T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRLI VARYASYONLU FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKI TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

HÜSEYİN BUDAK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA

DÜZCE, 2017

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRLI VARYASYONLU FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKI TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Hüseyin BUDAK tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. İlhame AMİRALİ
Düzce Üniversitesi ______________________

Tez Savunma Tarihi: 13/10/2017

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

13 Ekim 2017

Hüseyin BUDAK

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca beni doğru bilgiyi bulmaya yönlendiren, bilgisi ve çalışma azmiyle bir akademisyenin nasıl olması gerektiğini bana ve tüm öğrencilerine gösteren ve öğreten değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA' ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca manevi desteklerini esirgemeyen ve güzel bir çalışma ortamı oluşturarak daha verimli çalışmamızı sağlayan tüm çalışma arkadaşlarıma tek tek teşekkürü bir borç bilirim.

Kendileri okuma ve yazma bilmedikleri halde benim okumam ve bu günlere gelmem için ellerinden gelen her şeyi yapan merhum babam Mustafa BUDAK'a ve annem Hadice BUDAK'a en kalbi duygularımla teşekkür ederim. Ayrıca tanıştığım günden beri her olay ve sorun karşısında yanımda olan ve bana destek olan eşim Özlem BUDAK'a ve varlığıyla hayatımıza renk katan kızım Aysima BUDAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca 2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsani Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

13 Ekim 2017 **Hüseyin BUDAK**

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

ÇİZELGE LİSTESİ

<u>Sayfa No</u>

SİMGELER

$C^1[a,b]$	Türevi sürekli fonksiyonlar kümesi
$C^2[a,b]$	İkinci türevi sürekli fonksiyonlar kümesi
$P(Q)$	Q nun bütün parçalanmalarının ailesi
Q	$[a,b]$ aralığı ile $[c,d]$ aralığının kartezyen çarpımı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\Re(\alpha)$	α ya göre Riemann-Stieltjes integrallenebilir tek değişkenli fonksiyonların kümesi
$RS(\alpha)$	α ya göre Riemann-Stieltjes integrallenebilir iki değişkenli fonksiyonların kümesi
$V_f(a,b)$	f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki toplam varyasyonu
$V(Q)$	f fonksiyonunun Q üzerindeki toplam varyasyonu

ÖZET

SINIRLI VARYASYONLU FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKI TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Ekim 2017, 141 sayfa

Bu tez çalışması iki ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, öncelikle sınırlı varyasyona sahip tek değişkenli fonksiyonlar için bazı genelleşmiş Ostrowski tipli eşitsizlikler ispatlanmış ve özel durumları incelenmiştir. Bunun yanı sıra, sırasıyla türevi ve *n*. türevi sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için bazı genelleşmiş eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra kendisi veya türevi sınırlı varyasyona sahip fonksiyonlar için önemli ağırlıklı eşitsizlikler ispatlanmıştır. Ayrıca, nümerik hesaplamaları için bazı formüller verilmiş ve elde edilen eşitsizlikler yardımıyla integrallerin hatalar için üst sınırlar elde edilmiştir. İkinci ana bölümde ise, iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için bazı Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca bu eşitsizliklerin ağırlıklı versiyonları da ispatlanmıştır.

Anahtar sözcükler: Sınırlı varyasyonlu fonksiyon, Ostrowski tipili eşitsizlikler, Riemann-Stieltjes integrali.

ABSTRACT

OSTROWSKI TYPE INTEGRAL INEQUALITIES FOR FUNCTIONS OF BOUNDED VARIATION AND APPLICATIONS

Hüseyin BUDAK
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
October 2017, 141 pages

This thesis work consists of two main parts. In the first part, some generalized Ostrowski type inequalities are first proved for the function of bounded variation with one variable and special cases of these inequalities are analyzed. Moreover, some generalized inequalities are established for the mappings whose derivatives and nth derivatives are of bounded variation, respectively. Then, some significant weighted inequalities are proved for the functions of bounded variation and the functions whose derivatives are of bounded variation. Moreover, some quadrature formula for numerical integration are given and some bounds for the remainder term are established with the help of obtained inqualities. In the second main part, some Ostrowski type inequalities are obtained for the functions of bounded variation with two variable. Weighted versions of these inequalities are also proved.

Keywords: Function of bounded variation, Ostrowski type inequalities, Riemann-Stieltjes integral.

EXTENDED ABSTRACT

OSTROWSKI TYPE INTEGRAL INEQUALITIES FOR FUNCTIONS OF BOUNDED VARIATION AND APPLICATIONS

Hüseyin BUDAK
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
October 2017, 141 pages

1. INTRODUCTION

Functions of bounded variation of a single variable were first introduced by Camille Jordan dealing with the convergence of Fourier series in1881. Functions of bounded variation of one variable are of great interest and usefulness because of their valuable properties, such as particularly with respect to additivity, decomposability into monotone functions, continuity, differentiability, measurability, integrability, and so on, have been much studied. Soon after Jordan's work, many mathematicians began to study notions of bounded variation for functions of two and more variables. In the literatüre, some of these definitions are known as Vitali, Hardy, Arzelà, Pierpont, Fréchet and Tonelli.

