T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOKAL KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

TUBA TUNÇ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA

DÜZCE, 2018

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOKAL KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Tuba TUNÇ tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Nesip AKTAN
Necmettin Erbakan Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Mustafa Kemal Yıldız
Afyon Kocatepe Üniversitesi ____________________

Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi ____________________

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi ____________________

Tez Savunma Tarihi: 01/08/2018

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

01/08/2018

Tuba TUNÇ

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca, akademik anlamda bilgi ve deneyimlerini aktaran, her zaman yanımda olan, güvenen, her türlü destek ve yardımını esirgemeyen çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerimle saygı ve şükranlarımı sunarım.

Çalışma ve doktora sürecimin başlangıcından beri iyiki tanımışım dediğim, her daim yanımda olan, dostluk duygusunu en güzel şekilde yaşatan değerli dostum Dr. Öğr. Üyesi İzzettin DEMİR'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Birlikte çalışmaktan mutlu olduğum, desteklerini esirgemeyen, beni sürekli motive eden arkadaşım Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin BUDAK'a en içten dileklerimle teşekkür ederim. 5 yıl boyunca aynı odayı paylaştığım, huzurlu çalışma ortamı sağlayan anlayışlı, ince düşünceli canım arkadaşım Öğr. Gör. Dr. Pınar ZENGİN ALP'e en içten dileklerimle teşekkür ederim. Ayrıca bölümümdeki tüm değerli öğretim üyelerine ve çalışma arkadaşlarıma en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Varlıklarıyla hayatımda ne kadar şanslı olduğumu hissettiren, hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, üstümdeki emeklerine paha biçemediğim en kıymetlilerim canım babam Hayri TUNÇ'a ve canım annem Dilif TUNÇ'a çok teşekkür ederim. Kardeşliğin anlamını en güzel şekilde taşıyan, desteklerini hep arkamda hissettiğim canım abilerim Taylan TUNÇ'a, Emrah TUNÇ'a, Mahmut TUNÇ'a çok teşekkür ederim. Desteklerini hep hissettiğim ailemizin güzelikleri canım yengelerim Özlem TUNÇ'a, Nilüfer TUNÇ'a ve biricik yeğenim, neşe kaynağımız Öykü TUNÇ'a çok teşekkür ederim.

Ortaokul sıralarından beri yanımda olan, desteğini esirgemeyen, varlığıyla mutlu olduğum, dostluk kelimesinin en güzel hali canım kızkardeşim Bahar KAYA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim. Ayrıca bana güvenen ve bu yolda ilerlememi destekleyen tüm arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Doktora çalışmalarım süresince 2211-Yurtiçi Doğrudan Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak azmiyle, kişilğiyle, çalışkanlığıyla, arkadaşlığıyla kısacası her yönüyle adından söz ettirecek ve hiç unutulmayacak olan canım arkadaşım Dr. Öğr. Üyesi Hatice YALDIZ'ı sevgi ve saygıyla anıyorum.

01/08/2018 **Tuba TUNÇ**

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ

SİMGELER

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
Γ	Euler-gama fonksiyonu
I	Reel sayılar kümesinde bir aralık
I^0	I aralığının içi
$\mathbb{R}^\alpha$	α-tipli reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}^\alpha$	α-tipli doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^\alpha$	α-tipli tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}^\alpha$	α-tipli rasyonel sayılar kümesi
$f^{(\alpha)}$	f fonksiyonunun α. dereceden lokal kesirli türevi
$f^{(k\alpha)}$	f fonksiyonunun α. dereceden k defa lokal kesirli türevi
$D_\alpha(a,b)$	(a,b) aralığında α. dereceden lokal kesirli türevlenebilen fonksiyonlar kümesi
$C_\alpha(a,b)$	(a,b) aralığındaki lokal kesirli sürekli fonksiyonlar kümesi
${}_aI_b^\alpha f(x)$	$[a,b]$ aralığı üzerinde f fonksiyonunun lokal kesirli integrali
$I_x^\alpha[a,b]$	$[a,b]$ aralığı üzerinde lokal kesirli integrallenebilen fonksiyonlar kümesi

ÖZET

LOKAL KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Tuba TUNÇ
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Ağustos 2018, 81 sayfa

Matematikte bilindiği üzere fraktal eğriler her yerde sürekli ama hiçbir yerde türevlenemezdir. Bundan dolayı klasik analiz bu gibi eğrilerin ele alınması ve karakterize edilmesi açısından yetersiz kalmıştır. Fraktal üzerindeki olayları tanımlamak ve sürekli ama hiçbir yerde türevlenemeyen fonksiyonların davranışlarını açıklamak için lokal kesirli analiz bir araç olmuştur. Buradan hareketle, lokal kesirli analiz teorisi ile ilgili literatürde var olmayan eşitsizliklerin elde edilmesi yoluyla lokal kesirli analiz alanına katkı sağlamak ve alandaki eksiklikleri gidermek tezin amacını oluşturmuştur. Bu amaç doğrultusunda, tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, eşitsizlik ve lokal kesirli analiz teorilerinin tarihsel sürecinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, üzerinde çalışılan Cantor fraktal kümesi hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca Yang tarafından kurulan ve yeni bir analiz oluşmasını sağlayan $\mathbb{R}^{\alpha}$ uzayı ile ilgili bilgiler ve bu bilgilerden faydalanarak tanımlanan lokal kesirli limit, süreklilik, türev, integral için temel teoremler ve özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde, lokal kesirli integralden yararlanarak Steffensen, Čebyšev, Grüss gibi yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Son bölümde ise bu konu ile ilgili sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Cantor kümesi, Fraktal, Lokal kesirli integral, Lokal kesirli türev.

ABSTRACT

NEW INTEGRAL INEQUALITIES FOR LOCAL FRACTIONAL INTEGRALS AND APPLICATIONS

Tuba TUNÇ
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
August 2018, 81 pages

As it is known in mathematics, fractal curves are everywhere continuous but nowhere differentiable. Therefore, classical analysis is inadequate to handle and characterize such curves. Local fractional analysis has become a tool for describing the events on fractals and the behavior of functions that are everywhere continuous but nowhere differentiable. From this point of view, the aim of the thesis is to contribute to the field of local fractional analysis and to solve the deficiencies in the field by obtaining the inequalities which are not existed in the literature related to the theory of local fractional analysis . For this purpose, the thesis consists of four sections. In the first section, the historical process of inequality and local fractional analysis theories is mentioned. In the second section, information is given about the Cantor fractal set studied. In addition, information about the $\mathbb{R}^{\alpha}$ space which is established by Yang and providing a new analysis has been given and the basic theorems and properties for local fractional limit, continuity, derivative, integral defined by using this information have been given. In the third section, by using local fractional integration new inequalities such as Steffensen, Čebyšev, Grüss are obtained. In the last section, conclusions and recommendations related to this subject are given.

Keywords: Cantor set, Fractal, Local fractional derivative, Local fractional integral.

EXTENDED ABSTRACT

NEW INTEGRAL INEQUALITIES FOR LOCAL FRACTIONAL INTEGRALS AND APPLICATIONS

Tuba TUNÇ
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
August 2018, 81 pages

1. INTRODUCTION

Fractional analysis is a branch of mathematics that deals with the generalization of integral and derivative operations to the fractional order. Fractional derivative and integral concepts were first introduced by Liouville. Then, fractional analysis has improved with the pioneering work of Leibniz, Euler, Lagrange, Abel and many other mathematicians. Using various approaches, several definitions on fractional derivative operators have been made by several mathematicians such as Riemann, Grunwald, Weyl [1]. These fractional derivative operators are non-local operators. But the fractals have a local scaling property.

On the other hand, in the past years it was believed that a continuous function should be differentiable at least at one point. This view was changed in 1872 by Karl Weirstrass. Weirstrass defined the following function that is everywhere continuous but nowhere differentiable [2]:

$$W_{\lambda}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin \lambda^{k} t \quad (t \in \mathbb{R}, \lambda > 1, 1 < s < 2).$$

The graphics of the functions that are everywhere continuous but nowhere differentiable are often similar to fractals. Therefore these irregular functions are also called fractal functions. Classical analysis is insufficient to characterize and handle such irregular curves and planes. Thus, a new analysis was needed to describe the events on the fractals and to explain the behavior of the functions that are everywhere continuous but nowhere differentiable. Local fractional analysis in other words fractal analysis has become a branch of mathematics that responds to these needs.

In recent years, this analysis has attracted considerable attention from scientists and engineers. For this reason, different approaches to the definition of local fractional derivatives have been developed and as a result many local fractional analysis types have emerged. Firstly, the local fractional derivative operator was introduced by Kolwankar and Gangal in the 1990s as a renormalization of the Riemann-Lioville definition [2], [3], [4]. However, several fractional derivatives were presented via Hausdorff measure [5], [6] using fractal geometry [7], [8] and using generalization of Taylor series [9], [10].

In the near future, the simpler absolute definition of local fractional integral and derivative [11], [12], [13] was established by Gao, Yang and Kang through investigating the definition of Kolwankar and Gangal, Adda and Cresson and Jumarie. Using these definitions many studies have been done. Among these [14], [15], [16], [17], [18], [19] referenced studies are also included. Particularly, the inequalities obtained have given the idea of thesis. Apart from the issue of inequality, the local fractional analysis theory also plays an important role in various fields such as elasticity and fracture mechanics [11], signal analysis [20], theoretical physics [21], heat transfer theory [22]. For example fractal heat conduction problems [7], local fractional Fokker-Plank equation [21], local fractional Stieltjes transformation [23], local fractional generalized integrals [24] are a few contributions of local fractional analysis theory.

As is seen, the theory of local fractional analysis has an important place in the literature. As a consequence, the aim of this thesis is to solve the deficiencies and to contribute to the field by means of obtaining new inequalities different from the other ones in the literature .

2. MATERIAL AND METHODS

Firstly, a literature search for local fractional derivative and integral was made in terms of questions such as "What is the cause of existence?", "Which fields are used?", "What kind of studies are there?" and "What is the importance?". As a result, it has been seen that these concepts are related to everywhere continuous nondifferentiable functions which are connected with irregular patterns i.e. fractals and there are various local fractional derivative operators the result of using different approaches. In this thesis, the definition of local fractional derivative and integral introduced by Gao, Yang and Kao is used. Before going into the definition of local fractional derivative and integral,the properties of the space established by Yang to describe these concepts and the characteristics of the Cantor fractal set studied have been examined. Then, the concepts of local fractional derivative and integral, basic theorem and properties about them are given. Finally, using these concepts, basic inequalities that are not in the literature have been obtained.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

Local fractional analysis is a new branch of mathematics that deals with fractional derivatives and integrals of functions defined on fractals. Recently, this area has been of interest to many scientists, engineers and researchers. Because of its importance, opinion of solving the deficiencies in the field and thinking of contributing to the field has helped to occur this thesis. In this thesis, using local fractional derivatives and integrals defined by Gao, Yang and Kao, we obtained Ostrowski-Grüss, Steffensen, Hermite-Hadamard type inequalities besides the fundamental inequalities such as Steffensen, Grüss, Ostrowski which are not in the literature for local fractional analysis. Also, special cases of inequalities have been examined. It is seen that these new inequalities are a generalization of classical inequalities. In the future, it is thought that the inequalities which are obtained in this thesis will be a useful tool for researchers working on local fractional analysis and applications.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK

In this study, we obtain several inequalities for local fractional analysis theory such as Steffensen, Grüss, Ostrowski. Besides, types of them are given. It is seen that the obtained inequalities are generalization of classical inequalities.

In the future studies, researchers interested in the subject can obtain inequalities that are not in the literature for local fractional analysis and can make many applications of these inequalities. On the other hand, two variable functions and various convex functions can be studied on the topic of inequality.

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler, diğer bilim alanlarının yanı sıra matematiğin hemen hemen tüm dallarında önemli bir yere sahiptir. Ayrıca A. L. Cauchy, P. L. Čebyšev, C. F. Gauss ve diğer bilim insanlarının zamanlarından beri yaklaşım metotlarının temellerinin kurulmasında da önemli bir rol oynamaktadır. On dokuzuncu yüzyılın sonu ve yirminci yüzyılın başlarında matematikçiler tarafından, çok sayıda yeni sonuç ve problemlerin oluşmasına neden olan matematik eşitsizliklerinin gücü tanınmış, birçok eşitsizlik incelenmiş ve kullanılmıştır. İlk temel çalışma ise içinde farklı türden klasik ve yeni eşitsizlikler, problemler, sonuçlar, ispat yöntemleri, uygulamalar bulunduran Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934 yılında ortaya konulan "Inequalities" adlı çalışma olmuştur [25]. Bu çalışmanın çeşitli analiz dallarında araştırma üzerinde çok etkisi olmuştur. Ayrıca bu çalışma, analizdeki matematiksel problemler için temel bir kaynak haline gelmiştir. 1965 yılında Beckenbach ve Bellman tarafından yazılan "Inequalities" kitabı [26] ve 1970 yılında Mitrinovic tarafından yayınlanan "Analytic Inequalities" kitabı [27] bu çalışma için tamamlayıcı unsurlar olmuşlardır. Bu kitaplar, detaylı olarak konuları keşfetmek ve eşitsizlik teorisinin uygulanabilir bir araştırma alanı olarak kurulduğunu göstermek isteyen okuyucular için kullanışlı referanslar sağlamıştır.

Bir yüzyılı aşkın bir süredir çeşitli eşitsizliklerin incelenmesi teori ve uygulama ile ilgilenen çoğu araştırmacılar tarafından büyük ilgi odağı olmuştur. Analitik eşitsizlikleri ele almak için farklı araştırmacılar tarafından farklı yaklaşımlar geliştirilmiştir. Temel sonuçlar, yöntemler ve uygulamalar için yeni araştırmacılara yönelik birçok klasik ve önemli kitaplar var olmuştur.

Eşitsizlik teorisi sürekli bir gelişim süreci içindedir ve bu süreçte eşitsizlikler matematiğin çeşitli dallarında çok sayıda problemleri incelemek için çok etkili ve güçlü araçlar haline gelmiştir. Son yıllarda bu teori birden fazla araştırmacının dikkatini çekmiş, yeni araştırma yönlerini uyarmış, matematiksel analiz ve uygulamaların çeşitli yönlerini etkilemiştir. Birçok eşitsizlik arasında Jensen, Hadamard, Hilbert, Čebyšev, Grüss, Ostrowski, Hardy ve Poincare adlarıyla ilişkili olanlar derin köklere sahip olup matematiğin çeşitli dalları üzerinde büyük bir etki yapmışlardır. Bugüne kadar bu eşitsizlikler üzerinde birçok çalışma yapılmış ve çok sayıda sonuçlar elde edilmiştir. Aynı zamanda bu eşitsizlikler birçok çalışmayı da motive etmiştir. Şimdi tez çalışmasını da motive eden ve tezin oluşmasını sağlayan bazı temel eşitsizlikler hakkında aşağıdaki şekilde genel bilgi verilecektir.

Matematiğin temel keşiflerinden biri, 1882 yılında P. L. Čebyšev tarafından ispatlanan ve literatürde Čebyšev eşitsizliği olarak bilinen aşağıdaki eşitsizliktir [28]:
$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyonlar ve birinci türevleri f' ve g' sınırlı olsun. Bu durumda

$$|T(f,g)| \leq \frac{1}{12}(b-a)^2 \left\|f'\right\|_\infty \left\|g'\right\|_\infty \tag{1.1}$$

dır. Bu eşitsizlikte

$$T(f,g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right) \tag{1.2}$$

ve $\|.\|_\infty$ ise $\|p\|_\infty = ess\sup\limits_{t\in[a,b]}|p(t)|$ şeklinde tanımlanan $L_\infty[a,b]$ uzayındaki normdur. Yıllar boyunca (1.1) eşitsizliği birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Bunun sonucu olarak bu eşitsizlik ile ilgili literatürde çok sayıda çalışma ortaya çıkmıştır. Bunlardan birkaçını [29], [30], [31], [32], [33], [34] referanslı çalışmalar olarak verebiliriz.

J. S. Steffensen, 1919 yılında tüm $[a,b]$ aralığı üzerindeki integral ile $[a,b]$ aralığının bir alt kümesi üzerindeki integrali karşılaştıran bir eşitsizlik ispatlamıştır [35]. Literatürdeki adı Steffensen eşitsizliği olarak bilinen bu eşitsizlik aşağıdaki şekilde ifade edilir :
a ve b reel sayılar, $a<b$ olmak üzere $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrallebilen fonksiyonlar öyle ki f artmayan ve her $x\in[a,b]$ için $0\leq g(x)\leq 1$ olsun. Bu durumda

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^{a+\lambda} f(x)dx \tag{1.3}$$

dır. Burada

$$\lambda = \int_a^b g(x)dx$$

şeklindedir. Steffensen eşitsizliği integral eşitsizlikleri çalışmalarında önemli bir rol oynamaktadır. Bundan dolayı matematikçiler tarafından bugün bile hala büyük ilgi görmekte ve bu konuda çok sayıda araştırma makalesini de motive etmektedir. Örnek olarak [36], [37] , [38], [39], [40], [41] çalışmalarına bakılabilinir.

G. Grüss, 1935 yılında iki fonksiyonun çarpımının integrali ile fonksiyonların integralinin çarpımı arasındaki fark için bir tahmin veren aşağıda gösterildiği şekilde ilginç bir eşitsizlik ispatlamıştır [42]:
$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen ve $m, n, M, N \in \mathbb{R}$ olmak üzere tüm $x \in [a,b]$ için

$$m \leq f(x) \leq M \text{ ve } n \leq g(x) \leq N$$

şartlarını sağlayan iki fonksiyon olsun. O halde

$$|T(f,g)| \leq \frac{1}{4}(M-m)(N-n) \tag{1.4}$$

dır. $\frac{1}{4}$ sabiti en iyi olasılıktır. Burada

$$T(f,g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)$$

dır. Grüss eşitsizliğinin diğer integral ve ayrık eşitsizliklerinin yanı sıra daha basit ispatı için Mitrinovic, Pecaric ve Fink tarafından yazılan kitaba [43] bakabilirsiniz. Ayrıca [44], [45], [46], [47] no'lu çalışmalara da bakılabilinir .

A. M. Ostrowski, 1938 yılında aşağıdaki kullanışlı, literatürde önemli bir yere sahip olan eşitsizliği ispatlamıştır [48]:
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Ayrıca $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında sınırlı yani $\|f'\|_\infty := \sup_{t\in(a,b)} |f'(t)| < \infty$ olsun. O halde tüm $x \in [a,b]$ için,

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right](b-a)\|f'\|_\infty \tag{1.5}$$

dır. Buradaki $\frac{1}{4}$ sabiti en iyi sabittir.

Literatürde adı Ostrowski eşitsizliği olan (1.5) eşitsizliği $x \in [a,b]$ noktasındaki $f(x)$ değeri aracılığıyla

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)dt$$

integral ortalamasının yaklaşımı için bir üst sınır belirler. Bu konu ile ilgili bu eşitsizliğin ortaya çıkmasından itibaren literatürde çok sayıda önemli sonuçlar var olmuştur. Bu sonuçlar arasında [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55] referanslı çalışmalar örnek olarak verilebilinir. Ayrıca literatürde (1.4) ve (1.5) eşitsizliklerinin arasındaki bağlantıyı sağlayan birçok Ostrowski-Grüss tipli eşitsizlikler de ortaya çıkmıştır. Bunlardan birkaçını [56], [57], [58], [59] no'lu çalışmalar olarak verebiliriz.

Bir konveks fonksiyonun integral ortalaması ile ilgili olan ve literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen aşağıdaki eşitsizlik C. Hermite ve J. Hadamard tarafından ifade edilmiştir [60]:
$f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu reel sayılar kümesinin bir I aralığında konveks ve $a < b$ olmak üzere $a,b \in I$ olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.6}$$

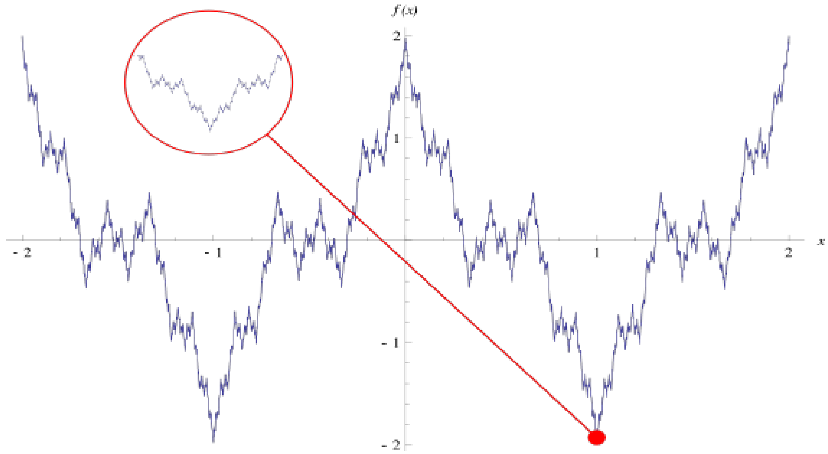
dır. (1.6) eşitsizliği sadeliği, yol açtığı çok sayıda sonuç ve ilgili olabilecek çeşitli uygulamalar açısından dikkate değerdir. Çeşitli uygulamalardaki önemi nedeniyle bu eşitsizlik, yıllar boyunca yoğun ilgi görmüştür. Bunun sonucunda da literatürde bu eşitsizlikle ilgili pekçok kitap ve çalışma var olmuştur. Bunun için [60], [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67], [68] no'lu çalışmalara bakılabilinir.

Kesirli analiz, kesirli mertebe için integral ve türev işlemlerinin genelleştirmesi ile ilgilenen matematiğin bir dalıdır. Kesirli türev ve integral kavramları ilk olarak Liouville tarafından duyurulmuştur. Daha sonra Leibniz, Euler, Lagrange, Abel ve diğer birçok matematikçinin öncü çalışmaları ile kesirli analiz gelişme göstermiştir. Literatürde kesirli türev operatörleri ile ilgili Riemann, Grunwald, Weyl gibi birçok matematikçi tarafından çeşitli yaklaşımlar kullanılarak birçok tanımlama yapılmıştır [1]. Bu kesirli türev operatörleri lokal olmayan operatörler olarak karşımıza çıkar. Ama fraktallar lokal bir ölçekleme özelliğine sahip kümelerdir.

Diğer yandan geçmiş yıllarda, sürekli bir fonksiyonun en azından bir noktada türevlenebilir olması gerektiği düşünülüyordu. Bu görüş, 1872 yılında Karl Weirstrass [2] tarafından kurulan her yerde sürekli ama hiçbir yerde diferansiyellenemeyen

$$W_{\lambda}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{(s-2)k}\sin\lambda^{k}t \quad (t\in\mathbb{R},\lambda>1,1<s<2)$$

fonksiyonu ile değişmiştir.



Şekil 1.1. $[-2,2]$ aralığı üzerinde Weirstrass fonksiyonu

Weirstrass fonksiyonunun grafiği Şekil 1.1'de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi bu özellikteki fonksiyonların grafikleri genellikle fraktallara benzer. Bundan dolayı düzensiz olan bu fonksiyonlara fraktal fonksiyon da denilir. Klasik analiz, böyle düzensiz eğri ve düzlemlerin karakterize edilmesi ve ele alınması açısından yetersiz kalmıştır.

Sonuç olarak fraktallar üzerindeki olayları tanımlamak ve sürekli ama hiçbir yerde türevlenemeyen fonksiyonların davranışlarını açıklamak için yeni bir analize ihtiyaç duyulmuştur. Lokal kesirli analiz diğer bir ifadeyle fraktal analiz, bu ihtiyaçlara cevap veren matematiğin bir dalı olmuştur.

Son yıllarda, bu analiz bilim adamları ve mühendislerin önemli ölçüde dikkatini çekmiştir. Bu nedenle lokal kesirli türev tanımının farklı yaklaşımları oluşmuş ve bunun sonucu olarak da birçok lokal kesirli analiz çeşidi ortaya çıkmıştır. İlk olarak lokal kesirli türev operatörü, 1990 'lı yıllarda Kolwankar ve Gangal tarafından Riemann-Lioville tanımının yeniden normalleştirilmesi yoluyla aşağıdaki şekilde tanıtılmıştır [2], [3], [4]:

$0 < \alpha \leq 1$ ve $d^{\alpha}[f(x)]/[d(x-x_0)]^{\alpha}$ ise α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi olmak üzere

$$ {}_{x_0}D_x^{\alpha} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{d^{\alpha}[f(x) - f(x_0)]}{[d(x-x_0)]^{\alpha}} \tag{1.7}$$

dır. Bu tanım matematik ve mühendislikte geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bununla birlikte Chen, s- boyutlu Hausdorff ölçüsünü [5], [6]; Jumarie, Taylor serisinin bir genellemesini [9], [10] ve He ise fraktal geometriyi kullanarak [7], [8] kesirli mertebeden türev elde etmişlerdir. Ayrıca Parvate ve Gangal fonksiyonların fraktal davranışlarını anlamak [69], [70], Adda ve Cresson ise (1.7) tanımını geliştirmek amacıyla [71] kesirli mertebeden türev elde etmişlerdir. Lokal kesirli türevde olduğu gibi lokal kesirli integral için de birçok farklı yaklaşım vardır. Bunların birkaçı Kolwankar ve Gangal [72], Parvate ve Gangal [69], [70], [73] ve Jumarie [74] tarafından yapılmıştır.

