x)^2)^n f(t) dt}{2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt}$$

şeklinde olan bir polinomlar dizisi tanımlanmıştır. Ayrıca 1911 yılında D. Jackson ve W. Sierpinski tarafından da benzer şekilde polinomlar oluşturularak ispatları yapmışlardır.

1912 yılında S. N. Bernstein [13] tarafından şu ispat verilmiştir:  $f \in C[0, 1]$  olmak üzere sınırlı bir fonksiyon ve  $0 \leq x \leq 1$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

biçiminde polinomlar dizisi tanımlamış ve Weierstrass teoreminin anlaşılır ve kolay bir ispatını vermiştir. Bernstein,  $B_n(f, x)$  ile gösterilen polinomlarla  $f \in C[0, 1]$  fonksiyonuna düzgün yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Bu polinomlara Bernstein polinomları adı verilir.  $B_n(f, x)$  operatörü  $x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$  olduğundan lineer pozitif operatördür. Bernstein, yaklaşımın ilk adımını pozitif lineer operatörlerle atmıştır. Bu adımdan sonra kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyona yaklaşabilmek için pozitif lineer operatörler yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Ayrıca Weierstrass teoreminin başka bir ispatı da A. Pinkus [52] tarafından verilmiştir.

Bernstein polinomları, Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşım için uygun değildir. Bu nedenle 1930 yılında L. V. Kantorovich [53]  $[0, 1]$  aralığındaki Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların yaklaşımı için Bernstein polinomlarını değiştirerek,  $0 \leq x \leq 1$  için

$$K_n(f; x) = (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt$$

şeklinde tanımlı  $[0, 1]$  aralığı üzerinde integrallenebilir fonksiyonlara genelleştirmiştir.  $\{K_n\}$  operatörüne Bernstein-Kantorovich polinomları denir.

1932 yılında E. Voronovskaya [14] tarafından  $f \in [0, 1]$  fonksiyonu sınırlı ve sabit bir  $x$  noktasında ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[B_n(f; x) - f(x)] = \frac{x(1-x)}{2} f''(x)$$

şeklinde bir asimptotik formül verilmiştir.

1935 yılında T. Popoviciu [54]  $f \in C[0, 1]$  fonksiyonu için süreklilik modülü yardımıyla

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{5}{4} \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

şeklinde Bernstein polinomlarının fonksiyona yaklaşım hızını belirlemiştir.

1937 yılında I. Chlodovsky [55]  $f$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığı üzerinde tanımlı ve  $\{b_n\}$  dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

şartını sağlayan monoton artan pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere  $x \in [0, b_n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  için  $Z_n(f; x)$  operatörünü

$$Z_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} f\left(\frac{k}{n} b_n\right)$$

şeklinde tanımlamış ve bu operatörün yakınsaklık özelliklerini incelemiştir.  $\{Z_n\}$  operatörü Bernstein-Chlodovsky polinomları olarak adlandırılır.

1938 yılında Kac [56], [57]  $f \in lip_{M,f}(s)$  olmak üzere Bernstein polinomlarının Lipschitz şartını sağlayan fonksiyona yaklaşımını her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $x \in [0, 1]$  için

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq L \left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\frac{s}{2}}$$

şeklinde incelemiştir.

1941 yılında G. M. Mirakyan [58]  $f$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığı üzerinde sürekli ve sınırlı olması durumunda  $x \in [0, \infty)$  için  $S_n(f; x)$  operatörünü

$$S_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-nx} (nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

olarak tanımlamış ve bu operatörün yakınsaklık özelliklerini incelemiştir. 1944 ile 1950 yıllarında sırasıyla J. Favard [59] ve O. Szasz [60] tarafından bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.  $\{S_n\}$  operatörler dizisi literatürde Szasz-Mirakyan operatörleri olarak bilinir.

1951 yılında H. Bohman [15]  $x \in [0, 1]$  ve  $0 \leq (t_{k,n}) \leq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t_{k,n}) u_k(x)$$

şeklinde olan pozitif lineer operatörler dizisinin  $[0, 1]$  kapalı aralığında sürekli bir  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şartın  $1, t, t^2$  fonksiyonlarının operatör yardımıyla  $1, x$  ve  $x^2$  fonksiyonlarına düzgün yakınsaması gerektiğini ifade ve ispat etmiştir. Daha sonra 1953 yılında P. P. Korovkin tarafından yapılan [16], [38] künyeli çalışmalarda bu teoremdaki  $[0, 1]$  aralığı  $[a, b]$  aralığına genişleterek teoremin genel halde de geçerli olduğu gösterilmiştir. Bu nedenle bu teorem literatürde Bohman-Korovkin Teoremi olarak bilinir.

1957 yılında V. A. Baskakov [61]  $f$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığı üzerinde sürekli ve sınırlı olması durumunda  $x \in [0, \infty)$  için  $R_n(f; x)$  operatörünü

$$R_n(f; x) = (1+x)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left( \frac{x}{1+x} \right)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanmış ve bu operatörün yakınsaklık özelliklerini incelemiştir.  $\{R_n\}$  operatörler dizisi Baskakov operatörleri olarak adlandırılır [62].

1960 yılında Essen [63]  $f \in C[0, 1]$  olmak üzere süreklilik modülünün yardımıyla

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq C \omega \left( f, \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \right)$$

şeklindeki eşitsizliği sağlayan en küçük  $C$  sabitini asimptotik olarak bulmuştur.

1962 yılında Schurer [64]  $x \in [0, 1]$  ve  $p$  negatif olmayan tamsayı olmak üzere  $B_{s,p}(f; x)$  operatörünü

$$B_{s,p}(f; x) = \sum_{r=0}^{s+p} \binom{s+p}{r} x^r (1-x)^{s+p-r} f\left(\frac{r}{s}\right)$$

şeklinde tanımlamış ve bu operatörün yakınsaklık özelliklerini incelemiştir.  $\{B_{s,p}\}$  operatörler dizisi Schurer operatörleri olarak adlandırılır.

1962 yılında W. Meyer König-K. Zeller [65] tarafından  $f \in C[0, 1)$  ve  $x \in [0, 1)$  olmak üzere

$$E_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1} f\left(\frac{k}{n+k+1}\right) \quad (2.1)$$

ile  $E_n(f; x)$  operatörleri tanımlanmış ve bu operatörlerin bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

1964 yılında E. W Cheney ve A. Sharma [66] yukarıda verilen (2.1) ifadesindeki operatörleri monotonluk özelliklerini sağlaması için

$$M_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1} f\left(\frac{k}{n+k}\right)$$

formunda modifiye etmişler ve bu operatörlerin çeşitli yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. E. W Cheney ve A. Sharma tarafından günümüzdeki şekline geliştirilen modifiye  $\{M_n\}$  operatörler dizisi literatürde Meyer König-Zeller operatörleri olarak adlandırılır.

1967 yılında J. L. Durrmeyer [67]  $[0, 1]$  aralığı üzerinde integrallenebilir fonksiyonlara yakınsayan  $D_n(f; x)$  operatörlerini

$$D_n(f; x) = (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_0^1 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f(t) dt$$

şeklinde tanımlamış ve bu operatörlerin yakınsaklık özelliklerini incelemiştir.

1969 yılında D. D. Stancu [68] tarafından Bernstein operatörü  $0 \leq \alpha \leq \beta$  olmak üzere

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$$

şeklinde genelleştirmiştir. Burada  $\alpha + \beta = 0$  olarak alındığında Bernstein polinomları elde edilir.  $\{P_n^{(\alpha, \beta)}\}$  formundaki operatörlere Stancu operatörleri adı verilir.

1970 yılında Jain [69] belirli  $0 \leq \beta < 1$  parametresine dayalı olarak  $f \in C[0, \infty)$  için Szasz–Mirakyan operatörünün

$$\omega_\beta(k, nx) = nx(nx + k\beta)^{k-1} \frac{e^{-(nx+k\beta)}}{k!}$$

olmak üzere

$$P_n^{[\beta]}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_\beta(k, nx) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde modifiye formunu Jain tipli operatör olarak tanıtmış ve bu operatörün yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Buradaki  $\beta$  parametresi  $n \in \mathbb{N}$  sayısına bağlıdır.  $\beta = 0$  olarak alındığında Szasz–Mirakyan operatörü elde edilir.

1974 yılına kadar tanımlanan veya geliştirilen operatörler,  $f$  fonksiyonunun kapalı ve sınırlı olması durumunda incelenmiştir. Sonlu olmayan aralıklarda yeni operatörler ve bunların modifiye edilmiş halleri tanımlandıkça Bohman-Korovkin teoreminin sonlu olmayan aralıklar üzerinde verilme ihtiyacı oluşmuştur. Bu tipteki operatörlerin düzgün yakınsaklığını, ilk olarak 1974 – 1976 yılları arasında A. D. Gadjiev [47] ve Z. Ditzian [70] sınırlı ve sürekli fonksiyonlar sınıfının bir alt sınıfındaki fonksiyonlar (ağırlıklı fonksiyon uzayları) için incelemişlerdir.

1975 yılında K. Balazs [71]  $a_n$  ve  $b_n$  pozitif sayılar,  $x \geq 0$  ve  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$R_n^{**}(f; x) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k f\left(\frac{k}{b_n}\right)$$

şeklinde lineer pozitif operatörü tanımlamıştır. Bu operatör Balazs operatörü olarak adlandırılır.

1980 yılında G. Bleimann, P. L. Butzer ve L. Hahn [72] tarafından  $x \in [0, \infty)$  ve  $[0, \infty)$  aralığında tanımlı ve reel değerli fonksiyonlar için

$$H_n(f; x) = \frac{1}{(1 + x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k f\left(\frac{k}{n - k + 1}\right)$$

formunda pozitif lineer operatörlerin bir dizisi tanımlanmıştır. A. D. Gadjiev ve Ö. Çakar [73] bu operatörün  $[0, \infty)$  aralığındaki düzgün yakınsaklığını elde etmişlerdir.  $\{H_n\}$  operatörlerine Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri adı verilir.

1982 yılında K. Balazs ve J. Szabados [74]  $n = 0, 1, 2, \dots$ , ve  $x \geq 0$  için  $a_n = n^{\beta-1}$  ve  $b_n = n^\beta$  olmak üzere

$$R_n^{[\beta]}(f; x) = \frac{1}{(1 + n^{\beta-1}x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n^{\beta-1}x)^k f\left(\frac{k}{n^\beta}\right)$$

şeklinde pozitif lineer operatörleri tanımlamış ve yakınsaklığın sağlanması için  $0 \leq \beta \leq \frac{2}{3}$  olması gerektiğini göstermişlerdir. Bu operatöre Balazs-Szabados operatörü denir.

1992 yılında Kirov [75] iki operatörün konvolüsyonu olan Bernstein-Taylor polinomlar dizisini  $r = 0, 1, 2, \dots$  olmak üzere  $f \in C^{(r)}[0, 1]$  ve  $x \in [0, 1]$  için

$$B_{n,r}(f; x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^i c_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlamış ve bu operatörün yaklaşım özelliklerini incelemiştir.  $r = 0$  olarak alınırsa Bernstein polinomları elde edilir.

Lupaş operatörleri sınırsız aralıklarda tanımlandıklarından yaklaşımı sadece ağırlıklı uzaylarda sağlanabilmektedir. 1995 yılında Lupaş [76] tarafından  $x > 0$  olmak üzere

$$L_n^*(f; x) = 2^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)_k}{2^k k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (2.2)$$

şeklinde Lupaş operatörleri tanımlanmış ve bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

1999 yılında Agratini [77] tarafından (2.2) ifadesinde verilen Lupaş operatörünün  $b > 0$  olmak üzere  $[a, b]$  kapalı ve sınırlı aralığındaki yaklaşım özellikleri incelenmiş ve bu operatör için Voronovskaya tipli formül elde edilmiştir. Ek olarak Lupaş operatörlerinin

Kantorovich tipli genellemesi  $x > 0$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için

$$K_n^{***}(f; x) = n2^{-a_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x)^k}{2^k k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2000 yılında E. İbikli [78]  $f$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığı üzerinde tanımlı  $\{b_n\}$  dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

şartını sağlayan monoton artan pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere  $0 \leq x \leq b_n$  ve  $0 \leq \alpha \leq \beta$  için

$$\mathfrak{R}_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} f\left(\frac{k + \alpha}{n + \beta} b_n\right)$$

şeklinde Chlodovsky polinomlarının bir genellemesini yapmıştır. Ayrıca bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini de incelemiştir. Bu operatörde  $\alpha = \beta = 0$  alındığında Chlodovsky polinomları elde edilir.

2001 yılında İspir [79] tarafından ağırlıklı uzaylarda Baskakov operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

2002 yılında O. Doğru [80]  $a_n$  ve  $b_{n,k}$ , her  $n$  ve  $k$  için

$$a_n + b_{n,k} = c_n \quad \text{ve} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{için} \quad \frac{n}{c_n} \rightarrow 1 \quad (2.3)$$

şartını sağlamak üzere  $x \geq 0$  ve  $n \in \mathbb{N}$

$$A_n(f; x) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k f\left(\frac{k}{b_{n,k}}\right)$$

şeklinde pozitif lineer operatörlerini tanımlamıştır. Her  $n$  ve  $k$  için  $a_n = 1$ ,  $b_{n,k} = n$  şeklinde seçilirse  $c_n = n + 1$  olur. Bu seçimler (2.3) şartını sağlar ve  $\{A_n\}$  operatörü Bleimann,

Butzer ve Hahn operatörlerine dönüşür.  $\{A_n\}$  operatörlerine Balazs operatörlerinin Bleimann-Butzer ve Hahn operatör tipli bir genellemesi denir.

Bernstein operatörünün  $f$  fonksiyonuna yakınsaklık hızı E. Voronovskaya [14] tarafından verilmiştir. Bu asimptotik formül 2003 yılında Bardaro, Butzer, Stens ve Vint [81] tarafından  $f \in [0, 1]$  sınırlı ve sabit bir  $x$  noktasında üçüncü mertebeden sürekli türeve sahip ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[B'_n(f; x) - f'(x)] = \frac{1-2x}{2} f''(x) + \frac{x(1-x)}{2} f'''(x)$$

şeklinde genişletilmiştir.

2003 yılında Z. Walczak [82]  $f \in C[0, \infty)$ ,  $r \in [2, \infty)$  ve  $q, s > 0$  sabit sayılar  $n \in \mathbb{N}$  ve  $x \in [0, \infty)$  olmak üzere Szasz-Mirakyan operatörlerinin

$$A_n(f; x; q, r, s) = e^{-(n^s x + 1)^r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^s x + 1)^{rk}}{k!} f\left(\frac{k}{n^s(n^s x + 1)^{r-1} + qr}\right)$$

şeklinde yeni bir modifikasyonunu tanımlamış ve bu operatörlerin yakınsaklık özelliklerini incelemiştir.

2005 yılında Z. Finta [83] tarafından  $f \in C[0, \infty)$  için

$$P_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \quad \text{ve} \quad b_{n,k}(t) = \frac{1}{B(k, n+1)} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}}$$

olmak üzere

$$D_n^*(f; x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} b_{n,k}(t) f(t) dt + P_{n,0}(x) f(0)$$

şeklinde operatör tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelemiştir.  $\{D_n^*\}$  operatörler dizisi Baskakov-Durrmeyer operatörleri olarak adlandırılır.

2007 yılında A. Erençin ve F. Taşdelen [84],  $(a_n)$  ve  $(b_n)$

$$\frac{a_n}{b_n} = 1 + O\left(\frac{1}{b_n}\right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0$$

olacak şekilde pozitif artan ve sınırsız herhangi iki dizi  $f \in [0, \infty)$  olmak üzere  $x > 0$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için Lupaş operatörlerinin

$$L_n^{**}(f; x) = n2^{-a_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x)_k}{2^k k!} f\left(\frac{k}{b_n}\right) \quad (2.4)$$

şeklinde bir modifikasyonunu tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

2009 yılında Erençin ve Taşdelen [85]  $f$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığında integrallenebilir ve sınırlı  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  dizileri de  $n \in \mathbb{N}$  için  $a_n \geq b_n$  olacak şekilde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

şartlarını sağlayan pozitif artan ve sınırsız herhangi iki dizi olmak üzere (2.4) ifadesinde verilen Lupaş operatörlerinin modifikasyonu üzerinden  $x > 0$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için

$$L_n^{***}(f; x) = b_n 2^{-a_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x)_k}{2^k k!} \int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}} f(t) dt$$

şeklinde Kantorovich tipli bir genellemesini tanımlayarak yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

2009 yılında A. İzgi, İ. Büyükyazıcı ve E. İbikli [86] iki operatörün konvolüsyonu olan Chlodovsky-Taylor polinomlar dizisini  $r = 0, 1, 2, \dots$  olmak üzere  $f \in C^{(r)}[0, \infty)$ ,  $x \in [0, b_n]$  için

$$B_{n,r}(f; x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

şeklinde tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

2010 yılında İ. Büyükyazıcı [87]  $\{a_n\}$  dizisi  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$  olacak şekilde pozitif artan ve  $0 \leq x \leq b_n$  için

$$p_{n,a_n}^k = \binom{n}{k} \frac{\prod_{s=0}^{k-1} \left(\frac{x}{b_n} + a_n s\right) \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n} + a_n s\right)}{\prod_{s=0}^{n-1} (1 + a_n s)}$$

olmak üzere

$$S_{n,a_n}^*(f;x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}b_n\right) p_{n,a_n}^k$$

şeklinde Stancu-Chlodovsky operatörlerini tanıtmış ve bu operatörün yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

2012 yılında D. K. Verma, V. Gupta ve P. N. Agrawal [88]  $f \in C[0, \infty)$ ,  $0 \leq \alpha \leq \beta$  için

$$P_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \quad \text{ve} \quad b_{n,k}(t) = \frac{1}{B(k, n+1)} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}}$$

olmak üzere  $D_{n,\alpha,\beta}(f;x)$  operatörlerini

$$D_{n,\alpha,\beta}(f;x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} b_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt + P_{n,0}(x) f\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)$$

şeklinde tanımlamışlar ve çeşitli yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Burada  $\alpha = \beta = 0$  olarak alınırsa  $D_n^*(f;x) = D_{n,0,0}(f;x)$  elde edilir yani Baskakov-Durrmeyer operatörlerine indirgenir.  $\{D_{n,\alpha,\beta}\}$  operatörler dizisi Baskakov-Durrmeyer-Stancu operatörleri olarak adlandırılır.

2015 yılında P. Patel ve V. N. Mishra [89] belirli  $0 \leq \beta < 1$  parametresine dayalı olarak  $f \in C[0, \infty)$  ve  $x \in \mathbb{R}^+$  için Baskakov operatörlerinin

$$\omega_{\beta}(k, nx) = nx(nx + k\beta)^{k-1} \frac{e^{-(nx+k\beta)}}{k!}$$

ve

$$p_{n,k}(t) = \binom{n+k-1}{k} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}}$$

olmak üzere

$$K_n^{\beta}(f;x) = (n-1) \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{\beta}(k, nx) \int_0^{\infty} p_{n,k-1}(t) f(t) dt + e^{-nx} f(0)$$

şeklinde modifiye formunu Jain-Baskakov tipli operatörleri tanıtmışlar ve yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Burada  $\beta = 0$  olarak alındığında Szasz-Baskakov operatörleri elde edilir.

2016 yılında V. N. Mishra ve P. Sharma [90] İ. Yüksel [91] çalışmasından yardım alarak  $f$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığında reel değerli ve sürekli  $p, k, n \in \mathbb{N}$  için

$$b_{n,p}^k(x) = \binom{n+p+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+p+k}} \quad \text{ve} \quad s_{n,p}^k(t) = e^{-(n+p)t} \frac{((n+p)t)^k}{k!}$$

olmak üzere

$$L_{n,p}(f;x) = (n+p) \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,p}^k(x) \int_0^{\infty} f(t) s_{n,p}^k(t) dt$$

şeklinde Baskakov-Schurer-Szasz tipli pozitif lineer operatörleri tanımlamış ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca aynı çalışmada yine İ. Yüksel [91] çalışmasından yardım alarak  $b_{n,p}^k(x)$  ve  $s_{n,p}^k(t)$  yukarıda tanımlandığı gibi olmak üzere

$$L_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(f;x) = (n+p) \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,p}^k(x) \int_0^{\infty} f\left(\frac{nt+\alpha}{b+\beta}\right) s_{n,p}^k(t) dt$$

şeklindeki Baskakov-Schurer-Szasz operatörünün Stancu tipli genellemesini vermişler ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir.  $\{L_{n,p}^{(\alpha,\beta)}\}$  operatörlerine Baskakov-Schurer-Szasz-Stancu operatörleri denir. Burada  $\alpha = \beta = 0$  olarak alınırsa yukarıdaki  $\{L_{n,p}\}$  operatörü yani Baskakov-Schurer-Szasz operatörleri elde edilir.

Son yıllarda Szasz-Mirakyan operatörleri ve Baskakov operatörlerinin örnek olduğu

$$Y_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_{n,k}(x) A_{n,k}(f)$$

tipindeki operatörlerin O. T. Pop, D. Barbosu ve D. Miclauş [92] tarafından yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Usta [93]  $u \in C((0, 1))$  olmak üzere  $n \in \mathbb{N}$  ve  $x \in (0, 1)$  için

$$B_n^*(u; x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} u\left(\frac{k}{n}\right)$$

formunda Bernstein tipli pozitif lineer operatörlerin bir modifikasyonunu tanıtmıştır. Bu operatörün Voronoskaya tipli teoremler, ağırlıklı yaklaşım, yakınsaklık oranı gibi bazı yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

1987 yılında ilk kez Lupaş [94] tarafından Bernstein operatörlerinin  $q$ -analoğu ( $q$ -benzeri)  $f \in C[0, 1]$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için

$$L_{n,q}(f; x) = \sum_{k=0}^n \frac{f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k (1-x)^{n-k}}{\prod_{j=1}^n (1-x) + q^{j-1}x}$$

şeklinde tanımlanmış ve bu operatörlerin düzgün yakınsaklığı Ostrovska [95] tarafından incelenmiştir.