On the other hand, Mathematical inequalities have played an important role in establishing the foundations for methods of approximation. Around the end of the nineteenth and the beginning of the twentieth century, numerous inequalities were investigated and used in almost all branches of mathematics as well in other areas of science and engineering.

One of the many fundamental mathematical inequalities is known as "Ostrowski inequality". Ostrowski inequality has applications in quadrature, probability and optimization theory, stochastic, statistics, information and integral operator theory. In 2001, S. S. Dragomir extended the Ostrowski inequality for the function of bounded variation.

Te aim of the this thesis is to establish some generalized Ostrowski type inequalities for function of bounded variation function of one and two variables and to give some application.

2. MATERIAL AND METHODS

We first remind the definition and some fundamental properties of the function of bounded variation. We then consider algebraic properties as well as more abstract properties such as realizing that every function of bounded variation can be written as the difference of two increasing functions. We also recall the Rimann-Stieltjes integral concept in one and two variables. Later, we remind the some well-known definitions of the function of bounded variation with two variables and give the relationship between Rimann-Stieltjes integration and bounded variation. Moreover, we give the Ostrowski inequalities for the function of bounded variation and present some generalization of these inequalities.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

In this chapter, we first prove some generalized Ostrowski type inequalities for the function of bounded variation with one variable and give the special cases of these inequalities. We also establish some inequalities for the mapping whose first derivatives or n-th derivatives are of bounded varition, respectively. Then we obtain some weighted Ostrowski type inequalities for the function of bounded variation and mappings whose first derivatives are of bounded varition. Moreover, applications for the approximation problem of the Riemann-Stieltjes integral in terms of Riemann-Stieltjes sums are also given utilizing the inequalities obtainded in the previous subsection. In the literature a few sutudy on Ostrowski type inequalities for the function of bounded variation with two variables. Finally, we establish some important Ostrowski type inequalities for the functions of bounded variation with two variables.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK

In this study, we establish some generalized Ostrowski type inequalities fort he functions of bounded varation with one and two variables and give weighted versions of these inequalities. Moreover, some application for quadrature formula are given using obtained inequalities for the functions of bounded variable with one variable.

In the further studies, one can establish some application for cubature formula utilizing the established inequalities for the functions of bounded variable with two variables. Moreover, some new inequalities for the mappings of bounded variable with two variables can be obtained.

1. GİRİŞ

Tek değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar ilk olarak 1881 yılında Camille Jordan tarafından Fourier serilerinin yakınsaklığı araştırılırken ortaya konmuştur [1]. Jordan, eğer sürekli bir fonksiyon sınırlı varyasyonlu ise, bu takdirde bu fonksiyonun Fourier serisi kapalı sınırlı bir küme üzerinde düzgün yakınsak olduğunu kanıtladı. Kompakt $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığında sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar uzayı noktasal çarpıma göre değişmeli Banach cebri olduğu bilinmektedir [2]. Tek değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar, önemli özellikleri nedeniyle ilginç ve kullanışlıdır. Toplanabilirlik, monoton fonksiyonlara parçalanabilirlik, süreklilik, diferansiyellenebilirlik, ölçülebilirlik, integrallenebilirlik vb. özellikleri birçok bilim adam tarafından çalışılmıştır. Sınırlı varyasyonların bu kadar fazla çalışılmasının sebebi, düzeltilebilir eğri, Fourier serileri, Walsh-Fourier serileri ve diğer seriler, Stieltjes integrali, Henstock-Kurzweil integrali ve diğer integraller ve varyasyon hesabındaki önemli rolünden kaynaklanmaktadır.

Tek değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonların tanımı verildikten ve geliştirildikten sonra, birçok araştırmacı iki ve daha çok değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonların tanımı üzerine çalışmış ve yeni tanımlar vermişlerdir. Bu tanımların en önemlileri literatürde Vitali, Hardy, Arzelà, Pierpont, Fréchet ve Tonelli adlarıyla bilinirler. J. A. Clarkson ve C. R. Adams bu tanımları aynı çalışmada toplamış ve aralarındaki ilişkiyi vermişlerdir [3].

Diğer yandan matematiksel eşitsizlikler, yaklaşım metotlarının temellerinin elde edilmesinde A.L. Cauchy, P.L. Čebysev, C.F. Gaus ve diğer birçok bilim insanından beri önemli rol oynamaktadır. On dokuzuncu yüzyılın sonu ve yirminci yüzyılın başlarında, çok sayıda eşitsizlik matematiğin hemen hemen tüm branşlarında, bilim ve mühendisliğin ise birçok alanında incelenmiş ve kullanılmıştır. Hardy ve diğ. [4] tarafından ortaya konulan ve öncü çalışmalardan olan "Inequalities" adlı kitap, eşitsizlikler alanını izole olmuş formüller yığınından sistematik bir bilim dalına dönüştürmüştür. Bu çalışma temel fikirleri, sonuçlar ve teknikleri sunmuş ve analizin birçok dalında araştırmalara etkisi olmuştur. 1934 ten bu yana literatürde, dikkate değer çeşitli eşitsizlikler sunulmuş ve çalışılmıştır. Kendi yayın yıllarına kadar yapılan önemli çalışmalar, birçok referansı ile birlikte [5] ve [6]'da verilen kitaplarda bulunabilir. Bu üç kitap eşitsizlikler konusunda önemli yere sahiptir.