Yakın zamanda ise lokal kesirli integral ve türevin daha basit ve mutlak tanımı Gao, Yang ve Kang tarafından yapılmıştır. Bunun için Jumarie'nin, Adda ve Cresson'nun ve Kolwankar ve Gangal'ın tanımını incelemişler ve bunun sonucunda aşağıdaki lokal kesirli türev ve integrali elde etmişlerdir [11], [12], [13] :

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki α. dereceden lokal kesirli türevi

$$ {}_{x_0}D_x^{\alpha} f(x) =: \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta^{\alpha}[f(x) - f(x_0)]}{(x-x_0)^{\alpha}} \tag{1.8}$$

şeklindedir. Bu tanımda $\Gamma(\alpha) =: \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ klasik Euler Gama fonksiyonu olmak üzere $\Delta^{\alpha}[f(x) - f(x_0)] \cong \Gamma(1+\alpha)[f(x) - f(x_0)]$ dır.

$0 < \alpha \leq 1$ ve $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$ olmak üzere $[a, b]$ aralığının $[t_j, t_{j+1}]$, $(j = 0, \ldots, N-1)$ şeklinde bir bölüntüsü olsun. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun lokal kesirli integrali:

$$ {}_aI_b^{\alpha} f(x) =: \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b f(t)(dt)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)(\Delta t_j)^{\alpha} \tag{1.9}$$

şeklindedir. Bu integralde $\Gamma(\alpha) =: \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ klasik Euler Gama fonksiyonu, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ ve $\Delta t = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_{N-1}\}$ dır.

Yang ve diğerleri tarafından yapılan (1.8) ve (1.9) tanımları kullanılarak birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar arasında [14], [15], [16], [17], [18], [19] referanslı çalışmalar da yer alır. Özellikle, bu tanımlarla elde edilen eşitsizlikler tez çalışmasının oluşmasına fikir ve yön vermiştir. Bu eşitsizliklerden biri olan Hölder eşitsizliği Yang tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir [11]:

$f,g \in C_\alpha[a,b]$ ve $p,q > 1$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b |f(x)g(x)|\,(dx)^\alpha \leq \left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b |f(x)|^p\,(dx)^\alpha\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b |g(x)|^q\,(dx)^\alpha\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Bu eşitsizlikte $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir.

Ayrıca Yang, lokal kesirli integral için Minkowksi eşitsizliğini de şu şekilde ifade etmiştir [11]:

$f,g \in C_\alpha[a,b]$ ve $p > 1$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b |f(x)+g(x)|\,(dx)^\alpha \leq \left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b |f(x)|^p\,(dx)^\alpha\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b |g(x)|^p\,(dx)^\alpha\right)^{\frac{1}{p}}$$

dır.

Mo ve arkadaşları ise [15] çalışmasında genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi belirtmiştir:

$f \in I_x^\alpha[a,b]$ ve f fonksiyonu $a<b$ olmak üzere $[a,b]$ aralığı üzerinde genelleştirilmiş konveks fonksiyon olsun. O halde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}\,{}_aI_b^\alpha f(x) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2^\alpha}$$

dır.

Eşitsizlik konusunun dışında, lokal kesirli analiz teorisinin elastisite ve kırılma mekaniği [11], sinyal analizi [20], teorik fizik [21], ısı iletimi teorisi [22] gibi farklı alanlarda da önemli bir rolü vardır. Örneğin, fraktal ısı iletimi problemleri [7], lokal kesirli Fokker-Plank denklemi [21], lokal kesirli Stieltjes dönüşümü [23], lokal kesirli genelleştirilmiş integraller [24] lokal kesirli analizin bu alanlara olan katkılarından birkaçıdır. Daha fazla bilgi için [75], [76], [77], [78], [79], [80] no'lu çalışmalarına bakılabilinir.

Görüldüğü gibi lokal kesirli analiz teorisi literatürde önemli bir yere sahiptir. Bunun sonucu olarak lokal kesirli analiz ile ilgili literatürde var olan eşitsizlikler dışında yeni eşitsizlikler elde etme aracılığıyla, alandaki eksiklikleri giderme ve alana katkı sağlama düşüncesi bu tezin amacını oluşturmuştur. Bu amaç doğrultusunda, tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, eşitsizlik ve lokal kesirli analiz teorilerinin tarihsel sürecinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, üzerinde çalışılan Cantor fraktal kümesi hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca Yang tarafından kurulan ve yeni bir analiz oluşmasını sağlayan $\mathbb{R}^{\alpha}$ uzayı ile ilgili bilgiler ve bu bilgilerden faydalanarak tanımlanan lokal kesirli limit, süreklilik, türev, integral için temel teoremler ve özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde, lokal kesirli integralden yararlanarak Steffensen, Čebyšev, Grüss gibi yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Son bölümde ise bu konu ile ilgili sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. FRAKTALLAR VE FRAKTAL BOYUT

Benoit Mandelbrot doğanın birçok deseninin alışılmışın dışında ve parçalanmış olduğunu iddia etmektedir. Bu desenlerin varlığı, Öklid'in biçimsiz olarak kenarda bıraktığı formların incelenmesini ve formların morfolojisinin araştırılmasını zorlaştırmaktadır. Mandelbrot, bu zorluğa karşı yeni bir doğa geometrisi geliştirmiştir ve bu şekildeki desenlerin ailesine fraktal ismini vermiştir. "The Fractal Geometry of Nature" adlı kitabında ise [81] tanım olarak "Fraktal, Hausdorff-Besicovitch boyutu kesin olarak topolojik boyutunu aşan bir kümedir." şeklinde vermiştir.

Diğer yandan, fraktallar tamsayı olmayan boyutlara sahip kümeler veya nesneler olarak bilinir. Bir nesnenin boyutu, genellikle negatif olmayan bir tamsayıdır ve verilen nesnenin tam belirtimi için gerekli olan koordinat sayısı ile tanımlanır. Tamsayı olmayan bir boyuta sahip olan fraktal gibi nesneler için koordinatlara bağlı olmayan farklı bir boyut tanımı yapılması gerekir. Buradan hareketle, birçok kesirli boyut tanımı yapılmıştır. Tanımlanan fraktal boyutlar arasında en eski olanı Hausdorff boyutudur. Bu önemli boyutun tanımına geçmeden önce aşağıda gerekli olan bazı tanımlar verilecektir:

Tanım 2.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ kümesi boştan farklı olsun.

$$|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$$

kümesine U kümesinin çapı denir [82].

Tanım 2.2. $F \subset \mathbb{R}^n$ ve δ pozitif bir reel sayı olsun. Her i için $0 \leq |U_i| \leq \delta$ olmak üzere $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ ise $\{U_i\}$ sayılabilir küme ailesine F kümesinin $\delta-$örtüsü denir [82].

Tanım 2.3. $F \subset \mathbb{R}^n$ ve s, δ pozitif reel sayılar olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ için

$$H_\delta^s(F) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}, F \text{ kümesinin bir } \delta - \text{örtüsü}\right\}$$

şeklindedir [82].

Tanım 2.4. Herhangi bir $F \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için,

$$H^s(F) := \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(F)$$

ifadesine F kümesinin $s-$boyutlu Hausdorff ölçüsü denir [82].

Tanım 2.5. Herhangi bir $F \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için,

$$\dim(F) = \inf\{s : H^s(F) = 0\}$$

ifadesine F kümesinin Hausdorff boyutu denir [82].

Tanımdan da görüldüğü gibi Hausdorff boyut, herhangi bir küme için tanımlanır ve bu özelliğinden dolayı en önemli boyutlardan biri olarak bilinir. Bu tanımın en büyük dezavantajı ise algoritmik olmamasıdır. Bu yüzden bir kümenin Hausdorff boyutunu hesaplamak zordur.

Sıradaki bölümde ise bir fraktal küme örneği olan ve üzerinde çalışılan Cantor kümesinin özellikleri ve boyutu hakkında bilgi verilecektir.

2.2. CANTOR KÜMELERİ

Georg Cantor (1845-1918), trigonometrik serilerle ilgili bir problemi çözmek için Cantor üçlü küme örneğini bulmuş ve bir dipnotta [83] ise, herhangi bir aralığın her yerinde yoğun olmayan sonsuz, mükemmel bir küme olarak Cantor üçlü küme örneğini vererek, mükemmel kümelerin her yerde yoğun olması gerekmediğini göstermiştir. Cantor üçlü kümesi olarak bilinen bu küme için "Cantor kümesi" terimi de kullanılır. İnsan sezgisine aykırı gelen özellikleri ve görünen çelişkileri nedeniyle matematikte ilginç bir yere sahip olan Cantor kümesi aşağıdaki şekilde inşa edilir [82], [84]:

$K_0 = [0,1]$ aralığı olsun. K_0 aralığı 3 eşit parçaya bölünsün ve ortadaki açık küme olan $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ aralığı kaldırılsın ve geriye kalan kümeye K_1 denilsin. O halde

$$K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

dir. Daha sonra K_1 kümesindeki iki kapalı kümenin her birinin ortasındaki üçte birlik kısım olan açık aralık kaldırılsın ve geriye kalan kümeye K_2 denilsin. Böylece

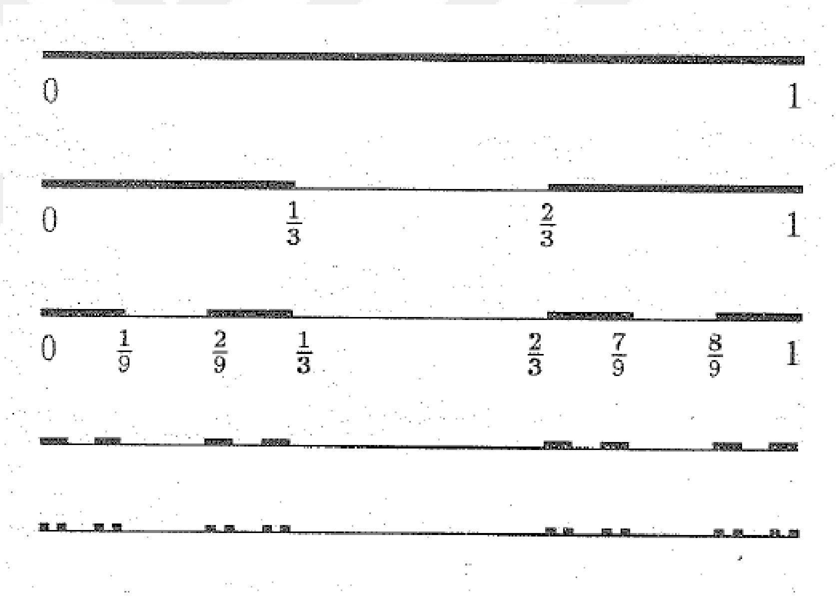
$$K_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

olur. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere her n adımda bu şekilde devam edilip n. adıma gelindiğinde K_n'deki her bir kapalı kümenin ortasındaki üçte birlik açık aralık kaldırılsın ve kalan kümeye K_{n+1} denilsin. Hiçbir sınır tanımadan yani n'yi sonsuza götürerek aynı şekilde işleme devam edilsin. Bu sürecin sonunda

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \tag{2.1}$$

şeklinde bu sürecin de limit kümesi olan yeni bir küme oluşur.

Tanım 2.6. *C* olarak gösterilen kümeye Cantor kümesi denir [82], [84].



Şekil 2.1. Cantor kümesi

2.2.1. Cantor Kümesinin Özellikleri

Cantor kümesinin mükemmel olması, hiçbir yerde yoğun olmaması, sayılamaz olması, hiçbir aralık içermemesi, kompakt olması gibi önemli özellikleri, Cantor kümesinin özel doğasını ortaya çıkarır. Bu özelliklerin ayrıntılı açıklamaları sırasıyla aşağıdaki gibidir :

a. C **kümesi kompakttır [84], [85].**

C kümesinin kompaktlığını göstermek için "$\mathbb{R}$'nin bir alt kümesi kompakttır $\Leftrightarrow$ Kapalı ve sınırlıdır" ifadesi olarak bilinen Heine-Borel teoremi kullanılacaktır. İlk olarak kapalı olduğu gösterilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için K_n kümeleri sonlu sayıda kapalı kümelerin birleşimi olduğundan kapalıdır. C kümesi (2.1)'de görüldüğü gibi K_n kapalı kümelerin bir koleksiyonu olduğundan kapalıdır. Şimdi sınırlı olduğu gösterilsin. K_n kümelerinin her biri $[0,1]$ aralığının altkümesi olduğundan ve C kümesi de (2.1)'de görüldüğü gibi K_n kümelerinin kesişimi olduğundan C kümesi sınırlıdır. Böylece C kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan kompakt olur.

b. C **kümesi mükemmeldir [84], [85].**

Tanım 2.7. A kümesi limit noktalarının kümesine eşit ise A' ya mükemmel küme denir. Diğer bir ifadeyle A kümesi kapalı ve A kümesinin her noktası limit noktası ise A kümesi mükemmeldir [86].

C kümesi kompakt olduğundan kapalıdır. C kümesinin her uç noktası için, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı bir delinmiş komşuluğunun bir tarafında kümede başka bir nokta vardır. Çünkü her basamaktaki kalan aralıklar sonsuz küçük alt aralıklara ayrılmıştır ve reel sayılar sonsuz yoğunluktadır. Benzer şekilde kümedeki her uç olmayan noktalar için, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı bir delinmiş komşuluğunun her iki tarafında kümede başka bir nokta vardır. Bu nedenle kümenin her noktası kümenin limit noktasıdır. Küme kapalı ve her noktası limit noktası olduğundan C kümesi mükemmeldir.

c. C **kümesi yoğun değildir [86].**

Tanım 2.8. (S,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset S$ olsun. Her $U \subset S$ için $V \subset U$ ve $V \cap A = \phi$ olacak şekilde bir $V \in \tau$ kümesi varsa A kümesine S uzayında hiçbir yerde yoğun değildir denir [86].

$I = (a,b) \subset [0,1]$ bir açık aralık olsun. $3^{-k} < b-a$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısı vardır. K_n kümesinden K_{n+1} kümesine geçiş yapılırken, var olan herhangi bir aralığın üç eşit parçaya bölünüp ortadaki parçanın atıldığı bilinmektedir. Bu nedenle, $n+1$. basamakta 3^{-n-1} uzunluğunda üç aralık yanyana bulunmaz. Bu yüzden I aralığı, C kümesinin kuruluşunda

$k+1$. adımda atılan bir J aralığını içerir. Bu da C kümesinin hiçbir açık aralık içermediğini söyler. Buradan da hiçbir yerde yoğun olmadığı görülür.

d. C kümesinin uzunluğu sıfırdır [84], [85].

C kümesinin uzunluğunu bulmak için $[0,1]$ aralığından atılan aralıkların toplam uzunluğunun 1 olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Cantor kümesinin oluşturma sürecine bakıldığında n. adımda her birinin uzunluğu $\frac{1}{3^n}$ olan 2^{n-1} tane aralığın kaldırıldığı görülür. $[0,1]$ aralığının içinden sonsuz sayıda kaldırma işleminden sonra, atılan uzunlukların ayrık olmasından dolayı atılan aralıkların toplam uzunluğu

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\left(\frac{1}{3^k}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1$$

olur. Böylece 1 uzunluğuna sahip olan $[0,1]$ birim aralığından 1 uzunluğundaki küme çıkarılmış olunur. Buradan Cantor kümesinin 0 uzunluğuna sahip olduğu görülür. Ayrıca buradan kümenin hiçbir aralık içermediği sonucuna da ulaşılır.

e. C kümesinin elemanları 3 tabanına göre açılımlarında yalnız 0 ve 2 rakamlarını bulunduran $[0,1]$ aralığındaki sayılardan oluşur [84], [86].

Sayılar genellikle 10 tabanına göre yazılır ve kullanılır. Bu tabanda sayılar yazılırken $0,1,2,3,\ldots,9$ rakamları ve 10 sayısının bir kuvvetini ifade eden bir basamak pozisyonu kullanılır. $[0,1]$ aralığındaki her c sayısının 10 tabanında c_n'ler $0,1,2,3,\ldots,9$ rakamlarından biri olmak üzere $0.c_1c_2\ldots$ şeklinde ondalık bir gösterimi vardır. Burada c_1 onda birler, c_2 yüzde birler,... basamağını gösterir. Bundan dolayı

$$c = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{10^n}$$

şeklinde yazılabilinir. Aynı şey 3 tabanı için düşünülürse c_n'ler $0,1,2$ rakamlarından biri olmak üzere $(0.c_1c_2\ldots)_3$ şeklinde bir gösterimi vardır. Burada c_1 üçte birler , c_2 dokuzda birler,... basamağını gösterir. Benzer şekilde

$$c = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}$$

şeklinde yazılabilinir.

Cantor kümesinin yapısı 3 tabanına uygundur. Birim aralık üç eşit parçaya bölündüğünde, sayıların ilk basamaklarına göre bölündüğü görülür. Sol kısım, üçte birler basamağı sıfır olan; orta kısım üçte birler basamağı 1 olan; sağ kısım ise üçte birler basamağı 2 olan sayılardan oluşur. Ortadaki açık aralığın kaldırılmasıyla üçte birler basamağı 1 olan tüm sayılar atılır. Sol aralık üç eşit parçaya bölünür ve ortadaki aralık kaldırılırsa, 0 ve 1 arasında 3 tabanında .00 ve .02 olarak başlayan sayılar kalır. Bu şekilde devam edildiğinde, Cantor kümesinin elemanlarının 3 tabanına göre sadece 0 ve 2 rakamlarından oluşan sayılardan oluştuğu görülür.

f. C kümesi sayılamazdır [85].

$C = \{x \in [0,1) :$ x sadece 0 ve 2'lerin olduğu üçlü açılıma sahiptir.$\}$ kümesi sayılabilir olsun. Sayılabilirliğin tanımından $f : \mathbb{N} \to C$ birebir ve örten fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = f(n)$ şeklinde tanımlansın. Böylece

$$x_1 = 0.c_{1_1}c_{1_2}c_{1_3}...$$

$$x_2 = 0.c_{2_1}c_{2_2}c_{2_3}...$$

$$\vdots$$

$$x_n = 0.c_{n_1}c_{n_2}c_{n_3}...$$

olmak üzere $C = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ olur. Burada tüm n, m'ler için c_{n_m}, 0 veya 2 dir.

$$c_1 = \begin{cases} 2 & c_{1_1} = 0 \\ 0 & c_{1_1} = 2 \end{cases}, c_2 = \begin{cases} 2 & c_{2_2} = 0 \\ 0 & c_{2_2} = 2 \end{cases}, ..., c_n = \begin{cases} 2 & c_{n_n} = 0 \\ 0 & c_{n_n} = 2 \end{cases}, ...$$

ile $c = 0.c_1c_2c_3...$ tanımlansın. $c \in C$ olduğu açıktır. Fakat herhangi bir n için $c \neq x_n$ dir. Çünkü c'nin 3^{-n}'inci yerinde $c \neq x_n$ dir. Bu bir çelişkidir. Böylece C sayılamazdır.

2.2.2. Cantor Kümesinin Boyutu

Cantor kümesi bitişik olmayan noktaların bir koleksiyonu gibi görünmektedir. Bu yüzden bitişik olmayan noktaların rasgele koleksiyonu sıfır boyutuna sahip olduğundan, Cantor kümesi de sıfır boyutuna sahip olmalıdır. Bu anlamda, Cantor kümesinin topolojik boyutu sıfırdır. Ancak, Hausdorf boyutu gibi farklı bir boyut tanımı kullanmak; nokta, doğru ve düzlemlerin tamsayı boyutlarını korurken, Cantor kümesinin kesir boyuta sahip olduğunun görülmesini sağlar.

Tanım 2.9. $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $|\psi(x) - \psi(y)| \leq c|x-y|$ olacak şekilde $0 < c < 1$ aralığında c elemanı varsa ψ'ye daralma dönüşümü denir [87].

Tanım 2.10. ψ bir daralma dönüşümü olsun.

$$\inf\{c : |\psi(x) - \psi(y)| \leq c|x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}$$

değerine ψ daralma dönüşümünün oranı denir [87].

Tanım 2.11. $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir daralma dönüşümü ve $E \subset \mathbb{R}^n$ olsun. ψ dönüşümü E kümesinin geometrisini korursa (ψ dönüşümü öteleme, dönme, yansıma ve/veya genişlemenin bir birleşimidir.), ψ 'ye bir benzerlik dönüşümü denir [87].

Tanım 2.12. $E \subset \mathbb{R}^n$ ve $\{\psi_i\}_{i=1}^k$ ise daralma dönüşümlerinin sonlu bir ailesi olsun. $E = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \psi_i(E)$ ise E'ye $\{\psi_i\}_{i=1}^k$ ailesine göre invaryant kalır denir [87].

Tanım 2.13. $E \subset \mathbb{R}^n$ ve $\{\psi_i\}_{i=1}^k$ benzerlik dönüşümlerinin bir ailesi öyle ki E kümesi, $\{\psi_i\}_{i=1}^k$ ailesine göre invaryant kalsın. $H^s(E) > 0$ fakat $i \neq j$ için $H^s(\psi_i(E) \cap \psi_j(E)) = 0$ olacak şekilde $s > 0$ varsa E kümesine özbenzeş (self-similar) denir [87].

Tanım 2.14. $\{\psi_i\}_{i=1}^k$ daralma dönüşümlerinin sonlu bir ailesi olsun. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \psi_i(V) \subseteq V$ ve $i \neq j$ için $\psi_i(V) \cap \psi_j(V) = 0$ olacak şekilde sınırlı bir V açık kümesi varsa $\{\psi_i\}_{i=1}^k$ ailesi açık küme şartına sahiptir denir [87].

Bir özbenzeş kümenin Hausdorff boyutu aşağıdaki teorem kullanılarak bulunabilinir:

Teorem 2.15. $\{\psi_i\}_{i=1}^k$ benzerlik dönüşümlerinin bir ailesi öyle ki E kümesi, $\{\psi_i\}_{i=1}^k$ ailesine göre invaryant kalsın. $\{\psi_i\}_{i=1}^k$ ailesi açık küme şartını sağlar ve r_i ise i.nci ψ_i benzerlik dönüşümünün oranı ise E kümesinin Hausdorff boyutu $\sum\limits_{i=1}^{k} (r_i)^s = 1$ eşitliğini sağlayan bir tek pozitif s sayısıdır [87] .

Cantor kümesinin dönüşümleri, yani $\frac{1}{3}x$ üzerindeki tüm varyasyonlar, kümenin geometrisini koruduğu için Cantor kümesi özbenzeştir. Kümenin pozitif bir $s-$boyutlu Hausdorff ölçüsü vardır. Cantor kümesinin Hausdorff boyutu yukarıdaki teorem kullanılarak kolayca gösterilebilinir:

Önerme 2.16. Cantor kümesi C'nin boyutu $d = \frac{\log 2}{\log 3}$ dir [85].