1997 yılında G. M. Phillips [96] Bernstein polinomlarının  $0 < q < 1$  için

$$B_{n,q}(f; x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{i=0}^{n-k-1} (1 - q^i x) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)$$

biçiminde başka bir genellemesini yapmıştır. Phillips türündeki bu operatörlere  $q$ -Bernstein polinomları adı verilir.  $q = 1$  olması durumunda Bernstein polinomlarını verir. G. M. Phillips'in bu çalışmasından sonra yukarıda verilen klasik operatörlerin hepsinin  $q$ -benzerleri özellikle de ülkemizdeki matematikçiler tarafından tanımlanmış ve çeşitli yakınsaklık özellikleri üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Başta 2000 yılında Phillips [97], 2002 yılında H. Oruç ve N. Tuncer [98], 2003 yılında S. Ostrovska [99] gibi yazarlar olmak üzere  $q$ -Bernstein polinomları ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Diğer yazarlar şu şekilde listelenebilir:

2000 yılında T. Trif [100]  $f \in C[0, \infty)$  ve  $q \in (0, 1)$  olmak üzere Meyer-König-Zeller operatörlerinin  $x \in [0, 1)$  olarak

$$M_{n,q}(f;x) = \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right)$$

şeklinde  $q$ -benzeri operatörü oluşturmuş ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

2006 yılında O. Doğru ve O. Duman [101]  $f \in C[0, \infty)$  olmak üzere Meyer-König-Zeller operatörlerinin

$$C_{n,q}(f;x) = \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k f\left(\frac{q^k [k]_q}{[n+k]_q}\right)$$

şeklinde  $q$ -benzeri operatörlerin bir modifikasyonunu oluşturmuşlardır.

2006 yılında A. Aral ve V. Gupta [102] Szasz-Mirakyan operatörlerinin  $q$ - benzerini oluşturarak yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

2008 yılında A. Aral [103] tarafından  $f \in C[0, \infty)$  ve  $q \in (0, 1)$  olmak üzere Szasz-Mirakyan operatörlerinin

$$S_{n,q}(f;x) = K_q \left( -[n]_q \frac{x}{b_n} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{([n]_q x)^k}{[k]_q! (b_n)^k} f\left(\frac{[k]_q b_n}{[n]_q}\right)$$

şeklinde  $q$ -benzeri operatörü tanıtmıştır.

2008 yılında A. Aral ve O. Doğru [104]  $f \in C[0, \infty)$  ve  $q \in (0, 1)$  olmak üzere Bleimann-Butzer-Hahn operatörlerinin  $x \in [0, \infty)$  için

$$H_{n,q}(f;x) = \frac{1}{\prod_{s=0}^{n-1} (1 + xq^s)} \sum_{k=0}^m \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} x^k f\left(\frac{[k]_q}{q^k [n-k+1]_q}\right)$$

şeklinde  $q$ -benzeri operatörü inşa etmişlerdir.

2010 yılında N. I. Mahmudov [105] tarafından  $f \in C[0, \infty)$  ve  $q > 0$  olmak üzere Szasz-Mirakyan operatörlerinin

$$F_{n,q}(f;x) = k_q \left( -[n]_q q^{-k} x \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{([n]_q x)^k}{[k]_q! q^{k(k-1)/2}} f \left( \frac{[k]_q}{[n]_q} \right)$$

şeklinde  $q$ -benzeri operatörü literatüre kazandırmıştır.

2011 yılında A. Aral ve V. Gupta [106] tarafından  $f \in C[0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ve  $q > 0$  olmak üzere Baskakov operatörlerinin

$$Z_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q \frac{k(k-1)}{2} x^k (-x, -q)_{n+k}^{-1} f \left( \frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q} \right)$$

şeklinde  $q$ -benzeri operatörü oluşturmuş ve yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca birçok yazar H. Oruç ve G. M. Phillips [107], A. II'inskii ve S. Ostrovska [108], V. S.Videnskii [109], E. İbikli [110], H. Karşlı ve E. Ibikli [111], G. Nowak ve V. Gupta [112], H. Karşlı [113] kasıkların  $q$  benzerlerini çalışmışlardır.

2013 yılında İ. Yüksel [91] tarafından  $f$  fonksiyonu  $C[0, \infty)$  aralığında reel değerli ve sürekli  $p, k, n \in \mathbb{N}$  için  $A > 0$  için

$$b_{n,p}^k(x;q) = \begin{bmatrix} n+p+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k^2} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+p+k}} \quad \text{ve} \quad s_{n,p}^k(t;q) = e^{-[n+p]_q t} \frac{([n+p]_q t)^k}{k!}$$

olmak üzere

$$L_{n,p}^q(f;x) = [n+p]_q \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,p}^k(x;q) \int_0^{\frac{\infty}{A(1-q)}} f(t) s_{n,p}^k(t;q) d_q t$$

şeklinde  $q$ -Baskakov-Schurer-Szasz tipli pozitif lineer operatörler dizisi tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelemiştir.

2015 yılında ilk kez M. Mursaleen ve ark. [114]  $x \in [0, 1]$  için Bernstein operatörlerinin

$$B_{n,p,q}(f;x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (p^s - q^s x) f \left( \frac{[k]_{p,q}}{[n]_{p,q}} \right)$$

şeklinde  $(p, q)$  benzerlerini tanımlamışlardır. Bu operatöre  $(p, q)$  Bernstein operatörleri denir.  $p = 1$  alındığında  $q$ -Bernstein operatörüne indirgenir. Burada kullanılan  $p$  parametresi yaklaşıma esneklik katmaktadır. Yaklaşım teorisinde  $(p, q)$  benzeri operatörlerin de kullanılması araştırmacıların ilgisi çekmiş ve literatüre kazandırılacak yeni operatörlerin yolunu açmıştır.

2015 yılında M. Mursaleen ve ark. [115] tarafından  $x \in [0, 1]$  için Bernstein operatörlerinin

$$S_{n,p,q}(f;x) = \frac{1}{p \frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (p^s - q^s x) f\left(\frac{p^{n-k}[k]_{p,q} + \alpha}{[n]_{p,q} + \beta}\right)$$

şeklinde  $(p, q)$  benzeri Stancu operatörü tanımlamışlardır. Bu operatörde  $\alpha = \beta = 0$  olarak alınırsa  $(p, q)$  Bernstein operatörü elde edilir. Ayrıca  $p = 1$  alındığında  $q$ -Stancu operatörüne indirgenir.

2016 yılında A. Aral ve V. Gupta [116]  $x \in [0, \infty)$  ve  $0 < q < p \leq 1$  olmak üzere Baskakov operatörlerinin

$$E_{n,p,q}(f;x) = \sum_{s=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+s-1 \\ s \end{bmatrix}_{p,q} p^{s+n(n-1)/2} q^{s(s-1)/2} \frac{x^s}{(1 \oplus x)_{p,q}^{n+s}} f\left(\frac{p^{n-1}[s]_{p,q}}{q^{s-1}[n]_{p,q}}\right)$$

şeklinde  $(p, q)$  benzerlerini inşaa etmişlerdir. Bu operatör  $(p, q)$  Baskakov operatörleri olarak adlandırılır. Ayrıca  $p = 1$  alındığında  $q$ -Baskakov operatörü,  $p = q = 1$  olarak alınırsa temel Baskakov operatörü elde edilir.

2016 yılında T. Acar ve ark. [117] tarafından  $x \in [0, \infty)$  ve  $0 < q < p \leq 1$  olmak üzere Baskakov operatörlerinin

$$b_{n,k}^{p,q}(x) = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{k+n(n-1)/2} q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{(1 \oplus x)_{p,q}^{n+k}}$$

olmak üzere

$$F_{n,p,q}(f;x) = [n]_{p,q} \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}^{p,q}(x) q^{-k} \int_{p[k]_{p,q}/[n]_{p,q}}^{[k+1]_{p,q}/[n]_{p,q}} f\left(\frac{p^{n-1}[t]}{q^{k-1}}\right) d_{p,q}t$$

formunda  $(p, q)$  benzeri Kontorovich operatörlerinin bir modifikasyonunu oluşturmuşlardır.

2017 yılında K. Khan ve ark. [118] tarafından  $x \in [0, 1]$ ,  $p > 0$  ve  $q > 0$  olmak üzere  $L_{n,p,q} : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  için Lupaş operatörlerinin

$$L_{n,p,q}(f; x) = \sum_{k=0}^n \frac{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{(n-k)(n-k-1)/2} q^{k(k-1)/2} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{p^{n-k} [k]_{p,q}}{[n]_{p,q}}\right)}{\prod_{j=1}^n \{p^{j-1}(1-x) + q^{j-1}x\}}$$

biçiminde  $(p, q)$  benzeri Lupaş operatörü tanımlamıştır.

2017 yılında T. Acar, A. Aral ve M. Mursaleen [119]  $x \in [0, \infty)$ ,  $0 < q < p \leq 1$  için

$$b_{n,k}^{p,q}(x) = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{k+n(n-1)/2} q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{(1 \oplus x)_{p,q}^{n+k}}, \quad E_{p,q}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2} x^n}{[n]_{p,q}!}$$

olmak üzere

$$D_{n,p,q}(f; x) = [n]_{p,q} \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}^{p,q}(x) \int_0^{\infty} p^{k(k-1)/2} \frac{([n]_{p,q})^k E_{p,q}(-q[n]_{p,q}t)}{[k]_{p,q}!} f\left(\frac{p^{k+n-1}}{q^{k-1}}t\right) d_{p,q}t$$

şeklinde  $(p, q)$ -benzeri Baskakov-Durrmeyer operatörlerini tanıtmışlardır. Ayrıca bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini de incelemişlerdir.

2017 yılında V. N. Mishra ve S. Pandey [120] tarafından  $(p, q)$ -benzeri Baskakov-Durrmeyer operatörlerinin  $x \in [0, \infty)$ ,  $0 < q < p \leq 1$  ve  $0 < q < p \leq 1$  için

$$b_{n,k}^{p,q}(x) = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{k+n(n-1)/2} q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{(1 \oplus x)_{p,q}^{n+k}}, \quad E_{p,q}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2} x^n}{[n]_{p,q}!}$$

olmak üzere

$$D_{n,\alpha,\beta}^{p,q}(f; x) = [n]_{p,q} \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}^{p,q}(x) \int_0^{\infty} p^{k(k-1)/2} \frac{([n]_{p,q})^k E_{p,q}(-q[n]_{p,q}t)}{[k]_{p,q}!} \times f\left(\frac{p^{k+n-1} q^{1-k} t [n]_{p,q} + \alpha}{[n]_{p,q} + \beta}\right) d_{p,q}t$$

şeklinde Stancu genellemesi tanımlanmıştır. Bu operatörler  $(p, q)$ - benzeri Baskakov-Durrmeyer-Stancu operatörleri olarak adlandırılır.

2019 yılında E. Özkan [121] tarafından  $f, [0, \infty)$  aralığı üzerinde azalmayan ve sürekli bir fonksiyon her  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q \in (0, 1)$  ve  $0 < \beta \leq \frac{2}{3}$  olmak üzere  $a_n = [n]_q^{\beta-1}$  ve  $b_n = [n]_q^\beta$  için

$$R_n^{***}(f; q, x) = \frac{b_n}{\prod_{s=0}^{n-1} (1 + q^s a_n x)} \sum_{j=0}^n q^{\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (a_n x)^j \int_{\frac{q[j]_q}{b_n}}^{\frac{q[j+1]_q}{b_n}} f(t) d_{qt} \quad (2.5)$$

şeklinde  $q$ -Balázs–Szabados–Kantorovich operatörü tanımlanmıştır.

2020 yılında H. Hamal ve P. Sabancıgil [122]  $f, [0, \infty)$  aralığında integrallenebilir ve azalmayan bir fonksiyon her  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q \in (0, 1)$  ve  $0 < \beta \leq \frac{2}{3}$  olmak üzere  $a_n = [n]_q^{\beta-1}$  ve  $b_n = [n]_q^\beta$  için

$$r_{n,k}(q, x) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (a_n x)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 + (1 - q)[s]_q a_n x)$$

olmak üzere

$$R_{n,q}^*(f; q, x) = \sum_{k=0}^n r_{n,k}(q, x) \int_0^1 f(t) \left( \frac{[k]_q + q^k t}{b_n} \right) d_{qt}$$

şeklinde Balázs–Szabados operatörlerinin farklı bir Kantorovich tipli  $q$ -benzeri operatörü tanımlamışlardır ve yaklaşım özelliklerini incelemiştirler.  $q = 1$  olması durumunda (2.5) ifadesindeki  $q$  - Balázs–Szabados–Kantorovich operatörü elde edilir.

A. Acar ve ark. [123] Baskakov operatörlerinin  $(p, q)$  benzeri Durrmeyer-Stancu, A. Acar ve ark. [124] Szasz-Mirakyan operatörlerinin  $(p, q)$  benzeri Baskakov-Stancu, V. Gupta [125] Baskakov operatörlerinin  $(p, q)$  benzeri Kantorovich, K. Kanat [126] Lupaş operatörlerinin  $(p, q)$  benzeri Schurer-Stancu, H. Sharma ve C Gupta [127] Szasz-Mirakyan operatörlerinin  $(p, q)$  benzeri Kantorovich operatörlerini tanımlayarak yaklaşım özelliklerini incelemiştirler.

Bu bilgilerin yanı sıra 1738 yılında Leonard Euler [17] faktöriyelini değerini tam sayı olmayan reel sayılara da genişletmek için Gamma fonksiyonunu tanımlamıştır. Daha sonra pek çok matematikçinin katılımıyla gamma ve ilgili fonksiyonların gelişmesine, uzun ve etkileyici bir tarihinin ortaya çıkmasına neden olmuştur.

Gamma fonksiyonunun başta matematik olmak üzere fizikte ve mühendislikte; sayılar teorisi, kombinatorik, kuantum mekaniği, akışkanlar dinamiği, astrofizik gibi alanlarda birçok uygulaması vardır. Ayrıca Gamma fonksiyonunun  $f(t)e^{-g(t)}$  şeklinde fonksiyonların integrallerinin elde edilmesinde uzunluk, alan ve hacim hesaplamalarında da önemli uygulamaları mevcuttur [128]-[131].

1967 yılında A. Lupuş ve M. Müller [18] Gamma tipli operatörleri tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Daha sonra yeni Gamma operatörlerinin ele alınmasında literatür ortaya çıkmıştır. Bu yeni tanımlanmış operatörlerin de [19]-[21] benzer yaklaşım özelliklerine sahip olduğunu göstermiştir.

X. M. Zeng [24] tarafından Gamma operatörünün yeni bir sınıfı olan operatörü tanımlamış ve çeşitli yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Daha sonrasında F. Usta ve Ö. Betus [22] tarafından bu operatörlerden bazı fonksiyonlar sınıfı için daha iyi sonuç veren aşağıdaki yeni tipli Gamma operatörünü tanımlamışlardır. Bu operatör  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $n \in \mathbb{N}$  için

$$K_n^{**}(x, u) = \frac{x^{n+3}}{x^n \Gamma(n+3)} e^{-\frac{x}{u}} u^{-n-4}$$

olmak üzere

$$T_n^{**}(f; x) = \int_0^{\infty} K_n^{**}(x, u) f(nu) du$$

şeklindedir. Bu yeni operatörün yaklaşım özellikleri ve nümerik sonuçları [22] çalışmasında detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Bunlara ilave olarak Ö. Betus ve F. Usta [23] çalışması ile Gamma tipli yeni bir operatörü aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Bu operatör  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$T_n^{***}(f; x) = \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} f\left(\frac{\sqrt{(n-1)(n-2)}}{u^{1/n}}\right) du$$

şeklindedir.

2003 yılında J. King [132]  $f \in C[0, 1]$  ve  $(r_n)$ ,  $[0, 1]$  üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların dizisi  $0 \leq r_n \leq 1$  için

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n(f; x) &= ((B_n f) \circ r_n)(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (r_n)^k (1-r_n)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

şeklinde klasik Bernstein operatörünün bir genellemesini yaparak literatüre kazandırmıştır. Özel bir  $(r_n(x))$  durumu için bu operatörler  $e_0$ ,  $e_2$  test fonksiyonlarını gerçekler.

Daha sonra 2009 yılında H. Gonska, P. Pitul ve I. Raşa [133]  $f \in C[0, 1]$  ve  $\tau \in C[0, 1]$  üzerinde tanımlı, kesin artan ve  $\tau(0) = 0$ ,  $\tau(1) = 1$  olacak şekilde bir  $\tau$  fonksiyonunu kullanarak

$$V_n^\tau f = (B_n f) \circ (B_n \tau)^{-1} \circ \tau$$

şeklinde King tipli operatörü sunmuştur. Bu operatörün yaklaşım ve koruma özelliklerini incelemişlerdir.

2011 yılında D. Cardenas-Morales, P. Garrancho ve I. Raşa [134]  $f \in C[0, 1]$  ve  $\tau$ ,  $[0, 1]$  üzerinde her basamaktan sürekli türevlenebilir,  $x \in [0, 1]$  için  $\tau'(x) > 0$  ve  $\tau(0) = 0$ ,  $\tau(1) = 1$  koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} B_n^\tau(f; x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\tau(x))^k (1-\tau(x))^{n-k} (f \circ \tau^{-1})\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= (B_n(f \circ \tau^{-1}) \circ \tau)(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\tau(x))^k (1-\tau(x))^{n-k} f\left(\tau^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklinde Bernstein polinomlarının bir genelleştirilmesini oluşturmuşlardır. Şekil koruma, yakınsama özelliklerini ve asimptotik davranışlarını incelemişlerdir.

Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan operatörü Bernstein polinomları için (2.6) daki genelleştirmeye benzer şekilde 2014 yılında A. Aral, D. Inoan ve I. Raşa [135] tarafından aşağıdaki gibi inşa edilmiştir;

( $\rho_1$ )  $\rho$ ,  $\mathbb{R}^+$  üzerinde sürekli türevlenebilir,

( $\rho_2$ )  $\rho(0) = 0$ ,  $\inf_{x \in \mathbb{R}^+} \rho'(x) \geq 1$

şartlarını sağlayacak şekilde bir  $\rho$  fonksiyonu olsun. Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan operatörü

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n^\rho(f; x) &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left( \frac{k}{n} \right) \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\ &= (\mathcal{S}_n(f \circ \rho^{-1}) \circ \rho)(x) \\ &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} f \left( \rho^{-1} \left( \frac{k}{n} \right) \right) \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca literatürde yer alan bir çok operatörün genelleştirilmesi yapılmıştır.

Q.B. Cai, K.J. Ansari ve F. Usta [136]  $\rho$  fonksiyonu, yukarıdaki ( $\rho_1$ ) ve ( $\rho_2$ ) şartlarını sağlamak üzere  $r_m, s_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  ve  $x \in [0, 1]$  için

$$\begin{aligned} Z_m^\rho(u; x) &= \frac{(1 + r_m(x) - s_m(x) - \rho(x))^{m+1}}{(1 + r_m(x))^m} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} \left( \frac{\rho(x) + s_m(x)}{1 + r_m(x)} \right)^k (u \circ \rho^{-1}) \left( \frac{k}{n} \right) \end{aligned}$$

şeklinde Meyer-König-Zeller operatörünün yeni bir sınıfını tanımlamışlar ve yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Bu operatör hem literatürde bulunan bir çok operatörü kapsar hemde yeni operatörler tanımlamaya yardımcı olmuştur.

$u$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^+$  üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun.  $\Delta = [0, \frac{n}{b_n}]$  ve  $n_0 \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$  olsun.  $\alpha_n, \beta_n : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları  $\Delta$  üzerinde tanımlı ve pozitif

olmak üzere F. Usta [137]

$$Z_n^*(u; x) = \frac{[n(1 + \alpha_n(x)) - b_n(\rho(x) + \beta_n(x))]}{n^n(1 + \alpha_n(x))^{n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left( \frac{b_n(\rho(x) + \beta_n(x))}{n(1 + \alpha_n(x)) - b_n(\rho) + \beta_n(x)} \right)^k \\ \times (u \circ \rho^{-1}) \left( \frac{k}{b_n} \right)$$

şeklinde Balazs tipli operatörlerin yeni bir genellemesini tanıtmış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

Kompakt aralıklarda herhangi bir pozitif lineer operatör için süreklilik modülü yardımıyla ilk olarak Gonska ve ark [25] quantitative tipli Voronovskaya yaklaşım teoremi üzerinde çalışmışlardır. Daha sonra birçok bilim adamı farklı süreklilik modüllerini kullanarak quantitative tipli Voronovskaya yaklaşımını incelemişlerdir [26]-[35]. Acu ve ark [36], yaklaşım teorisinde süreklilik modülünü kullanarak Grüss tipli eşitsizliği incelemişlerdir. Gonska ve ark [37] süreklilik modülü ve Ditzian-Totik düzgünlük modülü açısından Grüss tipli eşitsizlikleri türetmiş ve klasik Bernstein operatörü için bazı iyi sonuçlar ortaya koymuştur. Son zamanlarda, Gal ve Gonska [138] Bernstein operatörleri için Grüss tipli eşitsizlik yardımıyla Voronovskaya tipli teoremi kanıtlamış ve bunu Grüss-Voronovskaya tipli teorem olarak adlandırmıştır. Çok yakın zamanda, Grüss-Voronovskaya tipli teoremler, ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla [26] da (2.6) ile tanımlanan operatörler için ve [28] de genel diziler için incelenmiştir.

### 3. MODİFİYE GAMMA OPERATÖRÜ

Bu bölümde elde edilen sonuçlar "Approximation properties of a new family of Gamma operators and their applications" [139] adlı makalede yayımlanmıştır. Ayrıca yine bu bölümde klasik Gamma tipli operatörleri modifiye ederek yeni bir Gamma tipli operatör tanımlanacak ve bu operatörün, moment ve merkezi moment değerleri hesaplanacaktır. Daha sonra Voronovskaya tipli teorem, ağırlıklı yaklaşım, yaklaşım oranı, Lipschitz sınıfı fonksiyonlar yardımıyla ve Lipschitz tipli maksimal fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı gibi bazı özellikler verilecektir. Son olarak bu yeni operatörün yaklaşım özelliklerini daha da somutlaştırabilme adına bazı nümerik sonuçlar gösterilecektir. İlk olarak  $x \in \mathbb{R}^+$  ve  $k \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $e_k(t) = t^k$  ve  $\varphi_{x,k}(t) = (t-x)^k$  şeklinde tanımlanan fonksiyonlar kullanılacaktır.  $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, \infty)\}$  normu ile  $[0, \infty)$  üzerinde tüm reel değerli, sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayını  $C_b[0, \infty)$  olarak gösterilecektir.  $\Gamma(x)$  ile gösterilen Gamma fonksiyonu ve  $f \in C_b[0, \infty)$  olacak şekilde  $M > 0$ ,  $t \rightarrow \infty$  için  $\beta > 0$  ve  $|f(t)| \leq Me^{\beta t}$  şartını sağlamak üzere yeni bir Gamma tipli modifiye operatörü her  $x \in \mathbb{R}^+ := (0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\mathcal{K}_n(x, u) = \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} e^{-xu^{1/n}}$$

olmak üzere

$$\mathcal{T}_n(f; x) = \int_0^\infty \mathcal{K}_n(x, u) f\left(\frac{n}{u^{1/n}}\right) du \quad (3.1)$$

şeklindedir.