Eşitsizliklerin birçok tipi hem teorik hem de uygulama çalışan araştırmacılar tarafından yıllardır çalışılmaktadır. Analitik eşitsizlikleri kullanmak için farklı araştırmacılar çeşitli yaklaşımlar geliştirmiştir. Temel sonuçlar, yöntemleri ve uygulamalar yeni araştırmacılara tanıtan ve aynı zamanda matematiğin diğer alanlarındaki yüksek lisans öğrencileri için de yardımcı olan birçok temel ve önemli kitap vardır.

Son yirmi yıldan beri, eşitsizlik alanı dikkate değer bir gelişim göstermiştir. Özellikle Čebysev, Grüss, Yamuk (Trapezoid), Ostrowski, Hadamard ve Jensen olarak adlandırılan eşitsizlikler ile ilgili pek çok araştırma makalesi yapılmıştır. Son birkaç yılda yayınlanan bazı araştırma ve monografiler eşitsizlik alanındaki ilerlemenin önemli bir kısmını oluşturmuştur.

En önemli matematiksel eşitsizliklerden biri A. M. Ostrowski tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir [7]:

$a,b \in \mathbb{R}$ ve $a<b$ olmak üzere $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f'\ :\ (a,b) \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonu (a,b) aralığında sınırlı ise, yani, $\|f'\|_\infty \sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)| < \infty$ ise, bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \le \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right](b-a)\|f'\|_\infty \tag{1.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez. (1.1) eşitsizliği, $x \in [a,b]$ noktasındaki $f(x)$ değeri ile

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

integral ortalaması arasındaki yaklaşım için bir üst sınır vermektedir.

Bu eşitsizlik literatürde Ostrowski eşitsizliği olarak bilinmektedir. 1938 de ortaya çıkışından beri, pek çok araştırmacı (1.1) tipindeki eşitsizlikler ve uygulamalar üzerine yoğunlaşmıştır. [8] ve [9]'da verilen kitaplar Ostrowski eşitsizliği ile ilişkin sonuçların önemli bir kısmını içerir. Son yıllarda literatürde Ostrowski eşitsizliği üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Sürekli ve ayrık durumlarda, Ostrowski tipi eşitsizliğinin çok sayıda genellemeleri, genişlemeleri ve varyantları yapılmıştır. Ayrıca n kez türevlenebilir fonksiyonlar, sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar, vektör değerli fonksiyonlar, çok katlı integraller ve zaman skalasında daha genel versiyonları çalışılmıştır. Nümerik analiz, olasılık teorisi ve diğer alanlarda çok sayıda uygulamaları vardır [10].

S. S. Dragomir, 1999 yılında yaptığı ve 2001 yılında yayınladığı çalışmasında, sınırlı türevli diferensiyellenebilir fonksiyonlar için olan klasik (1.1) Ostrowski eşitsizliğini, daha genel bir sınıf olan sınırlı varyasyonlu fonksiyonlara aşağıdaki şekilde genişletmiştir:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. $V_f(a,b)$, f fonksiyonunun toplam varyasyonunu göstermek üzere, her $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \le \left[\frac{1}{2} + \left| \frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right| \right] V_f(a,b) \tag{1.2}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki $\frac{1}{2}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez [11].

Yapılan bu genelleme üzerine, son yıllarda başta S. S. Dragomir olmak üzere K.-L. Tseng, P. Cerone, G-S. Yang, N.S. Barnett, S.-R. Hwang ve M. W. Alomari gibi araştırmacılar (1.2) eşitsizliğinin genelleştirmeleri ve genişlemeleri üzerine çalışmışlardır.

S. S. Dragomir, sınırlı varyasyonlu fonksiyonları kullanarak Simpson Kuralındaki, Orta Nokta Kuralındaki ve Yamuk Kuralındaki kalan terimler için sırasıyla [12], [13] ve [14]'te tahminler vermiştir. Ayrıca bu üç çalışmada da özel ortalamalar için uygulamalar incelenmiştir. Bunun yan sıra [15]'te Dragomir n adımlı bir çekirdek yardımıyla sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için genelleşmiş Ostrowski tipli eşitsizlikler elde etmiş ve özel durumlar için bir çok sonuç vermiştir. Daha sonra [16]'da Cerone ve diğ. genelleşmiş Yamuk tipli eşitsizlikler elde ederek, bu eşitsizlikler yardımıyla integrallerin nümerik hesaplamalar, olasılık teorisi, özel ortalamalar ve Beta fonksiyonunun tahmini için uygulamalar vermişlerdir.