İspat. $\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)$,

$$\psi_1(x) = \frac{1}{3}x$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan $C = \bigcup_{i=1}^{2} \psi_i(C)$ olduğu görülür. Ayrıca, $\{\psi_i\}_{i=1}^{2}$, $V = (0,1)$ için açık küme şartını sağlar. $r_1 = \frac{1}{3}$ ve $r_2 = \frac{1}{3}$ için teorem uygulanırsa, $\sum_{i=1}^{2} (r_i)^s = 1$ eşitliğini sağlayan s, kümenin boyutunu verir. O halde işlemler yapılırsa:

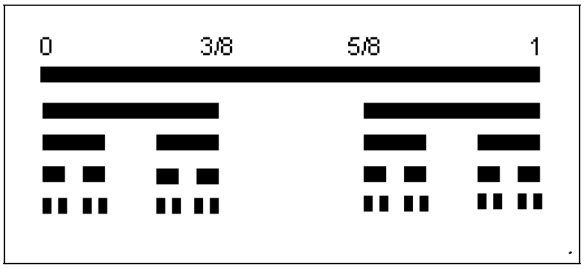
$$\sum_{i=1}^{2} (r_i)^s = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \Longleftrightarrow s = \frac{\log 2}{\log 3}$$

olur. Yani $\dim(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ dir. □

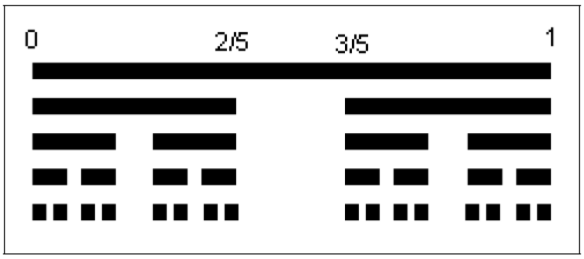
Christopher Shaver, "An Exploration of the Cantor Set" çalışmasında [85] Cantor kümelerinin birkaç genelleştirmesi üzerinde durmuştur. Eğer kaldırma süreci farklı şekilde tanımlanırsa, kümenin boyutu ne olur merakı üzerine bu çalışmayı yapmıştır. Bunun için $[0,1]$ aralığında, k doğal sayısına bağlı olarak üç farklı kaldırma methodu düşünmüştür. Bu methodların her birinde $k = 3$ alınırsa Cantor kümesinin elde edildiği görülür. Şimdi aşağıda bu methodların ne olduğu açıklanacaktır:

1. Method C

$\{C_k\}$, $k \geq 2$ için k doğal sayısına göre tanımlanmış kümelerin bir koleksiyonu olsun. Bu dizideki her bir küme, başlangıç aralığı $[0,1]$ olmak üzere herbir kapalığı aralığın merkezinden $\frac{1}{k}$ uzunluğundaki açık aralığın tekrarlı bir şekilde kaldırılması ile oluşur. Bu yolla, kaldırılan açık aralığın her iki tarafındaki her bir kapalı aralığın uzunluğu $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)$ olur. Örneğin $k = 4$ ve $k = 5$ için,



Şekil 2.2. C_4



Şekil 2.3. C_5

şeklindedir. Her bir C_k kümesi özbenzeş olduğundan kümelerin Hausdorff boyutunu hesaplamak için yukarıdaki teoremden faydalanılacaktır. Hausdorff boyut genel olarak herhangi bir $k \geq 2$ için hesaplanacaktır.

$\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$

$$\phi_1(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)x,$$

$$\phi_2(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan $C_k = \bigcup_{i=1}^{2} \phi_i(C_k)$ olduğu görülür. $r_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)$ ve $r_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)$ için teorem uygulanırsa, $\sum_{i=1}^{2}(r_i)^s = 1$ eşitliğini sağlayan s, kümenin boyutunu verir. O halde işlemler yapılırsa,

$$\sum_{i=1}^{2}(r_i)^s = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)^s = 1 \Longleftrightarrow s = \frac{\log\frac{1}{2}}{\log\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)}$$

olur. Böylece $\dim(C_k) = \dfrac{\log\frac{1}{2}}{\log\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)}$ dir. Ayrıca k sayısı sonsuza yaklaştığında $\dim(C_k)$, 1 değerine yaklaşır.

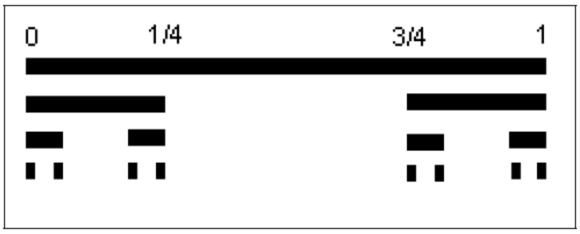
Gerçekten;

$$\lim_{k\to\infty}\dim(C_k)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\log\frac{1}{2}}{\log\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)}\right)=\frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{1}{2}}=1$$

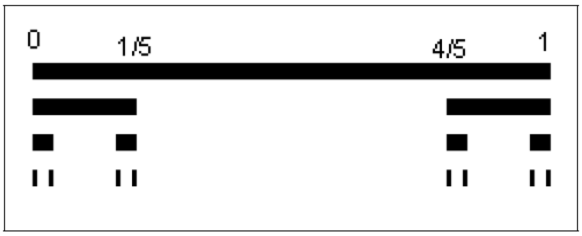
dir. Böylece $[0,1]$ aralığı üç alt aralığa bölündüğü zaman, kaldırılan $\frac{1}{k}$ uzunluğundaki aralık ne kadar küçükse Hausdorff boyut 1'e daha yakındır.

2. Method D

$\{D_k\}$, $k\geq 2$ için k doğal sayısına göre tanımlanmış kümelerin bir koleksiyonu olsun. Bu dizideki her bir küme, başlangıç aralığı $[0,1]$ olmak üzere herbir kapalığı aralığın merkezinden $\left(1-\frac{2}{k}\right)$ uzunluğundaki açık aralığın tekrarlı bir şekilde kaldırılması ile oluşur. Atılan aralığın her iki tarafında $\frac{1}{k}$ uzunluğunda aralıklar oluşur. Bu kaldırma yöntemiyle, k'ya göre yan aralıkların uzunlukları değiştirildiğine ve daha sonra aradaki aralığın kaldırıldığına dikkat edin. Örneğin $k=4$ ve $k=5$ için,



Şekil 2.4. D_4



Şekil 2.5. D_5

şeklindedir. Her bir D_k kümesi özbenzeş olduğundan kümelerin Hausdorff boyutunu hesaplamak için yukarıdaki teoremden faydalanılacaktır. Hausdorff boyut genel olarak herhangi bir $k\geq 2$ için hesaplanacaktır. $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$,

$$\phi_1(x)=\frac{1}{k}x$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{k}x + 1 - \frac{1}{k}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan $D_k = \bigcup_{i=1}^{2} \phi_i(D_k)$ olduğu görülür. $r_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)$ ve $r_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)$ için teorem uygulanırsa, $\sum_{i=1}^{2} (r_i)^s = 1$ eşitliğini sağlayan s, kümenin boyutunu verir. O halde işlemler yapılırsa:

$$\sum_{i=1}^{2} (r_i)^s = 2\left(\frac{1}{k}\right)^s = 1 \Longleftrightarrow s = \frac{\log 2}{\log k}$$

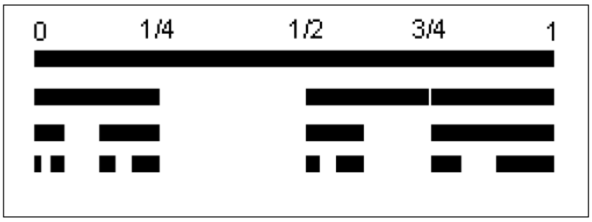
olur. Buradan $\dim(D_k) = \frac{\log 2}{\log k}$ olduğu görülür. Ayrıca k sayısı sonsuza yaklaştığında $\dim(D_k)$, 0 değerine yaklaşır. Gerçekten;

$$\lim_{k\to\infty} \dim(D_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\log 2}{\log k}\right) = 0$$

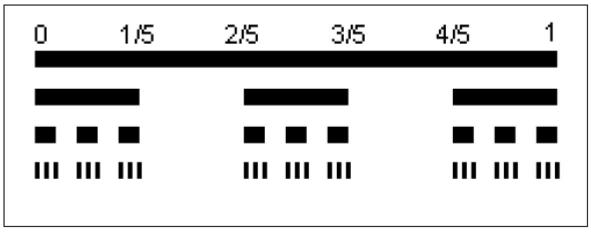
dır. Böylece $[0,1]$ aralığı üç alt aralığa bölündüğü zaman, kaldırılan $\frac{1}{k}$ uzunluğundaki aralık ne kadar küçükse yani kaldırılan $\left(1 - \frac{2}{k}\right)$ uzunluğundaki aralık ne kadar büyükse Hausdorff boyut $0'$a daha yakındır.

3. Method E

$\{E_k\}$, $k \geq 2$ için k doğal sayısına göre tanımlanmış kümelerin bir koleksiyonu olsun. Bu dizideki her bir küme, başlangıç aralığı $[0,1]$ olmak üzere, her bir kapalı aralık k alt aralığa bölünür ve her bir kapalı aralıktan $\frac{1}{k}$ uzunluğunda ardışık açık aralıklar atılır ve bu işlem tekrarlanır. Bu yöntem, benzer ama birbirinden farklı iki durumun oluşmasına neden olur. k sayısı tek ise her biri $\frac{1}{k}$ uzunluğunda olan aralıklar bırakılarak, her bir kapalı aralıktan $\frac{k-1}{2}$ tane ardışık kısım kaldırılır. k sayısı çift ise sol uçta $\frac{1}{k}$ uzunluğunda bir aralık ve sağ uçta birbirine bitişik olan her biri $\frac{1}{k}$ uzunluğundaki iki tam aralık bırakılarak, $\left(\frac{k}{2} - 1\right)$ ardışık kısım kaldırılır. Örneğin $k = 4$ ve $k = 5$ için ;



Şekil 2.6. E_4



Şekil 2.7. E_5

şeklindedir. Kümeleri oluşturmak için farklı dönüşümlere ihtiyaç olduğundan, her iki durum kümelerin farklı Hausdorff boyutlarına sahip olmasını sağlar.

k sayısının tek olması durumunda Hausdorff boyutu bulmak için yukarıdaki teorem kullanılırsa $\phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_{\frac{k+1}{2}}(x)$ dönüşümleri

$$\phi_1(x) = \frac{1}{k}x$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{k}x + \frac{2}{k}$$

$$,...,$$

$$\phi_{\frac{k+1}{2}}(x) = \frac{1}{k}x + \frac{k-1}{k}$$

şeklinde tanımlanır. İhtiyaç duyulan ϕ_i dönüşümlerinin sayısı k doğal sayısının değeri ile belirlenir. k tek sayı olduğunda $\frac{k+1}{2}$ tane dönüşüme ihtiyaç duyulur. $r_1 = \frac{1}{k}, r_2 = \frac{1}{k}, ..., r_{\frac{k+1}{2}} = \frac{1}{k}$ için teorem uygulanırsa

$$\sum_{i=1}^{\frac{k+1}{2}} (r_i)^s = \left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{1}{k}\right)^s = 1$$

eşitliği elde edilir. Buradan $s = \dfrac{\log \frac{k+1}{2}}{\log k}$ bulunur. Böylece $\dim(E_k) = \dfrac{\log \frac{k+1}{2}}{\log k}$ olur. Ayrıca k sayısı sonsuza yaklaştığında $\dim(E_k)$, 1 değerine yaklaşır. Gerçekten;

$$\lim_{k\to\infty} \dim(E_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\log \frac{k+1}{2}}{\log k} \right) = 1$$

dir.

k sayısının çift olması durumunda $\phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_{\frac{k+1}{2}}(x)$ dönüşümleri $\alpha = 1, 2, ..., \left(\frac{k}{2} - 1\right)$ için

$$\phi_1(x) = \frac{1}{k}x$$

$$\phi_\alpha(x) = \frac{1}{k}x + \frac{2}{k}$$

$$, ...,$$

$$\phi_{\frac{k}{2}}(x) = \frac{2}{k}x + \frac{k-1}{k}$$

şeklinde tanımlanır. İhtiyaç duyulan ϕ_i dönüşümlerinin sayısı k doğal sayısının değeri ile belirlenir. k çift sayı olduğunda $\dfrac{k}{2}$ tane dönüşüme ihtiyaç duyulur. $r_1 = \dfrac{1}{k}, r_\alpha = \dfrac{1}{k}, r_{\frac{k}{2}} = \dfrac{2}{k}$ için teorem uygulanırsa

$$\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} (r_i)^s = \left(\frac{k}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{k}\right)^s + \left(\frac{2}{k}\right)^s = 1$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem daha basit olarak

$$\left(\frac{k}{2} - 1\right) = k^s - 2^s$$

şeklinde ifade edilir. Görüldüğü gibi genel bir k değeri için bu denklem çözülebilir değildir. Fakat her bir kümenin boyutu verilen k değeri için, denklemi sağlayan s sayısına eşittir.

Yukarıda açıklanan methodlar karşılaştırıldığında aşağıdaki önemli sonuç verilir [85]:

Sonuç 2.17. $C_3 = D_3 = E_3$.

İspat. C_3 kümesi, $[0, 1]$ başlangıç aralığı olmak üzere her bir kapalı aralığın merkezinden $\frac{1}{3}$ uzunluğunda açık bir aralığın tekrarlı şekilde kaldırılmasıyla yani her iki yanda $\frac{1}{3}$ uzunluğunda kapalı aralıkların bırakılmasıyla oluşur. D_3 kümesi ise $[0, 1]$ başlangıç aralığı olmak üzere her bir kapalı aralığın merkezinden $\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$ uzunluğunda açık bir aralığın tekrarlı şekilde kaldırılıp her iki tarafta $\frac{1}{3}$ uzunluğunda kapalı aralıkların kalmasıyla oluştuğundan, D_3 kümesi C_3'e eşittir. Ayrıca, E_3 kümesi ise $[0,1]$ aralığının üç alt aralığa bölünüp değişen kısım olan orta kısmın kaldırılmasıyla ve bunun sonucunda her iki uçta $\frac{1}{3}$ uzunluğunda aralıkların kalmasıyla oluştuğundan, E_3 kümesi C_3 ve D_3 kümelerine eşittir. Böylece $C_3 = D_3 = E_3$ olur.

$\square$

2.3. KESİRLİ KÜMELER

Bu bölümde $\mathbb{R}^\alpha$ uzayı hakkında genel bilgiler verilmiş olup daha sonra lokal kesirli analiz için temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir [11], [12], [13]. Bu bölüm boyunca $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α fraktal boyutu temsil etmektedir.

2.3.1. α- tipli Kümeler

Tanım 2.18. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere Ω kümesinin α-tipli kümesi Ω^α şeklinde tanımlanır. Bu kümeye, Ω kümesinin kesirli kümesi denir.

Örnek 2.19. Reel sayılar kümesi üzerinde $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ kümesi verilsin. Bu küme ile birebir eşleşen $\Omega^\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i^\alpha, b_i^\alpha)$ kümesi, Ω kümesinin α- tipli kümesidir.

2.3.2. α- tipli Sayı Kümeleri

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere bazı α-tipli kümeler aşağıdaki gibidir:

a. α-tipli doğal sayılar kümesi;	$\mathbb{N}_0^\alpha = \{0^\alpha, 1^\alpha, 2^\alpha, ..., n^\alpha, ...\}$.
b. α-tipli pozitif doğal sayılar kümesi;	$\mathbb{N}^\alpha = \{1^\alpha, 2^\alpha, ..., n^\alpha, ...\}$.
c. α-tipli tamsayılar kümesi;	$\mathbb{Z}^\alpha = \{0^\alpha, \pm 1^\alpha, \pm 2^\alpha ..., \pm n^\alpha, ...\}$.
d. α-tipli rasyonel sayılar kümesi;	$\mathbb{Q}^\alpha = \{m^\alpha = (\frac{p}{q})^\alpha : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.
e. α-tipli irrasyonel sayılar kümesi;	$\mathfrak{I}^\alpha = \{m^\alpha \neq (\frac{p}{q})^\alpha : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.
f. α-tipli reel sayılar kümesi;	$\mathbb{R}^\alpha = \mathfrak{I}^\alpha \cup \mathbb{Q}^\alpha$.

Not 2.20. α-tipli sayı kümeleri arasında $\mathbb{N}^\alpha \subset \mathbb{Z}^\alpha \subset \mathbb{Q}^\alpha \subset \mathbb{R}^\alpha$ şeklinde bir ilişki vardır.

Teorem 2.21. Ω^α kümesi $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$ ile bire-bir eşleşen bir küme ve $A \subset \Omega$ olsun. O halde $A \subset \mathbb{R}$ ile bire-bir eşleşen bir A^α kümesi vardır ve $A^\alpha \subseteq \Omega^\alpha$ dır.

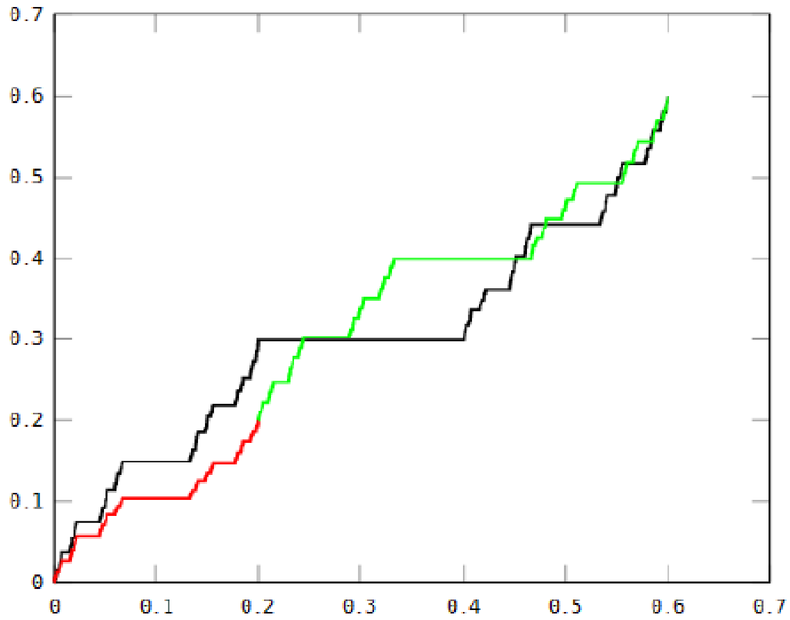
İspat. $A \subseteq \Omega$ ve $x \in A$ keyfi olsun. Böylece $x \in \Omega$ olur. Bir kümenin kesirli kümesinin tanımından $x^\alpha \in A^\alpha$ ve $x^\alpha \in \Omega^\alpha$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

2.3.3. Geometrik Gösterim

Reel sayılar kümesinin kesirli kümesinin herbir elemanı, reel eksen olarak adlandırılan reel doğru üzerindeki bir noktadır. Herbir elemana reel doğruda bir tek nokta karşılık gelir.

Örnek 2.22. $0 < \alpha \leq 1$, α cantor kümesinin boyutu olmak üzere $1^\alpha, 2^\alpha, 3^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ olsun. $1^\alpha + 2^\alpha = 3^\alpha$ dır. Bu ifadenin geometrik yorumu: $[0,3]$ cantor kümesi, $[0,1]$ cantor kümesi ve $[1,3]$ cantor kümesinin toplamına eşittir.

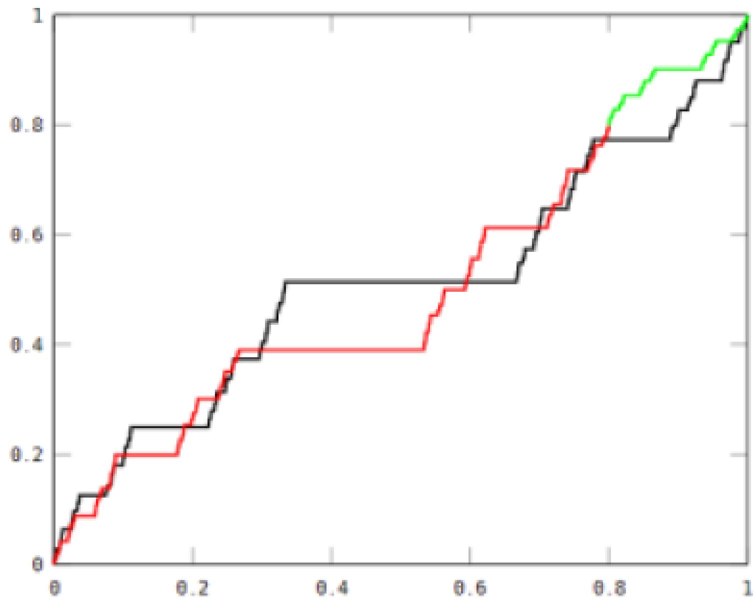
Örnek 2.23. $\alpha = \ln 2/\ln 3$ için $(0.2)^\alpha + (0.4)^\alpha = (0.6)^\alpha$ olup, bu toplama işleminin grafiği



Şekil 2.8. $\alpha = \ln 2/\ln 3$ için $(0.2)^\alpha + (0.4)^\alpha = (0.6)^\alpha$

şeklindedir.

Örnek 2.24. $\alpha = \ln 2/\ln 3$ için $(0.8)^\alpha + (0.2)^\alpha = 1^\alpha$ olup, bu toplama işleminin grafiği



Şekil 2.9. $\alpha = \ln 2/\ln 3$ için $(0.8)^{\alpha} + (0.2)^{\alpha} = 1^{\alpha}$

şeklindedir.

2.3.4. Aritmetik İşlemler

$a^{\alpha}, b^{\alpha}, c^{\alpha} \in \mathbb{R}^{\alpha}$ olmak üzere $\mathbb{R}^{\alpha}$ kümesi üzerinde "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri sırasıyla $a^{\alpha} + b^{\alpha} := (a+b)^{\alpha}$ ve $a^{\alpha} \cdot b^{\alpha} = a^{\alpha} b^{\alpha} := (ab)^{\alpha}$ şeklinde tanımlıdır. Bu işlemlere göre aşağıdaki özellikler mevcuttur:

1. $a^{\alpha} + b^{\alpha} \in \mathbb{R}^{\alpha}$ ve $a^{\alpha} b^{\alpha} \in \mathbb{R}^{\alpha}$,
2. $a^{\alpha} + b^{\alpha} = b^{\alpha} + a^{\alpha} = (a+b)^{\alpha} = (b+a)^{\alpha}$,
3. $a^{\alpha} + (b^{\alpha} + c^{\alpha}) = (a^{\alpha} + b^{\alpha}) + c^{\alpha}$,
4. $a^{\alpha} b^{\alpha} = b^{\alpha} a^{\alpha} = (ab)^{\alpha} = (ba)^{\alpha}$,
5. $a^{\alpha}(b^{\alpha} c^{\alpha}) = (a^{\alpha} b^{\alpha}) c^{\alpha}$,
6. $a^{\alpha}(b^{\alpha} + c^{\alpha}) = a^{\alpha} b^{\alpha} + a^{\alpha} c^{\alpha}$,
7. $a^{\alpha} + 0^{\alpha} = 0^{\alpha} + a^{\alpha} = a^{\alpha}$ ve $a^{\alpha} 1^{\alpha} = 1^{\alpha} a^{\alpha} = a^{\alpha}$.

Not 2.25. $(\mathbb{R}^{\alpha}, +)$ ve $(\mathbb{R}^{\alpha} \setminus \{0^{\alpha}\}, \cdot)$ değişmeli gruplardır. $(\mathbb{R}^{\alpha}, +)$ grubunun etkisiz elemanı 0^{α} ve $(\mathbb{R}^{\alpha} \setminus \{0^{\alpha}\}, \cdot)$ grubunun birim elemanı 1^{α} dır. Ayrıca $a^{\alpha} \in \mathbb{R}^{\alpha}$ elemanın toplama ve çarpma işlemlerine göre tersi sırasıyla $-a^{\alpha}$ ve $(a^{\alpha})^{-1}$ gösterilir. Buradan $a^{\alpha} \in \mathbb{R}^{\alpha}$ elemanın toplama işlemine göre tersi $-a^{\alpha} = (-a)^{\alpha}$; çarpma işlemine göre tersi ise $(a^{\alpha})^{-1} = (a^{-1})^{\alpha}$ dır [88].

Not 2.26. Bir a^{α} sayısının kendisinin p kere çarpılması yani $\overbrace{a^{\alpha} \cdot a^{\alpha} \cdots a^{\alpha}}^{p \text{ tane}}$ çarpımı $a^{p\alpha}$ ile tanımlanır. Burada p sayısına üs ve a^{α} sayısına taban denir. Bu tanıma göre aşağıdaki kurallar geçerlidir:

1. $a^{p\alpha}a^{q\alpha} = a^{(p+q)\alpha}$,
2. $(a^{p\alpha})^{r} = a^{rp\alpha}$,
3. $\dfrac{a^{p\alpha}}{a^{q\alpha}} = a^{(p-q)\alpha}$,
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{p\alpha} = \dfrac{a^{p\alpha}}{b^{p\alpha}}$.

Özellikle $p = q = 0$ olması durumu $a^{0\alpha} = 1^{\alpha}$ şeklinde tanımlanır.