$\mathcal{T}_n(f; x)$  pozitif ve lineer operatördür.

Gerçekten; her  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  ve her  $f_1, f_2 \in C_b[0, \infty)$  için

$$\mathcal{T}_n(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; x) = \int_0^\infty (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \left(\frac{n}{u^{1/n}}\right) \frac{x^n}{n!} e^{-xu^{1/n}} du$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_1 \int_0^{\infty} f_1 \left( \frac{n}{u^{1/n}} \right) \frac{x^n}{n!} e^{-xu^{1/n}} du + \alpha_2 \int_0^{\infty} f_2 \left( \frac{n}{u^{1/n}} \right) \frac{x^n}{n!} e^{-xu^{1/n}} du \\
&= \alpha_1 \mathcal{T}_n(f_1; x) + \alpha_2 \mathcal{T}_n(f_2; x)
\end{aligned}$$

olduğundan  $\mathcal{T}_n(f; x)$  lineerdir.

$x \in \mathbb{R}^+ := (0, \infty)$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için  $\frac{x^n}{n!} e^{-xu^{1/n}} \geq 0$  olduğundan  $f \geq 0$  için  $\mathcal{T}_n(f; x) \geq 0$  olur. Bundan dolayı  $\mathcal{T}_n(f; x)$  pozitifdir.

**Yardımcı Teorem 3.1.** Her  $x \in \mathbb{R}^+$  ve  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere aşağıdaki

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n(e_0(t); x) &= e_0(x), \\
\mathcal{T}_n(e_1(t); x) &= \left[ \frac{n}{n-1} \right] e_1(x), \\
\mathcal{T}_n(e_2(t); x) &= \left[ \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \right] e_2(x), \\
\mathcal{T}_n(e_3(t); x) &= \left[ \frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)} \right] e_3(x), \\
\mathcal{T}_n(e_4(t); x) &= \left[ \frac{n^4}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \right] e_4(x)
\end{aligned}$$

moment değerleri elde edilir.

*İspat.*  $k = 0$  için  $e_0(t) = t^0$  elde edilir. Şimdi bu ifade yeni tanımlanan modifiye Gamma operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n(e_0(t); x) &= \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-xu^{1/n}} \left( \frac{n}{u^{1/n}} \right)^0 du \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-xu^{1/n}} 1 du
\end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde

$$xu^{1/n} = t, \quad u^{1/n} = \frac{t}{x}, \quad u = \frac{t^n}{x^n} \quad \text{ve} \quad du = \frac{nt^{n-1}}{x^n} dt$$

dönüşümler uygulanırsa

$$\mathcal{T}_n(e_0(t); x) = \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{nt^{n-1}}{x^n} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^n n}{n! x^n} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt \\
&= \frac{x^n n(n-1)!}{n! x^n} \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

$k = 1$  için  $e_1(t) = t$  elde edilir. Şimdi bu ifade yeni tanımlanan modifiye Gamma operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n(e_1(t); x) &= \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-xu^{1/n}} \left( \frac{n}{u^{1/n}} \right) du \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-xu^{1/n}} \frac{n}{u^{1/n}} du
\end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde

$$xu^{1/n} = t, \quad u^{1/n} = \frac{t}{x}, \quad u = \frac{t^n}{x^n} \quad \text{ve} \quad du = \frac{nt^{n-1}}{x^n} dt$$

dönüşümler uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n(e_1(t); x) &= \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{nx}{t} \frac{nt^{n-1}}{x^n} dt \\
&= \frac{x^n n^2 x}{n! x^n} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-2} dt \\
&= \frac{x^n n^2 x(n-2)!}{n! x^n} \\
&= \frac{nx}{(n-1)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$k = 2$  için  $e_2(t) = t^2$  elde edilir. Şimdi bu ifade yeni tanımlanan modifiye Gamma operatöre uygulanırsa

$$\mathcal{T}_n(e_2(t); x) = \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-xu^{1/n}} \left( \frac{n}{u^{1/n}} \right)^2 du$$

$$= \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-xu^{1/n}} \frac{n^2}{u^{2/n}} du$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde

$$xu^{1/n} = t, \quad u^{1/n} = \frac{t}{x}, \quad u^{2/n} = \frac{t^2}{x^2}, \quad u = \frac{t^n}{x^n} \quad \text{ve} \quad du = \frac{nt^{n-1}}{x^n} dt$$

dönüşümler uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n(e_2(t); x) &= \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{n^2 x^2}{t^2} \frac{nt^{n-1}}{x^n} dt \\ &= \frac{x^n n^3 x^2}{n! x^n} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-3} dt \\ &= \frac{x^n n^3 x^2 (n-3)!}{n! x^n} \\ &= \frac{n^2 x^2}{(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

elde edilir.

$k = 3$  için  $e_3(t) = t^3$  elde edilir. Şimdi bu ifade yeni tanımlanan modifiye Gamma operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n(e_3(t); x) &= \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-xu^{1/n}} \left( \frac{n}{u^{1/n}} \right)^3 du \\ &= \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-xu^{1/n}} \frac{n^3}{u^{3/n}} du \end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde

$$xu^{1/n} = t, \quad u^{1/n} = \frac{t}{x}, \quad u^{3/n} = \frac{t^3}{x^3}, \quad u = \frac{t^n}{x^n} \quad \text{ve} \quad du = \frac{nt^{n-1}}{x^n} dt$$

dönüşümler uygulanırsa

$$\mathcal{T}_n(e_3(t); x) = \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{n^3 x^3}{t^3} \frac{nt^{n-1}}{x^n} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^n n^4 x^3}{n! x^n} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-4} dt \\
&= \frac{x^n n^4 x^3 (n-4)!}{n! x^n} \\
&= \frac{n^3 x^3}{(n-1)(n-2)(n-3)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$k = 4$  için  $e_4(t) = t^4$  elde edilir. Şimdi bu ifade yeni tanımlanan modifiye Gamma operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n(e_4(t); x) &= \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-xu^{1/n}} \left( \frac{n}{u^{1/n}} \right)^4 du \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-xu^{1/n}} \frac{n^4}{u^{4/n}} du
\end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde

$$xu^{1/n} = t, \quad u^{1/n} = \frac{t}{x}, \quad u^{4/n} = \frac{t^4}{x^4}, \quad u = \frac{t^n}{x^n} \quad \text{ve} \quad du = \frac{nt^{n-1}}{x^n} dt$$

dönüşümler uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n(e_4(t); x) &= \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{n^4 x^4}{t^4} \frac{nt^{n-1}}{x^n} dt \\
&= \frac{x^n n^5 x^4}{n! x^n} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-5} dt \\
&= \frac{x^n n^5 x^4 (n-5)!}{n! x^n} \\
&= \frac{n^4 x^4}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Yukarıda elde edilen bilgilerden yola çıkarak Gamma tipli modifiye operatör, sabit fonksiyonu doğrudan diğer test fonksiyonlarını da limit durumunda korur. Bu durumda Bohman-Korovkin teoremine göre yeni modifiye operatörün bir yaklaşım sürecinde olduğu anlamına gelir.

**Yardımcı Teorem 3.2.**  $x \in \mathbb{R}^+$  ve  $k \in \mathbb{N}$  olmak üzere aşağıdaki genel

$$\mathcal{T}_n(e_k(t); x) = \frac{n^k \Gamma(n-k)}{\Gamma(n)} e_k(x)$$

moment değeri elde edilir.

*İspat.*  $x \in \mathbb{R}^+$  ve  $k \in \mathbb{N}$  olsun.  $e_k(t) = t^k$  olduğu da göz önüne alınarak yeni tanımlanan modifiye Gamma operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n(e_k(t); x) &= \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \left(\frac{n}{u^{1/n}}\right)^k du \\ &= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \frac{n^k}{u^{k/n}} du \end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde

$$xu^{1/n} = t, \quad u^{1/n} = \frac{t}{x}, \quad u^{k/n} = \frac{t^k}{x^k}, \quad u = \frac{t^n}{x^n} \quad \text{ve} \quad du = \frac{nt^{n-1}}{x^n} dt$$

dönüşümler uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n(e_k(t); x) &= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-t} \frac{n^k x^k}{t^k} \frac{nt^{n-1}}{x^n} dt \\ &= \frac{x^n n^{k+1} x^k}{n! x^n} \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1-k} dt \\ &= \frac{x^n n^{k+1} x^k (n-1-k)!}{n! x^n} \\ &= \frac{n^k x^k (n-1-k)!}{(n-1)!} \end{aligned}$$

genel moment değeri elde edilir. □

**Yardımcı Teorem 3.3.**  $f \in C_b[0, \infty)$  olmak üzere

$$\| \mathcal{T}_n(f) \| \leq \| f \|$$

eşitsizliği sağlanır.

*İspat.* (3.1) de verilen modifiye operatörü ve Yardımcı Teorem 3.1 verilerini kullanılarak

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{T}_n(f) \| &= \left\| \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} f\left(\frac{n}{u^{1/n}}\right) du \right\| \\
&\leq \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \left| f\left(\frac{n}{u^{1/n}}\right) \right| du \\
&\leq \| f \| \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} du \\
&= \| f \| \mathcal{T}_n(e_0(t), x) \\
&= \| f \|
\end{aligned}$$

elde edilir. □

**Yardımcı Teorem 3.4.**  $x \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere aşağıdaki

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n(\varphi_{x,0}(t); x) &= e_0(x), \\
\mathcal{T}_n(\varphi_{x,1}(t); x) &= \left[ \frac{1}{n-1} \right] e_1(x), \\
\mathcal{T}_n(\varphi_{x,2}(t); x) &= \left[ \frac{n+2}{(n-1)(n-2)} \right] e_2(x), \\
\mathcal{T}_n(\varphi_{x,3}(t); x) &= \left[ \frac{7n+6}{(n-1)(n-2)(n-3)} \right] e_3(x), \\
\mathcal{T}_n(\varphi_{x,4}(t); x) &= \left[ \frac{3n^2+46n+24}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \right] e_4(x)
\end{aligned}$$

merkezi moment değerleri elde edilir.

*İspat.*  $k = 0$  için  $\varphi_{x,0}(t) = (t-x)^0$  elde edilir. Şimdi bu ifade yeni tanımlanan Gamma modifiye operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n(\varphi_{x,0}(t); x) &= \mathcal{T}_n((t-x)^0; x) \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \left( \frac{n}{u^{1/n}} - x \right)^0 du \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} 1 du \\
&= \mathcal{T}_n(e_0(t), x) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$k = 1$  için  $\varphi_{x,1}(t) = (t - x)$  elde edilir. Şimdi bu ifade yeni tanımlanan Gamma modifiye operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n(\varphi_{x,1}(t);x) &= \mathcal{T}_n((t-x);x) \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \left( \frac{n}{u^{1/n}} - x \right) du \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \frac{n}{u^{1/n}} du - \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} x du \\
&= \mathcal{T}_n(e_1(t),x) - x\mathcal{T}_n(e_0(t),x) \\
&= \frac{nx}{n-1} - x \\
&= \left[ \frac{1}{n-1} \right] x
\end{aligned}$$

$k = 2$  için  $\varphi_{x,2}(t) = (t - x)^2$  elde edilir. Şimdi bu ifade yeni tanımlanan Gamma modifiye operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n(\varphi_{x,2}(t);x) &= \mathcal{T}_n((t-x)^2;x) \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \left( \frac{n}{u^{1/n}} - x \right)^2 du \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \left( \frac{n^2}{u^{2/n}} - \frac{2xn}{u^{1/n}} + x^2 \right) du \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \frac{n^2}{u^{2/n}} du - 2x \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \frac{n}{u^{1/n}} du + x^2 \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} du \\
&= \mathcal{T}(e_2(t),x) - 2x\mathcal{T}_n(e_1(t),x) + x^2\mathcal{T}_n(e_0(t),x) \\
&= \frac{n^2x^2}{(n-1)(n-2)} - 2x \frac{nx}{n-1} + x^2 \\
&= \left[ \frac{n+2}{(n-1)(n-2)} \right] x^2
\end{aligned}$$

$k = 3$  için  $\varphi_{x,3}(t) = (t - x)^3$  elde edilir. Şimdi bu ifade yeni tanımlanan Gamma modifiye operatöre uygulanırsa

$$\mathcal{T}_n(\varphi_{x,3}(t);x) = \mathcal{T}_n((t-x)^3;x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \left( \frac{n}{u^{1/n}} - x \right)^3 du \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \left( \frac{n^3}{u^{3/n}} - 3 \frac{n^2}{u^{2/n}} x + 3 \frac{n}{u^{1/n}} x^2 - x^3 \right) du \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \frac{n^3}{u^{3/n}} du - 3x \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \frac{n^2}{u^{2/n}} du \\
&\quad + 3x^2 \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \frac{n}{u^{1/n}} du - x^3 \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} du \\
&= \mathcal{T}(e_3(t), x) - 3x \mathcal{T}(e_2(t), x) + 3x^2 \mathcal{T}_n(e_1(t), x) - x^3 \mathcal{T}_n(e_0(t), x) \\
&= \frac{n^3 x^3}{(n-1)(n-2)(n-3)} - 3 \frac{n^2 x^3}{(n-1)(n-2)} + 3x \frac{nx^3}{n-1} - x^3 \\
&= \left[ \frac{7n+6}{(n-1)(n-2)(n-3)} \right] x^3
\end{aligned}$$

$k = 4$  için  $\varphi_{x,4}(t) = (t-x)^4$  elde edilir. Şimdi bu ifade yeni tanımlanan Gamma modifiye operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n(\varphi_{x,4}(t); x) &= \mathcal{T}_n((t-x)^4; x) \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \left( \frac{n}{u^{1/n}} - x \right)^4 du \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \left( \frac{n^4}{u^{4/n}} - 4 \frac{n^3}{u^{3/n}} x + 6 \frac{n^2}{u^{2/n}} x^2 - 4 \frac{n}{u^{1/n}} x^3 - x^4 \right) du \\
&= \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \frac{n^4}{u^{4/n}} du - 4x \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \frac{n^3}{u^{3/n}} du + 6x^2 \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \frac{n^2}{u^{2/n}} du \\
&\quad - 4x^3 \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} \frac{n}{u^{1/n}} du + x^4 \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-xu^{1/n}} du \\
&= \mathcal{T}(e_4(t), x) - 4x \mathcal{T}(e_3(t), x) + 6x^2 \mathcal{T}(e_2(t), x) \\
&\quad - 4x^3 \mathcal{T}_n(e_1(t), x) + x^4 \mathcal{T}_n(e_0(t), x) \\
&= \frac{n^4 x^4}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} - 4 \frac{n^3 x^3}{(n-1)(n-2)(n-3)} \\
&\quad + 6x^2 \frac{n^2 x^2}{(n-1)(n-2)} - 4x \frac{nx^3}{n-1} + x^4 \\
&= \left[ \frac{3n^2 + 46n + 24}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \right] x^4
\end{aligned}$$

olacak şekilde merkezi moment değerleri elde edilir.  $\square$

**Teorem 3.5.**  $[0, \infty)$  aralığının her kompakt alt kümesi için  $f \in C_b[0, \infty)$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n(f; x) = f(x)$$

gerçeklenir.

*İspat.* Yardımcı Teorem 3.2 yardımıyla  $k = 0, 1, 2$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n(e_0(t); x) &= e_0(x), \\ \mathcal{T}_n(e_1(t); x) &= \left[ \frac{n}{n-1} \right] e_1(x), \\ \mathcal{T}_n(e_2(t); x) &= \left[ \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \right] e_2(x) \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n(e_0(t); x) &= e_0(x), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n(e_1(t); x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{n-1} \right] e_1(x) = e_1(x), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n(e_2(t); x) &= \left[ \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \right] e_2(x) = e_2(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, Korovkin teoremi gereğince  $[0, \infty)$  aralığının her kompakt alt kümesi için  $f \in C_b[0, \infty)$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n(f; x) = f(x)$$

sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.  $\square$

### 3.1. VORONOVSKAYA TIPLİ YAKLAŞIM TEOREMİ

Yaklaşım teorisindeki temel problemlerden biri de pozitif lineer operatörlerin  $f$  fonksiyonuna yakınsama hızının hesaplanmasıdır. Yakınsama hızının hesaplanması amacıyla bu kısımda  $\{\mathcal{T}_n\}$  modifiye operatörünün asimptotik davranışını belirleyebilmek için aşağıdaki Voronovskaya tipli yaklaşım teoremi ispat edilecektir.

**Teorem 3.6.**  $f, [0, \infty)$  üzerinde integrallenebilir ve sınırlı bir fonksiyon olsun.  $f$  fonksiyonu  $x \in [0, \infty)$  noktasında birinci ve ikinci dereceden türeve sahipse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[\mathcal{T}_n(f; x) - f(x)] = xf'(x) + \frac{1}{2}x^2 f''(x)$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.* İlk olarak  $f$  fonksiyonunun  $t = x$  noktasında Taylor formülü

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2 + \psi(t, x)(t-x)^2 \quad (3.2)$$

şeklindedir. Burada

$$\psi(t, x) = \frac{f''(\xi) - f''(x)}{2}$$

$\xi, x$  ve  $t$  arasındadır.

$$\lim_{t \rightarrow x} \psi(t, x) = 0$$

dir. Bu kalan terim Peano formu olarak adlandırılır.  $\{\mathcal{T}_n\}$  operatörünü Taylor formülünün her iki tarafına uygularsak

$$\mathcal{T}_n(f; x) = f(x) + f'(x)\mathcal{T}_n((t-x); x) + \frac{1}{2}f''(x)\mathcal{T}_n((t-x)^2; x) + \mathcal{T}_n(\psi(t, x)(t-x)^2; x)$$

elde edilir. Burada eşitliğin her iki tarafını  $n$  ile çarparak

$$\begin{aligned} n[\mathcal{T}_n(f; x) - f(x)] &= f'(x)n\mathcal{T}_n((t-x); x) + \frac{1}{2}f''(x)n\mathcal{T}_n((t-x)^2; x) \\ &\quad + n\mathcal{T}_n(\psi(t, x)(t-x)^2; x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin limit durumunda ifade edersek

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n[\mathcal{T}_n(f; x) - f(x)] &= f'(x) \lim_{n \rightarrow \infty} n\mathcal{T}_n((t-x); x) + \frac{1}{2}f''(x) \lim_{n \rightarrow \infty} n\mathcal{T}_n((t-x)^2; x) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} n\mathcal{T}_n(\psi(t, x)(t-x)^2; x) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathcal{T}_n((t-x); x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\mathcal{T}_n(\varphi_{x,1}(t); x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{n-1} x = x$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathcal{T}_n((t-x)^2; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\mathcal{T}_n(\varphi_{x,2}(t); x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(n+2)}{(n-1)(n-2)} x^2 = x^2$$

elde edilir. Son durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[\mathcal{T}_n(f; x) - f(x)] = xf'(x) + \frac{1}{2}x^2 f''(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} n\mathcal{T}_n(\psi(t, x)\varphi_{x,2}(t); x) \quad (3.3)$$

dir. Şimdi ispatı tamamlamak için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathcal{T}_n(\psi(t, x)\varphi_{x,2}(t); x) = 0$$

olduğu gösterilmelidir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayarak

$$n\mathcal{T}_n(\psi(t, x)\varphi_{x,2}(t); x) \leq \sqrt{n^2 \mathcal{G}_n(\psi^2(t, x); x)} \sqrt{\mathcal{T}_n(\varphi_{x,4}(t); x)} \quad (3.4)$$

elde edilir. Ardından Korovkin teoremi gereğince

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n(\psi^2(t, x), x) = \psi^2(x, x) = 0 \quad (3.5)$$

olmaktadır.  $t \in (0, \infty)$  için  $\psi^2(x, x) = 0$  ve  $\psi^2(\cdot, x)$  sürekli olup  $t \rightarrow \infty$  için sınırlı ve gerçekte  $\mathcal{G}_n(\varphi_{x,4}(t), x) = O(n^{-2})$  dir. Sonuç olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[\mathcal{T}_n(f; x) - f(x)] = xf'(x) + \frac{1}{2}x^2 f''(x)$$

elde edilir. Burada  $xf'(x) + \frac{1}{2}x^2 f''(x)$  asimptotik değer,  $\frac{1}{n^2}$  asimptotik hızdır.  $\square$

### 3.2. AĞIRLIKLILIKLI YAKLAŞIM

Şimdiye kadar verilen tüm teoremler kompakt aralıkta verilmiştir. Sınırsız aralık ve bölgeler üzerinde Szasz-Mirakyan operatörleri, Baskakov operatörleri, Phillips operatörleri,

Gamma operatörleri, Lupaş operatörleri, Post Widder operatörleri, Bleimann Butzer ve Hahn operatörleri gibi operatörler tanımlandıkça ve bu operatörlerin modifiye edilmiş halleri Durrmeyer, Kontorovich, Stancu tipli genelleştirmeleri ve bunların q-analogları oluşturuldukça Korovkin teoreminin sınırsız aralık üzerinde verilme ihtiyacı oluşmuştur. 1976 yılında A.D. Gadjiev [47] Korovkin teoremini tüm  $\mathbb{R}$  de sunmuştur. Biz de bu tanımlamalardan yola çıkarak bu kısımda  $\{\mathcal{T}_n\}$  modifiye Gamma operatörünün ağırlıklı yaklaşımı için Korovkin tipli teoremler ispat edeceğiz.

Her  $x \in \mathbb{R}^+$  için  $\Phi(x) = 1 + x^2$  fonksiyonu  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi(x) = \infty$  ve  $\Phi(x) \geq 1$  olacak şekilde  $\mathbb{R}$  üzerinde sürekli olsun. Bu durumda  $M_f$  de  $f$  fonksiyonuna bağlı pozitif bir sabit olmak üzere

$$B_{\Phi}(\mathbb{R}^+) = \{f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : |f(x)| \leq M_f \Phi(x), x \in \mathbb{R}^+\}$$

ve

$$C_{\Phi}(\mathbb{R}^+) = \{f \in B_{\Phi}(\mathbb{R}^+) : f, \mathbb{R} \text{ de sürekli}\} = C_{\Phi}(\mathbb{R}^+) \cap B_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$$

fonksiyon uzaylarını göz önüne alalım. Bu uzaylar

$$\|f\|_{\Phi} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{\Phi(x)}$$

normu ile birer normlu uzaylardır. Burada  $\Phi$  ya ağırlık fonksiyonu,  $B_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$  ve  $C_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$  uzaylarına ise ağırlıklı uzaylar denir. Ayrıca  $\kappa_f$  de  $f$  fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$C_{\Phi}^{\kappa}(\mathbb{R}^+) = \{f \in C_{\Phi}(\mathbb{R}^+) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\Phi(x)} = \kappa_f \text{ var ve sonlu}\}$$

olarak tanımlanan fonksiyon uzayı  $C_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$  uzayının bir alt uzayı olur. Özel olarak  $\kappa_f = 0$  olduğunda  $C_{\Phi}^0$  alt uzayı elde edilir. Bu uzayın elemanları;  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\Phi(x)} = 0$  şeklindedir.