[17]-[19]'da Alomari ve [20]'de Dragomir, üç parçalı çekirdek kullanarak sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için genelleşmiş Ostrowski tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir. Ayrıca bu çalışmalarda integrallerin nümerik hesaplamalar için formüllerin hatalarının üst sınırları ve olasılık yoğunluk fonksiyonu için uygulamalar verilmiştir. Bunun yanı sıra [21]'de Barnett ve diğ. sınırlı varyasyonlu, Lipschitz, konveks ve mutlak sürekli gibi birçok fonksiyon sınıfı için genelleşmiş Yamuk ve Ostrowski tipli eşitsizlikleri ispatlamış ve eşitsizliklerin ağırlıklı ortalamalar için uygulamalarını vermişlerdir.

Diğer yandan, sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için ağırlıklı eşitsizlikler de çalışılmıştır. [22] ve [23]'te Tseng ve diğ. sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için Yamuk ve Simson eşitsizliğinin bazı ağırlıklı genellemelerini elde etmişlerdir. Ayrıca aynı çalışmalarda, r -moment, sürekli bir rastsal değişkenin tahmini ve Beta fonksiyonu için birçok uygulama vermişlerdir. Bunun yan sıra [24]'te Tseng ve diğ. ağırlıklı Ostrowski eşitsizliğini ispatlamış ve [25]'te ise Liu bu eşitsizliğin başka bir genellemesini elde etmiştir. [26]'da Tseng ve diğ. n adımlı çekirdek yardımıyla genelleşmiş ağırlıklı Ostrowki tipli eşitsizlikler elde etmişler ve özel durumlar için birçok sonuç vermişlerdir. Ağırlıklı eşitsizliklerin elde edildiği diğer bazı çalışmalar [27]-[29] olarak verilebilir.

[30]'da Liu yaptığı çalışmada türevi sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için bazı genel eşitsizlikler elde etmiştir. Diğer yandan [31]'de Dragomir ve [32]'de ise Dragomir ve Abelman n. türevi sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için bazı eşitsizlikler elde edip önemli sonuçlar vermişlerdir. Sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren diğer bazı çalışmalar [33]-[48] olarak sıralanabilir.

Tek değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için Ostrowski eşitsizliği bir çok matematikçi tarafından çalışılırken iki değişkenliler için durum aynı değildir. İki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler üzerine yapılan çalışmalar yok denecek kadar azdır. Bu tipteki ilk eşitsizlikler [49]'da Jawarneh ve Noorani tarafından ispatlanmıştır. Yazarlar bu çalışmada iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için Ostrowski, Yamuk, Orta Nokta ve Simpson tipindeki eşitsizlikleri vermişlerdir. Fakat bu çalışmada ki eşitsizliklerin bazılarında küçük hatalar mevcuttur. Bu eşitsizlikler doğru hali ile 4. Bölümde yeniden ispatlanacaktır.

Bu tezin akışı şu şekilde olacaktır: İkinci bölümde tek ve iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonların tanımları ve bazı önemli özellikleri verilerek bu fonksiyonlar için literatürde var olan bazı önemli Ostrowski tipli eşitsizlikler ispatsız olarak sunulacaktır.

Üçüncü bölümde ise ilk olarak sınırlı varyasyona sahip tek değişkenli fonksiyonlar için bazı genelleşmiş Ostrowski tipli eşitsizlikler ispatlanacak ve özel durumları verilecektir. Bunun yanı sıra sırasıyla türevi ve *n.* türevi sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilecektir. Daha sonra kendisi veya türevi sınırlı varyasyona sahip fonksiyonlar için önemli ağırlıklı eşitsizlikler ispatlanıp özel durumları için sonuçlar verilecektir. Son olarak, elde edilen eşitsizlikler yardımıyla integrallerin nümerik hesaplamaları için bazı formüller verilerek hataları için üst sınırlar elde edilecektir. Ayrıca bazı belli fonksiyonlar için farklı yöntemlerle nümerik hesaplamalar yapılarak karşılaştırmalar yapılacaktır.

Literatürde iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler yok denecek kadar azdır. Bu açığı doldurmak için, dördüncü bölümde tek değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için literatürde var olan bazı Ostrowski tipli eşitsizlikler iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için elde edilecektir.

Son olarak beşinci bölümde ise tezde elde edilen sonuçlar özetlenecek ve karşılaşılan zorluklar ifade edilecektir. Ayrıca sonraki çalışmalarda neler yapılabileceği üzerinde durulacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde ilk olarak tek değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyon ve tek değişkenli Riemann-Stieltjes integral tanımları verilerek temel özellikleri sunulacaktır. Daha sonra iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyon tanımı verilecektir. Son olarak, sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için literatürdeki bazı önemli Ostrowski tipli eşitsizlikler ispatsız olarak ifade edilecektir.