2.3.5. Eşitsizlikler

$a^{\alpha} - b^{\alpha}$ negatif olmayan bir sayı ise "a^{α}, b^{α}'dan büyük veya eşittir." ya da" b^{α}, a^{α}'dan küçük veya eşittir." denir. Bu ifadeler sırasıyla $a^{\alpha} \geq b^{\alpha}$, $b^{\alpha} \leq a^{\alpha}$ şeklinde gösterilir. Eğer $a^{\alpha} = b^{\alpha}$ olma ihtimali yoksa ifadeler $a^{\alpha} > b^{\alpha}$, $b^{\alpha} < a^{\alpha}$ şeklinde yazılır. Bu tanıma göre $a^{\alpha}, b^{\alpha}, c^{\alpha} \in \mathbb{R}^{\alpha}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır:

1. $a^{\alpha} > b^{\alpha}$, $a^{\alpha} = b^{\alpha}$ veya $a^{\alpha} < b^{\alpha}$ durumlarından biri geçerlidir.
2. $a^{\alpha} > b^{\alpha}$ ve $b^{\alpha} > c^{\alpha}$ ise $a^{\alpha} > c^{\alpha}$.
3. $a^{\alpha} > b^{\alpha}$ ise $a^{\alpha} + c^{\alpha} > b^{\alpha} + c^{\alpha}$.
4. $a^{\alpha} > b^{\alpha}$ ve $c^{\alpha} > 0^{\alpha}$ ise $a^{\alpha}c^{\alpha} > b^{\alpha}c^{\alpha}$.
5. $a^{\alpha} > b^{\alpha}$ ve $c^{\alpha} < 0^{\alpha}$ ise $a^{\alpha}c^{\alpha} < b^{\alpha}c^{\alpha}$.

Ayrıca aşağıdaki ifadeler doğrudan bir sonuç olarak verilebilinir:

i. $a^{\alpha} > b^{\alpha}$ ise $a > b$.
ii. $a^{\alpha} = b^{\alpha}$ ise $a = b$.
iii. $a^{\alpha} < b^{\alpha}$ ise $a < b$.

2.3.6. Mutlak Değer

Tanım 2.27. $x^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ olsun.

$$|x^\alpha| = \begin{cases} x^\alpha, & x^\alpha \geq 0^\alpha \\ -x^\alpha, & x^\alpha < 0^\alpha \end{cases}$$

ifadesine x^α'nın mutlak değeri denir.

Mutlak değer ifadesinin bazı özellikleri $a^\alpha, b^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ olmak üzere aşağıdaki gibi verilir:

1. $\left|a^\alpha b^\alpha\right| = \left|a^\alpha\right|\left|b^\alpha\right|$,
2. $\left|a^\alpha\right| - \left|b^\alpha\right| \leq \left|a^\alpha + b^\alpha\right| \leq \left|a^\alpha\right| + \left|b^\alpha\right|$.

2.3.7. Komşuluk ve Limit Noktası

Tanım 2.28. $\delta^\alpha, a^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ ve $\delta^\alpha > 0^\alpha$ olsun.

$$K = \left\{x^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha : |x^\alpha - a^\alpha| < \delta^\alpha\right\}$$

kümesine a^α noktasının $\delta^\alpha-$ komşuluğu denir. $K \backslash \{a^\alpha\}$ kümesine de a^α'nın delinmiş $\delta^\alpha-$ komşuluğu denir.

Tanım 2.29. $A \subseteq \mathbb{R}^\alpha$ ve $a^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ olsun. a^α noktasının her $\delta^\alpha-$ komşuluğunda A kümesinin a^α'dan farklı en az bir elemanı varsa bu a^α noktasına A kümesinin bir limit noktasıdır denir.

2.3.8. Sınırlılık

Tanım 2.30. $A \subseteq \mathbb{R}^\alpha$ olsun. Eğer A kümesinin her x^α elemanı için $x^\alpha \leq M^\alpha$ olacak şekilde bir M^α sayısı varsa A kümesine üstten sınırlıdır denir. M^α sayısına ise A kümesinin bir üst sınırı denir. Benzer şekilde, eğer A kümesinin her x^α elemanı için $x^\alpha \geq m^\alpha$ olacak şekilde bir m^α sayısı varsa A kümesine alttan sınırlıdır denir. m^α sayısına ise A kümesinin bir alt sınırı denir.

Tanım 2.31. $A \subseteq \mathbb{R}^\alpha$ kümesi üstten sınırlı bir küme olsun. A kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne A kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir. $\sup A$ ile gösterilir. A

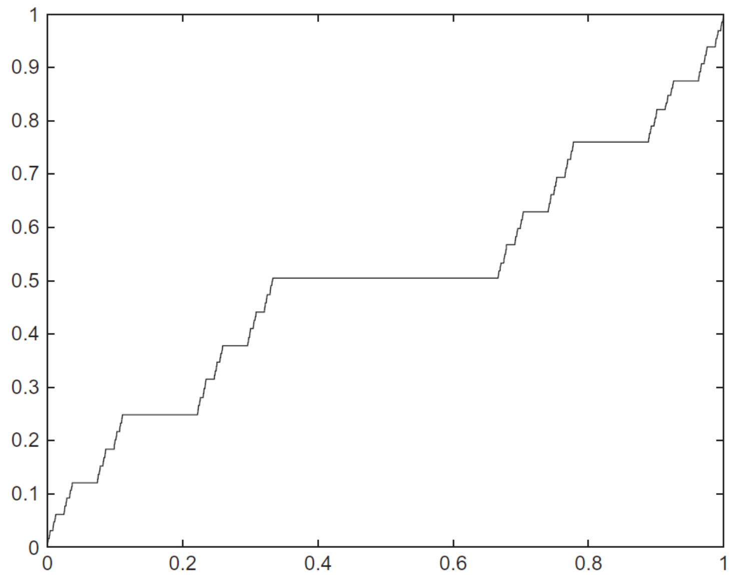
kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne A kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir. $\inf A$ ile gösterilir.

2.3.9. Fonksiyonlar ve Limit

Fraktal küme üzerindeki bir fonksiyonunun tanım kümesinin ve değer kümesinin elemanları sırasıyla $x \in \mathbb{R}$ ve $y^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ olsun. Bu durum $y^\alpha = f(x)$ şeklinde ifade edilir. α boyutlu bir fraktal küme üzerinde tanımlı Lebesgue-Cantor fonksiyonu ise $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$f(x) = x^\alpha$$

şeklindedir. Grafiği ise aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.10. $\alpha = \ln 2/\ln 3$ için x^α fonksiyonun grafiği

Tanım 2.32. $F \subset \mathbb{R}$, $f : F \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı $0 < |x-a| < \delta$ özelliğini sağlayan her $x \in F$ için $|f(x) - l^\alpha| < \varepsilon^\alpha$ olacak şekilde varsa $x = a$ noktasında f fonksiyonunun limiti l^α sayısıdır denir ve $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l^\alpha$ şeklinde gösterilir.

Sıradaki teorem fonksiyonların limitleri ile ilgili özellikleri göstermektedir:

Teorem 2.33. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1^\alpha$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2^\alpha$ olsun. Bu durumda

i. $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) + g(x)\right] = l_1^\alpha + l_2^\alpha$,

ii. $\lim_{x\to a} |f(x)| = |l_1^\alpha|$,

iii. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = l_1^\alpha l_2^\alpha$,

iv. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1^\alpha}{l_2^\alpha} \quad (l_2^\alpha \neq 0^\alpha)$.

2.4. LOKAL KESİRLİ SÜREKLİLİK

Bu alt bölümde Yang'ın kitabında verilmiş olan lokal kesirli süreklilik için temel tanım ve teoremler verilecektir [11], [13] .

Tanım 2.34. $F \subset \mathbb{R}$, $f : F \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon ve $a \in F$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon^\alpha$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna $x = x_0$ noktasında lokal kesirli süreklidir denir. Yani $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ise f fonksiyonuna $x = x_0$ noktasında lokal kesirli süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu F kümesinin her noktasında lokal kesirli sürekli ise f fonksiyonu F üzerinde lokal kesirli süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu $I = (a,b)$ aralığında lokal kesirli sürekli ise $f \in C_\alpha(a,b)$ ile gösterilir.

Tanım 2.35. $F \subset \mathbb{R}$, $f : F \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon ve $x_0 \in F$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $x_0 < x < x_0 + \delta$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon^\alpha$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna $x = x_0$ noktasında sağdan lokal kesirli süreklidir denir. Yani $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ise f fonksiyonuna $x = x_0$ noktasında sağdan lokal kesirli süreklidir denir.

Tanım 2.36. $F \subset \mathbb{R}$, $f : F \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon ve $x_0 \in F$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $x_0 - \delta < x < x_0$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon^\alpha$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna $x = x_0$ noktasında soldan lokal kesirli süreklidir denir. Yani $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ise f fonksiyonuna $x = x_0$ noktasında soldan lokal kesirli süreklidir denir.

Sıradaki sonuç sağdan ve soldan lokal kesirli süreklilik ile lokal kesirli süreklilik arasındaki ilişkiyi göstermektedir:

Sonuç 2.37. $F \subset \mathbb{R}$, $f : F \to \mathbb{R}^{\alpha}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in F$ olsun. Eğer $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ limitleri var ve $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ise

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

bağıntısı vardır.

Teorem 2.38. $F \subset \mathbb{R}$, $f, g : F \to \mathbb{R}^{\alpha}$ iki fonksiyon ve $x_0 \in F$ olsun. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ve $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$ ise

i. $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) \pm g(x)\right] = f(x_0) \pm g(x_0)$;

ii. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$;

iii. $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x)g(x)\right] = f(x_0)g(x_0)$;

iv. $\lim\limits_{x\to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}, \quad (g(x_0) \neq 0^{\alpha})$.

2.5. LOKAL KESİRLİ TÜREV

Bu alt bölümde Yang'ın kitabında verilmiş olan lokal kesirli türev için temel tanım ve teoremler verilecektir [11], [13].

Tanım 2.39. $f \in C_{\alpha}(a,b)$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $\delta > 0$ ve $0 < |x - x_0| < \delta$ için

$$_{x_0}D_x^{\alpha} f(x) =: \lim_{x\to x_0} \frac{\Delta^{\alpha}\left[f(x) - f(x_0)\right]}{(x - x_0)^{\alpha}}$$

limiti var ve sonlu ise bu limite $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki α. dereceden lokal kesirli türevi denir. Bu tanımda $\Gamma(\alpha) =: \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ klasik Euler Gama fonksiyonu olmak üzere $\Delta^{\alpha}\left[f(x) - f(x_0)\right] \cong \Gamma(1+\alpha)\left[f(x) - f(x_0)\right]$ dır. Bu türev

$$\left.\frac{d^{\alpha} f(x)}{dx^{\alpha}}\right|_{x=x_0} \text{ veya } f^{(\alpha)}(x_0)$$

ile gösterilir.

Eğer her $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ için $f^{((k+1)\alpha)}(x) = \overbrace{D_x^{\alpha} ... D_x^{\alpha}}^{k+1 \text{ kere}} f(x)$ türevi varsa bu durum $k = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere $f \in D_{(k+1)\alpha}(I)$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.40. $f \in C_\alpha(a,b)$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $\delta > 0$ ve $x_0 < x < x_0 + \delta$ için

$$ {}_{x_0^+}D_x^\alpha f(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\Delta^\alpha [f(x) - f(x_0)]}{(x - x_0)^\alpha} $$

limiti var ve sonlu ise bu limite $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki α. dereceden sağdan lokal kesirli türevi denir. Bu tanımda $\Delta^\alpha [f(x) - f(x_0)] \cong \Gamma(1+\alpha)[f(x) - f(x_0)]$ dır. Bu türev

$$ \left. \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right|_{x=x_0^+} \text{ veya } f^{(\alpha)}(x_0^+) $$

ile gösterilir.

Tanım 2.41. $f \in C_\alpha(a,b)$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $\delta > 0$ ve $x_0 - \delta < x < x_0$ için

$$ {}_{x_0^-}D_x^\alpha f(x) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{\Delta^\alpha [f(x) - f(x_0)]}{(x - x_0)^\alpha} $$

limiti var ve sonlu ise bu limite $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki α. dereceden soldan lokal kesirli türevi denir. Bu tanımda $\Delta^\alpha [f(x) - f(x_0)] \cong \Gamma(1+\alpha)[f(x) - f(x_0)]$ dır. Bu türev

$$ \left. \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right|_{x=x_0^-} \text{ veya } f^{(\alpha)}(x_0^-) $$

ile gösterilir.

Sıradaki sonuç sağdan ve soldan lokal kesirli türev ile lokal kesirli türev arasındaki ilişkiyi göstermektedir:

Sonuç 2.42. $f \in C_\alpha(a,b)$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer $\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}|_{x=x_0^+}$ ve $\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}|_{x=x_0^-}$ türevleri var ve $\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}|_{x=x_0^+} = \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}|_{x=x_0^-}$ ise

$$ \left. \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right|_{x=x_0^+} = \left. \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right|_{x=x_0^-} = \left. \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right|_{x=x_0} $$

bağıntısı vardır.

Teorem 2.43. $f, g \in D_\alpha(a,b)$ ise aşağıdaki türev alma kuralları geçerlidir:

i. $\dfrac{d^\alpha [f(x) \pm g(x)]}{dx^\alpha} = \dfrac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \pm \dfrac{d^\alpha g(x)}{dx^\alpha}$;

ii. $\dfrac{d^{\alpha}[f(x)g(x)]}{dx^{\alpha}} = g(x)\dfrac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}} + f(x)\dfrac{d^{\alpha}g(x)}{dx^{\alpha}}$;

iii. $\dfrac{d^{\alpha}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]}{dx^{\alpha}} = \dfrac{g(x)\dfrac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}} + f(x)\dfrac{d^{\alpha}g(x)}{dx^{\alpha}}}{g^{2}(x)}$;

iv. $\dfrac{d^{\alpha}[cf(x)]}{dx^{\alpha}} = c\dfrac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}}$, c bir sabit;

v. $f(x) = (g \circ h)(x)$ ise $\dfrac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}} = g^{(\alpha)}(h(x))[h'(x)]^{\alpha}$.

Sonuç 2.44. Özel olarak $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(x) = x^{k\alpha}$ alınırsa,

$$\frac{d^{\alpha}x^{k\alpha}}{dx^{\alpha}} = \frac{\Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)}x^{(k-1)\alpha}$$

türevi elde edilir.

Aşağıdaki teorem lokal kesirli türev ile süreklilik arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir:

Teorem 2.45. $f \in D_{\alpha}(a,b)$ ise $f \in C_{\alpha}(a,b)$ dir.

2.6. LOKAL KESİRLİ İNTEGRAL

Bu alt bölümde Yang'ın kitabında verilmiş olan lokal kesirli integral için temel tanım ve teoremler verilecektir [11], [13].

Tanım 2.46. $f \in C_{\alpha}[a,b]$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$ olmak üzere $[a,b]$ aralığının $\left[t_j, t_{j+1}\right], (j = 0, \ldots, N-1)$ şeklinde bir bölüntüsü olsun. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun lokal kesirli integrali;

$${}_{a}I_{b}^{\alpha}f(x) =: \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b} f(t)(dt)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\lim_{\Delta t \to 0}\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)(\Delta t_j)^{\alpha}$$

şeklinde tanımlanır. Bu integralde $\Gamma(\alpha) =: \int\limits_{0}^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ klasik Euler Gama fonksiyonu, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ ve $\Delta t = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_{N-1}\}$ dır. Bu tanıma göre aşağıdaki özellikler geçerlidir:

i. $a = b$ ise ${}_{a}I_{b}^{\alpha}f(x) = 0$,

ii. $a < b$ ise ${}_aI_b^{\alpha} f(x) = -{}_bI_a^{\alpha} f(x)$.

Ayrıca her $x \in [a,b]$ için ${}_aI_x^{\alpha} f(x)$ integrali mevcutsa $f(x) \in I_x^{\alpha}[a,b]$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.47. $f, g \in C_{\alpha}[a,b]$ olmak üzere lokal kesirli integral için aşağıdaki özellikler vardır:

i. ${}_aI_b^{\alpha}\left[f(x) \pm g(x)\right] = {}_aI_b^{\alpha} f(x) \pm {}_aI_b^{\alpha} g(x)$;

ii. $a < c < b$ olmak üzere ${}_aI_b^{\alpha} f(x) = {}_aI_c^{\alpha} f(x) + {}_cI_b^{\alpha} f(x)$.

iii. ${}_aI_b^{\alpha}\left[Cf(x)\right] = C\,{}_aI_b^{\alpha} f(x)$, C sabit;

iv. $f(x) \geq 0^{\alpha}$ ise ${}_aI_b^{\alpha} f(x) \geq 0^{\alpha}$;

v. $f(x) \geq g(x)$ ise ${}_aI_b^{\alpha} f(x) \geq {}_aI_b^{\alpha} g(x)$;

vi. $\left|{}_aI_b^{\alpha} f(x)\right| \leq {}_aI_b^{\alpha} |f(x)|$;

vii. $[a,b]$ üzerinde $f(x)$ fonksiyonunun maksimum ve minumum değerleri sırasıyla M ve m olmak üzere

$$M\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \geq {}_aI_b^{\alpha} f(x) \geq m\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Not 2.48. Bazı fonksiyonların lokal kesirli integralleri aşağıdaki gibi verilebilir:

1. ${}_aI_b^{\alpha}[1] = (b-a)^{\alpha}/\Gamma(1+\alpha)$;
2. ${}_aI_b^{\alpha}\left[\dfrac{x^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}\right] = \dfrac{b^{(k+1)\alpha}}{\Gamma(1+(k+1)\alpha)} - \dfrac{a^{(k+1)\alpha}}{\Gamma(1+(k+1)\alpha)}$.

Şimdi aşağıda lokal kesirli integraller ile ilgili temel teoremler verilecektir:

Teorem 2.49 (Lokal Kesirli İntegraller için Ortalama Değer Teoremi)**.** $f \in C_{\alpha}[a,b]$ olsun. Bu durumda

$${}_aI_b^{\alpha} f(x) = f(\xi)\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$$

olacak şekilde $\xi \in (a,b)$ vardır.

Teorem 2.50. $f \in C_{\alpha}[a,b]$ olsun. Bu durumda $g(x) = {}_aI_x^{\alpha} f(x)$ olacak şekilde $g \in C_{\alpha}[a,b]$ fonksiyonu vardır ve bu fonksiyonun lokal kesirli türevi $a < x < b$ olmak üzere

$$\frac{d^{\alpha} g(x)}{dx^{\alpha}} = f(x)$$

şeklindedir.

Teorem 2.51 (Lokal Kesirli İntegral için Newton-Leibniz Formülü)**.** f, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve lokal kesirli integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in (a,b)$ için $g^{(\alpha)}(x) = f(x)$ olacak şekilde $g \in C_\alpha[a,b]$ fonksiyonu varsa

$$ {}_aI_b^\alpha f(x) = g(b) - g(a). $$

Teorem 2.52. $g \in C_1[a,b]$ ve $f \circ g \in C_\alpha\big[g(a), g(b)\big]$ olsun. Bu durumda

$$ {}_{g(a)}I_{g(b)}^\alpha f(x) = {}_aI_b^\alpha \big(f \circ g\big)(x)\big[g'(x)\big]^\alpha. \tag{2.2} $$

Teorem 2.53 (Kısmi Lokal Kesirli İntegrasyon)**.** $f, g \in D_\alpha(a,b)$ ve $f^{(\alpha)}$, $g^{(\alpha)} \in C_\alpha[a,b]$ olsun. Bu durumda lokal kesirli integral için kısmi integrasyon

$$ {}_aI_b^\alpha f(x)g^{(\alpha)}(x) = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - {}_aI_b^\alpha f^{(\alpha)}(x)g(x) $$

şeklindedir.

Teorem 2.54 (Lokal Kesirli Taylor Teoremi)**.** $f^{((k+1)\alpha)}(x) \in C_\alpha(a,b)$ olsun. Her $x \in (a,b)$ ve $k = 0, 1, 2, ..., n$ için $a < x_0 < \xi < b$ olmak üzere

$$ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k\alpha)}(x_0)}{\Gamma(1+k\alpha)}(x-x_0)^{k\alpha} + \frac{f^{((n+1)\alpha)}(\zeta)}{\Gamma(1+(n+1)\alpha)}(x-x_0)^{(n+1)\alpha}. $$

Teorem 2.55 (Fubini Teoremi)**.** $F(x,y)$ fonksiyonu $R = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq x \leq d\}$ dikdörtgeni üzerinde lokal sürekli olsun. β, $S^{(\beta)}$ iki boyutlu fraktal alanın fraktal boyutu olmak üzere aşağıdaki eşitlik vardır:

$$ \iint\limits_{S^{(\beta)}} F(x,y)dS^{(\beta)} = \frac{1}{[\Gamma(1+\alpha)]^2} \iint\limits_{S^{(\beta)}} F(x,y)(dx)^\alpha(dy)^\alpha = \frac{1}{[\Gamma(1+\alpha)]^2} \iint\limits_{S^{(\beta)}} F(x,y)(dy)^\alpha(dx)^\alpha. $$

3. LOKAL KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, 2. bölümde verilen lokal kesirli analiz yardımıyla Steffensen, Grüss, Čebyšev gibi temel eşitsizliklerin yanında Ostrowski-Grüss ve Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler de elde edilmiştir.

3.1. STEFFENSEN EŞİTSİZLİĞİ

Bu alt bölümde lokal kesirli integraller için Steffensen eşitsizliği verildikten sonra, bu eşitsizliğin genelleştirilmiş hali ve Steffensen tipindeki eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 3.1 (Genelleştirilmiş Steffensen Eşitsizliği)**.** $f(x), g(x) \in I_x^{\alpha}[a,b]$ öyle ki f artmayan ve $a < b$ için $[a,b]$ üzerinde $0^{\alpha} \leq g(x) \leq 1^{\alpha}$ olsun. Bu takdirde

$$ {}_{b-\lambda}I_b^{\alpha} f(x) \leq {}_aI_b^{\alpha} f(x)g(x) \leq {}_a I_{a+\lambda}^{\alpha} f(x) \tag{3.1}$$

dır. Bu eşitsizlikte

$$\lambda^{\alpha} = \Gamma(1+\alpha)\ {}_aI_b^{\alpha} g(x).$$

İspat. Teoremin ispatı iki farklı yoldan yapılır.

Birinci yol: Direk hesaplamalardan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^{a+\lambda} f(x)(dx)^{\alpha} - {}_aI_b^{\alpha} f(x)g(x) \qquad (3.2) \\ = \ & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^{a+\lambda} [f(x) - f(a+\lambda)]\,[1^{\alpha} - g(x)]\,(dx)^{\alpha} \\ & + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{a+\lambda}^{b} [f(a+\lambda) - f(x)]\,g(x)(dx)^{\alpha} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

(3.2) eşitsizliğinde f fonksiyonunun artmayan özelliği kullanılarak (3.1) eşitsizliğinin ikinci tarafı bulunur. Benzer şekilde direk hesaplamadan

$$
\begin{aligned}
& {}_aI_b^{\alpha} f(x)g(x) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{b-\lambda}^{b} f(x)(dx)^{\alpha} \qquad (3.3) \\
= & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{a}^{b-\lambda} [f(x) - f(b-\lambda)]\, g(x)(dx)^{\alpha} \\
& + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{b-\lambda}^{b} [f(b-\lambda) - f(x)]\, [1^{\alpha} - g(x)]\, (dx)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.3) eşitsizliğinde f fonksiyonunun artmayan özelliği kullanılarak (3.1) eşitsizliğinin birinci tarafı bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

İkinci yol: f artmayan bir fonksiyon olduğundan (3.1) eşitsizliğinin ikinci tarafı:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{a}^{a+\lambda} f(x)(dx)^{\alpha} - {}_aI_b^{\alpha} f(x)g(x) \\
= & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{a}^{a+\lambda} f(x)\, [1^{\alpha} - g(x)]\, (dx)^{\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{a+\lambda}^{b} f(x)g(x)(dx)^{\alpha} \\
\geq & \frac{f(a+\lambda)}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{a}^{a+\lambda} [1^{\alpha} - g(x)]\, (dx)^{\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha} \int\limits_{a+\lambda}^{b} f(x)g(x)(dx)^{\alpha} \\
= & \frac{f(a+\lambda)}{\Gamma(1+\alpha)} \left[\lambda^{\alpha} - \int\limits_{a}^{a+\lambda} g(x)(dx)^{\alpha} \right] - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{a+\lambda}^{b} f(x)g(x)(dx)^{\alpha} \\
= & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{a+\lambda}^{b} [f(a+\lambda) - f(x)]\, g(x)(dx)^{\alpha} \geq 0
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. (3.1) eşitsizliğinin birinci tarafı aynı şekilde hesaplanır. Şimdi

$$G(x) = 1^{\alpha} - g(x)$$

ve

$$\Lambda^{\alpha} = \Gamma(1+\alpha)\, {}_aI_b^{\alpha} G(x)$$

şeklinde tanımlansın. Buradan $x \in (a,b)$ için $0^\alpha \leq g(x) \leq 1^\alpha$ ise $0^\alpha \leq G(x) \leq 1^\alpha$ olduğu görülür. (3.1) eşitsizliğinin ikinci tarafı $G(x)$ fonksiyonu tarafından sağlandığından

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(x)G(x)(dx)^\alpha &\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^{a+\Lambda} f(x)(dx)^\alpha \\
\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(x)(dx)^\alpha - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^{a+\Lambda} f(x)(dx)^\alpha &\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(x)g(x)(dx)^\alpha \\
\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a+\Lambda}^b f(x)(dx)^\alpha &\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(x)g(x)(dx)^\alpha
\end{aligned}$$

yazılır.

$$\Lambda^\alpha = \Gamma(1+\alpha)\ {}_aI_b^\alpha G(x) = b^\alpha - a^\alpha - \lambda^\alpha$$

olduğundan dolayı

$$\Lambda + a = b - \lambda \tag{3.4}$$

dır. (3.4) eşitliğinden

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{b-\lambda}^b f(x)(dx)^\alpha \leq {}_aI_b^\alpha f(x)g(x)$$

eşitsizliği elde edilir ki bu (3.1) eşitsizliğinin birinci kısmını verir. Böylece ispat tamamlanır.