**Yardımcı Teorem 3.7.**  $f \in C_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$  olsun. Norm yardımıyla

$$\|\mathcal{T}_n(f)\|_{\Phi} \leq C \|f\|_{\Phi}$$

eşitsizliği  $\mathcal{T}_n(f)$  operatörü için sağlanır. Bu da modifiye edilmiş  $\mathcal{T}_n(f)$  operatörlerin  $C_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$  dan  $C_{\Phi}(\mathbb{R}^+)$  ya bir yaklaşım süreci olduğunu gösterir.

*İspat.* Modifiye operatörü ve polinomları koruyucu özellikleri göz önüne alınarak

$$\mathcal{T}_n(f;x) = \mathcal{T}_n\left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(x)}f(t);x\right)$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_n(f;x)| &\leq \mathcal{T}_n\left(\frac{|f(t)|}{\Phi(t)}\Phi(t);x\right) \\ &\leq \mathcal{T}_n\left(\sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|f(t)|}{\Phi(t)}\Phi(t);x\right) \\ &\leq \|f\|_{\Phi} \mathcal{T}_n(\Phi(t);x) \end{aligned}$$

olur. Buradan da eşitsizliğin her iki yanını  $\Phi(x)$  e bölünürse

$$\frac{|\mathcal{T}_n(f;x)|}{\Phi(x)} \leq \|f\|_{\Phi} \frac{\mathcal{T}_n(\Phi(t);x)}{\Phi(x)},$$

elde edilir. Ayrıca Yardımcı Teorem 3.1 yardımıyla ve  $\Phi(x) = 1 + x^2$  olduğundan

$$\mathcal{T}_n(\Phi(t);x) = \mathcal{T}_n(1+t^2;x) = 1 + \frac{n^2x^2}{(n-1)(n-2)}$$

eşitliği geçerlidir. Son olarak  $x \geq 0$  için supremum alınırsa

$$\|\mathcal{T}_n(f;x)\|_{\Phi} \leq C \|f\|_{\Phi}$$

elde edilir. İspat tamamlanır. □

**Teorem 3.8.**  $f \in C_{\Phi}^k(\mathbb{R}^+)$  olsun. Modifiye Gamma operatörü için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}_n(f) - f\|_{\Phi} = 0$$

eşitliği sağlanır.

*İspat.* Teorem 2.29 (Gadjiev) dikkate alınarak  $k = 0, 1, 2$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}_n(e_k) - e_k\|_{\Phi} = 0$  sağlandığını göstermek yeterli olacaktır.  $k = 0$  için Yardımcı Teorem 3.4 sonuçları kullanılarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}_n(e_0) - e_0\|_{\Phi} = 0$$

eşitliği sağlanır.  $k = 1$  için benzer şekilde Yardımcı Teorem 3.4 sonuçları kullanılarak

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{T}_n(e_1) - e_1 \|_{\Phi} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|\mathcal{T}_n(e_1) - e_1|}{1 + x^2} \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{\left| \frac{n}{n-1}x - x \right|}{1 + x^2} \\
&\leq \left| \frac{1}{n-1} \right| \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{x}{1 + x^2} \\
&\leq \left| \frac{1}{n-1} \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin limiti alınırsa  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n-1} \right| = 0$  olduğundan koşul sağlanmış olur. Son olarak  $k = 2$  için benzer şekilde işlemler takip edilerek

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{T}_n(e_2) - e_2 \|_{\Phi} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|\mathcal{T}_n(e_2) - e_2|}{1 + x^2} \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{\left| \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}x^2 - x^2 \right|}{1 + x^2} \\
&\leq \left| \frac{3n-2}{n^2-3n+2} \right| \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{x^2}{1 + x^2} \\
&\leq \left| \frac{3n-2}{n^2-3n+2} \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin limiti alınırsa  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3n-2}{n^2-3n+2} \right| = 0$  olduğundan bu koşulda sağlanmış olur. Böylece ispat tamamlanır.  $\square$

### 3.3. YAKINSAKLIK ORANI

Yaklaşım teorisinde yakınsaklık oranı olarak adlandırılan yapıyı hesaplayabilmek için kullanılan yöntemler arasında en yaygın olanı süreklilik modülüdür. Bu doğrultuda modifiye Gamma operatörü süreklilik modülü kullanılarak yakınsama oranı incelenecektir. Modifiye Gamma operatörünün (1.1) de verilen Klasik Gamma operatörüne oranla daha iyi bir hata tahminine sahip olduğu ispatlanacaktır. Bu amaç doğrultusunda gerekli tanımlamaları yapalım.  $x_1 \geq 0$  olmak üzere  $f$  fonksiyonu  $[0, x_1]$  aralığı üzerinde tanımlı, sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun.  $x, t \in [0, x_1]$  olacak şekilde keyfi bir  $\delta > 0$  için  $|t - x| \leq \delta$  şartını sağlayarak  $|f(t) - f(x)|$  değerinin üst sınırların en küçüğüne  $f$

fonksiyonunun bu kapalı aralıktaki süreklilik modülü adı verilir.

$$\omega_{x_1}(f; \delta) = \sup_{|t-x| \leq \delta; x, t \in [0, x_1]} |f(t) - f(x)|$$

sembolü ile gösterilir [45].  $f \in C_b[0, \infty)$  için  $\delta \rightarrow 0$  olduğunda  $\omega_{x_1}(f; \delta) \rightarrow 0$  olur. Şimdi  $\{\mathcal{T}_n\}$  modifiye Gamma operatörü için karşılık gelen oranı gösterelim.

**Teorem 3.9.**  $f \in C_b[0, \infty)$  ve  $x_1 > 0$  olmak üzere  $[0, x_1 + 1] \subset [0, \infty)$  sonlu aralığında  $M_f$ ,  $f$  e bağlı bir sabit olmak üzere fonksiyonunun süreklilik modülü  $\omega_{x_1+1}(f; \delta)$  olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik

$$|\mathcal{T}_n(f; x) - f(x)| \leq 3M_f \left( \frac{n+2}{(n-1)(n-2)} \right) x_1^2 (1+x_1)^2 + 2\omega_{x_1+1} \left( f, \sqrt{\frac{n+2}{(n-1)(n-2)} x_1^2} \right)$$

gerçeklenir.

*İspat.*  $f \in C_b[0, \infty)$ ,  $0 \leq x \leq x_1$  ve  $t > x_1 + 1$  olsun.  $t - x > 1$  için

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq |f(t)| + |f(x)| \\ &\leq M_f(\Phi(t) + \Phi(x)) \\ &= M_f(2 + t^2 + x^2) \\ &= M_f((t-x)^2 + 2x(t-x) + 2 + 2x^2) \\ &\leq M_f((t-x)^2 + 2x(t-x)^2 + 2(t-x)^2 + 2x^2(t-x)^2) \\ &= M_f(t-x)^2(2x^2 + 2x + 3) \\ &\leq M_f(t-x)^2(3x_1^2 + 6x_1 + 3) \\ &= 3M_f(t-x)^2(1+x_1)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan  $f \in C_b[0, \infty)$  ve  $0 \leq x \leq x_1$  olsun. Süreklilik modülü özellikleri kullanılarak ve  $t \leq x_1 + 1$  için

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq \omega_{x_1+1}(f; |t-x|) \\ &\leq \omega_{x_1+1}(f; \delta) \left( 1 + \frac{1}{\delta} |t-x| \right) \end{aligned}$$

şeklinde eşitsizlik elde edilir. Sonuç olarak yukarıdaki eşitsizlikler ile  $0 \leq x \leq x_1$  ve  $0 \leq t < \infty$  için

$$|f(t) - f(x)| \leq 3M_f(t-x)^2(1+x_1)^2 + \omega_{x_1+1}(f; \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta}|t-x|\right) \quad (3.6)$$

sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafına  $\mathcal{T}_n$  operatörünü ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayarak

$$|\mathcal{T}_n(f; x) - f(x)| \leq 3M_f \mathcal{T}_n((t-x)^2, x)(1+x_1)^2 + \omega_{x_1+1}(f; \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\mathcal{T}_n((t-x)^2, x)}\right)$$

elde edilir.  $\delta = \sqrt{\frac{n+2}{(n-1)(n-2)}} x_1^2$  seçilirse ve Yardımcı Teorem 3.4 sonuçları kullanılarak

$$|\mathcal{T}_n(f; x) - f(x)| \leq 3M_f \left(\frac{n+2}{(n-1)(n-2)}\right) x_1^2 (1+x_1)^2 + 2\omega_{x_1+1} \left(f; \sqrt{\frac{n+2}{(n-1)(n-2)}} x_1^2\right)$$

olup istenen elde edilir. □

### 3.4. LIPSCHITZ SINIFI FONKSİYONLAR YARDIMIYLA YAKLAŞIM HIZI

Bu kısımda modifiye Gamma operatörünün Lipschitz sınıfı fonksiyonlar yardımıyla yakınsama oranı incelenecektir. Bu amaç doğrultusunda gerekli tanımlamalar yapılsın.  $f, Q \subset [0, \infty)$  üzerinde reel değerli, sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Her  $x, t \in Q$  ve  $s \in (0, 1]$  olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| \leq M_{f,s} |t-x|^s$$

eşitliği sağlanacak şekilde  $f$  ve  $s$  ye bağlı bir  $M_{f,s}$  sabit varsa  $f$  ye  $s$ . basamaktan Lipschitz sürekli fonksiyon denir. Bu fonksiyon sınıfı için  $Lip_{M_f}(s)$  gösterimi kullanılır [49].

**Teorem 3.10.** Her bir  $x \in (0, \infty)$  ve  $Q \subset [0, \infty)$  olmak üzere  $x$  ve  $Q$  arasındaki uzaklığı veren bir fonksiyon

$$d(x, Q) = \inf \{|t-x|, t \in Q\}$$

olarak tanımlansın.  $f \in C_b[0, \infty) \cap Lip_{M_f}(s)$  ve  $s \in (0, 1]$  için

$$|\mathcal{T}_n(f; x) - f(x)| \leq M_{f,s} \left[ \left( \frac{n+2}{(n-1)(n-2)} e_2(x) \right)^{s/2} + 2(d(x, Q))^s \right]$$

dir. Burada  $M_{f,s}$  de  $f$  ve  $s$  ye bağlı bir sabittir.

*İspat.*  $t_0, Q$  kümesinin kapanışında olsun. Yani

$$d(x, Q) = |x - t_0|$$

dir. Üçgen eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &= |f(t) - f(x) + f(t_0) - f(t_0)| \\ &= |f(t) - f(t_0) + f(t_0) - f(x)| \\ &\leq |f(t) - f(t_0)| + |f(x) - f(t_0)| \end{aligned}$$

yazılabilir.  $\{\mathcal{T}_n\}$  operatörü ve Lipschitz sürekli fonksiyon tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_n(f; x) - f(x)| &\leq \mathcal{T}_n(|f(t) - f(t_0)|; x) + \mathcal{T}_n(|f(x) - f(t_0)|; x) \\ &= \mathcal{T}_n(|f(t) - f(t_0)|, x) + |f(x) - f(t_0)| \mathcal{T}_n(1; x) \\ &\leq M_{f,s} \mathcal{T}_n(|t - t_0|^s; x) + M_{f,s} |x - t_0|^s \\ &= M_{f,s} \left[ \mathcal{T}_n(|t - t_0|^s; x) + |x - t_0|^s \right] \\ &\leq M_{f,s} \left[ \mathcal{T}_n(|t - x|^s; x) + |x - t_0|^s \right] \\ &= M_{f,s} \left[ \mathcal{T}_n(|t - x|^s; x) + 2|x - t_0|^s \right] \end{aligned}$$

olduğu görülür.  $p = \frac{2}{s}$  ve  $q = \frac{2}{2-s}$  olarak Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_n(f, x) - f(x)| &\leq M_{f,s} \left[ (\mathcal{T}_n(|t - x|^2, x))^{s/2} + 2(d(x, Q))^s \right] \\ &= M_{f,s} \left[ \left( \frac{n+2}{(n-1)(n-2)} e_2(x) \right)^{s/2} + 2(d(x, Q))^s \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

### 3.5. LIPSCHITZ TIPLİ MAKSİMAL FONKSİYONLAR YARDIMIYLA YAKLAŞIM HIZI

Lipschitz tipli  $s$ . dereceden maksimal fonksiyonlar Lenze [50] tarafından  $s \in (0, 1]$  ve  $x \in (0, \infty)$  için

$$\tilde{\omega}(f; x) = \sup_{0 \leq t < \infty; t \neq x} \frac{|f(t) - f(x)|}{|t - x|^s}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Şimdi  $|\mathcal{T}_n(f; x) - f(x)|$  farkının yaklaşım hızını Lipschitz tipli maksimal fonksiyonlar yardımıyla hesaplayalım.

**Teorem 3.11.**  $f \in C_b[0, \infty)$  olsun. Bu durumda  $s \in (0, 1]$  ve  $x \in (0, \infty)$  için

$$|\mathcal{T}_n(f; x) - f(x)| \leq \tilde{\omega}(f; x) \mathcal{T}_n \left( \frac{n+2}{(n-1)(n-2)} e_2(x) \right)^{s/2}$$

gerçeklenir.

*İspat.* Yukarıda verilen Lipschitz tipli maksimal fonksiyonlar tanımı ve  $p = \frac{2}{s}$  ve  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$  olarak Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_n(f; x) - f(x)| &\leq \mathcal{T}_n |f(t) - f(x)|, x) \\ &\leq \tilde{\omega}_s(f; x) \mathcal{T}_n(|t - x|^s, x) \\ &\leq \tilde{\omega}_s(f; x) \mathcal{T}_n(|t - x|^2, x)^{s/2} \\ &\leq \tilde{\omega}_s(f; x) \mathcal{T}_n \left( \frac{n+2}{(n-1)(n-2)} e_2(x) \right)^{s/2} \end{aligned}$$

istenilen elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Lipschitz tipli iki parametrelili fonksiyonlar uzayı Özarslan ve H. Aktuğlu [51] tarafından  $\alpha, \beta > 0$ ,  $s \in (0, 1]$  ve  $M$  pozitif bir sabit için

$$Lip_M^{\alpha, \beta}(s) = \left\{ f \in C[0, \infty) : |f(t) - f(x)| \leq M \frac{|t - x|^s}{(\alpha x^2 + \beta x + t)^{s/2}}; x, t \in (0, \infty) \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Son olarak  $|\mathcal{T}_n(f; x) - f(x)|$  farkının yaklaşım hızını Lipschitz tipli iki parametrelili fonksiyonlar yardımıyla verelim.

**Teorem 3.12.**  $f \in Lip_M^{\alpha,\beta}(s)$  ve  $x \in (0, \infty)$  olsun.  $\alpha, \beta > 0$  olmak üzere

$$|\mathcal{T}_n(f;x) - f(x)| \leq M \left[ \frac{n+2}{(n-1)(n-2)} \frac{e_2(x)}{\alpha x^2 + \beta x} \right]^{s/2}$$

gerçeklenir.

*İspat.* Bu eşitsizliğin ispatı iki adımda gösterilecektir. İlk adımda  $s = 1$  alarak yani  $f \in Lip_M^{\alpha,\beta}(s)$  ve  $x \in (0, \infty)$  için

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_n(f;x) - f(x)| &\leq \mathcal{T}_n(|f(t) - f(x)|, x) \\ &\leq M \mathcal{T}_n \left( \frac{|t-x|}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + t}}, x \right) \\ &\leq \frac{M}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x}} \mathcal{T}_n(|t-x|, x) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanarak

$$|\mathcal{T}_n(f;x) - f(x)| \frac{M}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x}} [\mathcal{T}_n(|t-x|^2, x)]^{1/2} \leq M \left[ \frac{n+2}{(n-1)(n-2)} \frac{e_2(x)}{\alpha x^2 + \beta x} \right]^{1/2}$$

olur ki  $s = 1$  için ispat tamamlanır. Şimdi  $s \in (0, 1)$  alarak yani  $f \in Lip_M^{\alpha,\beta}(s)$  ve  $x \in (0, \infty)$  için

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_n(f;x) - f(x)| &\leq \mathcal{T}_n(|f(t) - f(x)|, x) \\ &\leq M \mathcal{T}_n \left( \frac{|t-x|^s}{(\alpha x^2 + \beta x + t)^{s/2}}, x \right) \\ &\leq \frac{M}{(\alpha x^2 + \beta x)^{s/2}} \mathcal{T}_n(|t-x|^s, x) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca  $p = \frac{1}{s}$  ve  $q = \frac{p}{p-1}$  alarak Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$|\mathcal{T}_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{M}{(\alpha x^2 + \beta x)^{s/2}} \mathcal{T}_n(|t-x|^s, x) \leq \frac{M}{(\alpha x^2 + \beta x)^{s/2}} (\mathcal{T}_n(|t-x|, x))^s$$

yazılır. Son olarak, Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanarak

$$|\mathcal{T}_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{M}{(\alpha x^2 + \beta x)^{s/2}} \mathcal{T}_n(|t-x|^2, x)^{s/2} \leq M \left[ \frac{n+2}{(n-1)(n-2)} e_2(x) \right]^{s/2}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. □

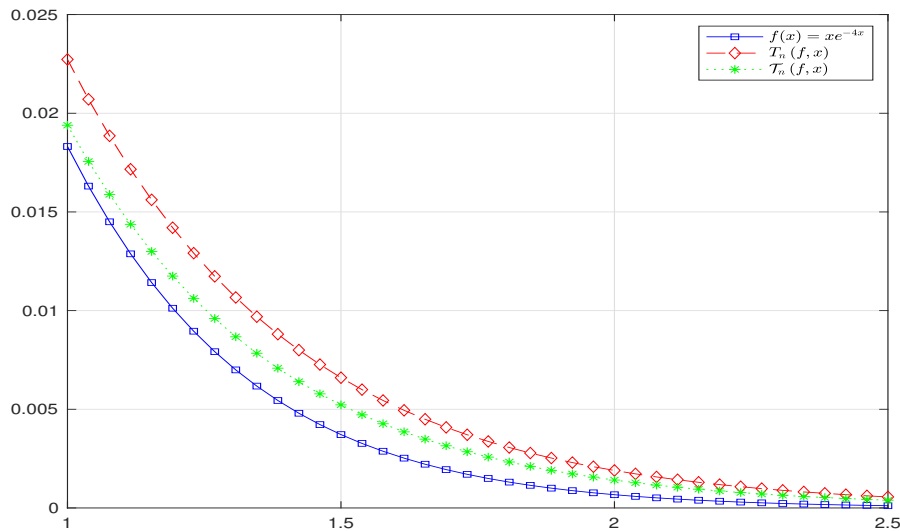
### 3.6. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu kısımda teorik sonuçları desteklemek ve bunların verimliliğini göstermek için literatürde var olan belirli Gamma operatörleri ile yeni modifiye Gamma operatörünün yakınsama davranışı incelenecektir.

**Örnek 3.13.** İlk örnek olarak  $f : [1, 2.5] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

$$f(x) = xe^{-4x}$$

ile verilsin.  $n = 15$  için  $T_n$  operatörü (1.1) ifadesinde verilen Lupaş-Müller operatörü (Temel Gamma operatörü) ve  $\mathcal{T}_n$  operatörü (3.1) ifadesinde verilen modifiye Gamma operatörü ile  $[1, 2.5]$  aralığı üzerindeki  $f$  fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekildedir.



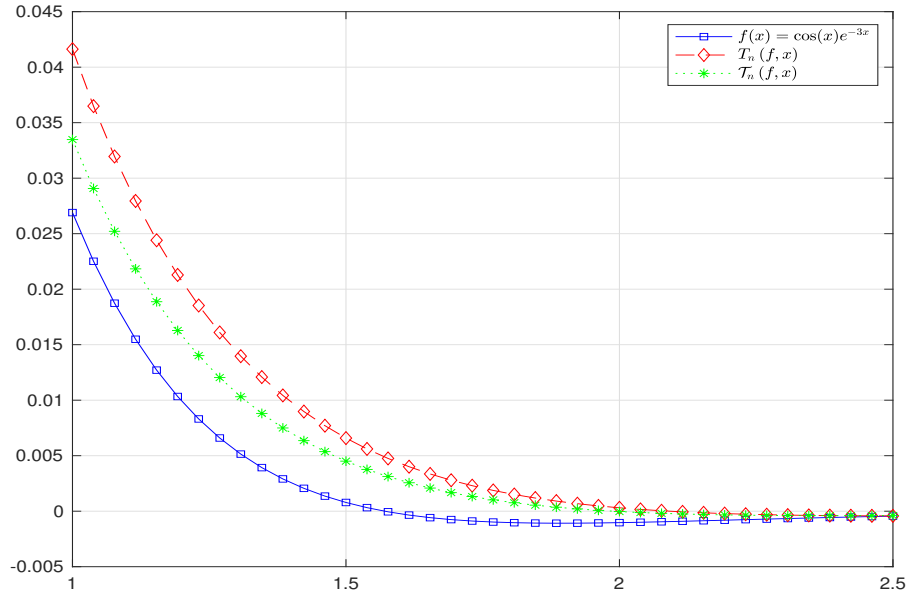
Şekil 3.1.  $[1, 2.5]$  aralığı üzerinde  $n = 15$  için  $T_n(f;x)$  ve  $\mathcal{T}_n(f;x)$  ile  $f(x) = xe^{-4x}$  hedef fonksiyona yaklaşım grafiği

$f$  fonksiyonu (mavi),  $\mathcal{T}_n$  modifiye Gamma operatörü (yeşil) ve  $T_n$  Lupaş-Müller operatörü (kırmızı) olmak üzere grafik incelendiğinde en iyi yaklaşımı  $\mathcal{T}_n$  modifiye Gamma operatörü sergilemektedir.