2.1. TEK DEĞİŞKENLİ SINIRLI VARYASYONLU FONKSİYONLAR

Sınırlı varyasyonlu fonksiyonların tanımı verilmeden önce bazı gerekli önbilgiler verilmelidir. İlk olarak üst sınır ve alt sınır kavramları verildikten sonra parçalanışın tanımı verilecektir.

Tanım 2.1.1. S boş olmayan bir reel sayı kümesi olsun.

(1) Eğer her $x \in S$ için $M \geq x$ olacak şekilde bir M sayısı varsa S kümesi üstten sınırlıdır. M sayısına da S nin bir üst sınırı denir.

(2) Eğer her $x \in S$ için $m \leq x$ olacak şekilde bir m sayısı varsa S kümesi alttan sınırlıdır. m sayısına da S nin bir alt sınırı denir.

(3) Eğer S alttan ve üstten sınırlı ise sınırlıdır. Yani, her $x \in S$ için $|x| \leq r$ olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa S kümesi sınırlıdır. r sayısına da S nin bir sınırı denir [50].

Tanım 2.1.2. S boş olmayan bir reel sayı kümesi olsun.

(1) S üstten sınırlı olsun. β sayısı, S nin en küçük üst sınırı ise β sayısına S nin supremumu denir ve $\beta = \sup S$ ile gösterilir.

(2) S alttan sınırlı olsun. α sayısı, S nin en büyük alt sınırı ise α sayısına S nin infimumu denir ve $\beta = \inf S$ ile gösterilir [50].

Teorem 2.1.1. S üstten sınırlı boş olmayan bir reel sayı kümesi ve b, S nin bir üst sınırı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir [50].

(1) $b = \sup S$

(2) Her $\varepsilon > 0$ için $|b - x| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır.

(3) Her $\varepsilon > 0$ için $x \in (b-\varepsilon, b]$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır.

Tanım 2.1.3. $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ olmak üzere $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ noktalar kümesine $[a,b]$ aralığının bir parçalanışı denir [50].

Bu tanımlar ele alınarak sınırlı varyasyonlu fonksiyonların tanımı verilebilir.

Tanım 2.1.4. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ele alınsın. $[a,b]$ kapalı aralığının keyfi $P = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ parçalanışı için

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < M \tag{2.1}$$

olacak şekilde sınırlı bir M sayısı varsa, f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonlu fonksiyon denir. Tüm bölüntüler için (2.1) şeklinde gösterilen toplamın en küçük üst sınırına, f fonksiyonun $[a,b]$ kapalı aralığında toplam varyasyonu denir ve

$$V_a^b(f) = V(f,[a,b]) = V_f(a,b) = \sup_P \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

ile gösterilir [51].

Bu tezde f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki toplam varyasyonu için $V_f(a,b)$ sembolü kullanılacaktır.

Örnek 2.1.1. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sabit ise, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonludur.
Gerçekten, $[a,b]$ üzerinde $f(x) = c$ sabit fonksiyonu ele alınsın. Böylece her parçalanma için

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right|$$

toplamı sıfırdır. Yani $V_f\ (a,b)$ sıfırdır.

Teorem 2.1.2. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında artansa, bu durumda f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonludur ve $V_f(a,b) = f(b) - f(a)$ dır. Benzer şekilde f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında azalansa, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonludur ve $V_f(a,b) = f(a) - f(b)$ dır [51].

2.1.1. Sınırlı Varyasyonlu Fonksiyonlarn Cebirsel Özellikleri

Bu alt bölümde sınırlı varyasyonlu fonksiyonların bazı özellikleri ele alınacaktır.

Teorem 2.1.3. f ve g fonksiyonlar $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar ve k bir sabit olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler vardır:

(1) f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonludur.

(2) f fonksiyonu $[a,b]$ aralığının her kapalı alt aralığında sınırlı varyasyonludur.

(3) kf fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonludur.

(4) $f+g$ ve $f-g$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonludur.

(5) fg fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonludur.

(6) $\frac{1}{g}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı ise, $\frac{f}{g}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonludur [52].

Teorem 2.1.4. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in (a,b)$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a,c]$ ve $[c,b]$ aralıkları üzerinde sınırlı varyasyonlu ise bu durumda f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu ve $V_f(a,b) = V_f(a,c) + V_f(c,b)$ dir [52].

Şimdi özel bir aralıkta sınırlı varyasyonlu olmayan bazı fonksiyonlar ele alınacaktır. Bu verilen fonksiyon örnekleri, hangi fonksiyonların sınırlı varyasyonlu olmasına gerek olmadığını belirlemeye ve bir fonksiyonun sınırlı varyasyonlu olmadığını nasıl gösterilmesi gerektiğine yardım edeceklerdir.

Örnek 2.1.2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) nin her bir alt aralığında sınırlı varyasyonlu olsa bile $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonlu olmasına gerek yoktur.
Bu ifadenin doğruluğu bir örnekle gösterilebilir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

fonksiyonu ele alınsın. Bu fonksiyon $(0,1)$ aralığında artan ve böylece Teorem 2.1.2 gereğince $(0,1)$ aralığının her bir kapalı alt aralığında sınırlı varyasyonludur. Fakat $x = 1$ de dikey asimptotu olduğundan, parçalanma 1 e yeterince yakın seçilirse

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

toplamı istenildiği kadar büyük yapılabilir. Böylece $V_f(0,1) = \infty$ ve f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı varyasyonlu değildir.