□

Genelleştirilmiş Steffensen eşitsizliğinin ağırlıklı halini ispatlamak için aşağıdaki Lemma'nın ispatına ihtiyaç vardır:

Lemma 3.2. $f(x), g(x), h(x) \in I_x^\alpha[a,b]$ ve λ

$${}_aI_{a+\lambda}^\alpha h(x) = {}_aI_b^\alpha g(x) = {}_{b-\lambda}I_b^\alpha h(x)$$

şartını sağlayan bir reel sayı olsun. Bu takdirde

$${}_aI_b^\alpha f(x)g(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^{a+\lambda} \left(f(x)h(x) - [f(x) - f(a+\lambda)][h(x) - g(x)]\right)(dx)^\alpha \tag{3.5}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a+\lambda}^{b}[f(x)-f(a+\lambda)]\,g(x)(dx)^{\alpha}$$

ve

$$\begin{aligned}{}_{a}I_{b}^{\alpha}f(x)g(x) &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{b-\lambda}^{b}\left(f(x)h(x)-[f(x)-f(b-\lambda)]\,[h(x)-g(x)]\right)(dx)^{\alpha}\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b-\lambda}[f(x)-f(b-\lambda)]\,g(x)(dx)^{\alpha}. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

İspat. Lemma'nın hipotezinden

$$a\leq a+\lambda\leq b \text{ ve } a\leq b-\lambda\leq b$$

dır. İlk önce (3.5) eşitliği ispatlanacaktır. Direk hesaplamalardan

$$\begin{aligned}&{}_{a}I_{b}^{\alpha}f(x)g(x) \qquad (3.7)\\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{a+\lambda}f(x)g(x)(dx)^{\alpha}+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a+\lambda}^{b}f(x)g(x)(dx)^{\alpha}\\ &\quad+\frac{f(a+\lambda)}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\int_{a}^{b}g(x)(dx)^{\alpha}-\int_{a}^{a+\lambda}g(x)(dx)^{\alpha}-\int_{a+\lambda}^{b}g(x)(dx)^{\alpha}\right)\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Lemma'nın

$${}_{a}I_{a+\lambda}^{\alpha}h(x)={}_{a}I_{b}^{\alpha}g(x)$$

varsayımı (3.7) eşitliğinde kullanılarak

$$\begin{aligned}&{}_{a}I_{b}^{\alpha}f(x)g(x) \qquad (3.8)\\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{a+\lambda}\left(f(x)g(x)+f(a+\lambda)\,[h(x)-g(x)]\right)(dx)^{\alpha}\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a+\lambda}^{b}[f(x)-f(a+\lambda)]\,g(x)(dx)^{\alpha}\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. (3.8) eşitliğinin sağ tarafına

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{a+\lambda} f(x)h(x)(dx)^{\alpha}-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{a+\lambda} f(x)h(x)(dx)^{\alpha}$$

ifadesi eklenip ve daha sonra elde edilen sonuca birtakım işlemler uygulandığında istenilen ifadeye ulaşılır. İkinci olarak yukarıdaki işlemler Lemma'nın

$${}_{a}I_{b}^{\alpha}g(x)={}_{b-\lambda}I_{b}^{\alpha}h(x)$$

varsayımı altında uygulandığında ve $a\leq b-\lambda\leq b$ durumu düşünüldüğünde (3.6) eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Şimdi lokal kesirli integraller için genelleştirilmiş Steffensen eşitsizliğinin ağırlıklı hali aşağıdaki gibi verilecektir:

Teorem 3.3. $f(x),g(x),h(x)\in I_{x}^{\alpha}[a,b]$ ve f artmayan fonksiyon olsun. Ayrıca her $x\in[a,b]$ için $0^{\alpha}\leq g(x)\leq h(x)$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
&{}_{b-\lambda}I_{b}^{\alpha}f(x)h(x)\\
\leq\;& \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{b-\lambda}^{b}\left(f(x)h(x)-[f(x)-f(b-\lambda)]\,[h(x)-g(x)]\right)(dx)^{\alpha}\\
\leq\;& {}_{a}I_{b}^{\alpha}f(x)g(x)\\
\leq\;& \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{a+\lambda}\left(f(x)h(x)-[f(x)-f(a+\lambda)]\,[h(x)-g(x)]\right)(dx)^{\alpha}\\
\leq\;& {}_{a}I_{a+\lambda}^{\alpha}f(x)h(x)
\end{aligned}$$

dır. Bu eşitsizliklerde λ,

$${}_{a}I_{a+\lambda}^{\alpha}h(x)={}_{a}I_{b}^{\alpha}g(x)={}_{b-\lambda}I_{b}^{\alpha}h(x)$$

koşulunu sağlayan bir reel sayıdır.

İspat. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde artmayan ve her $x \in [a,b]$ için $0^{\alpha} \leq g(x) \leq h(x)$ olduğundan

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{a}^{b-\lambda} [f(x) - f(b-\lambda)]\, g(x)(dx)^{\alpha} \geq 0, \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{b-\lambda}^{b} [f(b-\lambda) - f(x)]\, [h(x) - g(x)]\, (dx)^{\alpha} \geq 0, \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{a+\lambda}^{b} [f(x) - f(a+\lambda)]\, g(x)(dx)^{\alpha} \leq 0, \tag{3.11}$$

ve

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{a}^{a+\lambda} [f(a+\lambda) - f(x)]\, [h(x) - g(x)]\, (dx)^{\alpha} \leq 0 \tag{3.12}$$

eşitsizlikleri vardır. (3.6)'daki eşitlik ile (3.9) ve (3.11)'deki integral eşitsizliklerini birlikte kullanarak

$$\begin{aligned} & {}_{b-\lambda}I_{b}^{\alpha} f(x)h(x) \\ \leq \; & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{b-\lambda}^{b} \left(f(x)h(x) - [f(x) - f(b-\lambda)]\, [h(x) - g(x)] \right) (dx)^{\alpha} \\ \leq \; & {}_{a}I_{b}^{\alpha} f(x)g(x) \end{aligned} \tag{3.13}$$

bulunur.

(3.5)'deki eşitlik ile (3.11) ve (3.12)'deki integral eşitsizliklerini birlikte kullanarak

$$\begin{aligned} & {}_{a}I_{b}^{\alpha} f(x)g(x) \\ \leq \; & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{a}^{a+\lambda} \left(f(x)h(x) - [f(x) - f(a+\lambda)]\, [h(x) - g(x)] \right) (dx)^{\alpha} \\ \leq \; & {}_{a}I_{a+\lambda}^{\alpha} f(x)h(x) \end{aligned} \tag{3.14}$$

bulunur. (3.13) ve (3.14) birleştirilirse istenen sonuca ulaşılır. $\square$

Sonuç 3.4. $f(x), g(x) \in I_x^{\alpha}[a,b]$ ve f artmayan fonksiyon olsun. Ayrıca her $x \in [a,b]$, $a < b$ için $0^{\alpha} \leq g(x) \leq 1^{\alpha}$ olsun. Bu durumda $\lambda^{\alpha} = \Gamma(1+\alpha)\ {}_aI_b^{\alpha} g(x)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
& {}_{b-\lambda}I_b^{\alpha} f(x) \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{b-\lambda}^{b} \left(f(x) - [f(x) - f(b-\lambda)]\,[1^{\alpha} - g(x)]\right)(dx)^{\alpha} \\
\leq\ & {}_aI_b^{\alpha} f(x) g(x) \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{a}^{a+\lambda} \left(f(x) - [f(x) - f(a+\lambda)]\,[1^{\alpha} - g(x)]\right)(dx)^{\alpha} \\
\leq\ & {}_aI_{a+\lambda}^{\alpha} f(x)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri vardır.

Teorem 3.5. $f(x), g(x), h(x) \in I_x^{\alpha}[a,b]$ ve f artmayan fonksiyon olsun. Ayrıca her $x \in [a,b]$ için

$$0^{\alpha} \leq \psi(x) \leq g(x) \leq h(x) - \psi(x)$$

olsun. Bu taktirde

$$
\begin{aligned}
& {}_{b-\lambda}I_b^{\alpha} f(x)h(x) + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{a}^{b} \left|[f(x) - f(b-\lambda)]\,\psi(x)\right|(dx)^{\alpha} \\
\leq\ & {}_aI_b^{\alpha} f(x) g(x) \\
\leq\ & {}_aI_{a+\lambda}^{\alpha} f(x)h(x) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{a}^{b} \left|[f(x) - f(a+\lambda)]\,\psi(x)\right|(dx)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

dır. Bu eşitsizliklerde λ,

$${}_aI_{a+\lambda}^{\alpha} h(x) = {}_aI_b^{\alpha} g(x) = {}_{b-\lambda}I_b^{\alpha} h(x)$$

koşulunu sağlayan bir reel sayıdır.

İspat. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde artmayan ve her $x \in [a,b]$ için

$$0^{\alpha} \leq \psi(x) \leq g(x) \leq h(x) - \psi(x)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{a}^{a+\lambda} [f(x) - f(a+\lambda)]\,[h(x) - g(x)]\,(dx)^{\alpha} \qquad (3.15) \\ & + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{a+\lambda}^{b} [f(a+\lambda) - f(x)]\,g(x)(dx)^{\alpha} \\ = & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{a}^{a+\lambda} |f(x) - f(a+\lambda)|\,[h(x) - g(x)]\,(dx)^{\alpha} \\ & + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{a+\lambda}^{b} |f(a+\lambda) - f(x)|\,g(x)(dx)^{\alpha} \\ \geq & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{a}^{a+\lambda} |f(x) - f(a+\lambda)|\,\psi(x)(dx)^{\alpha} \\ & + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{a+\lambda}^{b} |f(a+\lambda) - f(x)|\,\psi(x)(dx)^{\alpha} \\ = & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{a}^{b} |[f(x) - f(a+\lambda)]\,\psi(x)|\,(dx)^{\alpha} \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{b-\lambda}^{b} [f(b-\lambda) - f(x)]\,[h(x) - g(x)]\,(dx)^{\alpha} \qquad (3.16) \\ & + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{a}^{b-\lambda} [f(x) - f(b-\lambda)]\,g(x)(dx)^{\alpha} \\ \geq & \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{a}^{b} |[f(x) - f(b-\lambda)]\,\psi(x)|\,(dx)^{\alpha} \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Burada (3.5) ve (3.6) eşitsizliklerinden ve (3.15), (3.16) eşitsizliklerinden istenen sonuç elde edilir. □

Sonuç 3.6. Yukarıdaki teoremin varsayımları altında $h(x) = 1^{\alpha}$ ve $\psi(x) = M^{\alpha}$ şeklinde alınırsa

$$
\begin{aligned}
& {}_{b-\lambda}I_b^{\alpha} f(x) + \frac{M^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b |[f(x) - f(b-\lambda)]| (dx)^{\alpha} \\
\leq \quad & {}_aI_b^{\alpha} f(x) g(x) \\
\leq \quad & {}_{a+\lambda}I_b^{\alpha} f(x) - \frac{M^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b |[f(x) - f(a+\lambda)]| (dx)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliklerde

$$M^{\alpha} \in \mathbb{R}_{+}^{\alpha} \cup \{0^{\alpha}\} \text{ ve } \lambda^{\alpha} = \Gamma(1+\alpha)\ {}_aI_b^{\alpha} g(x)$$

şeklindedir.

Teorem 3.7. $f(x), g(x) \in I_x^{\alpha}[a,b]$ ve f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde artmayan olsun. Ayrıca her $x \in [a,b]$ için

$$0^{\alpha} \leq \lambda_1^{\alpha} \leq \lambda^{\alpha} = \Gamma(1+\alpha)\ {}_aI_b^{\alpha} g(x) \leq \lambda_2^{\alpha} \leq (b-a)^{\alpha}$$

ve

$$0^{\alpha} \leq M^{\alpha} \leq g(x) \leq (1-M)^{\alpha}$$

olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
& {}_{b-\lambda_1}I_b^{\alpha} f(x) + \frac{f(b)}{\Gamma(1+\alpha)} (\lambda - \lambda_1)^{\alpha} + \frac{M^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b |[f(x) - f(b-\lambda)]| (dx)^{\alpha} \\
\leq \quad & {}_aI_b^{\alpha} f(x) g(x) \\
\leq \quad & {}_aI_{a+\lambda_2}^{\alpha} f(x) + \frac{f(b)}{\Gamma(1+\alpha)} (\lambda_2 - \lambda)^{\alpha} - \frac{M^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b |[f(x) - f(a+\lambda)]| (dx)^{\alpha}.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

İspat. Direk hesaplamalardan

$$
{}_aI_b^{\alpha} f(x)g(x) - {}_aI_{a+\lambda_2}^{\alpha} f(x) + \frac{f(b)}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\lambda_2^{\alpha} - \int_a^b g(x)(dx)^{\alpha}\right) \tag{3.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\int_a^b f(x)g(x)(dx)^{\alpha} - \int_a^{a+\lambda_2} f(x)(dx)^{\alpha}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\int_a^{a+\lambda_2} f(b)(dx)^{\alpha} - \int_a^b f(b)g(x)(dx)^{\alpha}\right) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b [f(x)-f(b)]\,g(x)(dx)^{\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^{a+\lambda} [f(x)-f(b)]\,(dx)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

dır. Teoremin

$$
0^{\alpha} \leq \lambda_1^{\alpha} \leq \lambda^{\alpha} \leq \lambda_2^{\alpha} \leq (b-a)^{\alpha}
$$

varsayımından

$$
a^{\alpha} \leq a^{\alpha} + \lambda^{\alpha} \leq a^{\alpha} + \lambda_2^{\alpha} \leq b^{\alpha}
$$

olur. Buradan

$$
a \leq a+\lambda \leq a+\lambda_2 \leq b
$$

sonucu ortaya çıkar. Ayrıca f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde artmayan olduğundan, her $x \in [a,b]$ için $f(x)-f(b) \geq 0^{\alpha}$ dır. Diğer yandan $f(x)-f(b) \in I_x^{\alpha}[a,b]$ ve $[a,b]$ üzerinde artmayan fonksiyondur. Böylece Sonuç 3.6'da $f(x)$ yerine $f(x)-f(b)$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b [f(x)-f(b)]\,g(x)(dx)^{\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a+\lambda}^b [f(x)-f(b)]\,(dx)^{\alpha} \\
&\leq -\frac{M}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b |[f(x)-f(a+\lambda)]|\,(dx)^{\alpha}
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

eşitsizliği bulunur. (3.18) ve (3.19) eşitsizlikleri birleştirilirse

$$
{}_aI_b^{\alpha} f(x)g(x) - {}_aI_{a+\lambda_2}^{\alpha} f(x) + \frac{f(b)}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\lambda_2^{\alpha} - \lambda^{\alpha}\right)
$$

$$\leq \quad -\frac{M^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b}|[f(x)-f(a+\lambda)]|(dx)^{\alpha}$$

olur ki bu (3.17)'nin ikinci tarafını verir. Benzer şekilde

$$_{a}I_{b}^{\alpha}f(x)g(x)-_{b-\lambda_1}I_{b}^{\alpha}f(x)-\frac{f(b)}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\int_{a}^{b}g(x)(dx)^{\alpha}-\lambda_1^{\alpha}\right)$$

$$\geq \quad \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b}[f(x)-f(b)]\,g(x)(dx)^{\alpha}+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{b-\lambda}^{b}[f(b)-f(x)]\,(dx)^{\alpha}$$

$$\geq \quad \frac{M^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b}|[f(x)-f(b-\lambda)]|(dx)^{\alpha}$$

eşitsizliği ispatlanır. Bu ise (3.17)'nin birinci tarafını verir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.8. $g(x),\phi(x)\in I_{x}^{\alpha}[0,1]$ negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Ayrıca $f:\mathbb{R}\to[0,1]$ artmayan ve ϕ artan, $0^{\alpha}\leq g(x)\leq 1^{\alpha}$ ve $p\geq 1$,

$$\phi(\lambda^{\frac{1}{p}})\leq\lambda^{\alpha}$$

olsun. O halde

$$_{0}I_{\lambda}^{\alpha}\phi(f(x))\geq\lambda^{\frac{-\alpha}{p}}\phi(\lambda^{\frac{1}{p}})\,{}_{0}I_{1}^{\alpha}\phi(f(x))g(x)$$

dır. Bu eşitsizlikte

$$\lambda^{\frac{\alpha}{p}}=\Gamma(1+\alpha)_{0}I_{1}^{\alpha}g(x)$$

şeklindedir.

İspat. $\phi\geq 0^{\alpha}$ artan ve f artmayan olduğundan $\phi(f)$ artmayandır. Ayrıca

$$\lambda^{\frac{-\alpha}{p}}\phi(\lambda^{\frac{1}{p}})g(x)\leq\lambda^{\frac{-\alpha}{p}}\phi(\lambda^{\frac{1}{p}})\leq\lambda^{\alpha-\frac{\alpha}{p}}\leq 1^{\alpha}$$

olduğu kullanılarak

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{0}^{\lambda}\phi(f(x))(dx)^{\alpha}-\lambda^{\frac{-\alpha}{p}}\phi(\lambda^{\frac{1}{p}})\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{0}^{1}\phi(f(x))g(x)(dx)^{\alpha}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{\lambda} \phi(f(x))(dx)^{\alpha} - \lambda^{\frac{-\alpha}{p}} \phi(\lambda^{\frac{1}{p}}) \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\int_0^{\lambda} + \int_{\lambda}^{1} \right) \phi(f(x))g(x)(dx)^{\alpha} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{\lambda} \phi(f(x)) \left[1^{\alpha} - \lambda^{\frac{-\alpha}{p}} \phi(\lambda^{\frac{1}{p}}) g(x) \right] (dx)^{\alpha} \\
&\quad - \lambda^{\frac{-\alpha}{p}} \phi(\lambda^{\frac{1}{p}}) \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{\lambda}^{1} \phi(f(x))g(x)(dx)^{\alpha} \\
&\geq \phi(f(\lambda)) \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left[\int_0^{\lambda} \left[1^{\alpha} - \lambda^{\frac{-\alpha}{p}} \phi(\lambda^{\frac{1}{p}}) g(x) \right] (dx)^{\alpha} - \lambda^{\frac{-\alpha}{p}} \phi(\lambda^{\frac{1}{p}}) \int_{\lambda}^{1} g(x)(dx)^{\alpha} \right] \\
&= \phi(f(\lambda)) \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left[\lambda^{\alpha} - \lambda^{\frac{-\alpha}{p}} \phi(\lambda^{\frac{1}{p}}) \int_0^{1} g(x)(dx)^{\alpha} \right] \\
&= \phi(f(\lambda)) \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left[\lambda^{\alpha} - \phi(\lambda^{\frac{1}{p}}) \right] \geq 0^{\alpha}
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Böylece istenilen ifadeye ulaşılmış olunur. □

Teorem 3.9. $g(x), \phi(x), h(x) \in I_x^{\alpha}[0,1]$ negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Ayrıca $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ artmayan ve ϕ artan, $0^{\alpha} \leq g(x) \leq 1^{\alpha}$ ve $p \geq 1$,

$$
\phi(\lambda^{\frac{1}{p}}) \leq \Gamma(1+\alpha)\ {}_0I_{\lambda}^{\alpha} h(x),\ \lambda^{\frac{-\alpha}{p}} \phi(\lambda^{\frac{1}{p}}) \leq h(x)
$$

olsun. O halde

$$
{}_0I_{\lambda}^{\alpha} \phi(f(x))h(x) \geq \lambda^{\frac{-\alpha}{p}} \phi(\lambda^{\frac{1}{p}})\ {}_0I_1^{\alpha} \phi(f(x))g(x)
$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte

$$
\lambda^{\frac{\alpha}{p}} = \Gamma(1+\alpha)_0 I_1^{\alpha} g(x)
$$

şeklindedir.

İspat. $\phi \geq 0^{\alpha}$ artan ve f artmayan olduğundan $\phi(f)$ artmayandır. ϕ fonksiyonunun bu özelliği ve teoremin varsayımları kullanıldığında

$$
\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{\lambda} \phi(f(x))h(x)(dx)^{\alpha} - \lambda^{\frac{-\alpha}{p}} \phi(\lambda^{\frac{1}{p}}) \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{1} \phi(f(x))g(x)(dx)^{\alpha}
$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\lambda \phi(f(x))h(x)(dx)^\alpha - \lambda^{\frac{-\alpha}{p}}\phi(\lambda^{\frac{1}{p}})\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\int_0^\lambda + \int_\lambda^1\right)\phi(f(x))g(x)(dx)^\alpha$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\lambda \phi(f(x))\left[h(x) - \lambda^{\frac{-\alpha}{p}}\phi(\lambda^{\frac{1}{p}})g(x)\right](dx)^\alpha$$

$$-\lambda^{\frac{-\alpha}{p}}\phi(\lambda^{\frac{1}{p}})\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_\lambda^1 \phi(f(x))g(x)(dx)^\alpha$$

$$\geq \phi(f(\lambda))\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\int_0^\lambda [h(x) - \lambda^{\frac{-\alpha}{p}}\phi(\lambda^{\frac{1}{p}})g(x)](dx)^\alpha - \lambda^{\frac{-\alpha}{p}}\phi(\lambda^{\frac{1}{p}})\int_\lambda^1 g(x)(dx)^\alpha\right]$$

$$= \phi(f(\lambda))\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\int_0^\lambda h(x)(dx)^\alpha - \lambda^{\frac{-\alpha}{p}}\phi(\lambda^{\frac{1}{p}})\int_0^1 g(x)(dx)^\alpha\right]$$

$$= \phi(f(\lambda))\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\int_0^\lambda h(x)(dx)^\alpha - \phi(\lambda^{\frac{1}{p}})\right] \geq 0^\alpha$$

elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanır. □

Teorem 3.10. $g(x), \phi(x) \in I_x^\alpha[0,1]$ negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Ayrıca $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ artmayan ve ϕ artan, $\varphi(p) > 0$, $\lambda^{\alpha\varphi(p)}g \leq 1^\alpha$ ve $\lambda^{\alpha(1-\varphi(p))} = \Gamma(1+\alpha)\ {}_0I_1^\alpha g(x)$ olsun. Bu takdirde

$${}_0I_\lambda^\alpha \phi(f(x)) \geq \lambda^{\alpha\varphi(p)}\ {}_0I_1^\alpha \phi(f(x))g(x)$$

dır.

İspat. $\phi \geq 0^\alpha$ artan ve f artmayan olduğundan $\phi(f)$ artmayandır. Ayrıca

$$\lambda^{\alpha\varphi(p)}g \leq 1^\alpha \Longrightarrow \lambda^{\alpha\varphi(p)}\int_0^1 g(x)(dx)^\alpha \leq 1^\alpha \Longrightarrow \lambda^\alpha \leq 1^\alpha \Longrightarrow \lambda \leq 1$$

dır. Bu durumda

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\lambda \phi(f(x))(dx)^\alpha - \lambda^{\alpha\varphi(p)}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \phi(f(x))g(x)(dx)^\alpha$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\lambda \phi(f(x))(dx)^\alpha - \lambda^{\alpha\varphi(p)}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\int_0^\lambda + \int_\lambda^1\right)\phi(f(x))g(x)(dx)^\alpha$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\lambda \phi(f(x))\left[1^\alpha - \lambda^{\alpha\varphi(p)}g(x)\right](dx)^\alpha - \lambda^{\alpha\varphi(p)}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_\lambda^1 \phi(f(x))g(x)(dx)^\alpha$$

$$\geq \phi(f(\lambda))\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\int_0^\lambda \left[1^\alpha - \lambda^{\alpha\varphi(p)}g(x)\right](dx)^\alpha - \lambda^{\alpha\varphi(p)})\int_\lambda^1 g(x)(dx)^\alpha\right]$$

$$= \phi(f(\lambda))\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\lambda^\alpha - \lambda^{\alpha\varphi(p)}\int_0^1 g(x)(dx)^\alpha\right]$$

$$= \phi(f(\lambda))\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}[\lambda^\alpha - \lambda^\alpha] = 0^\alpha$$

sonucu vardır. Böylece istenilen ifade elde edilir. □

Sonuç 3.11. $g(x), \phi(x) \in I_x^\alpha[0,1]$ negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Ayrıca $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ artmayan ve ϕ artan, $0^\alpha \leq g \leq 1^\alpha$ ve $p > 0$ için $\lambda^\alpha = \left[\Gamma(1+\alpha)_0 I_1^\alpha g(x)\right]^{\frac{p}{2p-1}}$ olsun. O halde

$${}_0I_\lambda^\alpha \phi(f(x)) \geq \lambda^{\frac{\alpha}{(\frac{1}{p}-1)}}\ {}_0I_1^\alpha \phi(f(x))g(x)$$

dır.