**Örnek 3.14.** İkinci bir örnek olarak  $f : [1, 2.5] \rightarrow \mathbb{R}$  test fonksiyonu olmak üzere

$$f(x) = \cos(x)e^{-3x}$$

şeklinde olsun.  $n = 15$  için  $T_n$  operatörü (1.1) ifadesinde verilen Lupaş-Müller operatörü (Temel Gamma operatörü) ve  $\mathcal{T}_n$  operatörü (3.1) ifadesinde verilen modifiye Gamma operatörü ile  $[1, 2.5]$  aralığı üzerindeki  $f$  fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekildedir.



Şekil 3.2.  $[1, 2.5]$  aralığı üzerinde  $n = 15$  için  $T_n(f; x)$  ve  $\mathcal{T}_n(f; x)$  ile  $f(x) = \cos(x)e^{-3x}$  hedef fonksiyona yaklaşım grafiği

$f$  fonksiyonu (mavi),  $\mathcal{T}_n$  modifiye Gamma operatörü (yeşil) ve  $T_n$  Lupaş-Müller operatörü (kırmızı) olmak üzere grafik incelendiğinde yine en iyi yaklaşımı  $\mathcal{T}_n$  modifiye Gamma operatörünün sergilediği görülmektedir.

Yukarıda verilen her iki grafikte de  $T_n$  Lupaş-Müller operatörüne göre  $\mathcal{T}_n$  modifiye Gamma operatörü en iyi yakınsamayı gerçekleştirir.

#### 4. GAMMA TIPLİ OPERATÖRLERİN YENİ BİR SINIFI

Bu bölümde literatürde bulunan Gamma tipli operatörlerin yeni bir sınıfı tanımlanacak ve bu yeni tanımlanan operatörün moment ve merkezi moment değerleri hesaplanacaktır. Bu yeni operatör literatürde bulunan Gamma tipli operatörleri hem kapsayacak hem de yeni operatörler tanımlamaya yardımcı olacaktır. Bu operatör Holhoş [46] tarafından verilen ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla quantitative tipli teorem ispatlayarak elde edilecektir. Daha sonra operatörün asimptotik davranışını belirleyebilmek için Voronovskaya tipli yaklaşım teoremi uygulanarak yaklaşım özellikleri incelenecektir. Son olarak bu yeni operatörün yaklaşım özelliklerini daha da somutlaştırabilme adına bazı nümerik sonuçlar verilecektir.

$\Gamma(\cdot)$  Gamma fonksiyonu olmak üzere  $f$ , integrali yakınsak olacak şekilde bir fonksiyon olsun.  $\tau$  fonksiyonu

( $\tau_1$ )  $\tau$ ,  $\mathbb{R}^+$  üzerinde sürekli türevlenebilir bir fonksiyon,

( $\tau_2$ )  $\tau(0) = 0$ ,  $\inf_{x \in \mathbb{R}^+} \tau'(x) \geq 1$

şartlarını sağlasın. Bu durumda Genelleştirilmiş Gamma operatörü  $x \in \mathbb{R}^+ := (0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere Erençin ve Raşa [140] tarafından

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n^*(f; x) &= \frac{1}{[\tau(x)]^n \Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau(x)}} t^{n-1} (f \circ \tau^{-1}) \left( \frac{t}{n} \right) dt \\ &= \frac{1}{[\tau(x)]^n \Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau(x)}} t^{n-1} f \left( \tau^{-1} \left( \frac{t}{n} \right) \right) dt \end{aligned} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda sözü edilen çalışmada yazarlar ağırlıklı süreklilik modülü aracılığıyla quantitative Voronovskaya ve quantitative Grüss tipli Voronovskaya teoremlerini sunmuş ve kanıtlamışlardır. Bu operatörde  $\tau$  fonksiyonunun üç farklı yerde kullanıldığı açıkça görülmektedir ki bu da operatörün anlaşılabilirliğini azaltmaktadır. Bu nedenle daha

kapsayıcı bir operatör elde etmek amacıyla bu üç yer için  $\alpha_n(x)$ ,  $\beta_n(x)$  ve  $\tau(x)$  gibi farklı fonksiyonları kullanarak yeni bir tip Gamma operatörü oluşturulacaktır.

$\tau$  fonksiyonu  $(\tau_1)$  ve  $(\tau_2)$  şartlarını sağlasın. Bu koşullar  $\tau$  fonksiyonunun pozitif bir reel eksen üzerinde ve  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tau(x) = \infty$  sürekli ve kesin artan olduğunu belirtir.  $\lambda(x)$  ağırlık fonksiyonu  $\lambda(x) = 1 + \tau^2(x)$  şeklinde tanımlansın. Bu durumda  $M_f$  de  $f$  fonksiyonuna bağlı pozitif bir sabit olmak üzere

$$B_\lambda(\mathbb{R}^+) = \{f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : |f(x)| \leq M_f \lambda(x), x \in \mathbb{R}^+\}$$

şeklindeki ağırlıklı uzayı

$$\|f\|_\lambda = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{\lambda(x)}$$

normu ile normlu uzaydır. Ayrıca

$$C_\lambda(\mathbb{R}^+) = \{f \in B_\lambda(\mathbb{R}^+) : f, \mathbb{R} \text{ de sürekli}\}$$

ve

$$U_\lambda(\mathbb{R}^+) = \{f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+) : \frac{f(x)}{\lambda(x)} \text{ düzgün sürekli}\}$$

şeklinde tanımlansınlar. Böylece  $U_\lambda(\mathbb{R}^+) \subset C_\lambda(\mathbb{R}^+) \subset B_\lambda(\mathbb{R}^+)$  sağlanır. Şunu belirtmek gerekir ki,  $(\tau_2)$  şartına göre her  $x, t \in \mathbb{R}^+$  için  $|t - x| \leq |\tau(t) - \tau(x)|$  eşitsizliği sağlanır.

#### 4.1. OPERATÖRÜN OLUŞTURULMASI

**Tanım 4.1.**  $f$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^+$  üzerinde sürekli olsun.  $\tau$  da  $(\tau_1)$  ve  $(\tau_2)$  şartlarını sağlayarak  $x \in \mathbb{R}^+ := (0, \infty)$  ve  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere operatörün formu

$$\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f; x; m, \nu) = \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} (f \circ \tau^{-1}) \left(\frac{t}{n}\right) dt \quad (4.2)$$

şeklindedir.

(4.2) de yeni tanımlanan Gamma operatörünün bir yaklaşım sürecinde olabilmesi için aşağıdaki iki eşitliğin var olduğu kabul edilmelidir. İlk olarak  $\xi_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

olmak üzere

$$\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(1; x; m, \nu) = 1 + \xi_n(x)$$

eşitliği sağlansın.  $f(t) = 1$  için  $f(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) = (1 \circ \tau^{-1})(\frac{t}{n}) = 1$  elde edilir. Bu eşitlikler (4.2) de yeni tanımlanan Gamma operatöre uygulanırsa

$$\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(1; x; m, \nu) = \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} 1 dt$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde

$$\frac{t}{\beta_n(x)} = u, \quad t = \beta_n(x)u \quad \text{ve} \quad dt = \beta_n(x)du$$

dönüşümler uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(1; x; m, \nu) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-u} (\beta_n(x)u)^{n-y} \beta_n(x) du \\ &= \frac{(\beta_n(x))^{n-y+1}}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-y} du \\ &= \frac{(\beta_n(x))^{n-y+1} \Gamma(n-y+1)}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \\ &= 1 + \xi_n(x) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\frac{(\beta_n(x))^{n-y+1} \Gamma(n-y+1)}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} = 1 + \xi_n(x) \quad (4.3)$$

elde edilir.

İkinci olarak  $\eta_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu olmak üzere

$$\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau; x; m, \nu) = \tau(x) + \eta_n(x)$$

eşitliği sağlansın.  $f(t) = \tau(t)$  için  $f(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) = (\tau \circ \tau^{-1})(\frac{t}{n}) = \frac{t}{n}$  elde edilir. Bu eşitlikler (4.2) de yeni tanımlanan Gamma operatöre uygulanırsa

$$\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau; x; m, \nu) = \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} (\tau \circ \tau^{-1})\left(\frac{t}{n}\right) dt$$

$$= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+v)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \frac{t}{n} dt$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde

$$\frac{t}{\beta_n(x)} = u, \quad t = \beta_n(x)u \quad \text{ve} \quad dt = \beta_n(x)du$$

dönüşümler uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau; x; m, v) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+v)} \int_0^\infty e^{-u} (\beta_n(x)u)^{n-y} \frac{\beta_n(x)u}{n} \beta_n(x) du \\ &= \frac{(\beta_n(x))^{n-y+2}}{n(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+v)} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-y+1} du \\ &= \frac{(\beta_n(x))^{n-y+2}\Gamma(n-y+2)}{n(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+v)} \\ &= \tau(x) + \eta_n(x) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\frac{(\beta_n(x))^{n-y+2}\Gamma(n-y+2)}{n(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+v)} = \tau(x) + \eta_n(x) \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.3) ve (4.4) eşitlikleri yardımıyla

$$\beta_n(x) = \left( \frac{n}{n-y+1} \right) \left( \frac{\tau(x) + \eta_n(x)}{1 + \xi_n(x)} \right) \quad (4.5)$$

elde edilir.  $\beta_n(x)$  değerini (4.3) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\alpha_n(x) = \left[ \left( \frac{n}{n-y+1} \right)^{n-y+1} \left( \frac{\Gamma(n-y+1)}{\Gamma(n+v)} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^{n-y+1}}{(1 + \xi_n(x))^{n-y+2}} \right) \right]^{\frac{1}{n+m}} \quad (4.6)$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen bilgilerden yola çıkarak (4.2) de yeni tanımlanan Gamma operatörü  $x \in \mathbb{R}^+ := (0, \infty)$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f; x) &= \left( \frac{n-y+1}{n} \right)^{n-y+1} \left( \frac{(1 + \xi_n(x))^{n-y+2}}{(\tau(x) + \eta_n(x))^{n-y+1}\Gamma(n-y+1)} \right) \\ &\quad \times \int_0^\infty e^{-\frac{t(n-y+1)(1+\xi_n(x))}{n(\tau(x)+\eta_n(x))}} t^{n-y} (f \circ \tau^{-1}) \left( \frac{t}{n} \right) dt \end{aligned} \quad (4.7)$$

olur. Daha sonra  $\mathbb{R}^+$  üzerinde ağırlıklı bir yaklaşım süreci elde etmek için aşağıdaki dizilerin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(x) = 0 \quad \text{ve} \quad |\xi_n(x)| \leq \xi_n(x) \quad (4.8)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(x) = 0 \quad \text{ve} \quad |\eta_n(x)| \leq \eta_n(x) \quad (4.9)$$

şeklinde var olduklarını kabul edelim. Diğer bir ifadeyle ağırlıklı Korovkin teoremine göre (4.5), (4.6), (4.8) ve (4.9) da verilen ifadeler yeni tanımlanan Gamma operatörünün  $\mathbb{R}^+$  üzerinde bir yaklaşım sürecinde olduğunu belirtir.

**Not 4.2.** Aşağıda gösterildiği gibi (4.7) de oluşturulan Gamma operatöründe,  $\tau(x)$ ,  $\xi_n(x)$  ve  $\eta_n(x)$  için uygun seçimler yaparak literatürde incelenen bazı pozitif lineer operatörler türetilebilir:

- (1) (4.7) de  $\tau(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\xi_n(x) = 0$ ,  $\eta_n(x) = \frac{1}{nx}$  ve  $y = 0$  seçildiğinde, (1.1) de Lupaş-Müller tarafından verilen Temel Gamma operatörü elde edilir.
- (2) (4.7) de  $\tau(x) = x$ ,  $\xi_n(x) = 0$ ,  $\eta_n(x) = 0$  ve  $y = 1$  seçildiğinde, (1.2) de Zeng tarafından verilen Gamma operatörü elde edilir.
- (3) (4.7) de  $\xi_n(x) = 0$ ,  $\eta_n(x) = 0$  ve  $y = 1$  seçildiğinde, (4.1) de Erençin ve Raşa tarafından verilen Genelleştirilmiş Gamma operatörü elde edilir.

Şimdi (4.7) de yeni oluşturulan Gamma tipli operatörün moment ve merkezi moment değerlerini belirleyelim.

**Yardımcı Teorem 4.3.** Her  $x \in \mathbb{R}^+$  ve  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere aşağıdaki

- (i)  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(1; x) = 1 + \xi_n(x)$ ,
- (ii)  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau; x) = \tau(x) + \eta_n(x)$ ,
- (iii)  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^2; x) = \left( \frac{n-y+2}{n-y+1} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2}{1 + \xi_n(x)} \right)$ ,
- (iv)  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^3; x) = \left( \frac{(n-y+3)(n-y+2)}{(n-y+1)^2} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^3}{(1 + \xi_n(x))^2} \right)$ ,
- (v)  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^4; x) = \left( \frac{(n-y+4)(n-y+3)(n-y+2)}{(n-y+1)^3} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^4}{(1 + \xi_n(x))^3} \right)$

moment değerleri elde edilir.

*İspat.* (i) ve (ii) aşıkardır.

(iii)  $f(t) = \tau^2(t)$  için  $f(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) = \tau^2(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) = (\tau^2 \circ \tau^{-1})(\frac{t}{n}) = (\tau \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n}))^2$  ve  $(\tau \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n}))^2 = (\frac{t}{n})^2$  elde edilir. Bu eşitlikler (4.7) de yeni oluşturulan Gamma operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^2; x) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} (\tau^2 \circ \tau^{-1})\left(\frac{t}{n}\right) dt \\ &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left(\frac{t}{n}\right)^2 dt \end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde

$$\frac{t}{\beta_n(x)} = u, \quad t = \beta_n(x)u \quad \text{ve} \quad dt = \beta_n(x)du$$

dönüşümler uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^2; x) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)} \int_0^{\infty} e^{-u} (\beta_n(x)u)^{n-y} \left(\frac{\beta_n(x)u}{n}\right)^2 \beta_n(x) du \\ &= \frac{(\beta_n(x))^{n-y+3}}{n^2 (\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-y+2} du \\ &= \frac{(\beta_n(x))^{n-y+3} \Gamma(n-y+3)}{n^2 (\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) ifadesindeki  $\beta_n(x)$  ve  $\alpha_n(x)$  değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^2; x) &= \frac{\left(\frac{n(\tau(x)+\eta_n(x))}{(n-y+1)(1+\xi_n(x))}\right)^{n-y+3} \Gamma(n-y+3)}{n^2 \left(\frac{n}{n-y+1}\right)^{n-y+1} \left(\frac{(\tau(x)+\eta_n(x))^{n-y+1}}{(1+\xi_n(x))^{n-y+2}}\right) \Gamma(n-y+1)} \\ &= \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2 (n-y+2)(n-y+1)}{(1 + \xi_n(x)) (n-y+1)^2} \\ &= \left(\frac{n-y+2}{n-y+1}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2}{(1 + \xi_n(x))}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv)  $f(t) = \tau^3(t)$  için  $f(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) = \tau^3(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) = (\tau^3 \circ \tau^{-1})(\frac{t}{n}) = (\tau \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n}))^3$  ve

$(\tau \circ \tau^{-1} \left(\frac{t}{n}\right))^3 = \left(\frac{t}{n}\right)^3$  elde edilir. Bu eşitlikler (4.7) de yeni oluşturulan Gamma operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^3; x) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} (\tau^3 \circ \tau^{-1}) \left(\frac{t}{n}\right) dt \\ &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left(\frac{t}{n}\right)^3 dt\end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde

$$\frac{t}{\beta_n(x)} = u, \quad t = \beta_n(x)u \quad \text{ve} \quad dt = \beta_n(x)du$$

dönüşümler uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^3; x) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)} \int_0^{\infty} e^{-u} (\beta_n(x)u)^{n-y} \left(\frac{\beta_n(x)u}{n}\right)^3 \beta_n(x)du \\ &= \frac{(\beta_n(x))^{n-y+4}}{n^3 (\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-y+3} du \\ &= \frac{(\beta_n(x))^{n-y+4} \Gamma(n-y+4)}{n^3 (\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)}\end{aligned}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) ifadesindeki  $\beta_n(x)$  ve  $\alpha_n(x)$  değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^3; x) &= \frac{\left(\frac{n(\tau(x)+\eta_n(x))}{(n-y+1)(1+\xi_n(x))}\right)^{n-y+4} \Gamma(n-y+4)}{n^3 \left(\frac{n}{n-y+1}\right)^{n-y+1} \left(\frac{(\tau(x)+\eta_n(x))^{n-y+1}}{(1+\xi_n(x))^{n-y+2}}\right) \Gamma(n-y+1)} \\ &= \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^3 (n-y+3)(n-y+2)(n-y+1)}{(1 + \xi_n(x))^2 (n-y+1)^3} \\ &= \left(\frac{(n-y+3)(n-y+2)}{(n-y+1)^2}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^3}{(1 + \xi_n(x))^2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

(v)  $f(t) = \tau^4(t)$  için  $f(\tau^{-1} \left(\frac{t}{n}\right)) = \tau^4(\tau^{-1} \left(\frac{t}{n}\right)) = (\tau^4 \circ \tau^{-1}) \left(\frac{t}{n}\right) = (\tau \circ \tau^{-1} \left(\frac{t}{n}\right))^4$  ve  $(\tau \circ \tau^{-1} \left(\frac{t}{n}\right))^4 = \left(\frac{t}{n}\right)^4$  elde edilir. Bu eşitlikler (4.7) de yeni oluşturulan Gamma operatöre

uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^4; x) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} (\tau^4 \circ \tau^{-1}) \left(\frac{t}{n}\right) dt \\ &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left(\frac{t}{n}\right)^4 dt\end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde

$$\frac{t}{\beta_n(x)} = u, \quad t = \beta_n(x)u \quad \text{ve} \quad dt = \beta_n(x)du$$

dönüşümler uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^4; x) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-u} (\beta_n(x)u)^{n-y} \left(\frac{\beta_n(x)u}{n}\right)^4 \beta_n(x)du \\ &= \frac{(\beta_n(x))^{n-y+5}}{n^4(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-y+4} du \\ &= \frac{(\beta_n(x))^{n-y+5}\Gamma(n-y+5)}{n^4(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)}\end{aligned}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) ifadesindeki  $\beta_n(x)$  ve  $\alpha_n(x)$  değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^4; x) &= \frac{\left(\frac{n(\tau(x)+\eta_n(x))}{(n-y+1)(1+\xi_n(x))}\right)^{n-y+5} \Gamma(n-y+5)}{n^4 \left(\frac{n}{n-y+1}\right)^{n-y+1} \left(\frac{(\tau(x)+\eta_n(x))^{n-y+1}}{(1+\xi_n(x))^{n-y+2}}\right) \Gamma(n-y+1)} \\ &= \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^4 (n-y+4)(n-y+3)(n-y+2)(n-y+1)}{(1 + \xi_n(x))^3 (n-y+1)^4} \\ &= \left(\frac{(n-y+4)(n-y+3)(n-y+2)}{(n-y+1)^3}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^4}{(1 + \xi_n(x))^3}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. □

**Yardımcı Teorem 4.4.**  $x \in \mathbb{R}^+$  ve  $k \in \mathbb{N}$  için  $(p)^{(q)} = p(p+1)(p+2)\dots(p+q-1)$  olmak üzere aşağıdaki genel

$$\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^k; x) = \left(\frac{(n-y+2)^{(k-1)}}{(n-y+1)^{k-1}}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^k}{(1 + \xi_n(x))^{k-1}}\right)$$

moment değeri elde edilir.

*İspat.*  $f(t) = \tau^k(t)$  için  $f(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) = \tau^k(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) = (\tau^k \circ \tau^{-1})(\frac{t}{n}) = (\tau \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n}))^k$  ve  $(\tau \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n}))^k = (\frac{t}{n})^k$  elde edilir. Bu eşitlikler (4.7) de yeni oluşturulan Gamma operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^k; x) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} (\tau^k \circ \tau^{-1})\left(\frac{t}{n}\right) dt \\ &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left(\frac{t}{n}\right)^k dt \end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki şekilde

$$\frac{t}{\beta_n(x)} = u, \quad t = \beta_n(x)u \quad \text{ve} \quad dt = \beta_n(x)du$$

dönüşümler uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^k; x) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)} \int_0^{\infty} e^{-u} (\beta_n(x)u)^{n-y} \left(\frac{\beta_n(x)u}{n}\right)^k \beta_n(x) du \\ &= \frac{(\beta_n(x))^{n-y+k+1}}{n^k (\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-y+k} du \\ &= \frac{(\beta_n(x))^{n-y+k+1} \Gamma(n-y+k+1)}{n^k (\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+v)} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) ifadesindeki  $\beta_n(x)$  ve  $\alpha_n(x)$  değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^k; x) &= \frac{\left(\frac{n(\tau(x)+\eta_n(x))}{(n-y+1)(1+\xi_n(x))}\right)^{n-y+k+1} \Gamma(n-y+k+1)}{n^k \left(\frac{n}{n-y+1}\right)^{n-y+1} \left(\frac{(\tau(x)+\eta_n(x))^{n-y+1}}{(1+\xi_n(x))^{n-y+2}}\right) \Gamma(n-y+1)} \\ &= \frac{(\tau(x)+\eta_n(x))^k (n-y+k)(n-y+k-1)\dots(n-y+2)(n-y+1)}{(1+\xi_n(x))^{k-1} (n-y+1)^k} \\ &= \left(\frac{(n-y+k)(n-y+k-1)\dots(n-y+2)}{(n-y+1)^{k-1}}\right) \left(\frac{(\tau(x)+\eta_n(x))^k}{(1+\xi_n(x))^{k-1}}\right) \\ &= \left(\frac{(n-y+2)^{(k-1)}}{(n-y+1)^{k-1}}\right) \left(\frac{(\tau(x)+\eta_n(x))^k}{(1+\xi_n(x))^{k-1}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. □

**Yardımcı Teorem 4.5.**  $x \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere aşağıdaki

- (i)  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x))^0; x) = 1 + \xi_n(x),$
- (ii)  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x)); x) = \eta_n(x) - \tau(x)\xi_n(x),$
- (iii)  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x))^2; x) = \left(\frac{n-y+2}{n-y+1}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2}{1 + \xi_n(x)}\right) + \tau^2(x) (\xi_n(x) - 1)$   
 $- 2\tau(x)\eta_n(x),$
- (iv)  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x))^3; x) = \left(\frac{(n-y+2)^{(2)}}{(n-y+1)^2}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^3}{(1 + \xi_n(x))^2}\right)$   
 $- 3 \left(\frac{n-y+2}{n-y+1}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2}{1 + \xi_n(x)}\right) \tau(x) + 3(\tau(x) + \eta_n(x)) \tau^2(x) - (1 + \xi_n(x)) \tau^3(x),$
- (v)  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x))^4; x) = \left(\frac{(n-y+2)^{(3)}}{(n-y+1)^3}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^4}{(1 + \xi_n(x))^3}\right)$   
 $- 4 \left(\frac{(n-y+2)^{(2)}}{(n-y+1)^2}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^3}{(1 + \xi_n(x))^2}\right) \tau(x) + 6 \left(\frac{n-y+2}{n-y+1}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2}{1 + \xi_n(x)}\right) \tau^2(x)$   
 $- 4(\tau(x) + \eta_n(x)) \tau^3(x) + (1 + \xi_n(x)) \tau^4(x),$
- (vi)  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x))^5; x) = \left(\frac{(n-y+2)^{(4)}}{(n-y+1)^4}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^5}{(1 + \xi_n(x))^4}\right)$   
 $- 5 \left(\frac{(n-y+2)^{(3)}}{(n-y+1)^3}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^4}{(1 + \xi_n(x))^3}\right) \tau(x) + 10 \left(\frac{(n-y+2)^{(2)}}{(n-y+1)^2}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^3}{(1 + \xi_n(x))^2}\right) \tau^2(x)$   
 $- 10 \left(\frac{n-y+2}{n-y+1}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2}{1 + \xi_n(x)}\right) \tau^3(x) + 5(\tau(x) + \eta_n(x)) \tau^4(x) - (1 + \xi_n(x)) \tau^5(x),$
- (vii)  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x))^6; x) = \left(\frac{(n-y+2)^{(5)}}{(n-y+1)^5}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^6}{(1 + \xi_n(x))^5}\right)$   
 $- 6 \left(\frac{(n-y+2)^{(4)}}{(n-y+1)^4}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^5}{(1 + \xi_n(x))^4}\right) \tau(x) + 15 \left(\frac{(n-y+2)^{(3)}}{(n-y+1)^3}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^4}{(1 + \xi_n(x))^3}\right) \tau^2(x)$   
 $- 20 \left(\frac{(n-y+2)^{(2)}}{(n-y+1)^2}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^3}{(1 + \xi_n(x))^2}\right) \tau^3(x) + 15 \left(\frac{n-y+2}{n-y+1}\right) \left(\frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2}{1 + \xi_n(x)}\right) \tau^4(x),$   
 $- 6(\tau(x) + \eta_n(x)) \tau^5(x) + (1 + \xi_n(x)) \tau^6(x)$

merkezi moment değerleri elde edilir.