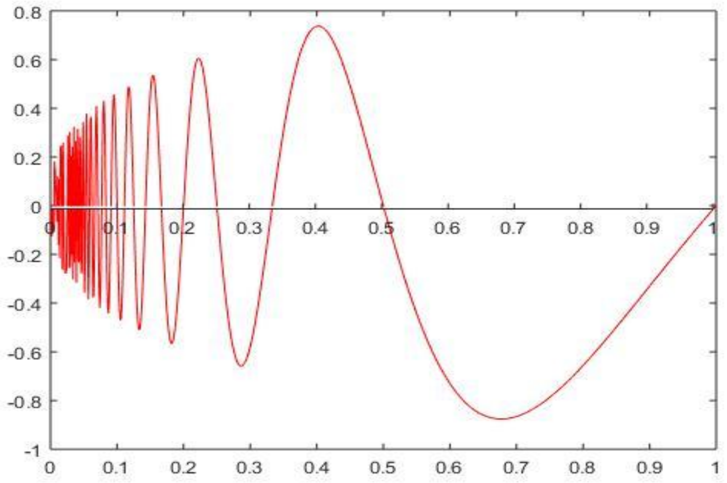
Aşağdaki örnek sürekli fonksiyonun sınırlı varyasyonlu olması gerekmediğini gösterdiğinden önemli bir örnektir.

Örnek 2.1.3.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}\sin(\pi / x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı varyasyonlu değildir.

Bunu göstermek için $[0,1]$ aralığının uygun bir parçalanışı ele alınmalıdır. Genelliği bozmadan parçalanma noktalarının sayısı çift, yani n çift olsun. Böylece, $[0,1]$ aralığının



Şekil 1.1. $f(x) = \sqrt[3]{x}\sin(\pi/x)$ fonksinunun grafiği

$$x_n = 1,\ x_{n-(2k+1)} = \frac{1}{k+3},\ x_{n-2k} = \frac{2}{2k+3},\ k = 1,2,\ldots,n-1 \text{ ve } x_0 = 0$$

parçalanışı ele alınsın. Bu durumda,

$$V_f(0,1) = \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right| \geq \sum_{i=1}^{n/2} \left| f(x_{2i+1}) - f(x_{2i}) \right|$$

olur. Burada toplamdan bazı aralıklar atıldı. Kalan aralıklar üzerinde fonksiyon uygun özelliklere sahiptir. Ele alınan aralıklar $[1/(k+3), 2/(2k+3)]$ formunda ve $f(1/(k+3)) = 0$ ve $f(2/(2k+3)) = \sqrt[3]{2/(2k+3)}$ olduğu açıktır. $\sqrt[3]{x}$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan, f fonksiyonunu artan veya azalan olmasını etkileyecek tek bileşen $\sin(\pi/x)$ fonksiyonudur. Sinüs fonksiyonunun hangi aralıkta nasıl davrandığı bilinerek, f fonksiyonunun $[1/(k+3), 2/(2k+3)]$ formundaki her bir aralıkta monoton olduğu görülebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} V_f(0,1) &\geq \sum_{i=1}^{n/2} \left| f(x_{2i+1}) - f(x_{2i}) \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| f(1/(i+3)) - f(2/(2i+3)) \right| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sqrt[3]{\frac{2}{2i+3}} \right| = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2i+3}} \end{aligned}$$

olur. Payda i ye göre artan olduğundan,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2i+3}} \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{i+3}}$$

dır. Bu seri bir p-serisi ve $\frac{1}{3}<1$ olduğundan ıraksaktır. Yani bunun anlamı n'yi yeterince büyük seçerek

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2i+3}}$$

toplamı istenildiği kadar büyük yapılabilir ve $V_f(0,1)=\infty$ olur. Sonuç olarak, fonksiyon sürekli fakat sınırlı varyasyonlu değildir.

Aşağıdaki teorem sınırlı varyasyonlu bir fonksiyonun iki monoton artan fonksiyonun farkı olarak yazılabildiğini göstermektedir.

Teorem 2.1.5. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı varyasyonlu ise, $f = f_1 - f_2$ olacak şekilde f_1 ve f_2 artan fonksiyonlar vardır [51].

Bu teoremin ispatı aşağıdaki iki lemma yardımıyla kolaylıkla yapılabilir.

Lemma 2.1.1. Bir f fonksiyonu için $V_f(a,b)=0$ olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun $[a,b]$ de sabit olmasıdır [51].

Lemma 2.1.2. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$'de sınırlı varyasyonlu ve $x \in [a,b]$ ise bu durumda $g(x)=V_f(a,x)$ fonksiyonu artandır [51].

Sıradaki teorem sınırlı varyasyonlu fonksiyonların sürekliliği içeren bazı özelliklerini vermektedir.