İspat. Teorem 3.10 'nun ispatında, $\varphi(p) = \frac{1}{p} - 1,\ 0 < p < 1$ alınırsa istenen sonuç elde edilir. □

Şimdi sonraki birkaç teoremde kullanılacak olan aşağıdaki önemli özdeşlik verilecektir. Bu durumda $T_k(x)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$T_k(x) = \frac{(n-1-k)^\alpha}{\Gamma(1+k\alpha)}\left(\frac{f^{(k\alpha)}(a)(x-a)^{k\alpha} - f^{(k\alpha)}(b)(x-b)^\alpha}{(b-a)^\alpha}\right).$$

Lemma 3.12. $f^{((n-1)\alpha)}(t)$, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $f^{(n\alpha)}(x) \in I_x^\alpha[a,b]$ olsun. O halde

$$\frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{f(x)}{\Gamma(1+\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} F_k\right) - \frac{1}{(b-a)^\alpha\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(y)(dy)^\alpha$$

$$= \frac{1}{n^\alpha\ (b-a)^\alpha\Gamma\big(1+(n-1)\alpha\big)[\Gamma(1+\alpha)]^2}$$

$$\times \int_a^b (x-t)^{(n-1)\alpha}\ \kappa_\alpha(t,x) f^{(n\alpha)}(t)(dt)^\alpha$$

dır. Bu eşitlikte

$$F_k(x) = \frac{(n-k)^\alpha}{\Gamma(1+k\alpha)} \left(\frac{f^{((k-1)\alpha)}(a)(x-a)^{k\alpha} - f^{((k-1)\alpha)}(b)(x-b)^{k\alpha}}{(b-a)^\alpha} \right)$$

ve

$$\kappa_\alpha(t,x) = \begin{cases} (t-a)^\alpha, & (a \le t \le x \le b) \\ \\ (t-b)^\alpha, & (a \le x < t \le b) \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. İlk olarak

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k\alpha)}(y)(x-y)^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b \frac{f^{(n\alpha)}(t)(x-t)^{(n-1)\alpha}}{\Gamma\big(1+(n-1)\alpha\big)} (dt)^\alpha$$

lokal kesirli analizdeki Taylor formülünün $[a,b]$ aralığı üzerinde y'ye göre integrali alınarak başlanılacaktır. Son terimin integralini almak için

$$\int_a^b (dy)^\alpha \int_y^x (dt)^\alpha = \int_a^x (dy)^\alpha \int_y^x (dt)^\alpha + \int_x^b (dy)^\alpha \int_y^x (dt)^\alpha$$

$$= \int_a^x (dt)^\alpha \int_a^t (dy)^\alpha - \int_x^b (dy)^\alpha \int_x^y (dt)^\alpha$$

$$= \int_a^x (dt)^\alpha \int_a^t (dy)^\alpha - \int_x^b (dt)^\alpha \int_t^b (dy)^\alpha$$

eşitliğinden yararlanılır. Böylece yukarıdaki Taylor formülü

$$\frac{f(x)(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b f(y)(dy)^\alpha + \sum_{k=1}^{n-1} I_k + \frac{1}{\Gamma\big(1+(n-1)\alpha\big)[\Gamma(1+\alpha)]^2} \qquad (3.20)$$

$$\times \int_a^b f^{(n\alpha)}(t)(x-t)^{(n-1)\alpha} \kappa_\alpha(t,x)(dt)^\alpha$$

şekline dönüşür. Burada

$$I_k(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b \frac{f^{(k\alpha)}(y)(x-y)^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} (dy)^\alpha$$

dır. $I_k(x)$ için yukarıdaki ifadede kısmi lokal kesirli integrasyon yapılırsa

$$I_k(x) = I_{k-1}(x) - (b-a)^\alpha F_k(x)(n-k)^{-\alpha} \qquad (1 \le k \le n-1) \tag{3.21}$$

elde edilir. Böylece

$$(n-k)^\alpha \left[I_k(x) - I_{k-1}(x)\right] = -(b-a)^\alpha F_k(x) \tag{3.22}$$

olur. (3.22) eşitliğinde $k = 1$'den $k = n-1$'e kadar toplam alınırsa

$$\sum_{k=1}^{n-1} I_k = -(b-a)^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} F_k(x) + (n-1)^\alpha I_0 \tag{3.23}$$

eşitliği bulunur. (3.23) eşitliğinin (3.20)'de yerine yazılması ve sonra gerekli düzenlemeler yapılması sonucunda istenilen ifadeye ulaşılınır. □

Teorem 3.13. $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^\alpha$ fonksiyonu öyle ki $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ için $f^{((n-1)\alpha)}$ mutlak sürekli; $g(x), h(x) \in I_x^\alpha[a,b]$ fonksiyonları da öyle ki $[a,b]$ üzerinde h fonksiyonu pozitif ve $0^\alpha \le g(x) \le 1^\alpha$ olsun. Ayrıca

$${}_aI_{a+\lambda} h(t) = {}_aI_b g(t)h(t)$$

olsun ve S_1 fonksiyonu

$$S_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^x \left[1^\alpha - g(t)\right] h(t)(dt)^\alpha & x \in [a, a+\lambda] \\ \\ \dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_x^b g(t)h(t)(dt)^\alpha & x \in [a+\lambda, b] \end{cases} \tag{3.24}$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^{a+\lambda} f(t)h(t)(dt)^\alpha - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b f(t)g(t)h(t)(dt)^\alpha \tag{3.25}$$
$$-\Gamma(1+\alpha) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b S_1(x) T_k(x)(dx)^\alpha$$

$$= -\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma\big(1+(n-2)\alpha\big)[\Gamma(1+\alpha)]^2}$$

$$\times \int_a^b \left(\int_a^b S_1(x)(x-t)^{(n-2)\alpha}\, \kappa_\alpha(t,x)(dx)^\alpha \right) f^{(n\alpha)}(t)(dt)^\alpha$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Kolayca görülür ki

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^{a+\lambda} f(t)h(t)(dt)^\alpha - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(t)g(t)h(t)(dt)^\alpha$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^{a+\lambda} [f(t)-f(a+\lambda)]\,[1^\alpha - g(t)]\,h(t)(dt)^\alpha$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a+\lambda}^b [f(a+\lambda)-f(t)]\,g(t)h(t)(dt)^\alpha$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^t [1^\alpha - g(x)]\,h(x)(dx)^\alpha\right)[f(t)-f(a+\lambda)]\bigg|_a^{a+\lambda}$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^{a+\lambda}\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^t [1^\alpha - g(x)]\,h(x)(dx)^\alpha\right)(df(t))^\alpha$$

$$+\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_b^t g(x)h(x)(dx)^\alpha\right)[f(a+\lambda)-f(t)]\bigg|_{a+\lambda}^b$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a+\lambda}^b\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_t^b g(x)h(x)(dx)^\alpha\right)(df(t))^\alpha$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^{a+\lambda}\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^t [1^\alpha - g(x)]\,h(x)(dx)^\alpha\right)(df(t))^\alpha$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a+\lambda}^b\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_t^b g(x)h(x)(dx)^\alpha\right)(df(t))^\alpha$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b S_1(t)d(f(t))^\alpha$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b S_1(x)f^{(\alpha)}(x)(dx)^\alpha$$

dır. Lemma 3.12, $f^{(\alpha)}$ fonksiyonu için uygulanıp ve n yerine $n-1$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ alınırsa

$$f^{(\alpha)}(x) = -\Gamma(1+\alpha)\sum_{k=0}^{n-2} T_k(x) + \frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma\big(1+(n-2)\alpha\big)\Gamma(1+\alpha)} \tag{3.26}$$

$$\times \int_a^b (x-t)^{(n-2)\alpha}\ \kappa_\alpha(t,x) f^{(n\alpha)}(t)(dt)^{\alpha}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda (3.26) eşitliği kullanılarak,

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b S_1(x) f^{(\alpha)}(x)(dx)^{\alpha} \tag{3.27}$$

$$= \quad -\Gamma(1+\alpha)\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b S_1(x)T_k(x)(dx)^{\alpha}$$

$$+\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma\big(1+(n-2)\alpha\big)[\Gamma(1+\alpha)]^2}$$

$$\times \int_a^b S_1(x)\left(\int_a^b (x-t)^{(n-2)\alpha}\ \kappa_\alpha(t,x) f^{(n\alpha)}(t)(dt)^{\alpha}\right)(dx)^{\alpha}$$

bulunur. Son olarak (3.27)'nin son teriminde iki katlı lokal kesirli integraller için olan Fubini teoremi uygulanırsa, teoremin istenilen ifadesi elde edilmiş olunur. □

Tanım 3.14. $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^{\alpha}$ fonksiyonu için $f \in D_{(n)\alpha}(a,b)$ ve her $x \in (a,b)$ için $f^{(n\alpha)} \geq 0$ ise f fonksiyonuna lokal kesirli analiz için $n-$ konveks fonksiyon denir.

Teorem 3.15. $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^{\alpha}$ fonksiyonu öyle ki $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ için $f^{((n-1)\alpha)}$ mutlak sürekli; $g(x), h(x) \in I_x^{\alpha}[a,b]$ fonksiyonları da öyle ki $[a,b]$ üzerinde h fonksiyonu pozitif ve $0^{\alpha} \leq g(x) \leq 1^{\alpha}$ olsun. Ayrıca

$${}_{b-\lambda}I_b h(t) = {}_aI_b g(t)h(t)$$

olsun ve S_2 fonksiyonu

$$S_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^x g(t)h(t)\ (dt)^{\alpha} & x \in [a, b-\lambda] \\ \\ \dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_x^b [1^{\alpha} - g(t)]\, h(t)(dt)^{\alpha} & x \in [b-\lambda, b] \end{cases} \tag{3.28}$$

şeklinde tanımlansın. O halde,

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(t)g(t)h(t)(dt)^\alpha - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{b-\lambda}^b f(t)h(t)(dt)^\alpha \tag{3.29}$$

$$-\Gamma(1+\alpha)\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b S_2(x)T_k(x)(dx)^\alpha$$

$$= -\frac{1}{(b-a)^\alpha\Gamma\big(1+(n-2)\alpha\big)[\Gamma(1+\alpha)]^2}$$

$$\times\int_a^b\left(\int_a^b S_2(x)(x-t)^{(n-2)\alpha}\,\kappa_\alpha(t,x)(dx)^\alpha\right)f^{(n\alpha)}(t)(dt)^\alpha$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Kolayca görülür ki

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(t)g(t)h(t)(dt)^\alpha - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{b-\lambda}^b f(t)h(t)(dt)^\alpha$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^{b-\lambda}[f(t)-f(b-\lambda)]\,g(t)h(t)(dt)^\alpha$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{b-\lambda}^b[f(b-\lambda)-f(t)]\,[1^\alpha-g(t)]\,h(t)(dt)^\alpha$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^t g(x)h(x)(dx)^\alpha\right)[f(t)-f(b-\lambda)]\Big|_a^{b-\lambda}$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^{b-\lambda}\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^t g(x)h(x)(dx)^\alpha\right)(df(t))^\alpha$$

$$+\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_b^t[1^\alpha-g(x)]\,h(x)(dx)^\alpha\right)[f(b-\lambda)-f(t)]\Big|_{b-\lambda}^b$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{b-\lambda}^b\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_t^b[1^\alpha-g(x)]\,h(x)(dx)^\alpha\right)\big(df(t)\big)^\alpha$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^{b-\lambda}\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^t g(x)h(x)(dx)^\alpha\right)\big(df(t)\big)^\alpha$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{b-\lambda}^{b}\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{t}^{b}[1^{\alpha}-g(x)]\,h(x)(dx)^{\alpha}\right)\left(df(t)\right)^{\alpha}$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b}S_2(t)d\left(f(t)\right)^{\alpha}$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b}S_2(x)f^{(\alpha)}(x)(dx)^{\alpha}.$$

Lemma 3.12, $f^{(\alpha)}$ fonksiyonu için kullanılıp ve n yerine $n-1$ ($n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$) alınırsa,

$$f^{(\alpha)}(x) = -\Gamma(1+\alpha)\sum_{k=0}^{n-2}T_k(x)+\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma\big(1+(n-2)\alpha\big)\Gamma(1+\alpha)} \tag{3.30}$$

$$\times \int_{a}^{b}(x-t)^{(n-2)\alpha}\,\kappa_{\alpha}(t,x)f^{(n\alpha)}(t)(dt)^{\alpha}$$

elde edilir. Böylece (3.30) eşitliği kullanılarak

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b}S_2(x)f^{(\alpha)}(x)(dx)^{\alpha} \tag{3.31}$$

$$= -\Gamma(1+\alpha)\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b}S_2(x)T_k(x)(dx)^{\alpha}$$

$$+\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma\big(1+(n-2)\alpha\big)[\Gamma(1+\alpha)]^{2}}$$

$$\times\int_{a}^{b}S_2(x)\left(\int_{a}^{b}(x-t)^{(n-2)\alpha}\,\kappa_{\alpha}(t,x)f^{(n\alpha)}(t)(dt)^{\alpha}\right)(dx)^{\alpha}$$

sonucu bulunur. Son olarak (3.31)'in son teriminde iki katlı lokal kesirli integraller için olan Fubini teoremi uygulanırsa, teoremin istenilen ifadesi ispatlanmış olunur. □

Teorem 3.16. $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}^{\alpha}$ fonksiyonu öyle ki $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ için $f^{((n-1)\alpha)}$ mutlak sürekli; $g(x),h(x)\in I_x^{\alpha}[a,b]$ fonksiyonları da öyle ki $[a,b]$ üzerinde h fonksiyonu pozitif ve $0^{\alpha}\leq g(x)\leq 1^{\alpha}$ olsun. Ayrıca

$${}_aI_{a+\lambda}h(t) = {}_aI_bg(t)h(t)$$

olsun ve S_1 fonksiyonu da Teorem 3.13'deki gibi tanımlansın. f fonksiyonu lokal kesirli analiz için n -konveks ve

$$\int_a^b S_1(x)(x-t)^{(n-2)\alpha}\ \kappa_\alpha(t,x)(dx)^\alpha \le 0 \qquad (t\in[a,b])$$

ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(t)g(t)h(t)(dt)^\alpha$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^{a+\lambda} f(t)h(t)(dt)^\alpha - \Gamma(1+\alpha)\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b S_1(x)T_k(x)(dx)^\alpha.$$

İspat. f fonksiyonu n-konveks olduğundan, f fonksiyonu n kez diferansiyellenebilir ve $f^{(n\alpha)} \ge 0$ dır. Bu özellik ve Teorem 3.13'de elde edilen eşitsizlik kullanılarak ispat tamamlanır. □

Teorem 3.17. $f:[a,b]\mapsto \mathbb{R}^\alpha$ fonksiyonu öyle ki $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ için $f^{((n-1)\alpha)}$ mutlak sürekli; $g(x),h(x)\in I_x^\alpha[a,b]$ fonksiyonları da öyle ki $[a,b]$ üzerinde h fonksiyonu pozitif ve $0^\alpha \le g(x)\le 1^\alpha$ olsun. Ayrıca

$${}_{b-\lambda}I_b h(t) = {}_aI_b g(t)h(t)$$

olsun ve S_2 fonksiyonu Teorem 3.28'deki gibi tanımlansın. f fonksiyonu lokal kesirli analiz için n-konveks ve

$$\int_a^b S_2(x)(x-t)^{(n-2)\alpha}\ \kappa_\alpha(t,x)(dx)^\alpha \le 0 \qquad (t\in[a,b])$$

ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(t)g(t)h(t)(dt)^\alpha \ge \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{b-\lambda}^b f(t)h(t)(dt)^\alpha$$
$$+\Gamma(1+\alpha)\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b S_2(x)T_k(x)(dx)^\alpha.$$

3.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ GRÜSS ve ČEBYŠEV TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde genelleştirilmiş Grüss ve Čebyšev tipli eşitsizlikler verilmiştir.

Teorem 3.18 (Genelleştirilmiş Grüss Eşitsizliği)**.** $f(x),g(x)\in I_x^\alpha[a,b]$ olsun. φ,Φ,γ ve $\psi\in\mathbb{R}^\alpha$ olmak üzere tüm $x\in[a,b]$ için $\varphi\le f(x)\le\Phi$ ve $\gamma\le g(x)\le\psi$ ise,

$$\left|T_{\alpha}(f,g)\right| \leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^{2}}(\Phi-\varphi)(\psi-\gamma) \tag{3.32}$$

eşitsizliği vardır. Burada

$$T_{\alpha}(f,g) = \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\, {}_aI_b^{\alpha} f(x)g(x) - [\,{}_aI_b^{\alpha} f(x)]\,[\,{}_aI_b^{\alpha} g(x)] \tag{3.33}$$

dır.

İspat. $f(x), g(x) \in I_x^{\alpha}[a,b]$ fonksiyonları için lokal kesirli integral kullanılırsa,

$$\frac{1}{[\Gamma(1+\alpha)]^{2}} \int_a^b \int_a^b [f(x)-f(y)]\,[g(x)-g(y)]\,(dy)^{\alpha}\,(dx)^{\alpha} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{[\Gamma(1+\alpha)]^{2}} \int_a^b \int_a^b [f(x)g(x)-f(x)g(y)-f(y)g(x)+f(y)g(y)]\,(dy)^{\alpha}\,(dx)^{\alpha} \\
&= \frac{2^{\alpha}(b-a)^{\alpha}}{[\Gamma(1+\alpha)]^{2}} \int_a^b f(x)g(x)\,(dx)^{\alpha} \\
&\quad -2^{\alpha}\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(x)\,(dx)^{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b g(x)\,(dx)^{\alpha}\right) \\
&= \frac{2^{\alpha}(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\, {}_aI_b^{\alpha} f(x)g(x) - 2^{\alpha}[\,{}_aI_b^{\alpha} f(x)]\,[\,{}_aI_b^{\alpha} g(x)] \\
&= 2^{\alpha}T_{\alpha}(f,g)
\end{aligned}$$

elde edilir. $p=q=2$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left[\frac{1}{2^{\alpha}(b-a)^{2\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^{2}} \times \int_a^b \int_a^b [f(x)-f(y)]\,[g(x)-g(y)]\,(dy)^{\alpha}\,(dx)^{\alpha}\right]^{2} \tag{3.35}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2^{\alpha}(b-a)^{2\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^{2}} \int_a^b \int_a^b [f(x)-f(y)]^{2}\,(dy)^{\alpha}\,(dx)^{\alpha}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{2^{\alpha}(b-a)^{2\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^{2}}\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}[g(x)-g(y)]^{2}(dy)^{\alpha}(dx)^{\alpha}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{(b-a)^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^{2}}\int_{a}^{b}f^{2}(x)(dx)^{\alpha}-\left(\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b}f(x)(dx)^{\alpha}\right)^{2}\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{(b-a)^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^{2}}\int_{a}^{b}g^{2}(x)(dx)^{\alpha}-\left(\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b}g(x)(dx)^{\alpha}\right)^{2}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Kolayca görülür ki

$$\frac{1}{(b-a)^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^{2}}\int_{a}^{b}f^{2}(x)(dx)^{\alpha}-\left(\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b}f(x)(dx)^{\alpha}\right)^{2}$$

$$= \left(\frac{\Phi}{\Gamma(1+\alpha)}-\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b}f(x)(dx)^{\alpha}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)(b-a)^{\alpha}}\int_{a}^{b}f(x)(dx)^{\alpha}-\frac{\varphi}{\Gamma(1+\alpha)}\right)$$

$$-\frac{1}{(b-a)^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^{2}}\int_{a}^{b}[\Phi-f(x)][f(x)-\varphi](dx)^{\alpha}$$

dır. Her bir $x\in[a,b]$ için $[\Phi-f(x)][f(x)-\varphi]\geq 0^{\alpha}$ olduğundan

$$\frac{1}{(b-a)^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^{2}}\int_{a}^{b}f^{2}(x)(dx)^{\alpha}-\left(\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b}f(x)(dx)^{\alpha}\right)^{2}$$

$$\leq \left(\frac{\Phi}{\Gamma(1+\alpha)}-\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b}f(x)(dx)^{\alpha}\right) \tag{3.36}$$

$$\times\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)(b-a)^{\alpha}}\int_{a}^{b}f(x)(dx)^{\alpha}-\frac{\varphi}{\Gamma(1+\alpha)}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^{2}}\int_{a}^{b} g^{2}(x)\,(dx)^{\alpha}-\left(\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b} g(x)\,(dx)^{\alpha}\right)^{2}\\
\leq\ &\left(\frac{\psi}{\Gamma(1+\alpha)}-\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b} g(x)\,(dx)^{\alpha}\right) \qquad (3.37)\\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)(b-a)^{\alpha}}\int_{a}^{b} g(x)\,(dx)^{\alpha}-\frac{\gamma}{\Gamma(1+\alpha)}\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği vardır. (3.35) eşitsizliğinde (3.36) ve (3.37) eşitsizlikleri kullanılırsa, aşağıdaki eşitsizlik bulunur:

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2^{\alpha}(b-a)^{2\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^{2}}\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}[f(x)-f(y)]\,[g(x)-g(y)]\,(dy)^{\alpha}\,(dx)^{\alpha}\right]^{2}\\
\leq\ &\left(\frac{\Phi}{\Gamma(1+\alpha)}-\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b} f(x)\,(dx)^{\alpha}\right)\\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)(b-a)^{\alpha}}\int_{a}^{b} f(x)\,(dx)^{\alpha}-\frac{\varphi}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\\
&\times\left(\frac{\Gamma}{\Gamma(1+\alpha)}-\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b} g(x)\,(dx)^{\alpha}\right)\\
&\times\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)(b-a)^{\alpha}}\int_{a}^{b} g(x)\,(dx)^{\alpha}-\frac{\gamma}{\Gamma(1+\alpha)}\right).
\end{aligned}
$$

Şimdi, $\alpha-$ tipli reel sayılar için

$$
4^{\alpha}pq\leq(p+q)^{2},\quad p,q\in\mathbb{R}^{\alpha}
$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$
\left[\frac{1}{2^{\alpha}(b-a)^{2\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^{2}}\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}[f(x)-f(y)]\,[g(x)-g(y)]\,(dy)^{\alpha}\,(dx)^{\alpha}\right]^{2}
$$

$$\leq \quad \frac{1}{16^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^{4}}(\Phi-\varphi)^{2}(\psi-\gamma)^{2}$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar. (3.32)'nin keskinliğini ispatlamak için f,g fonksiyonları

$$f(x)=g(x)=\begin{cases}-1^{\alpha}, & a\leq x<\frac{a+b}{2}\\ \\ 1^{\alpha}, & \frac{a+b}{2}\leq x\leq b\end{cases}$$

şeklinde seçilsin. Bu durumda

$${}_{a}I_{b}^{\alpha}f(x)g(x)=\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)},$$

$${}_{a}I_{b}^{\alpha}f(x)={}_{a}I_{b}^{\alpha}g(x)=0^{\alpha}$$

ve

$$(\Phi-\varphi)=(\psi-\gamma)=2^{\alpha}$$

olur. Böylece (3.32) eşitsizliği gerçekleşir. □

Teorem 3.19 (Genelleştirilmiş Čebyšev Eşitsizliği)**.** $f,g\in D_{\alpha}[a,b]$ ve $f^{(\alpha)}(x)$, $g^{(\alpha)}(x)$ sınırlı yani;

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{\infty}=\sup_{t\in[a,b]}\left|f^{(\alpha)}(t)\right|<\infty,$$

$$\left\|g^{(\alpha)}\right\|_{\infty}=\sup_{t\in[a,b]}\left|g^{(\alpha)}(t)\right|<\infty$$

olsun. O halde

$$|T_{\alpha}(f,g)|\leq\frac{\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{\infty}\left\|g^{(\alpha)}\right\|_{\infty}}{[\Gamma(1+\alpha)]^{2}}\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+4\alpha)}(b-a)^{4\alpha}$$

dır. Burada $T_{\alpha}(f,g)$, (3.33)'de tanımlandığı gibidir.