*İspat.* (i)  $f(t) = (\tau(t) - \tau(x))^0$  için  $f(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) = ((\tau(t) - \tau(x))^0 \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n}))$  ve  
 $((\tau(t) - \tau(x))^0 \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n})) = (\tau(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) - \tau(x))^0 = 1$  elde edilir. Bu eşitlikler (4.7) de

yeni oluşturulan Gamma operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( (\tau(t) - \tau(x))^0; x \right) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} - \tau(x) \right)^0 dt \\ &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} 1 dt\end{aligned}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) ifadesindeki  $\beta_n(x)$  ve  $\alpha_n(x)$  değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( (\tau(t) - \tau(x))^0; x \right) &= \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (1; x) \\ &= 1 + \xi_n(x)\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii)  $f(t) = (\tau(t) - \tau(x))$  için  $f(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) = \left( (\tau(t) - \tau(x)) \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n}) \right)$  ve  $\left( (\tau(t) - \tau(x)) \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n}) \right) = \left( \tau(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) - \tau(x) \right) = \left( \frac{t}{n} - \tau(x) \right)$  elde edilir. Bu eşitlikler (4.7) de yeni oluşturulan Gamma operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( (\tau(t) - \tau(x)); x \right) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} - \tau(x) \right) dt \\ &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} \right) dt \\ &\quad - \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \tau(x) dt\end{aligned}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) ifadesindeki  $\beta_n(x)$  ve  $\alpha_n(x)$  değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( (\tau(t) - \tau(x)); x \right) &= \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (\tau; x) - \tau(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (1; x) \\ &= \tau(x) + \eta_n(x) - \tau(x) (1 + \xi_n(x)) \\ &= \eta_n(x) - \tau(x) \xi_n(x)\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii)  $f(t) = (\tau(t) - \tau(x))^2$  için  $f(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) = \left( (\tau(t) - \tau(x))^2 \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n}) \right)$  ve

$\left( (\tau(t) - \tau(x))^2 \circ \tau^{-1} \left( \frac{t}{n} \right) \right) = \left( \tau \left( \tau^{-1} \left( \frac{t}{n} \right) \right) - \tau(x) \right)^2 = \left( \frac{t}{n} - \tau(x) \right)^2$  elde edilir. Bu eşitlikler (4.7) de yeni oluşturulan Gamma operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( (\tau(t) - \tau(x))^2; x \right) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} - \tau(x) \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} \right)^2 dt \\ &\quad - \frac{2}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} \right) \tau(x) dt \\ &\quad + \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \tau^2(x) dt \end{aligned}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) ifadesindeki  $\beta_n(x)$  ve  $\alpha_n(x)$  değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( (\tau(t) - \tau(x))^2; x \right) &= \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (\tau^2; x) - 2\tau(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (\tau; x) + \tau^2(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (1; x) \\ &= \left( \frac{n-y+2}{n-y+1} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2}{1 + \xi_n(x)} \right) - 2\tau(x) (\tau(x) + \eta_n(x)) \\ &\quad + \tau^2(x) (1 + \xi_n(x)) \\ &= \left( \frac{n-y+2}{n-y+1} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2}{1 + \xi_n(x)} \right) + \tau^2(x) (\xi_n(x) - 1) \\ &\quad - 2\tau(x) \eta_n(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv)  $f(t) = (\tau(t) - \tau(x))^3$  için  $f \left( \tau^{-1} \left( \frac{t}{n} \right) \right) = \left( (\tau(t) - \tau(x))^3 \circ \tau^{-1} \left( \frac{t}{n} \right) \right)$  ve  $\left( (\tau(t) - \tau(x))^3 \circ \tau^{-1} \left( \frac{t}{n} \right) \right) = \left( \tau \left( \tau^{-1} \left( \frac{t}{n} \right) \right) - \tau(x) \right)^3 = \left( \frac{t}{n} - \tau(x) \right)^3$  elde edilir. Bu eşitlikler (4.7) de yeni oluşturulan Gamma operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( (\tau(t) - \tau(x))^3; x \right) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} - \tau(x) \right)^3 dt \\ &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m} \Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} \right)^3 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left(\frac{t}{n}\right)^2 \tau(x) dt \\
& + \frac{3}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left(\frac{t}{n}\right) \tau^2(x) dt \\
& - \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \tau^3(x) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) ifadesindeki  $\beta_n(x)$  ve  $\alpha_n(x)$  değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( (\tau(t) - \tau(x))^3; x \right) &= \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (\tau^3; x) - 3\tau(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (\tau^2; x) + 3\tau^2(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (\tau; x) \\
& - \tau^3(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (1; x) \\
&= \left( \frac{(n-y+2)^{(2)}}{(n-y+1)^2} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^3}{(1 + \xi_n(x))^2} \right) \\
& - 3 \left( \frac{n-y+2}{n-y+1} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2}{1 + \xi_n(x)} \right) \tau(x) \\
& + 3(\tau(x) + \eta_n(x)) \tau^2(x) - (1 + \xi_n(x)) \tau^3(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v)  $f(t) = (\tau(t) - \tau(x))^4$  için  $f(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) = \left( (\tau(t) - \tau(x))^4 \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n}) \right)$  ve  $\left( (\tau(t) - \tau(x))^4 \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n}) \right) = \left( \tau(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) - \tau(x) \right)^4 = (\frac{t}{n} - \tau(x))^4$  elde edilir. Bu eşitlikler (4.7) de yeni oluşturulan Gamma operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( (\tau(t) - \tau(x))^4; x \right) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left(\frac{t}{n} - \tau(x)\right)^4 dt \\
&= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left(\frac{t}{n}\right)^4 dt \\
& - \frac{4}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left(\frac{t}{n}\right)^3 \tau(x) dt \\
& + \frac{6}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left(\frac{t}{n}\right)^2 \tau^2(x) dt \\
& - \frac{4}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left(\frac{t}{n}\right) \tau^3(x) dt
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \tau^4(x) dt$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) ifadesindeki  $\beta_n(x)$  ve  $\alpha_n(x)$  değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( (\tau(t) - \tau(x))^4; x \right) &= \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (\tau^4; x) - 4\tau(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (\tau^3; x) + 6\tau^2(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (\tau^2; x) \\ &\quad - 4\tau^3(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (\tau; x) + \tau^4(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} (1; x) \\ &= \left( \frac{(n-y+2)^{(3)}}{(n-y+1)^3} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^4}{(1 + \xi_n(x))^3} \right) \\ &\quad - 4 \left( \frac{(n-y+2)^{(2)}}{(n-y+1)^2} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^3}{(1 + \xi_n(x))^2} \right) \tau(x) \\ &\quad + 6 \left( \frac{n-y+2}{n-y+1} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2}{1 + \xi_n(x)} \right) \tau^2(x) \\ &\quad - 4(\tau(x) + \eta_n(x)) \tau^3(x) + (1 + \xi_n(x)) \tau^4(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

(vi)  $f(t) = (\tau(t) - \tau(x))^5$  için  $f(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) = ((\tau(t) - \tau(x))^5 \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n}))$  ve  $((\tau(t) - \tau(x))^5 \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n})) = (\tau(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) - \tau(x))^5 = (\frac{t}{n} - \tau(x))^5$  elde edilir. Bu eşitlikler (4.7) de yeni oluşturulan Gamma operatöre uygulanarak

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( (\tau(t) - \tau(x))^5; x \right) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} - \tau(x) \right)^5 dt \\ &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} \right)^5 dt \\ &\quad - \frac{5}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} \right)^4 \tau(x) dt \\ &\quad + \frac{10}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} \right)^3 \tau^2(x) dt \\ &\quad - \frac{10}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} \right)^2 \tau^3(x) dt \\ &\quad + \frac{5}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} \right) \tau^4(x) dt \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \tau^5(x) dt$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) ifadesindeki  $\beta_n(x)$  ve  $\alpha_n(x)$  değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( (\tau(t) - \tau(x))^5; x \right) &= \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( \tau^5; x \right) - 5\tau(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( \tau^4; x \right) + 10\tau^2(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( \tau^3; x \right) \\ &\quad - 10\tau^3(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( \tau^2; x \right) + 5\tau^4(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( \tau; x \right) - \tau^5(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( 1; x \right) \\ &= \left( \frac{(n-y+2)^{(4)}}{(n-y+1)^4} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^5}{(1 + \xi_n(x))^4} \right) \\ &\quad - 5 \left( \frac{(n-y+2)^{(3)}}{(n-y+1)^3} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^4}{(1 + \xi_n(x))^3} \right) \tau(x) \\ &\quad + 10 \left( \frac{(n-y+2)^{(2)}}{(n-y+1)^2} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^3}{(1 + \xi_n(x))^2} \right) \tau^2(x) \\ &\quad - 10 \left( \frac{n-y+2}{n-y+1} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2}{1 + \xi_n(x)} \right) \tau^3(x) \\ &\quad + 5(\tau(x) + \eta_n(x)) \tau^4(x) - (1 + \xi_n(x)) \tau^5(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

(vii)  $f(t) = (\tau(t) - \tau(x))^6$  için  $f(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) = ((\tau(t) - \tau(x))^6 \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n}))$  ve  $((\tau(t) - \tau(x))^6 \circ \tau^{-1}(\frac{t}{n})) = (\tau(\tau^{-1}(\frac{t}{n})) - \tau(x))^6 = (\frac{t}{n} - \tau(x))^6$  elde edilir. Bu eşitlikler (4.7) de yeni oluşturulan Gamma operatöre uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( (\tau(t) - \tau(x))^6; x \right) &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} - \tau(x) \right)^6 dt \\ &= \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} \right)^6 dt \\ &\quad - \frac{6}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} \right)^5 \tau(x) dt \\ &\quad + \frac{15}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} \right)^4 \tau^2(x) dt \\ &\quad - \frac{20}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left( \frac{t}{n} \right)^3 \tau^3(x) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{15}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+v)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left(\frac{t}{n}\right)^2 \tau^4(x) dt \\
& - \frac{6}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+v)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \left(\frac{t}{n}\right) \tau^5(x) dt \\
& + \frac{1}{(\alpha_n(x))^{n+m}\Gamma(n+v)} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta_n(x)}} t^{n-y} \tau^6(x) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) ifadesindeki  $\beta_n(x)$  ve  $\alpha_n(x)$  değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( (\tau(t) - \tau(x))^6; x \right) &= \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( \tau^6; x \right) - 6\tau(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( \tau^5; x \right) + 15\tau^2(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( \tau^4; x \right) \\
& - 20\tau^3(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( \tau^3; x \right) + 15\tau^4(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( \tau^2; x \right) \\
& - 6\tau^5(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( \tau; x \right) + \tau^6(x) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y} \left( 1; x \right) \\
& = \left( \frac{(n-y+2)^{(5)}}{(n-y+1)^5} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^6}{(1 + \xi_n(x))^5} \right) \\
& - 6 \left( \frac{(n-y+2)^{(4)}}{(n-y+1)^4} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^5}{(1 + \xi_n(x))^4} \right) \tau(x) \\
& + 15 \left( \frac{(n-y+2)^{(3)}}{(n-y+1)^3} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^4}{(1 + \xi_n(x))^3} \right) \tau^2(x) \\
& - 20 \left( \frac{(n-y+2)^{(2)}}{(n-y+1)^2} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^3}{(1 + \xi_n(x))^2} \right) \tau^3(x) \\
& + 15 \left( \frac{n-y+2}{n-y+1} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2}{1 + \xi_n(x)} \right) \tau^4(x) \\
& - 6(\tau(x) + \eta_n(x)) \tau^5(x) + (1 + \xi_n(x)) \tau^6(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

**Yardımcı Teorem 4.6.**  $\{K_n\}$  pozitif lineer operatör dizisi için  $\lambda(x) = 1 + \tau^2(x)$  ve  $M_n$  pozitif bir sabit olmak üzere

$$T_n : C_\lambda(\mathbb{R}^+) \rightarrow B_\lambda(\mathbb{R}^+) \iff |K_n(\lambda; x)| \leq M_n \lambda(x)$$

gerçeklenir [48].

**Not 4.7.** Yeni tanımlanan  $\{\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}\}$  Gamma operatörü, Yardımcı Teorem 4.3 ve Yardımcı Teorem 4.6 yardımıyla  $C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  dan  $B_\lambda(\mathbb{R}^+)$  uzayına bir yaklaşım sürecinde olduğunu belirtir.

## 4.2. AĞIRLIKLILIK YAKLAŞIM

Bu kısımda yeni tanımlanan Gamma operatörü için quantitative tipli teorem sunulacaktır. Bu amaç doğrultusunda 2008 yılında Holhoş [46] tarafından sunulan ağırlıklı süreklilik modülünün tanımı aşağıda verilmiştir.

**Tanım 4.8.** Her  $f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  ve  $\delta > 0$  için  $f$  fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü

$$\omega_\tau(f; \delta) = \sup_{|\tau(t) - \tau(x)| \leq \delta; t, x \in \mathbb{R}^+} \frac{|f(t) - f(x)|}{\lambda(t) + \lambda(x)}$$

ile tanımlanır.  $\omega_\tau(f; \delta)$  fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) Her  $f \in U_\lambda(\mathbb{R}^+)$  için

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\tau(f; \delta) = 0,$$

(ii) Her  $f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  olmak üzere  $\delta \geq 0$  ve  $\gamma \geq 0$  için

$$\omega_\tau(f; \gamma\delta) \leq (2 + \gamma)\omega_\tau(f; \delta),$$

(iii) Her  $f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  olmak üzere  $\delta > 0$  ve  $x, t \geq 0$  için

$$|f(t) - f(x)| \leq (\lambda(t) + \lambda(x)) \left( 2 + \frac{|\tau(t) - \tau(x)|}{\delta} \right) \omega_\tau(f; \delta).$$

Ayrıca her  $f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  için  $\omega_\tau(f; 0) = 0$  ve  $f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  için  $\omega_\tau(f; \delta)$ ,  $\delta$  ya göre negatif olmayan ve azalmayan bir fonksiyondur.

Ayrıca bu kısmın ana sonucu için Holhoş [46] tarafından sunulan aşağıdaki teoremi hatırlamamız gerekmektedir.

**Teorem 4.9.**  $\mathcal{P}_n : C_\lambda(\mathbb{R}^+) \rightarrow B_\lambda(\mathbb{R}^+)$  olmak üzere  $\mathcal{P}_n$  pozitif lineer operatör ve  $n \rightarrow \infty$  iken  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  sifira yakınsayan diziler olmak üzere

$$\|\mathcal{P}_n(\tau^0) - \tau^0\|_{\lambda^0} = \theta_1 \quad (4.10)$$

$$\|\mathcal{P}_n(\tau) - \tau\|_{\lambda^{1/2}} = \theta_2 \quad (4.11)$$

$$\|\mathcal{P}_n(\tau^2) - \tau^2\|_{\lambda} = \theta_3 \quad (4.12)$$

$$\|\mathcal{P}_n(\tau^3) - \tau^3\|_{\lambda^{3/2}} = \theta_4 \quad (4.13)$$

eşitliklerini sağlasın. Bu durumda

$$\delta_n = 2\sqrt{(1 + \theta_1)(\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3)} + \theta_1 + 3\theta_2 + 3\theta_3 + \theta_4$$

olmak üzere her  $f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  için

$$\|\mathcal{P}_n(f) - f\|_{\lambda^{3/2}} \leq (7 + 4\theta_1 + 2\theta_3)\omega_\tau(f; \delta_n) + \|f\|_{\lambda} \theta_1$$

eşitsizliği gerçekleşir.

**Teorem 4.10.** Her  $f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  ve

$$\begin{aligned} \delta_n &= \xi_n + 3\eta_n + \left(\frac{n-y+2}{n-y+1}\right) (12\eta_n + 6\eta_n^2) \\ &+ \left(\frac{(n-y+3)(n-y+2)}{(n-y+1)^2}\right) (3\eta_n + 3\eta_n^2 + \eta_n^3) \\ &+ 2\sqrt{(1 + \xi_n) \left(\xi_n + 2\eta_n \left(\frac{n-y+2}{n-y+1}\right) (4\eta_n + 2\eta_n^2)\right)} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\|\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f) - f\|_{\lambda^{3/2}} \leq \left(7 + 4\xi_n \left(\frac{n-y+2}{n-y+1}\right) (4\eta_n + 2\eta_n^2)\right) \omega_\tau(f; \delta_n) + \|f\|_{\lambda} \xi_n$$

eşitsizliği gerçekleşir.

*İspat.* Bu ispat boyunca  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f; x) = \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f)$  olarak ifade edilecektir. Bu teoremi ispatlamak için  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  ve  $\theta_4$  dizilerini sırasıyla hesaplanması gerekmektedir. Teorem

4.9 ve Yardımcı Teorem 4.3-*i* kullanılarak

$$\|\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^0) - \tau^0\|_{\lambda^0} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|1 + \xi_n(x) - 1|}{(1 + \tau^2(x))^0} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \xi_n(x) \leq \xi_n = \theta_1$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 4.3-*ii* kullanılarak

$$\|\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau) - \tau\|_{\lambda^{1/2}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|\tau(x) + \eta_n(x) - \tau(x)|}{\sqrt{1 + \tau^2(x)}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{\eta_n(x)}{\sqrt{1 + \tau^2(x)}} \leq \eta_n = \theta_2$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 4.3-*iii* kullanılarak

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^2) - \tau^2\|_{\lambda} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{\left| \left( \frac{n-y+2}{n-y+1} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^2}{1 + \xi_n(x)} \right) - \tau^2(x) \right|}{1 + \tau^2(x)} \\ &\leq \left( \frac{n-y+2}{n-y+1} \right) (2\eta_n + \eta_n^2) \\ &= \theta_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 4.3-*iv* kullanılarak

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau^3) - \tau^3\|_{\lambda^{3/2}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{\left| \left( \frac{(n-y+3)(n-y+2)}{(n-y+1)^2} \right) \left( \frac{(\tau(x) + \eta_n(x))^3}{(1 + \xi_n(x))^2} \right) - \tau^3(x) \right|}{(1 + \tau^2(x))^{3/2}} \\ &\leq \left( \frac{(n-y+3)(n-y+2)}{(n-y+1)^2} \right) (3\eta_n + 3\eta_n^2 + \eta_n^3) \\ &= \theta_4 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, (4.10)-(4.13) şartları sağlanır. Böylece Teorem 4.9 gereğince ispat tamamlanmış olur.  $\square$

**Not 4.11.**  $f \in U_{\lambda}(\mathbb{R}^+)$  olmak üzere Teorem 4.10 ve  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{\tau}(f; \delta) = 0$  yardımıyla

$$\|\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f)\|_{\lambda^{3/2}} = 0$$

elde edilir.

### 4.3. VORONOVSKAYA TIPLİ YAKLAŞIM TEOREMİ

Bu kısımda yeni tanımlanan Gamma operatörü için noktasal yakınsaklık incelenecektir. Bu amaç doğrultusunda Voronovskaya tipli yaklaşım teoremi ispatlayarak elde edilecektir. Öncelikle Holhoş [46] tarafından sunulan Yardımcı Teorem aşağıda verilmiştir.

**Yardımcı Teorem 4.12.** Her  $f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  olmak üzere  $\delta > 0$  ve  $x, t \geq 0$  için

$$|f(t) - f(x)| \leq (\lambda(t) + \lambda(x)) \left( 2 + \frac{|\tau(t) - \tau(x)|}{\delta} \right) \omega_\tau(f; \delta)$$

gerçeklenir [46].

**Teorem 4.13.**  $f \in C_\lambda(\mathbb{R}^+)$  ve  $x \in \mathbb{R}^+$  olsun.  $(f \circ \tau^{-1})'$  ve  $(f \circ \tau^{-1})''$  fonksiyonları da  $\tau(x)$  noktasında var olsun. Bu durumda,  $(f \circ \tau^{-1})''$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^+$  üzerinde sınırlı ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\xi_n(x) = z_1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n\eta_n(x) = z_2$$

sağlanıyorsa

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f; x) - f(x) \right] &= z_1 f(x) + (z_2 - \tau(x)z_1) (f \circ \tau^{-1})'(\tau(x)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \tau^2(x) (f \circ \tau^{-1})''(\tau(x)) \end{aligned}$$

gerçeklenir.