Teorem 2.1.6. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$'de sınırlı varyasyonlu olsun. V fonksiyonu $V(a)=0$ ve her $x \in (a,b]$ için $V(x)=V_f(a,x)$ olarak tanımlansın. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler vardır [51].

(1) Eğer $a \leq x < y \leq b$ ise $V(y)-V(x)=V_f(x,y)$ dir.

(2) V, $[a,b]$'de artandır.

(3) Eğer V, $c \in [a,b]$ noktasında sürekli ise f fonksiyonu da $c \in [a,b]$ noktasında süreklidir.

(4) Eğer f fonksiyonu $c \in [a,b]$ noktasında sürekli ise V de $c \in [a,b]$ noktasında süreklidir.

(5) Eğer f, $[a,b]$ de sürekli ise f fonksiyonu iki sürekli fonksiyonun farkı şeklinde yazılabilir.

2.1.2. Mutlak Süreklilik Ve Sınırlı Varyasyonlu Fonksiyonlar

Bu alt bölümde mutlak süreklilik ve sınırlı varyasyonlu olma arasındaki ilişki incelenecektir. İlk olarak mutlak süreklilik ve düzgün süreklilik tanımları verilip, sonra mutlak sürekliliğin düzgün sürekliliği gerektirdiği ifade edilecektir.

Tanım 2.1.5. I bir aralık olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ ve her $x, y \in I$ için

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $|x - y| < \delta$ şartını sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Mutlak süreklilik tanımı için şunu bilmek gerekir: İki aralığın kesişimi en fazla bir nokta içeriyorsa bu aralıklar örtüşmeyen aralıklardır.

Tanım 2.1.6. I bir aralık olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde mutlak süreklidir $\Leftrightarrow$ $\{[c_i, d_i] : 1 \le i \le n\}$, I aralığındaki örtüşmeyen aralıkların sonlu birleşimi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{i=1}^{n} |f(d_i) - f(c_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) < \delta$ şartını sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı vardır [52].

Örnek 2.1.4. $g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında mutlak süreklidir.

Teorem 2.1.7. Mutlak sürekli fonksiyonlar düzgün süreklidir [52].

Şimdi, mutlak sürekli fonksiyonların, Lipschitz fonksiyonlar gibi, bazı genel örnekleri ele alınacaktır. Ayrıca mutlak sürekliliğin cebirsel özellikleri de incelenecektir.

Tanım 2.1.7. $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $k > 0,\ k \in \mathrm{R}$ olsun. Eğer her $a, b \in I$ için

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$$

oluyorsa, f fonksiyonu k sabiti için Lipschitz koşulunu sağlar ve f fonksiyonuna Lipschitz fonksiyonu denir [52].

Teorem 2.1.8. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu k Lipschitz sabiti için Lipschitz fonksiyonu ise, bu takdirde f fonksiyonu I aralığında mutlak süreklidir [52].

Teorem 2.1.9. $f, g : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için aşağıdaki ifadeler doğrudur [52].

(1) f fonksiyonu I aralığında mutlak sürekli ise $|f|$ fonksiyonu da I aralığında mutlak süreklidir.

(2) f ve g fonksiyonları I aralığında mutlak sürekli ise $f+g$ fonksiyonu da I aralığında mutlak süreklidir.

(3) f ve g fonksiyonlar I aralığında mutlak sürekli ise fg fonksiyonu da I aralığında mutlak süreklidir.

Aşağıdaki teorem mutlak süreklilik ile sınırlı varyasyonlu olma arasındaki bağıntıyı vermektedir:

Teorem 2.1.10. Bir f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli ise f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonludur [52].

Teorem 2.1.10 kullanılarak, düzgün sürekli fakat mutlak sürekli olmayan bir örnek verilecektir. Bu örnek iki süreklilik tipi arasındaki farkı gösterdiği için önemli bir örnektir. Bunun için ilk olarak analizden bilinen aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 2.1.11. X kapalı ve sınırlı bir küme ve f, X üzerinde sürekli ise, bu durumda f, X üzerinde düzgün süreklidir [52].

Örnek 2.1.5. $x \neq 0$ için $f(x) = \sqrt[3]{x}\sin(\pi / x)$ ve $f(0) = 0$ ile tanımlanan f fonksiyonu düzgün sürekli fakat mutlak sürekli değildir.

Daha önce bu fonksiyonun $[0,1]$ aralığında sınırlı varyasyonlu olmadığı gösterildi. Böylece Teorem 2.1.10 gereğince mutlak sürekli değildir. Fakat bu fonksiyon düzgün süreklidir. f, $[0,1]$ kapalı ve sınırlı kümesinde sürekli olduğundan, Teorem 2.1.11 gereğince $[0,1]$'de düzgün süreklidir.

Teorem 2.1.12. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu mutlak süreli ise bu durumda f, iki sürekli ve artan fonksiyonun farkı olarak yazılabilir [52].