İspat. (3.34) eşitliğinin her iki tarafı 2^{α} ile bölünüp daha sonra mutlak değeri alınırsa,

$$\begin{aligned}&|T_{\alpha}(f,g)|\\ \leq\;&\frac{1}{2^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^{2}}\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}|f(x)-f(y)|\,|g(x)-g(y)|\,(dy)^{\alpha}(dx)^{\alpha}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^2}\int_a^b\int_a^b \left|\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_y^x f^{(\alpha)}(u)\,(du)^{\alpha}\right| \left|\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_y^x g^{(\alpha)}(u)\,(du)^{\alpha}\right| (dy)^{\alpha}\,(dx)^{\alpha}$$

$$\leq \frac{\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{\infty}\left\|g^{(\alpha)}\right\|_{\infty}}{2^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^2}\int_a^b\int_a^b \frac{|x-y|^{2\alpha}}{\Gamma^2(1+\alpha)}\,(dy)^{\alpha}\,(dx)^{\alpha}$$

$$= \frac{\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{\infty}\left\|g^{(\alpha)}\right\|_{\infty}}{2^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^3}\int_a^b \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\left[(x-a)^{3\alpha}+(b-x)^{3\alpha}\right](dx)^{\alpha}$$

$$= \frac{\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{\infty}\left\|g^{(\alpha)}\right\|_{\infty}}{[\Gamma(1+\alpha)]^2}\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+4\alpha)}(b-a)^{4\alpha}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.20. $f(x) \in I_x^{\alpha}[a,b]$ ve $f \in D_{2\alpha}[a,b]$ olsun. $\varphi, \Phi \in \mathbb{R}^{\alpha}$ olmak üzere tüm $x \in [a,b]$ için $\varphi \leq f^{(2\alpha)}(x) \leq \Phi$ ise aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}} - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right.$$

$$\left. -\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right]\left[f^{(\alpha)}(b)-f^{(\alpha)}(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{(32)^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^2}(\Phi-\varphi).$$

İspat. Genelleştirilmiş Grüss eşitsizliğinden,

$$\left|\frac{(b-a)^{\alpha}}{[\Gamma(1+\alpha)]^2}\int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\alpha}f^{(2\alpha)}(x)\,(dx)^{\alpha}\right.$$

$$\left. -\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\alpha}\,(dx)^{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f^{(2\alpha)}(x)\,(dx)^{\alpha}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^2}(\Phi-\varphi)(L-l)$$

elde edilir. Burada

$$L = \sup_{x\in[a,b]}\{(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\alpha}\} = \frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^{\alpha}}$$

ve

$$l=\inf_{x\in[a,b]}\{(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\alpha}\}=0^{\alpha}$$

şeklindedir. Basit hesaplamalarla

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\alpha}(dx)^{\alpha}=(b-a)^{3\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right]$$

olduğu görülür ve [89] referansında

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^{\alpha}}{[\Gamma(1+\alpha)]^2}\int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\alpha}f^{(2\alpha)}(x)\,(dx)^{\alpha}\\
&= 2^{\alpha}(b-a)^{2\alpha}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right]
\end{aligned}$$

özdeşliği mevcuttur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\left|2^{\alpha}(b-a)^{2\alpha}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right]\right.\\
&\left.-(b-a)^{3\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right]\left[f^{(\alpha)}(b)-f^{(\alpha)}(a)\right]\right|\\
&\leq \frac{(b-a)^{4\alpha}}{(16)^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^2}(\Phi-\varphi)
\end{aligned}$$

sonucu çıkar. Yukarıdaki ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right.\\
&\left.-\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right]\left[f^{(\alpha)}(b)-f^{(\alpha)}(a)\right]\right|\\
&\leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{(32)^{\alpha}[\Gamma(1+\alpha)]^2}(\Phi-\varphi)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.21. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f,g : I^0 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\alpha$ (I^0, I'nın içi) öyle ki $a,b \in I^0$, $a < b$ için $f,g \in D_\alpha(I^0)$ ve $f^{(\alpha)}, g^{(\alpha)} \in C_\alpha[a,b]$ olsun. O halde

$$|T_\alpha(f,g)| \tag{3.38}$$

$$\leq \left[2^\alpha \frac{\Gamma(1+4\alpha)}{\Gamma(1+5\alpha)} - 2^\alpha \frac{\Gamma(1+3\alpha)}{\Gamma(1+4\alpha)} + \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right]$$

$$\times \frac{2^\alpha \Gamma(1+\alpha)}{[\Gamma(1+\alpha)]^2} (b-a)^{4\alpha} \left\| f^{(\alpha)} \right\|_\infty \left\| g^{(\alpha)} \right\|_\infty$$

dır. Burada

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \left| f^{(\alpha)}(t) \right| < \infty,$$

$$\left\| g^{(\alpha)} \right\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \left| g^{(\alpha)}(t) \right| < \infty$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. Hipotezden aşağıdaki eşitlikler sağlanır [16]:

$$f(x) - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha} {}_aI_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)(b-a)^\alpha} \int_a^b p(x,t) f^{(\alpha)}(t) (dt)^\alpha, \tag{3.39}$$

$$g(x) - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha} {}_aI_b^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)(b-a)^\alpha} \int_a^b p(x,t) g^{(\alpha)}(t) (dt)^\alpha. \tag{3.40}$$

Burada

$$p(x,t) = \begin{cases} (t-a)^\alpha, & t \in [a,x] \\ (t-b)^\alpha, & t \in (x,b] \end{cases}$$

dır. (3.39) ve (3.40) eşitliklerinden,

$$\left[f(x) - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha} {}_aI_b^\alpha f(t)\right] \left[g(x) - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha} {}_aI_b^\alpha g(t)\right]$$

$$= \frac{1}{(b-a)^{2\alpha}} \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b p(x,t) f^{(\alpha)}(t) (dt)^\alpha\right]$$

$$\times \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b p(x,t) g^{(\alpha)}(t) (dt)^\alpha\right]$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
& f(x)g(x) - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}} g(x)\; {}_aI_b^{\alpha} f(t) \\
& -\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}} f(x)\; {}_aI_b^{\alpha} g(t) + \frac{[\Gamma(1+\alpha)]^2}{(b-a)^{2\alpha}} \left[{}_aI_b^{\alpha} f(x)\right]\left[{}_aI_b^{\alpha} g(x)\right] \\
= \; & \frac{1}{(b-a)^{2\alpha}} \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b p(x,t) f^{(\alpha)}(t)\,(dt)^{\alpha}\right] \\
& \times \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b p(x,t) g^{(\alpha)}(t)\,(dt)^{\alpha}\right]
\end{aligned}
$$

olur. Son özdeşliğin her iki tarafının x'e göre a'dan b'ye integrali alınırsa,

$$
\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}} T_{\alpha}(f,g) \qquad (3.41) \\
= \; & \frac{1}{(b-a)^{2\alpha}\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b p(x,t) f^{(\alpha)}(t)\,(dt)^{\alpha}\right] \\
& \times \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b p(x,t) g^{(\alpha)}(t)\,(dt)^{\alpha}\right] (dx)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

sonucu ortaya çıkar. (3.41)'den ve mutlak değerin özelliklerinden

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}} T_{\alpha}(f,g)\right| \\
\leq \; & \frac{1}{(b-a)^{2\alpha}\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b |p(x,t)| \left|f^{(\alpha)}(t)\right| (dt)^{\alpha}\right] \\
& \times \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b |p(x,t)| \left|g^{(\alpha)}(t)\right| (dt)^{\alpha}\right] (dx)^{\alpha} \\
\leq \; & \frac{\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{\infty} \left\|g^{(\alpha)}\right\|_{\infty}}{(b-a)^{2\alpha}\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b |p(x,t)|\,(dt)^{\alpha}\right]^2 (dx)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

$$= \quad (b-a)^{3\alpha} \left\| f^{(\alpha)} \right\|_\infty \left\| g^{(\alpha)} \right\|_\infty \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right]^2$$

$$\times \left[4^\alpha \frac{\Gamma(1+4\alpha)}{\Gamma(1+5\alpha)} - 4^\alpha \frac{\Gamma(1+3\alpha)}{\Gamma(1+4\alpha)} + 2^\alpha \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b |p(x,t)| (dt)^\alpha \right]^2 (dx)^\alpha$$

$$= \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right]^2 \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b \left[(x-a)^{2\alpha} + (b-x)^{2\alpha} \right]^2 (dx)^\alpha$$

$$= (b-a)^{5\alpha} \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right]^2 \left[4^\alpha \frac{\Gamma(1+4\alpha)}{\Gamma(1+5\alpha)} - 4^\alpha \frac{\Gamma(1+3\alpha)}{\Gamma(1+4\alpha)} + 2^\alpha \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \right]$$

eşitliği kullanılmıştır. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.22. f, g fonksiyonları Teorem 3.21'deki şartları sağlasın. O halde

$$|T_\alpha(f,g)| \leq \frac{1}{2^\alpha [\Gamma(1+\alpha)]^2} \int_a^b \left[\left\| f^{(\alpha)} \right\|_\infty |g(x)| + \left\| g^{(\alpha)} \right\|_\infty |f(x)| \right] H(x) (dx)^\alpha$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$H(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b |p(x,t)| (dt)^\alpha$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. (3.39) ve (3.40) ifadelerinin her iki tarafı sırasıyla $g(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları ile çarpılıp ve daha sonra elde edilen sonuçlar taraf tarafa toplanıp tekrar yazılırsa

$$f(x)g(x) - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^\alpha (b-a)^\alpha} g(x) \, {}_aI_b^\alpha f(t) - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^\alpha (b-a)^\alpha} f(x) \, {}_aI_b^\alpha g(t) \qquad (3.42)$$

$$= \frac{1}{2^\alpha (b-a)^\alpha} \left[\frac{g(x)}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b p(x,t) f^{(\alpha)}(t) (dt)^\alpha \right.$$

$$+\frac{f(x)}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b p(x,t)g^{(\alpha)}(t)\,(dt)^{\alpha}\Bigg]$$

eşitliği elde edilir. (3.42) eşitliğinin her iki tarafının x'e göre a'dan b'ye integrali alınıp ve tekrardan yazılmasıyla

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}T_{\alpha}(f,g) \tag{3.43}$$

$$= \frac{1}{2^{\alpha}(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b \left[\frac{g(x)}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b p(x,t)f^{(\alpha)}(t)\,(dt)^{\alpha}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(x)p(x,t)g^{(\alpha)}(t)\right](dx)^{\alpha}$$

olduğu görülür. (3.42)'den ve mutlak değerin özelliklerinden

$$\left|\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}T_{\alpha}(f,g)\right|$$

$$\leq \frac{1}{2^{\alpha}(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b \left[\frac{|g(x)|}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b |p(x,t)|\left|f^{(\alpha)}(t)\right|(dt)^{\alpha}\right.$$

$$\left.+\frac{|f(x)|}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b\int_a^b |p(x,t)|\,g^{(\alpha)}(t)\right](dx)^{\alpha}$$

$$\leq \frac{1}{2^{\alpha}(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b \left[\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{\infty}|g(x)|+\left\|g^{(\alpha)}\right\|_{\infty}|f(x)|\right]H(x)\,(dx)^{\alpha}$$

sonucu ortaya çıkar. Bu da ispatı tamamlar. □

3.3. OSTROWSKİ-GRÜSS TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde Ostrowski-Grüss tipli eşitsizlik ve bu eşitsizlikle ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 3.23. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $a,b \in I, a < b$ olsun. $f : I \to \mathbb{R}^{\alpha}$ fonksiyonu I aralığı üzerinde lokal kesirli türevlenebilir öyle ki $\gamma,\psi \in \mathbb{R}^{\alpha}$ sabitler olmak üzere $\gamma \leq f^{(\alpha)}(x) \leq \psi$, $x \in [a,b]$ olsun.O halde tüm $x \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,2]$ için

$$\left|\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^{\alpha} f(x)-\lambda^{\alpha}\left(\frac{(x-b)^{\alpha} f(b)-(x-a)^{\alpha} f(a)}{2^{\alpha}(b-a)^{\alpha}}\right)\right.$$

$$\left.-\gamma 2^{\alpha} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}(1-\lambda)^{\alpha}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\, {}_{a}I_{b}^{\alpha} f(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{1}{2^{\alpha}}\left[1^{\alpha}+|1-\lambda|^{\alpha}\right]\left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^{\alpha}\right](S-\gamma)$$

ve

$$\left|\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^{\alpha} f(x)-\lambda^{\alpha}\left(\frac{(x-b)^{\alpha} f(b)-(x-a)^{\alpha} f(a)}{2^{\alpha}(b-a)^{\alpha}}\right)\right.$$

$$\left.-\psi 2^{\alpha} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}(1-\lambda)^{\alpha}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\, {}_{a}I_{b}^{\alpha} f(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{1}{2^{\alpha}}\left[1^{\alpha}+|1-\lambda|^{\alpha}\right]\left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^{\alpha}\right](\psi-S)$$

eşitsizlikleri vardır. Burada $S=\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)^{\alpha}}\Gamma(1+\alpha)$ şeklindedir.

İspat.

$$K(x,t)=\begin{cases}\left(t-a-\lambda\dfrac{x-a}{2}\right)^{\alpha}, & t\in[a,x]\\ \left(t-b+\lambda\dfrac{b-x}{2}\right)^{\alpha}, & t\in(x,b]\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Şimdi

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b} K(x,t) f^{(\alpha)}(t)(dt)^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{x}\left(t-a-\lambda\frac{x-a}{2}\right)^{\alpha} f^{(\alpha)}(t)(dt)^{\alpha}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{x}^{b}\left(t-b+\lambda\frac{b-x}{2}\right)^{\alpha} f^{(\alpha)}(t)(dt)^{\alpha}$$

$$=K_1+K_2$$

integralleri hesaplanacaktır. Lokal kesirli integral için kısmi integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x \left(t-a-\lambda\frac{x-a}{2}\right)^{\alpha} f^{(\alpha)}(t)(dt)^{\alpha} \\
&= \left(t-a-\lambda\frac{x-a}{2}\right)^{\alpha} f(t)\Big|_a^x - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x \Gamma(1+\alpha)f(t)(dt)^{\alpha} \\
&= \left[\left(x-a-\lambda\frac{x-a}{2}\right)^{\alpha} f(x) - \left(-\lambda\frac{x-a}{2}\right)^{\alpha} f(a)\right] - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x f(t)(dt)^{\alpha}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_2 &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^b \left(t-b+\lambda\frac{b-x}{2}\right)^{\alpha} f^{(\alpha)}(t)(dt)^{\alpha} \\
&= \left[\left(\lambda\frac{b-x}{2}\right)^{\alpha} f(b) - \left(x-b+\lambda\frac{b-x}{2}\right)^{\alpha} f(x)\right] - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^b f(t)(dt)^{\alpha}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler yukarıda yerine yazılıp ve $\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b K(x,t)f^{(\alpha)}(t)(dt)^{\alpha} \qquad (3.44) \\
&= \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^{\alpha} f(x) - \frac{\lambda^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}\left[\frac{(x-b)^{\alpha}f(b)-(x-a)^{\alpha}f(a)}{2^{\alpha}}\right] - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\, {}_aI_b^{\alpha} f(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. İkinci olarak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b K(x,t)(dt)^{\alpha} \qquad (3.45) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x \left(t-a-\lambda\frac{x-a}{2}\right)^{\alpha}(dt)^{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^b \left(t-b+\lambda\frac{b-x}{2}\right)^{\alpha}(dt)^{\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left[(x-a)^{2\alpha}(1-\lambda)^{\alpha}\right] + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left[-(x-b)^{2\alpha}(1-\lambda)^{\alpha}\right] \\
&= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}(1-\lambda)^{\alpha}2^{\alpha}(b-a)^{\alpha}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha}
\end{aligned}$$

integrali vardır. (3.44) ve (3.45) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b K(x,t)\left(f^{(\alpha)}(t)-\gamma\right)(dt)^{\alpha} \\
=\;& \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^{\alpha} f(x)-\lambda^{\alpha}\left[\frac{(x-b)^{\alpha}f(b)-(x-a)^{\alpha}f(a)}{2^{\alpha}(b-a)^{\alpha}}\right] \\
&-\gamma 2^{\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}(1-\lambda)^{\alpha}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{\alpha}f(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b K(x,t)\left(f^{(\alpha)}(t)-\gamma\right)(dt)^{\alpha}\right| \\
\leq\;& \max_{t\in[a,b]}|K(x,t)|\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b \left|f^{(\alpha)}(t)-\gamma\right|(dt)^{\alpha}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

dır. Ayrıca

$$\max_{t\in[a,b]}|K(x,t)|=\frac{\left[1^{\alpha}+|1-\lambda|^{\alpha}\right]}{2^{\alpha}}\left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^{\alpha}\right]$$

ve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b \left|f^{(\alpha)}(t)-\gamma\right|(dt)^{\alpha} \\
=\;& \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left[f(b)-f(a)-\gamma\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right] \\
=\;& \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}(S-\gamma)
\end{aligned}$$

dır. Bu iki ifade (3.46)'da yerine yazılırsa istenilen sonuca ulaşılmış olunur. Diğer eşitsizlik benzer şekilde hesaplanır. □

Sonuç 3.24. Teorem 3.23'ün koşulları altında $\lambda=1$ alınırsa $x\in[a,b]$ için

$$\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} f(x)-\left[\frac{(x-b)^{\alpha}f(b)-(x-a)^{\alpha}f(a)}{2^{\alpha}(b-a)^{\alpha}}\right]-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{1}{2^{\alpha}}\left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^{\alpha}\right](S-\gamma)$$

ve

$$\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}f(x)-\left[\frac{(x-b)^{\alpha}f(b)-(x-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}(b-a)^{\alpha}}\right]-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{1}{2^{\alpha}}\left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^{\alpha}\right](\psi-S)$$

elde edilir.

Sonuç 3.25. Teorem 3.23'ün koşulları altında $\lambda=0$ alınırsa $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\gamma 2^{\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{1}{2^{\alpha}}\left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^{\alpha}\right](S-\gamma)$$

ve

$$\left|f(x)-\psi 2^{\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{1}{2^{\alpha}}\left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^{\alpha}\right](\psi-S)$$

dır.

Sonuç 3.26. Teorem 3.23'ün koşulları altında $\lambda=2$ alınırsa $x\in[a,b]$ için

$$\left|\gamma 2^{\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha}-\left[\frac{(x-b)^{\alpha}f(b)-(x-a)^{\alpha}f(a)}{(b-a)^{\alpha}}\right]-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^{\alpha}\right](S-\gamma)$$

ve

$$\left|\psi 2^{\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha}-\left[\frac{(x-b)^{\alpha}f(b)-(x-a)^{\alpha}f(a)}{(b-a)^{\alpha}}\right]-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^{\alpha}\right](\psi-S)$$

dır.

Sonuç 3.27. Teorem 3.23'ün koşulları altında $x=\dfrac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\left|\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\alpha}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}}\right]-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_{a}I_{b}^{\alpha} f(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[1^{\alpha}+|1-\lambda|^{\alpha}\right]\frac{(b-a)^{\alpha}}{4^{\alpha}}(S-\gamma)$$

ve

$$\left|\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\alpha}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}}\right]-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_{a}I_{b}^{\alpha} f(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[1^{\alpha}+|1-\lambda|^{\alpha}\right]\frac{(b-a)^{\alpha}}{4^{\alpha}}(\psi-S)$$

dır.

Sonuç 3.28. Teorem 3.23'ün koşulları altında $x=a$ alınırsa

$$\left|\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^{\alpha} f(a)+\frac{(b-a)^{\alpha} f(b)}{2^{\alpha}}\right.$$

$$\left.+\gamma\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}(1-\lambda)^{\alpha}(b-a)^{\alpha}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_{a}I_{b}^{\alpha} f(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}\left[1^{\alpha}+|1-\lambda|^{\alpha}\right](S-\gamma)$$

ve

$$\left|\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^{\alpha} f(a)+\frac{(b-a)^{\alpha} f(b)}{2^{\alpha}}\right.$$

$$\left.+\psi 2^{\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}(1-\lambda)^{\alpha}(b-a)^{\alpha}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_{a}I_{b}^{\alpha} f(x)\right|$$

$$\leq \quad \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}} \left[1^{\alpha} + |1-\lambda|^{\alpha}\right](\psi - S)$$

dır.

3.4. HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde lokal kesirli analiz için tanımlanan h-konveks fonksiyonlar kullanılarak Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik elde edilmiş olup daha sonra bu eşitsizlik ile ilgili birkaç sonuç verilmiştir. Teorem ve sonuçlar verilmeden önce kullanılan çeşitli konveks fonksiyonlarının tanımları verilecektir.

Vivas ve arkadaşları [90] çalışmalarında Fraktal analiz için $h-$ konvekslik tanımını aşağıdaki şekilde vermişlerdir:

Tanım 3.29. $h : J \to \mathbb{R}^{\alpha}$, $h \neq 0$, negatif olmayan ve $(0,1) \subset J$ olmak üzere $J \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı olan $f : I \to \mathbb{R}^{\alpha}$ fonksiyonu negatif olmayan, tüm $t \in (0,1)$ ve $x_1, x_2 \in I$ için

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq h(t)f(x_1) + h(1-t)f(x_2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f : I \to \mathbb{R}^{\alpha}$ fonksiyonuna $h-$ konveks fonksiyon denir.

Mo ve Sui ise [91] çalışmalarında iki tip olan genelleştirilmiş $s-$ konveksliği aşağıdaki şekilde vermişlerdir:

Tanım 3.30. (i) $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ olmak üzere $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{\alpha}$ fonksiyonu verilsin. Eğer tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ ve $\lambda_1^s + \lambda_2^s = 1$ şartını sağlayan tüm $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ için

$$f(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \leq \lambda_1^{s\alpha} f(u) + \lambda_2^{s\alpha} f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{\alpha}$ fonksiyonuna 1. tip genelleştirilmiş $s-$ konveks $(0 < s < 1)$ fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı GK_s^1 şeklinde gösterilir.
(ii) $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ olmak üzere $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{\alpha}$ fonksiyonu verilsin. Eğer tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ şartını sağlayan tüm $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ için

$$f(\lambda_1 u+\lambda_2 v)\leq \lambda_1^{s\alpha} f(u)+\lambda_2^{s\alpha} f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^\alpha$ fonksiyonuna 2. tip genelleştirilmiş $s-$ konveks $(0<s<1)$ fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı GK_s^2 şeklinde gösterilir.

Son olarak bu tezde tanımlanan $P-$ konveks tanımı aşağıdaki gibidir:

Tanım 3.31. $f:I\to\mathbb{R}^\alpha$ fonksiyonu negatif olmayan ve tüm $x,y\in I$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f(tx+(1-t)y)\leq f(x)+f(y) \tag{3.47}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna genelleştirilmiş $P-$ konveks fonksiyon denir.