*İspat.* İlk olarak,  $f \circ \tau^{-1}$  fonksiyonunun  $\tau(x) \in \mathbb{R}^+$  noktasındaki Taylor açılımı

$$\begin{aligned} f(t) = (f \circ \tau^{-1})(\tau(t)) &= (f \circ \tau^{-1})(\tau(x)) + (f \circ \tau^{-1})'(\tau(x))(\tau(t) - \tau(x)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (f \circ \tau^{-1})''(\tau(x))(\tau(t) - \tau(x))^2 + \Delta_x(t)(\tau(t) - \tau(x))^2 \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$\Delta_x(t) = \frac{(f \circ \tau^{-1})''(\tau(\zeta)) - (f \circ \tau^{-1})''(\tau(x))}{2} \quad (4.14)$$

$\zeta$ ,  $x$  ile  $t$  arasında kalan sayıdır. (4.14) ifadesi, her  $t$  için  $|\Delta_x(t)| \leq S$  eşitsizliğini sağlar ve  $t \rightarrow x$  iken sifıra yakınsar. Yeni tanımlanan  $\{\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}\}$  Gamma operatörünü Taylor açılımının

her iki tarafına uygularsak

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f; x) &= (f \circ \tau^{-1})(\tau(x)) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x))^0; x) \\ &+ (f \circ \tau^{-1})'(\tau(x)) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x)); x) \\ &+ \frac{1}{2} (f \circ \tau^{-1})''(\tau(x)) \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x))^2; x) \\ &+ \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(h_x(t)(\tau(t) - \tau(x))^2; x)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Yardımcı Teorem 4.5-i yardımıyla ve eşitliğin her iki tarafını  $n$  ile çarparak

$$\begin{aligned}n \left[ \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f; x) - f(x) \right] &= nf(x) \xi_n(x) + (f \circ \tau^{-1})'(\tau(x)) n \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x)); x) \\ &+ \frac{1}{2} (f \circ \tau^{-1})''(\tau(x)) n \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x))^2; x) \\ &+ n \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\Delta_x(t)(\tau(t) - \tau(x))^2; x)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin limit durumunda ifade edersek

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f; x) - f(x) \right] &= f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} n \xi_n(x) \\ &+ (f \circ \tau^{-1})'(\tau(x)) \lim_{n \rightarrow \infty} n \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x)); x) \\ &+ \frac{1}{2} (f \circ \tau^{-1})''(\tau(x)) \lim_{n \rightarrow \infty} n \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x))^2; x) \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} n \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\Delta_x(t)(\tau(t) - \tau(x))^2; x)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.5-ii yardımıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x)); x) = z_2 - \tau(x)z_1$$

ve Yardımcı Teorem 4.5-iii yardımıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x))^2; x) = \tau^2(x)$$

elde edilir. Son durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f; x) - f(x) \right] = z_1 f(x) + (z_2 - \tau(x)z_1)(f \circ \tau^{-1})'(\tau(x))$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \tau^2(x) (f \circ \tau^{-1})''(\tau(x)) \\
& + \lim_{n \rightarrow \infty} n \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(|\Delta_x(t)|(\tau(t) - \tau(x))^2; x)
\end{aligned}$$

dır. Şimdi ispatı tamamlamak için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(|\Delta_x(t)|(\tau(t) - \tau(x))^2; x) = 0$$

olduğu gösterilmelidir. Şimdi burada eşitliğin son terimi incelendiğinde

$$|\tau(t) - \tau(x)| < \delta \text{ ise } |\Delta_x(t)(\tau(t) - \tau(x))^2| < \varepsilon(\tau(t) - \tau(x))^2$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$|\tau(t) - \tau(x)| \geq \delta \text{ ise } |\Delta_x(t)| < S \text{ olacağından } |\Delta_x(t)(\tau(t) - \tau(x))^2| \leq \frac{S}{\delta^2}(\tau(t) - \tau(x))^4$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\Delta_x(t)(\tau(t) - \tau(x))^2; x) & \leq \varepsilon \lim_{n \rightarrow \infty} n \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau(t) - \tau(x))^2; x \\
& + \frac{S}{\delta^2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(\tau(t) - \tau(x))^4; x
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}((\tau(t) - \tau(x))^4; x) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(|\Delta_x(t)|(\tau(t) - \tau(x))^2; x) = 0$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur. □

#### 4.4. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu kısımda teorik sonuçları desteklemek ve bunların verimliliğini göstermek için literatürde var olan klasik Gamma operatörleri ile yeni tanımlanan Gamma operatörünün yakınsama davranışı incelenecektir.

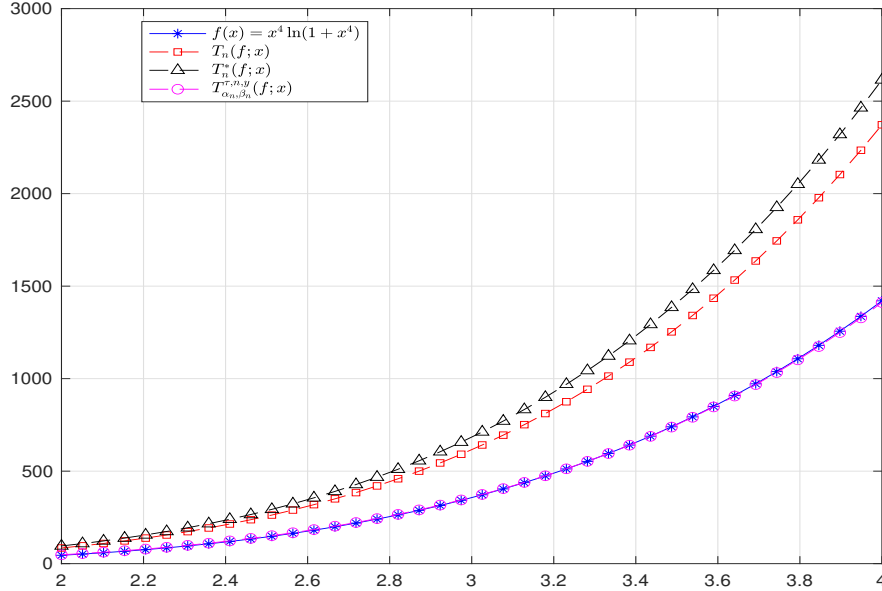
**Örnek 4.14.** İlk örnek olarak  $f : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

$$f(x) = x^4 \ln(1 + x^4)$$

ile verilsin.  $n = 15$  için

$$\tau(x) = e^x - 1, \quad \xi_n(x) = \frac{x}{n^2}, \quad \eta_n(x) = \frac{x}{n^3} \quad \text{ve} \quad y = 2$$

olacak şekilde  $T_n$  operatörü (1.1) ifadesinde verilen Lupaş-Müller operatörü (Temel Gamma operatörü),  $T_n^*$  operatörü (1.2) ifadesinde verilen Zeng operatörü ve  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}$  operatörü (4.7) ifadesinde verilen Gamma operatörlerinin yeni bir sınıfı ile  $[2, 4]$  aralığı üzerindeki  $f$  fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekildedir.



Şekil 4.1.  $[2, 4]$  aralığı üzerinde  $n = 15$  için  $T_n(f; x)$ ,  $T_n^*(f; x)$  ve  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f; x)$  ile  $f(x) = x^4 \ln(1 + x^4)$  hedef fonksiyona yaklaşım grafiği

$f$  fonksiyonu (mavi),  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}$  Gamma operatörlerinin yeni bir sınıfı (pembe),  $T_n^*$  Zeng operatörü (siyah) ve  $T_n$  Lupaş-Müller operatörü (kırmızı) olmak üzere grafik incelendiğinde klasik Gamma operatörlerine kıyasla en iyi yaklaşımı,  $f(x) = x^4 \ln(1 + x^4)$  test fonksiyonu için  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}$  Gamma operatörlerinin yeni bir sınıfı sergilediği görülmektedir. Ayrıca  $\tau(x)$ ,  $\xi_n(x)$ ,  $\eta_n(x)$  ve  $y$  değerlerinin seçimi, iyi bir yaklaşım elde etmek için önemli rol oynar.

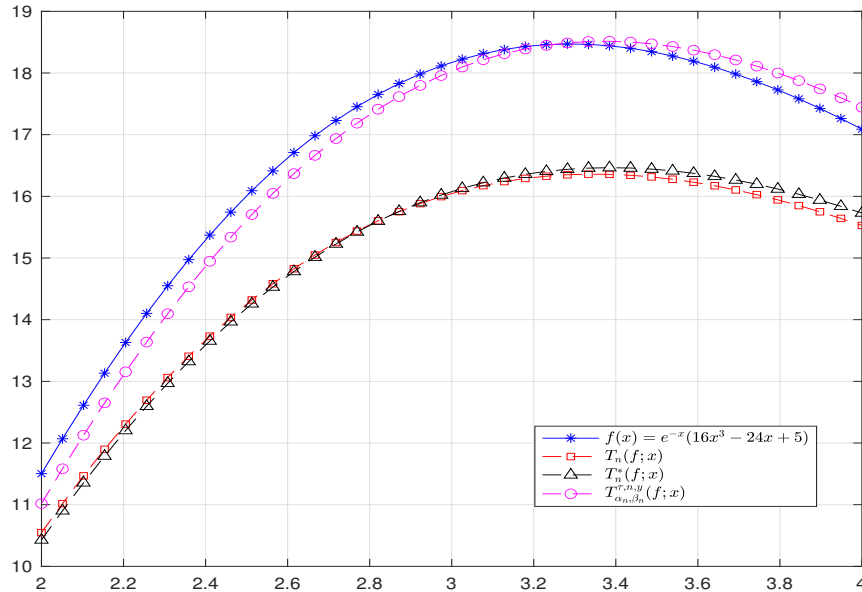
**Örnek 4.15.** İkinci bir örnek olarak  $f : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  test fonksiyonu olmak üzere

$$f(x) = e^{-x}(16x^3 - 24x + 5)$$

şeklinde olsun.  $n = 15$  için

$$\tau(x) = e^x - 1, \quad \xi_n(x) = \frac{x}{n^3}, \quad \eta_n(x) = \frac{x}{n^5} \quad \text{ve} \quad y = 1$$

olacak şekilde  $T_n$  operatörü (1.1) ifadesinde verilen Lupaş-Müller operatörü (Temel Gamma operatörü),  $T_n^*$  operatörü (1.2) ifadesinde verilen Zeng operatörü ve  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}$  operatörü (4.7) ifadesinde verilen Gamma operatörlerinin yeni bir sınıfı ile  $[2, 4]$  aralığı üzerindeki  $f$  fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekildedir.



Şekil 4.2.  $[2, 4]$  aralığı üzerinde  $n = 15$  için  $T_n(f; x)$ ,  $T_n^*(f; x)$  ve  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f; x)$  ile  $f(x) = e^{-x}(16x^3 - 24x + 5)$  hedef fonksiyona yaklaşım grafiği

$f$  fonksiyonu (mavi),  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}$  Gamma operatörlerinin yeni bir sınıfı (pembe),  $T_n^*$  Zeng operatörü (siyah) ve  $T_n$  Lupaş-Müller operatörü (kırmızı) olmak üzere grafik incelendiğinde klasik Gamma operatörlerine kıyasla en iyi yaklaşımı,  $f(x) = e^{-x}(16x^3 - 24x + 5)$  test fonksiyonu için  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}$  Gamma operatörlerinin yeni bir sınıfı sergilediği görülmektedir. Ayrıca  $\tau(x)$ ,  $\xi_n(x)$ ,  $\eta_n(x)$  ve  $y$  değerlerinin seçimi, iyi bir yaklaşım elde etmek için önemli rol oynar.

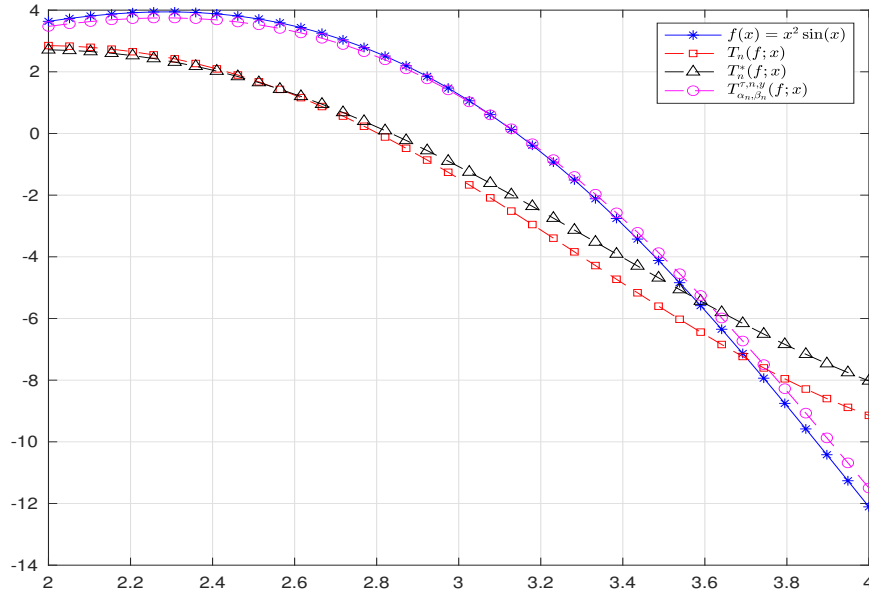
**Örnek 4.16.** Son örnek olarak  $f : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

$$f(x) = x^2 \sin x$$

ile verilsin.  $n = 15$  için

$$\tau(x) = e^x - 1, \quad \xi_n(x) = \frac{x}{n^3}, \quad \eta_n(x) = \frac{x}{n^5} \quad \text{ve} \quad y = 1$$

olacak şekilde,  $T_n$  operatörü (1.1) ifadesinde verilen Lupaş-Müller operatörü (Temel Gamma operatörü),  $T_n^*$  operatörü (1.2) ifadesinde verilen Zeng operatörü ve  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}$  operatörü (4.7) ifadesinde verilen Gamma operatörlerinin yeni bir sınıfı ile  $[2, 4]$  aralığı üzerindeki  $f$  fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekildedir.



Şekil 4.3.  $[2, 4]$  aralığı üzerinde  $n = 15$  için  $T_n(f; x)$ ,  $T_n^*(f; x)$  ve  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}(f; x)$  ile  $f(x) = x^2 \sin x$  hedef fonksiyona yaklaşım grafiği

$f$  fonksiyonu (mavi),  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}$  Gamma operatörlerinin yeni bir sınıfı (pembe),  $T_n^*$  Zeng operatörü (siyah) ve  $T_n$  Lupaş-Müller operatörü (kırmızı) olmak üzere grafik incelendiğinde klasik Gamma operatörlerine kıyasla en iyi yaklaşımı,  $f(x) = x^2 \sin x$  test fonksiyonu için  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}$  Gamma operatörlerinin yeni bir sınıfı sergilediği görülmektedir. Ayrıca  $\tau(x)$ ,  $\xi_n(x)$ ,  $\eta_n(x)$  ve  $y$  değerlerinin seçimi, iyi bir yaklaşım elde etmek için önemli rol oynar.

Yukarıda verilen her üç grafikte de  $T_n^*$  Zeng operatörü ve  $T_n$  Lupaş-Müller operatörüne göre  $\mathcal{T}_{\alpha_n, \beta_n}^{\tau, n, y}$  Gamma operatörlerinin yeni bir sınıfı en iyi yakınsamayı gerçekleştirir.



## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk olarak klasik Gamma tipli operatörleri modifiye ederek yeni bir Gamma tipli operatör tanımlandı. Bu yeni operatörün moment ve merkezi moment değerleri elde edildi. Bu bilgilerde yola çıkarak yeni tanımlanan modifiye Gamma operatörü sabit fonksiyonu doğrudan korur diğer test fonksiyonlarında limit durumunda korur. Bu durum Korovkin teoremi gereğince yeni tanımlanan modifiye Gamma operatörünün bir yaklaşım sürecinde olduğunu belirtir. Daha sonra bu operatörün düzgün yakınsaklığı sağladığı gösterildi. Yakınsama hızının hesaplanması amacıyla modifiye operatörün asimptotik davranışını belirlemek için Voronovskaya tipli yaklaşım teoremi kullanılarak asimptotik değer ve asimptotik hızı elde edildi. Sonrasında üzerinde çalışılan uzay değiştirilerek Ağırlıklı Korovkin tipli teoremler yardımıyla yaklaşım özellikleri incelendi. Süreklilik modülü, Lipschitz sınıfı ve Lipschitz tipli maksimal fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı elde edildi. Klasik Gamma operatörleri ve yeni tanımlanan modifiye Gamma operatörü ile hedef fonksiyona yaklaşımı grafikler yardımıyla sunuldu. Bu grafikler neticesinde klasikler ile modifiye Gamma operatörü karşılaştırıldığında yeni oluşturulan modifiye Gamma operatörü hedef fonksiyona daha iyi yaklaşım sergilediği gösterildi.

Erençin ve Raşa [140] tarafından verilen Genelleştirilmiş Gamma operatöründe  $\tau$  fonksiyonu üç farklı yerde kullanılmıştır. Bu operatörden yola çıkarak daha kapsayıcı bir operatör elde etmek için  $\alpha_n(x)$ ,  $\beta_n(x)$  ve  $\tau(x)$  gibi farklı fonksiyonları kullanarak var olan Gamma tipli operatörlerin yeni bir sınıfı tanımlandı. Bu yeni tanımlanan operatör literatürde bulunan Gamma tipli operatörleri hem kapsar hemde yeni operatör tanımlamaya yardımcı olur. Gamma tipli operatörlerin yeni bir sınıfı olan operatörün moment ve merkezi moment değerleri hesaplandı. Sonrasında Voronovskaya tipli yaklaşım teoremi ve Holhoş [46] tarafından verilen ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı elde edildi. Son olarak, teorik sonuçları desteklemek ve bunların verimliliğini göstermek için literatürde bulunan klasik Gamma operatörleri ile Gamma tipli operatörlerin yeni bir sınıfı olan operatörün yakınsama davranışı karşılaştırıldı. Gamma tipli operatörlerin yeni bir sınıfı olan operatörün daha iyi yaklaşım sergilediği gösterildi.

Yukarıda elde edilen bilgiler ışığında modifiye Gamma operatörü ve yeni oluşturulan Gamma tipli operatörlerin yeni bir sınıfı olan operatör yani yeni tanımlanan her iki operatörde klasik Gamma operatörlerine göre daha verimli bir yaklaşım sergilemektedir.



## 6. KAYNAKLAR

- [1] P. L. Chebyshev, “Theory of mechanisms known by the title of parallelograms, teoriya mekhanizmov, izvestnykh pod nazvaniyem parallelogrammov (1854),” *Izd. Akad. Nauk SSSR*, c. 2, ss. 23–51, 1947.
- [2] K. Weierstrass, “Über die analytische darstellbarkeit sogenannter willkürlicher functionen einer reellen veränderlichen,” *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, c. 2, ss. 633–639, 1885.
- [3] C. Runge, “Zur theorie der eindeutigen analytischen functionen,” *Acta Mathematica*, c. 6, sayı. 1, ss. 229–244, 1885.
- [4] E. Picard, “Sur la représentation approchée des fonctions,” *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, c. 112, ss. 183–186, 1891.
- [5] V. Volterra, “Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti,” *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1867-1897)*, c. 25, sayı. 1, ss. 139–178, 1897.
- [6] H. Lebesgue, “Sur l’approximation des fonctions,” *Bull. Sci. Math*, c. 22, sayı. 10, ss. 11–20, 1898.
- [7] L. Fejer, “Sur les fonctions intégrables et bornées,” *CR Acad. Sci. Paris*, c. 10, ss. 984–987, 1900.
- [8] G. Mittag-Leffler, “Sur la representation analytique d’une branche uniforme d’une fonction monogene,” *Acta Mathematica*, c. 23, sayı. 1, ss. 43–62, 1900.
- [9] M. Lerch, “Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d’abel,” *Acta Mathematica*, c. 27, ss. 339–351, 1903.
- [10] E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes: professées à l’École normale supérieure*, Paris, France: Gauthier-Villars, 1905.
- [11] G. Mastroianni, & G. Milovanovic, *Interpolation processes: Basic theory and applications*, Berlin, Germany: Springer Science and Business Media, 2008.

- [12] E. Landau, “Über die approximation einer stetigen funktion durch eine ganze rationale funktion,” *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, c. 25, sayı. 1, ss. 337–345, 1908.
- [13] S. Bernstein, “Demo istration du th’eoreme de Weierstrass fondee sur le calcul des probabilites,” *Communications of the Kharkov Mathematical Society*, c. 13, sayı. 1, ss. 1–2, 1912.
- [14] E. Voronovskaya, “Détermination de la forme asymptotique d’approximation des fonctions par les polynômes de m. Bernstein,” *CR Acad. Sci. URSS*, c. 79, ss. 79–85, 1932.
- [15] H. Bohman, “On approximation of continuous and of analytic functions,” *Arkiv för Matematik*, c. 2, sayı. 1, ss. 43–56, 1952.
- [16] P. P. Korovkin, “On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions,” in *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, c. 90, sayı. 953, ss. 961–964, 1953.
- [17] L. Euler, “De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt,” *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, ss. 36–57, 1738.
- [18] A. Lupas, & M. Müller, “Approximationseigenschaften der Gammaoperatoren,” *Mathematische Zeitschrift*, c. 98, sayı. 3, ss. 208–226, 1967.
- [19] H. Karsli, “Rate of convergence of new Gamma type operators for functions with derivatives of bounded variation,” *Mathematical and Computer Modelling*, c. 45, sayı. 5-6, ss. 617–624, 2007.
- [20] H. Karsli, & A. Özarslan, “Direct local and global approximation results for operators of Gamma type,” *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, c. 39, sayı. 2, ss. 241–253, 2010.
- [21] L. Rempulska, & M. Skorupka, “Approximation properties of modified Gamma operators,” *Integral Transforms and Special Functions*, c. 18, sayı. 9, ss. 653–662, 2007.

- [22] F. Usta, & Ö. Betus, “A new modification of Gamma operators with a better error estimation,” *Linear and Multilinear Algebra*, ss. 1–12, 2020.
- [23] Ö. Betus ve F. Usta, “Approximation of functions by a new type of Gamma operators,” *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2020.
- [24] X. M. Zeng, “Approximation properties of Gamma operators,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 311, sayı. 2, ss. 389–401, 2005.
- [25] H. Gonska, P. Pitul, & I. Raşa, “On peano’s form of the Taylor remainder, 332 approximation by complex Bernstein and convolution type operators Voronovskaja’s theorem and the commutator of positive linear operators,” in *Proceed. Intern. Conf. 101 on “Numer. Anal. and Approx. Theory”*, NAAT, Cluj-Napoca, Casa Cartii de Stiinta, Cluj-Napoca, ss. 55–80, 2006.
- [26] T. Acar, “Asymptotic formulas for generalized Szasz–Mirakyan operators,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 263, ss. 233–239, 2015.
- [27] T. Acar, & A. Aral, “On pointwise convergence of  $q$ -Bernstein operators and their  $q$ -derivatives,” *Numerical Functional Analysis and Optimization*, c. 36, sayı. 3, ss. 287–304, 2015.
- [28] T. Acar, A. Aral, & I. Raşa, “The new forms of Voronovskaya’s theorem in weighted spaces,” *Positivity*, c. 20, sayı. 1, ss. 25-40, 2016.
- [29] T. Acar, & G. Ulusoy, “Approximation by modified Szász–Durrmeyer operators,” *Periodica Mathematica Hungarica*, c. 72, sayı. 1, ss. 64–75, 2016.
- [30] C. Bardaro, & I. Mantellini, “A quantitative Voronovskaya formula for Mellin convolution operators,” *Mediterranean Journal of Mathematics*, c. 4, sayı. 7, ss. 483–501, 2010.
- [31] Z. Finta, “On generalized Voronovskaja theorem for Bernstein polynomials,” *Carpathian Journal of Mathematics*, ss. 231–238, 2012.
- [32] H. Gonska, & I. Raşa, “Remarks on Voronovskaya’s theorem,” *Gen. Math*, c. 16, sayı. 4, ss. 87–99, 2008.

- [33] H. Gonska, & G. Tachev, “A quantitative variant of Voronovskaja’s theorem,” *Results in Mathematics*, c. 53, sayı. 3, ss. 287–294, 2009.
- [34] H. Gonska, & R. Peltenia, “Quantitative convergence theorems for a class of Bernstein–Durrmeyer operators preserving linear functions,” *Ukrainian Mathematical Journal*, 2010.
- [35] G. T. Tachev, “Voronovskaja’s theorem revisited,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 343, sayı. 1, ss. 399–404, 2008.
- [36] H. Gonska, & G. Tachev, “Grüss-type inequalities for positive linear operators with second order moduli,” *Matematicki Vesnik*, c. 63, sayı. 4, ss. 247–252, 2011.
- [37] A. M. Acu, H. Gonska, & I. Raşa, “Grüss-type and Ostrowski-type inequalities in approximation theory,” *Ukrainian Mathematical Journal*, c. 63, sayı. 6, ss. 843–864, 2011.
- [38] P. Korovkin, “Linear operators and approximation theory, Hindustan Publ,” *Co., Delhi*, c. 8, 1960.
- [39] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*, 5. Baskı, Ankara, Türkiye: Korza Yayıncılık, 2017.
- [40] M. Balcı, *Matematik Analiz I*, 6. Baskı, Ankara, Türkiye: Balcı Yayınları, 2009.
- [41] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York, ABD: Wiley, 1978.
- [42] I. Maddox, “A new type of convergence,” in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, c. 83, sayı. 1, ss. 61–64, 1978.
- [43] H. Hacısalihoğlu, & A. Hacıyev, *Doğrusal Pozitif Operator Dizilerinin Yakınsaklığı*, Ankara, Türkiye: A.U.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 1995.
- [44] G. G. Lorentz, “Bernstein polynomials,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, c. 60, ss. 277–279, 1954.
- [45] Z. Ditzian, & V. Totik, “Moduli of smoothness, Springer series in computational mathematics,” *Springer Verlag*, c. 9, 1987.

- [46] A. Holhos, “Quantitative estimates for positive linear operators in weighted spaces,” *Gen. Math*, c. 16, sayı. 4, ss. 99–110, 2008.
- [47] A. D. Gadjiev, “Theorems of Korovkin type,” *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, c. 20, sayı. 5, ss. 995–998, 1976.
- [48] A. D. Gadjiev, “The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of pp Korovkin,” in *Doklady Akademii Nauk*, c. 218, sayı. 5, ss. 1001–1004, 1974.
- [49] F. Cao, C. Ding, & Z. Xu, “On multivariate Baskakov operator,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 307, sayı. 1, ss. 274–291, 2005.
- [50] B. Lenze, “On lipschitz-type maximal functions and their smoothness spaces,” in *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, c. 91, sayı. 1, ss. 53–63, 1988.
- [51] M. A. Özarlan, & H. Aktuğlu, “Local approximation properties for certain King type operators,” *Filomat*, c. 27, sayı. 1, ss. 173–181, 2013.
- [52] A. Pinkus, “Weierstrass and approximation theory,” *Journal of Approximation Theory*, c. 107, sayı. 1, ss. 1–66, 2000.
- [53] L. V. Kantorovich, “Sur certains développements suivant les polynômes de la forme de s,” *Bernstein, I, II, CR Acad. URSS*, c. 563, ss. 568, 1930.
- [54] T. Popoviciu, “Sur l’approximation des fonctions convexes d’ordre supérieur,” *Mathematica (Cluj)*, c. 10, ss. 49–54, 1935.
- [55] I. Chlodovsky, “Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynomes de ms Bernstein,” *Compositio Mathematica*, c. 4, ss. 380–393, 1937.
- [56] M. Kac, “Une remarque sur les polynomes de ms Bernstein,” *Studia Mathematica*, c. 7, ss. 49–51, 1938.
- [57] M. Kac, “Reconnaissance de priorité relative à ma note“ une remarque sur les polynomes de ms Bernstein”,” *Studia Mathematica*, c. 8, sayı. 1, 1939.

- [58] G. M. Mirakjan, "Approximation of continuous functions with the aid of polynomials," in *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, c. 31, ss. 201–205, 1941.
- [59] J. Favard, "Sur les multiplicateurs d'interpolation," *J. Math. Pures Appl.*, c. 23, sayı. 9, ss. 219–247, 1944.
- [60] O. Szász, "Generalization of s. Bernstein's polynomials to the infinite interval," *J. Res. Nat. Bur. Standards*, c. 45, sayı. 3, ss. 239–245, 1950.
- [61] V. A. Baskakov, "An instance of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions," in *Doklady Akademii Nauk*, c. 113, sayı. 2, ss. 249–251, 1957.
- [62] E. Şimsek, "Pozitif lineer operatörlerin yaklaşım teorisindeki uygulamaları," Yüksek lisans tezi, Matematik Bölümü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Mersin Üniversitesi, Mersin, Türkiye, 2013.
- [63] C. Esseen, "Über die asymptotisch beste approximation stetiger funktionen mit hilfe von Bernstein-polynomen," *Numerische Mathematik*, c. 2, sayı. 1, ss. 206–213, 1960.
- [64] F. Schurer, "Positive linear operators in approximation theory," *Mathematical Institute of the Technological University Delft*, 1962.
- [65] W. Meyer-König, & K. Zeller, "Bernsteinsche potenzreihen," *Studia Math.*, c. 19, ss. 89–94, 1960.
- [66] E. W. Cheney, & A. Sharma, "Bernstein power series," *Canadian Journal of Mathematics*, c. 16, ss. 241–252, 1964.
- [67] J. L. Durrmeyer, "Une formule d'inversion de la transformée de laplace: Applications à la théorie des moments," Doktora tezi, Paris, Fransa, 1967.
- [68] D. D. Stancu, "Asupra unei generalizari a polinoamelor lui Bernstein," *Studia Universitatis Babeş-Bolyai*, c. 14, sayı. 2, ss. 31–45, 1969.
- [69] G. Jain, & S. Pethe, "On a generalization of Szász–Mirakyan operator," *Mathematica (Cluj)*, c. 35, ss. 313–318, 1970.

- [70] Z. Ditzian, “Convergence of sequences of linear positive operators: Remarks and applications,” *Journal of Approximation Theory*, c. 14, sayı. 4, ss. 296–301, 1975.
- [71] K. Balazs, “Approximation by Bernstein type rational functions,” *Acta Mathematica Hungarica*, c. 26, sayı. 1-2, ss. 123–134, 1975.
- [72] G. Bleimann, P. Butzer, & L. Hahn, “A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis,” in *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, c. 83, sayı. 3, ss. 255–262, 1980.
- [73] A. D. Gadzhiev, & Ö. Çakar, “On uniform approximation by Bleimann, Butzer and Hahn operators on all positive semi-axis,” *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys. Tech. Math. Sci*, c. 19, sayı. 5, ss. 21, 1999.
- [74] C. Balazs ve J. Szabados, “Approximation by Bernstein type rational functions. ii,” *Acta Mathematica Hungarica*, c. 40, sayı. 3-4, ss. 331–337, 1982.
- [75] G. Kirov, “A generalization of the Bernstein polynomials,” *Math. Balkanica (NS)*, c. 6, sayı. 2, ss. 147–153, 1992.
- [76] A. Lupaş, “The approximation by some positive linear operators,” in *Proceedings of the International Dortmund Meeting on Approximation Theory*. Akademie Verlag, ss. 201–229, 1995.
- [77] O. Agratini, “On a sequence of linear and positive operators,” *Facta Univ. Ser. Math. Inform*, c. 14, ss. 41–48, 1999.
- [78] E. Ibikli, “On stancu type generalization of Bernstein-Chlodowsky polynomials,” *Mathematica*, c. 42, sayı. 65, ss. 37–43, 2000.
- [79] N. Ispir, “On modified Baskakov operators on weighted spaces,” *Turkish Journal of Mathematics*, c. 25, sayı. 3, ss. 355–365, 2001.
- [80] O. Doğru, “On Bleimann, Butzer and Hahn type generalization of Balázs operators,” *Studia Universitatis Babeş-Bolyai. Mathematica*, c. 47, sayı. 4, ss. 37–45, 2002.
- [81] C. Bardaro, P. Butzer, R. Stens, & G. Vinti, “Convergence in variation and rates of approximation for Bernstein-type polynomials and singular convolution integrals,” *Analysis*, c. 23, sayı. 4, ss. 299–340, 2003.

- [82] Z. Walczak, “On the convergence of the modified Szász-Mirakyan operators,” *Yokohama City University and Yokohama National University*, 2004.
- [83] Z. Finta, “On converse approximation theorems,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 312, sayı. 1, ss. 159–180, 2005.
- [84] A. Erençin, & F. Taşdelen, “On a family of linear and positive operators in weighted spaces,” *JIPAM. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics [electronic only]*, c. 8, sayı. 2, 2007.
- [85] A. Erençin, & F. Taşdelen, “On certain Kantorovich type operators,” *Fasc. Math*, c. 41, ss. 65–71, 2009.
- [86] A. İzgi, İ. Büyükyazıcı ve E. İbikli, “Rate of convergence by Chlodowsky–Taylor polynomials,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 213, sayı. 2, ss. 426–431, 2009.
- [87] İ. Büyükyazıcı, “Approximation by Stancu-Chlodowsky polynomials,” *Computers and Mathematics with Applications*, c. 59, sayı. 1, ss. 274–282, 2010.
- [88] D. Verma, V. Gupta, & P. Agrawal, “Some approximation properties of Baskakov-Durrmeyer-Stancu operators,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 218, sayı. 11, ss. 6549–6556, 2012.
- [89] P. Patel, & V. N. Mishra, “Jain-Baskakov operators and its different generalization,” *Acta Mathematica Vietnamica*, c. 40, sayı. 4, ss. 715–733, 2015.
- [90] V. N. Mishra, & P. Sharma, “On approximation properties of Baskakov–Schurer–Szász operators,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 281, ss. 381–393, 2016.
- [91] İ. Yüksel, “Approximation by  $q$ -Baskakov-Schurer-Szász type operators,” in *AIP Conference Proceedings*, c. 1558, sayı. 1, ss. 1136–1139, 2013.
- [92] O. T. Pop, D. Barbosu & D. Miclaus, “The Voronovskaja type theorem for an extension of Szász-Mirakjan operators,” *Demonstratio Mathematica*, c. 45, sayı. 1, ss. 107–115, 2012.

- [93] F. Usta, “On new modification of Bernstein operators: Theory and applications,” *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, c. 44, sayı. 4, ss. 1119–1124, 2020.
- [94] A. Lupas, “A  $q$ -analogue of the Bernstein operator,” in *Seminar on Numerical and Statistical Calculus, University of Cluj-Napoca*, c. 9, sayı. 85-92, 1987.
- [95] S. Ostrovska, “On the Lupaş  $q$ -analogue of the Bernstein operator,” *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, ss. 1615–1629, 2006.
- [96] G. M. Phillips, “Bernstein polynomials,” in *Interpolation and Approximation by Polynomials*, ss. 247–290, 2003.
- [97] G. M. Phillips, “A generalization of the Bernstein polynomials based on the  $q$ -integers,” *The ANZIAM Journal*, c. 42, sayı. 1, ss. 79–86, 2000.
- [98] H. Oruç & N. Tuncer, “On the convergence and iterates of  $q$ -Bernstein polynomials,” *Journal of Approximation Theory*, c. 117, sayı. 2, ss. 301–313, 2002.
- [99] S. Ostrovska, “ $q$ -Bernstein polynomials and their iterates,” *Journal of Approximation Theory*, c. 123, sayı. 2, ss. 232–255, 2003.
- [100] T. Trif, “Meyer-König and Zeller operators based on the  $q$ -integers,” *Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation*, c. 29, sayı. 2, ss. 221–229, 2000.
- [101] O. Doğru & O. Duman, “Statistical approximation of Meyer-König and Zeller operators based on  $q$ -integers,” *Publicationes Mathematicae*, 2006.
- [102] A. Aral & V. Gupta, “The  $q$ -derivative and applications to  $q$ -Szász Mirakyan operators,” *Calcolo*, c. 43, sayı. 3, ss. 151–170, 2006.
- [103] A. Aral, “A generalization of Szász–Mirakyan operators based on  $q$ -integers,” *Mathematical and Computer Modelling*, c. 47, sayı. 9-10, ss. 1052–1062, 2008.
- [104] A. Aral & O. Doğru, “Bleimann, Butzer, and Hahn operators based on the  $q$ -integers,” *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2007, ss. 1–12, 2008.

- [105] N. I. Mahmudov, “Convergence properties and iterations for  $q$ -Stancu polynomials in compact disks,” *Computers and Mathematics with Applications*, c. 59, sayı. 12, ss. 3763–3769, 2010.
- [106] A. Aral & V. Gupta, “Generalized  $q$ -Baskakov operators,” *Mathematica Slovaca*, c. 61, sayı. 4, ss. 619–634, 2011.
- [107] H. Oruç, G. M. Phillips & P. J. Davis, “A generalization of the Bernstein polynomials,” *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, c. 42, sayı. 2, ss. 403–413, 1999.
- [108] A. Il’inskii & S. Ostrovska, “Convergence of generalized Bernstein polynomials,” *Journal of Approximation Theory*, c. 116, sayı. 1, ss. 100–112, 2002.
- [109] V. S. Videnskii, “On some classes of  $q$ -parametric positive linear operators,” in *Selected Topics in Complex Analysis*, ss. 213–222, 2005.
- [110] E. Ibikli, “Approximation by Bernstein-Chlodowsky polynomials,” *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, c. 32, sayı. 1, ss. 1–5, 2003.
- [111] H. Karsli & E. Ibikli, “Rate of convergence of Chlodowsky-type Bernstein operators for functions of bounded variation,” *Numerical Functional Analysis and Optimization*, c. 28, sayı. 3-4, ss. 367–378, 2007.
- [112] G. Nowak & V. Gupta, “The rate of pointwise approximation of positive linear operators based on  $q$ -integer,” *Ukrainian Mathematical Journal*, c. 63, sayı. 3, 2011.
- [113] H. Karsli, “Recent results on Chlodovsky operators,” *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, c. 56, ss. 423–436, 2011.
- [114] M. Mursaleen, K. J. Ansari & A. Khan, “On  $(p, q)$ -analogue of Bernstein operators,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 266, ss. 874–882, 2015.
- [115] M. Mursaleen, K. J. Ansari & A. Khan, “Some approximation results by  $(p, q)$ -analogue of Bernstein–Stancu operators,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 264, ss. 392–402, 2015.
- [116] A. Aral & V. Gupta, “ $(p, q)$ -type Beta functions of second Kind,” *Advances in Operator Theory*, c. 1, sayı. 1, ss. 134–146, 2016.

- [117] T. Acar, A. Aral & S. A. Mohiuddine, “On Kantorovich modification of  $(p, q)$   $(p, q)$ -Baskakov operators,” *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2016, sayı. 1, ss. 1–14, 2016.
- [118] K. Khan & D. K. Lobiya, “Bèzier curves based on Lupas  $(p, q)$ -analogue of Bernstein functions in cagd,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 317, ss. 458–477, 2017.
- [119] T. Acar, A. Aral & M. Mursaleen, “Approximation by Baskakov-Durrmeyer operators based on  $(p, q)$ -integers,” *Mathematica Slovaca*, c. 68, sayı. 4, ss. 897–906, 2017.
- [120] V. N. Mishra & S. Pandey, “On  $(p, q)$  Baskakov–Durrmeyer–Stancu operators,” *Advances in Applied Clifford Algebras*, c. 27, sayı. 2, ss. 1633–1646, 2017.
- [121] E. Y. Özkan, “Approximation properties of Kantorovich type  $q$ -Balázs-Szabados operators,” *Demonstratio Mathematica*, c. 52, sayı. 1, ss. 10–19, 2019.
- [122] H. Hamal & P. Sabancıgil, “Some approximation properties of new Kantorovich type  $q$ -analogue of Balázs–Szabados operators,” *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2020, sayı. 1, ss. 1–16, 2020.
- [123] T. Acar, S. Mohiuddine & M. Mursaleen, “Approximation by  $(p, q)$ - Baskakov–Durrmeyer– Stancu operators,” *Complex Analysis and Operator Theory*, c. 12, sayı. 6, ss. 1453–1468, 2018.
- [124] T. Acar, M. Mursaleen & S. A. Mohiuddine, “Stancu type  $(p, q)$ -Szász-Mirakyan-Baskakov operators,” *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, c. 67, sayı. 1, ss. 116–128, 2018.
- [125] V. Gupta, “Baskakov-Kantorovich operators,” *Appl. Math. Inf. Sci.*, c. 10, sayı. 4, ss. 1551–1556, 2016.
- [126] K. Kanat & M. Sofyalıoğlu, “Some approximation results for Stancu type Lupas–Schurer operators based on  $(p, q)$ -integers,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 317, ss. 129–142, 2018.

- [127] H. Sharma & C. Gupta, “On  $(p, q)$ -generalization of Szász-Mirakyan Kantorovich operators,” *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana*, c. 8, sayı. 3, ss. 213–222, 2015.
- [128] W. W. Bell, *Special Functions for Scientists and Engineers*, Toronto, Canada: Courier Corporation, 2004.
- [129] O. J. Farrell, & B. Ross, *Solved Problems in Analysis: as Applied to Gamma, Beta, Legendre and Bessel functions*, Hindistan: Courier Corporation, 2013.
- [130] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, New York, ABD: McGraw-hill, 1964.
- [131] N. M. Temme, *Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, New York, ABD: John Wiley & Sons, 1996.
- [132] J. King, “Positive linear operators which preserve  $x^2$ ,” *Acta Mathematica Hungarica*, c. 99, sayı. 3, ss. 203–208, 2003.
- [133] H. Gonska, P. Pitul, & I. Raşa, “General King-type operators,” *Results in Mathematics*, c. 53, sayı. 3, ss. 279–286, 2009.
- [134] D. Cardenas-Morales, P. Garrancho, & I. Raşa, “Bernstein-type operators which preserve polynomials,” *Computers and Mathematics with Applications*, c. 62, sayı. 1, ss. 158–163, 2011.
- [135] A. Aral, D. Inoan, & I. Raşa, “On the generalized Szasz-Mirakyan operators,” *Results in Mathematics*, c. 65, sayı. 3, ss. 441–452, 2014.
- [136] Q. B. Cai, K. J. Ansari, & F. Usta, “A note on new construction of Meyer-König and Zeller operators and its approximation properties,” *Mathematics*, c. 9, sayı. 24, ss. 3275, 2021.
- [137] F. Usta "Approximation theorems for the new construction of Balázs operators and its applications" *Mathematica Slovaca*, c. 72, sayı. 5, ss. 1245-1258, 2022.
- [138] S. Gal, & H. Gonska, “Grbackslash uss and grbackslash uss-Voronovskaya-type estimates for some Bernstein-type polynomials of real and complex variables,” *ArXiv Preprint ArXiv:1401.6824*, 2014.

- [139] R. Özçelik, E.E. Kara, F. Usta, & K.J. Ansari, “Approximation properties of a new family of Gamma operators and their applications” *Adv Differ Equ* 2021, sayı. 508, ss. 80-84, 2021.
- [140] A. Erençin, & I. Raşa, “Voronovskaya type theorems in weighted spaces,” *Numerical Functional Analysis and Optimization*, c. 37, sayı. 12, ss. 1517–1528, 2016.



# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Reyhan ÖZÇELİK

Yabancı Dili : İngilizce

## ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	DÜZCE Üniversitesi	2023
Y. Lisans	Matematik	DÜZCE Üniversitesi	2019
Lisans	Matematik	DÜZCE Üniversitesi	2017

## TEZDEN ÇIKAN YAYINLAR

A1. R. Özçelik, E.E. Kara, F. Usta, & K.J. Ansari, "Approximation properties of a new family of Gamma operators and their applications", *Adv Differ Equ* 2021, sayı. 508, ss. 80-84, 2021.

A2. R. Özçelik, E.E. Kara & F. Usta, "Approximation of Function by A New Class of Gamma Type Operators", Submitted.

## DİĞER YAYINLAR

A3. R. Özçelik, & E.E. Kara, "Coincidence Point Theorems on  $b$ -Metric Spaces via  $C_F$ -Simulation Functions", *Communications in Advanced Mathematical Sciences*, c. 2, sayı. 4, pp. 244-250, 2019.

A4. R. Özçelik, M. İlkhani & E.E. Kara, "Fixed Points of  $(\alpha, \phi)$ -Meir-Keller Contractive Mappings in Generalized Rectangular  $b$ -Metric Spaces", *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, c. 18, s. 12, pp. 1613-1624, 2019.

A5. R. Özçelik, E.E. Kara & F. Usta, "On the Convergence of Modified q-Gamma Type Operators", Submitted.