Şimdi ise aşağıda sonuçlar için gerekli olan temel teorem verilecektir:

Teorem 3.32. $h:[0,1]\to\mathbb{R}^\alpha$ fonksiyonu negatif olmayan ve $f:I\to\mathbb{R}^\alpha$ fonksiyonu da h-konveks fonksiyon öyle ki $h\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0^\alpha$ ve ${}_0I_1^\alpha h(t)\geq\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{2\alpha}\left[h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \Delta_1\leq\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}\,{}_aI_b^\alpha f(x)\\ &\leq \Delta_2\leq\Gamma(1+\alpha)\left[[f(a)+f(b)]\left[h\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\right]\right]\,{}_0I_1^\alpha h(t)\end{aligned}$$

dır. Burada

$$\Delta_1=\frac{1}{2^{2\alpha}h\left(\frac{1}{2}\right)}\left[f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+f\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right]$$

ve

$$\Delta_2=\Gamma(1+\alpha)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2^\alpha}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\,{}_0I_1^\alpha h(t)$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. İlk olarak, $[a,b]$ aralığının $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ ve $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ şeklinde iki parçaya bölerek başlanılacaktır. f fonksiyonu h-konveks fonksiyon olduğundan, $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ aralığı için

$$f\left(\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}\right) = f\left(\frac{ta+(1-t)\frac{a+b}{2}+(1-t)a+t\frac{a+b}{2}}{2}\right)$$

$$\leq \; h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)+f\left((1-t)a+t\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

eşitliği vardır. Eşitliğin her iki tarafı $[0,1]$ aralığı üzerinde t'ye göre integrali alınırsa,

$$\frac{1}{2^{2\alpha}h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{3a+b}{4}\right)\leq\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\;{}_{a}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(x) \tag{3.48}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ aralığı için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\frac{a+b}{2}+b}{2}\right) &= f\left(\frac{t\frac{a+b}{2}+(1-t)b+(1-t)\frac{a+b}{2}+tb}{2}\right) \\ &\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)+f\left((1-t)\frac{a+b}{2}+tb\right)\right] \end{aligned}$$

eşitliği vardır. Eşitliğin her iki tarafı $[0,1]$ aralığı üzerinde t'ye göre integrali alınırsa,

$$\frac{1}{2^{2\alpha}h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\leq\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\;{}_{\frac{a+b}{2}}I^{\alpha}_{b}f(x) \tag{3.49}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.48) ve (3.49) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{2^{2\alpha}h\left(\frac{1}{2}\right)}\left[f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+f\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right] \\ &\leq \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\;{}_{a}I^{\alpha}_{b}f(x) \\ &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha}}\left[\frac{2^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}\;{}_{a}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(x)+\frac{2^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}\;{}_{\frac{a+b}{2}}I^{\alpha}_{b}f(x)\right] \\ &\leq \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha}}\left[\left\{f(a)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}\;{}_{0}I^{\alpha}_{1}h(t)\right] \\ &\quad+\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha}}\left[\left\{f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}\;{}_{0}I^{\alpha}_{1}h(t)\right] \\ &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha}}\left[f(a)+f(b)+2^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\;{}_{0}I^{\alpha}_{1}h(t)=\Delta_2 \end{aligned}$$

olur. Şimdi teoremin kalan eşitsizlikleri gösterilecektir. f, $h-$ konveks ve $\Gamma(1+\alpha)_0 I_1^{\alpha} h(t) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{2\alpha}\left[h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{1}{2^{2\alpha}\left[h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2} f\left(\frac{1}{2}\frac{3a+b}{4}+\frac{1}{2}\frac{a+3b}{4}\right) \\
&\leq \frac{1}{2^{2\alpha}\left[h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}\left[h\left(\frac{1}{2}\right)\left\{f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right\}\right] \\
&= \frac{1}{2^{2\alpha}\left[h\left(\frac{1}{2}\right)\right]}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] = \Delta_1 \\
&\leq \frac{1}{2^{2\alpha}\left[h\left(\frac{1}{2}\right)\right]}\left[h\left(\frac{1}{2}\right)\left\{f(a)+f(b)+2^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&\leq \Gamma(1+\alpha)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] {}_0I_1^{\alpha} h(t) = \Delta_2 \\
&\leq \Gamma(1+\alpha)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}}+h\left(\frac{1}{2}\right)[f(a)+f(b)]\right] {}_0I_1^{\alpha} h(t) \\
&= \Gamma(1+\alpha)\left[[f(a)+f(b)]\left\{h\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\right\}\right] {}_0I_1^{\alpha} h(t)
\end{aligned}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 3.33. Teorem 3.32'de $h(t)=t^{\alpha}$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \Delta_1 \leq \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\, {}_aI_b^{\alpha} f(x) \\
&\leq \Delta_2 \leq [f(a)+f(b)]\frac{[\Gamma(1+\alpha)]^2}{\Gamma(1+2\alpha)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\Delta_1 = \frac{1}{2^{\alpha}}\left[f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+f\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right]$$

ve

$$\Delta_2 = \left[\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\frac{[\Gamma(1+\alpha)]^2}{\Gamma(1+2\alpha)}$$

dır.

Sonuç 3.34. $s \in (0,1]$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}^{\alpha}$ fonksiyonu ikinci tip $s-$ konveks fonksiyon öyle ki $\Gamma(1+\alpha)_0 I_1^{\alpha} t^{s\alpha} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} 2^{(2s-2)\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \Delta_1 \leq \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\, {}_a I_b^{\alpha} f(x) \\ &\leq \Delta_2 \leq \left[[f(a)+f(b)] \left\{ \left(\frac{1}{2^s}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} \right\} \right] \frac{\Gamma(1+s\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)} \end{aligned}$$

dır. Burada

$$\Delta_1 = 2^{(s-2)\alpha} \left[f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f\left(\frac{3a+b}{4}\right) \right]$$

ve

$$\Delta_2 = \left[\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \frac{\Gamma(1+s\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}$$

dır.

Sonuç 3.35. $f : I \to \mathbb{R}^{\alpha}$ fonksiyonu $P-$ konveks fonksiyon olsun. O halde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2\alpha}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \Delta_1 \leq \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\, {}_a I_b^{\alpha} f(x) \\ &\leq \Delta_2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha} [f(a)+f(b)] \end{aligned}$$

dır. Burada

$$\Delta_1 = \frac{1}{2^{2\alpha}} \left[f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f\left(\frac{3a+b}{4}\right) \right]$$

ve

$$\Delta_2 = \left[\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right].$$

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Lokal kesirli analiz, fraktallar üzerinde tanımlanan fonksiyonların kesirli mertebeden türev ve integralleriyle ilgilenen matematiğin yeni bir dalıdır. Son zamanlarda bu alan, birçok bilim adamı ve mühendislerin ilgi konusu olmuş ve birçok kişi tarafından çalışılmıştır. Konunun öneminden dolayı, alandaki eksiklikleri giderme ve alana katkı sağlama düşüncesi tezin oluşmasını sağlamıştır. Bu tezde Gao, Yang ve Kao tarafından tanımlanan lokal kesirli türev ve integral kullanılarak, lokal kesirli analiz için literatürde olmayan Steffensen, Grüss, Čebyšev gibi temel eşitsizliklerin yanında Ostrowski-Grüss ve Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca bazı eşitsizliklerin özel halleri incelenmiştir. Elde edilen bu yeni eşitsizliklerin klasik anlamda olan eşitsizliklerin bir genellemesi olduğu görülmüştür. İleride ise lokal kesirli analiz ve uygulamaları üzerinde çalışan araştırmacılar için bu tezde elde edilen eşitsizliklerin yararlı bir araç olacağı düşünülmektedir.

İleriki çalışmalarda, konuyla ilgilenen araştırmacılar lokal kesirli analiz için literatürde olmayan eşitsizlikler elde edebilir ve bu eşitsizliklerin birçok uygulamasını yapabilirler. Diğer yandan eşitsizlik konusu iki değişkenli fonksiyonlar ve çeşitli konveks fonksiyonlar üzerinde de çalışılabilinir.

5. KAYNAKLAR

[1] K. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Elsevier, 1974.

[2] K. M. Kolwankar and A. D. Gangal, "Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 6, no. 4, pp. 505–513, 1996.

[3] K. M. Kolwankar, "Studies of fractal structures and processes using methods of fractional calculus," *arXiv preprint chao-dyn/9811008*, 1998.

[4] K. M. Kolwankar and A. D. Gangal, "Hölder exponents of irregular signals and local fractional derivatives," *Pramana*, vol. 48, no. 1, pp. 49–68, 1997.

[5] W. Chen, "Time–space fabric underlying anomalous diffusion," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 28, no. 4, pp. 923–929, 2006.

[6] W. Chen, H. Sun, X. Zhang, and D. Korošak, "Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 5, pp. 1754–1758, 2010.

[7] J.-H. He, "A new fractal derivation," *Thermal Science*, vol. 15, no. suppl. 1, pp. 145–147, 2011.

[8] J.-H. He, S. Elagan, and Z. Li, "Geometrical explanation of the fractional complex transform and derivative chain rule for fractional calculus," *Physics letters A*, vol. 376, no. 4, pp. 257–259, 2012.

[9] G. Jumarie, "Probability calculus of fractional order and fractional Taylor's series application to Fokker–Planck equation and information of non-random functions," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 40, no. 3, pp. 1428–1448, 2009.

[10] G. Jumarie, "Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 51, no. 9-10, pp. 1367–1376, 2006.

[11] X.-J. Yang, *Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications*. World Science Publisher, New York USA, 2012.

[12] X.-J. Yang, D. Baleanu, and H. M. Srivastava, *Local Fractional Integral Transforms and Their Applications*. Elsevier, 2016.

[13] X.-J. Yang, *Local Fractional Functional Analysis & Its Applications*. Asian Academic Publisher, Hong Kong, 2011.

[14] G.-S. Chen, “Generalizations of Hölder’s and some related integral inequalities on fractal space,” *Journal of Function Spaces and Applications*, vol. 2013, p. 9 pages, 2013.

[15] H. Mo and X. Sui, “Generalized convex functions on fractal sets and two related inequalities,” *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2014, p. 7 pages, 2014.

[16] M. Z. Sarikaya and H. Budak, “Generalized Ostrowski type inequalities for local fractional integrals,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 145, no. 4, pp. 1527–1538, 2017.

[17] M. Z. Sarikaya, S. Erden, and H. Budak, “Some generalized Ostrowski type inequalities involving local fractional integrals and applications,” *Advances in Inequalities and Applications*, vol. 2016, p. 16 pages, 2016.

[18] Y. Xiao-Jun, “Local fractional integral equation and their application,” *Advances in Computer Science and its Applications (ACSA)*, vol. 1, no. 4, pp. 234–239, 2012.

[19] N. Uygun, “Simpson type inequalities for quasi convex and generalized quasi convex functions,” Master’s thesis, Univ. of Ordu, Ordu, 2016.

[20] X. Yang, “Local fractional integral transforms,” *Progress in Nonlinear Science*, vol. 4, no. 1, pp. 1–225, 2011.

[21] K. M. Kolwankar and A. D. Gangal, “Local fractional Fokker-Planck equation,” *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 2, pp. 214–217, 1998.

[22] M.-S. Hu, D. Baleanu, and X.-J. Yang, “One-phase problems for discontinuous heat transfer in fractal media,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, p. 3 pages, 2013.

[23] G.-S. Chen, “The local fractional Stieltjes transform in fractal space,” *Advances in Intelligent Transportation Systems*, vol. 1, no. 1, pp. 29–31, 2012.

[24] G.-S. Chen, “Local fractional improper integral in fractal space,” *Advances in Information Technology and Management*, vol. 1, no. 1, pp. 4–8, 2012.

[25] G. Hardy, J. Littlewood, and G. Polya, *Inequalities*. Cambridge, 1934.

[26] R. Bellman and E. F. Beckenbach, *Inequalities*. Springer, 1965.

[27] D. S. Mitrinovic and P. M. Vasic, *Analytic Inequalities*. Springer, 1970.

[28] P. Chebyshev, “Sur les expressions approximatives des integrales definies par les autres prises entre les mêmes limites,” *Proceedings of the Mathematical Society of Charkov*, vol. 2, pp. 93–98, 1882.

[29] K. Boukerrioua and A. Guezane-Lakoud, “On generalization of Čebyšev type inequalities,” *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, vol. 8, no. 2, p. 9 pages, 2007.

[30] A. Guezane-Lakoud and F. Aissaoui, “New Čebyšev type inequalities for double integrals,” *Journal of Mathematical Inequalities*, vol. 5, no. 4, pp. 453–462, 2011.

[31] S. Hussain and M. Alomari, "Weighted Ostrowski and Čebyšev type inequalities with applications," *Konuralp Journal of Mathematics*, vol. 1, no. 2, pp. 1–16, 2013.

[32] B. Pachpatte and N. A. Talkies, "On Čebyšev-Grüss type inequalities via Pecaric's extension of the Montgomery identity," *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, vol. 7, no. 1, p. 4 pages, 2006.

[33] M. Z. Sarikaya, H. Budak, and H. Yaldiz, "Čebyšev type inequalities for co-ordinated convex functions," *Pure and Applied Mathematics Letters*, vol. 2, pp. 244–48, 2014.

[34] H. R. Moradi, M. E. Omidvar, and S. S. Dragomir, "An operator extension of Čebyšev inequality," *Analele Universitatii" Ovidius" Constanta-Seria Matematica*, vol. 25, no. 2, pp. 135–147, 2017.

[35] J. Steffensen, "On certain inequalities and methods of approximation," *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. 51, no. 3, pp. 274–297, 1919.

[36] S.-H. Wu and H. Srivastava, "Some improvements and generalizations of Steffensen's integral inequality," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 192, no. 2, pp. 422–428, 2007.

[37] J. Pecaric, A. Perusic Pribanic, and A. Vukelic, "Generalizations of Steffensen's inequality via Fink's identity and related results II," *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste*, vol. 47, pp. 221–239, 2015.

[38] W. Sulaiman, "Extensions of Steffensen's inequality," *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, vol. 4, no. 2, pp. 249–254, 2012.

[39] J. Bergh, "A generalization of Steffensen's inequality," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 41, no. 1, pp. 187–191, 1973.

[40] U. M. Ozkan and H. Yildirim, "Steffensen's integral inequality on time scales," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2007, p. 10 pages, 2007.

[41] M. W. Alomari, S. Hussain, and Z. Liu, "Some Steffensen-type inequalities," *Advances in Pure and Applied Mathematics*, vol. 8, no. 3, pp. 219–226, 2017.

[42] G. Grüss, "Über das maximum des absoluten betrages von $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int\limits_a^b f(x)dx\int\limits_a^b g(x)dx$," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39, no. 1, pp. 215–226, 1935.

[43] D. S. Mitrinovic, J. Pecaric, and A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*. Kluwer Academic Publishers, 1993.

[44] S. S. Dragomir and I. Fedotov, "An inequality of Grüss type for Riemann-Stieltjes integral and applications for special means," *Tamkang Journal of Mathematics*, vol. 29, no. 4, pp. 287–292, 1998.

[45] S. S. Dragomir, "Some integral inequalities of Grüss type," *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 31, no. 4, pp. 397–415, 2000.

[46] M. Z. Sarikaya, “A note on Grüss type inequalities on time scales,” *Dynamic Systems and Applications*, vol. 17, no. 3-4, pp. 663–666, 2008.

[47] J. Pečarić and B. Tepeš, “On Grüss type inequalities of Dragomir and Fedotov,” *Journal of Inequalities in Pure & Applied Mathematics*, vol. 4, no. 5, p. 6 pages, 2003.

[48] A. Ostrowski, “Über die absolutabweichung einer differentiierbaren funktion von ihrem integralmittelwert,” *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 10, pp. 226–227, 1938.

[49] G. V. Milovanović and J. E. Pečarić, “On generalization of the inequality of A. Ostrowski and some related applications,” *Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i fizika*, no. 544/576, pp. 155–158, 1976.

[50] S. S. Dragomir, T. M. Rassias, and I. Aleksanova, *Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration*. Springer, 2002.

[51] H. Budak and M. Z. Sarikaya, “A new Ostrowski type inequality for functions whose first derivatives are of bounded variation,” *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis*, vol. 2, no. 1, pp. 1–11, 2016.

[52] E. Set, A. Akdemir, and I. Mumcu, “Ostrowski type inequalities for functions whoose derivatives are convex via conformable fractional integrals,” *Journal of Advanced Mathematical Studies*, vol. 10, no. 3, pp. 386–395, 2017.

[53] M. Bohner and T. Matthews, “Ostrowski inequalities on time scales,” *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathmatics*, vol. 9, no. 1, p. 8, 2008.

[54] M. K. Yildiz and M. Z. Sarikaya, “On the generalized Ostrowski type integral inequality for double integrals,” *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 13, no. 1, pp. 64–69, 2016.

[55] A. Qayyum, M. Shoaib, A. Matouk, and M. Latif, “On new generalized Ostrowski type integral inequalities,” *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2014, p. 8 pages, 2014.

[56] S. S. Dragomir and S. Wang, “An inequality of Ostrowski-Grüss’ type and its applications to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 33, no. 11, pp. 15–20, 1997.

[57] X.-L. Cheng, “Improvement of some Ostrowski-Grüss type inequalities,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 42, no. 1-2, pp. 109–114, 2001.

[58] S. Wang, Q. Xue, and W. Liu, “Some new perturbed generalizations of Ostrowski-Grüuss type inequalities for bounded differentiable mappings and applications,” *Applied Mathematics & Information Sciences*, vol. 7, no. 5, p. 2077, 2013.

[59] H. Budak and M. Z. Sarıkaya, “An inequality of Ostrowski-Grüss type for double integrals.” *Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica*, vol. 62, no. 2, 2017.

[60] S. S. Dragomir and C. Pearce. (2000) Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications, rgmia monographs, Victoria university, 2000. [Online]. Available: http://rgmia.vu.edu.au/monographs

[61] L. Fejér, "Über die fourierreihen, II, math," *Naturwiss. Anz Ungar. Akad. Wiss*, vol. 24, pp. 369–390, 1906.

[62] S. S. Dragomir, "On the Hadamard's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane," *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 5, no. 4, pp. 775–788, 2001.

[63] J. E. Peajcariaac and Y. L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications*. Academic Press, 1992.

[64] M. Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz, and N. Başak, "Hermite–Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 57, no. 9-10, pp. 2403–2407, 2013.

[65] M. Z. Sarikaya and S. Erden, "On the Hermite-Hadamard-Fejér type integral inequality for convex function," *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, vol. 2, no. 3, pp. 85–89, 2014.

[66] M. Z. Sarikaya and H. Budak, "Generalized Hermite-Hadamard type integral inequalities for fractional integrals," *Filomat*, vol. 30, no. 5, pp. 1315–1326, 2016.

[67] F. M. Atıcı and H. Yaldız, "Refinements on the discrete Hermite–Hadamard inequality," *Arabian Journal of Mathematics*, vol. 7, no. 3, pp. 175–182, 2018.

[68] M. A. Noor, K. I. Noor, and M. U. Awan, "A new Hermite-Hadamard type inequality for h-convex functions," *Creative Mathematics and Informatics*, vol. 24, no. 2, pp. 191–197, 2015.

[69] A. Parvate and A. D. Gangal, "Fractal differential equations and fractal-time dynamical systems," *Pramana*, vol. 64, no. 3, pp. 389–409, 2005.

[70] A. Parvate and A. D. Gangal, "Calculus on fractal subsets of real line—I: Formulation," *Fractals*, vol. 17, no. 01, pp. 53–81, 2009.

[71] F. B. Adda and J. Cresson, "About non-differentiable functions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 263, no. 2, pp. 721–737, 2001.

[72] K. M. Kolwankar and A. D. Gangal, "Local fractional calculus: a calculus for fractal space-time," *Fractals*, pp. 171–181, 1999.

[73] A. Parvate, S. Satin, and A. D. Gangal, "Calculus on fractal curves in R^n," *Fractals*, vol. 19, no. 01, pp. 15–27, 2011.

[74] G. Jumarie, "On the representation of fractional Brownian motion as an integral with respect to $(dt)^a$," *Applied Mathematics Letters*, vol. 18, no. 7, pp. 739–748, 2005.

[75] Y.-J. Yang, D. Baleanu, and X.-J. Yang, "Analysis of fractal wave equations by local fractional Fourier series method," *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2013, p. 6 pages, 2013.

[76] H. K. Jasmin, "Analytical solutions of partial differential equations on Cantor sets within local fractional derivative operators," Ph.D. dissertation, Univ. of Mazandaran, Babolsar, 2016.

[77] X.-J. Yang, D. Baleanu, and H. Srivastava, “Local fractional similarity solution for the diffusion equation defined on Cantor sets,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 47, pp. 54–60, 2015.

[78] J.-H. He and F. Liu, “Local fractional variational iteration method for fractal heat transfer in silk cocoon hierarchy,” *Nonlinear Science Letters A*, vol. 4, no. 1, pp. 15–20, 2013.

[79] X.-J. Yang, F. Gao, and H. M. Srivastava, “Exact travelling wave solutions for the local fractional two-dimensional Burgers-type equations,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 73, no. 2, pp. 203–210, 2017.

[80] X.-J. Yang, J. T. Machado, C. Cattani, and F. Gao, “On a fractal LC-electric circuit modeled by local fractional calculus,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 47, pp. 200–206, 2017.

[81] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco, 1982.

[82] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 2004.

[83] G. Cantor, “Über unendliche, lineare punktmannichfaltigkeiten,” *Mathematische Annalen*, vol. 23, pp. 453–488, 1884.

[84] T. H. Kaptanoğlu, “Cantor kümeleri,” *Matematik Dünyası*, vol. 4, pp. 15–22, 1993.

[85] C. Shaver, “An exploration of the Cantor set,” *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, vol. 11, no. 1, p. 18 pages, 2010.

[86] R. W. Vallin, *The Elements of Cantor Sets: with Applications*. John Wiley & Sons, 2013.

[87] K. J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, 1985.

[88] J. Choi, E. Set, and M. Tomar, “Certain generalized Ostrowski type inequalities for local fractional integrals,” *Communications of the Korean Mathematical Society*, vol. 32, no. 3, pp. 601–617, 2017.

[89] H. Budak and M. Z. Sarıkaya, “Some new generalized Hermite-Hadamard inequalities for generalized convex functions and applications,” *Journal of Mathematical Extension*, In press.

[90] M. Vivas, J. Hernández, and N. Merentes, “New Hermite-Hadamard and Jensen type inequalities for h-convex functions on fractal sets,” *Revista Colombiana de Matemáticas*, vol. 50, no. 2, pp. 145–164, 2016.

[91] H. Mo and X. Sui, “Generalized s-convex functions on fractal sets,” *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2014, p. 8 pages, 2014.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Tuba TUNÇ
Doğum Tarihi ve Yeri	: Kayseri 1988
Yabancı Dili	: İngilizce
Eposta	: tubatunc@duzce.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Doktora	Matematik Böl.	DÜ	2018
Y. Lisans	Matematik Böl.	KTÜ	2013
Lisans	Matematik Öğr.	KTÜ	2011
Lise		İAÖL	2006

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A1. M. Z. Sarikaya, T. Tunç and H. Budak, “On generalized some integral inequalities for local fractional integrals,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 276, pp. 316-323, 2016.

A2. M. Z. Sarikaya, H. Budak, T. Tunç, S. Erden and H. Yaldiz, “Perturbed companion of Ostrowski type inequality for twice differentiable functions,” *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics,* vol. 31, no. 3, pp. 593-607, 2016.

A3. T. Tunç, M. Z. Sarikaya and H. M. Srivastava, "Some generalized Steffensen’s inequalities via a new identity for local fractional integrals," *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 13, no. 1, pp. 98-107, (2017).

A4. M. Z. Sarikaya, T. Tunç and S. Erden,"Generalized Steffensen inequalities for local fractional integrals," *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 14, no. 1, pp. 88-98,(2017).

A5. M. Z. Sarikaya, T. Tunç and H. Budak,"Simpson's type inequality for F-convex function," *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, vol. 32, no. 5, pp. 747-753,(2017).

A6. M.Z. Sarikaya, C. Can Bilişik and T. Tunç," On Hardy type inequalities via k-fractional integrals,"*TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, in press.

A7. F. Usta, H. Budak, T. Tunç and M. Z. Sarikaya," New bounds for the Ostrowski type inequalities via conformable fractional calculus," *Arabian Journal of Mathematics,* in press.

A8. T. Tunç, H. Budak, F. Usta and M. Z. Sarikaya," New Hermite-Hadamard type inequalities on fractal set," *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications,* in press.

A9. T. Tunç, H. Budak and M. Z. Sarikaya, "On functional generalization of Ostrowski inequality for conformable fractional integrals", *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics,* in press.

A10. M. Z. Sarikaya and T. Tunç," Generalized some Hermite-Hadamard-type inequalities for co-ordinated convex functions,"*Palestine Journal of Mathematics,* vol. 7, no. 2, pp. 537-553,(2018).

B. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında (Proceedings) basılan bildiriler :

B1.T. Tunç, F. Usta, H. Budak and M. Z. Sarikaya," On Grüss type inequalities utilizing generalized fractional integral operators," 2nd International Conference on Advances in Natural And Applied Sciences (ICANAS2017), Antalya, Turkey,18-21 April,2017 .

B2. T. Tunç, H. Budak, F. USTA and M. Z. Sarikaya,"On new generalized fractional integral operators and related fractional inequalities", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAMM17), Istanbul, Turkey, July 3-7, 2017.

B3. H. Budak, F. Usta, T. Tunç and M. Z. Sarıkaya," On Ostrowski type inequalities via fractional integral operators," 1st International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2018), Antalya, Turkey, 30 April-4 May, 2018.

B4. T. Tunç and M. Z. Sarıkaya, "Some New Inequalities of Hermite-Hadamard Type via Fractional Integral Operators," 1st International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2018), Antalya, Turkey, 30 April-4 May, 2018.

C. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve tam metin basılan bildiriler :

C1. M. Z. Sarikaya, T. Tunc and M. K. Yildiz," Some generalized integral inequalities for convex functions and applications," AIP Conference Proceedings, 1726, 020047 (2016); doi: 10.1063/1.4945873.

C2. M. Z. Sarikaya, T. Tunc and H. Yaldiz," On Hermite Hadamard-type inequalities depending on the metric functions," AIP Conference Proceedings, 1726, 020074 (2016); doi: 10.1063/1.4945900.

C3. T. Tunç, F. Usta, H. Budak and M. Z. Sarikaya," On Grüss type inequalities utilizing generalized fractional integral operators, " AIP Conference Proceedings, 1833, 020054 (2017); doi: 10.1063/1.4981702 .