Aşağıdaki teorem türevle mutlak süreklilik arasındaki dolayısıyla türevle sınırlı varasyonlu olma arasındaki bağıntıyı vermektedir.

Teorem 2.1.13. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve f' türevi var ve (a,b) aralığında sınırlı ise, bu durumda f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir [52].

Not. Türevi sınırlı olmayan fonksiyon mutlak sürekli olabilir.

Gerçekten, $[0,1]$ aralığında $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu ele alınsın. Daha önce bu fonksiyonu mutlak sürekli olduğu belirtilmişti. Ancak, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ türevi $(0,1)$ aralığında sınırlı değildir.

Sonuç 2.1.1. f fonksiyonunun $[a,b]$aralığında sınırlı bir türevi varsa f fonksiyonu bu aralıkta sınırlı varyasyonludur.

Not. f fonksiyonun sınırlı varyasyonlu olması içini f' türev fonksiyonunun sınırlı olmasına gerek yoktur. Yani, f', türev fonksiyonu sınırlı olmadan da f fonksiyonu sınırlı varyasyonlu olabilir.

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon tek düze olduğundan her sonlu aralıkta sınırlı varyasyonludur. Oysa, $x \to 0$ için $f' \to \infty$şeklinde sınırsızdır.

2.2. RIEMANN-STIELTJES İNTEGRALLERİ

Bu bölümde Riemann-Stieltjes integralini tanımlanıp bazı özellikleri ele alınacaktır. Daha sonra Rieman-Stieltjes integralleriyle ilgili bazı teoremler sunulacaktır. Son olarak, Rimann-Stieltjes anlamda inegrallenebilir fonksiyonlar ile sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar arasındaki ilişki verilecektir.

Tanım 2.2.1. α, $[a,b]$ üzerinde monoton artan bir fonksiyon olsun. $[a,b]$ aralığının her bir $P=\{x_i \ : \ 0\le i\le n\}$ parçalanışı için $\Delta\alpha_i=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})$ olsun. $[a,b]$ aralığında keyfi sınırlı reel f fonksiyonu ve keyfi P parçalanışı için, sırasıyla üst ve alt toplamlar

$$U(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\alpha_i, \;\; L(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\alpha_i$$

olarak tanımlanır. Burada M_i ve m_i değerleri f fonksiyonunun $[x_{i-1},x_i]$ aralığındaki supremum ve infimum değerleridir. P, $[a,b]$ nin bir parçalanışı olmak üzere üst ve alt integraller sırasıyla

$$\overline{\int_a^b} fd\alpha=\inf\{U(P,f,\alpha):\}$$

$$\underline{\int_a^b} fd\alpha=\sup\{L(P,f,\alpha)\}$$

olarak tanımlanır [53].

Eğer bu iki ifade birbirine eşit ise, bu ortak değer f fonksiyonunun α üzerinden Riemann-Stieltjes integralidir ve $\int_a^b fd\alpha$ veya $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ ile gösterilir. Eğer $\int_a^b fd\alpha$ integrali varsa, f fonksiyonuna α ya göre Riemann-Stieltjes integrallenebilir denir ve $f\in\Re(\alpha)$ olarak yazılır.

$\alpha=x$ için Riemann-Stieltjes integrali bilinen Riemann inegraline indirgenir. $\alpha=x$ durumu ele alınsın. Her $[a,b]$ aralığında α nın monoton artan olduğu bilinmektedir. Ayrıca, $\Delta\alpha_i=(x_i-x_{i-1})=\Delta x_i$ dir. Bu durumda alt ve üst toplamlar Riemann toplamlarına dönüşür. Eğer bu iki toplam ortak bir değere yakınsarsa, bu değer f fonksiyonunun Riemann inegrali olan $\int_a^b f dx$ dir.

Şimdi Riemann-Stieltjes integrasyonu ve sınırlı varyasyonlu olma arasındaki bağıntıyı vermek için gerekli bazı teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.2. $P \subset P^*$ ise P^* parçalanışı P parçalanışından daha incedir denir. P_1 ve P_2 iki parçalanış için $P = P_1 \cup P_2$ parçalanışı ikisinden de incedir [53].

Teorem 2.2.1. P^* parçalanışı P parçalanışından daha ince ise $L(P, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha)$ ve $U(P, f, \alpha) \geq U(P^*, f, \alpha)$ dir [53].

Teorem 2.2.2. $[a,b]$ aralığı üzerinde f fonksiyonunun α ya göre üst ve alt integrali arasında

$$\int_{\underline{a}}^{b} f d\alpha \leq \int_{a}^{\overline{b}} f d\alpha$$

bağıntısı vardır [53].

Teorem 2.2.3. $[a,b]$ aralığı üzerinde $f \in \Re(\alpha)$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon \tag{2.2}$$

olacak şekilde $[a,b]$ aralığının bir P parçalanışının olmasıdır [53].

Teorem 2.2.4. Aşağıdaki ifadeler vardır [53]:

(1) Keyfi ε ve bir P parçalanışı için (2.2) eşitsizliği sağlanıyorsa, P'den ince her parçalanış (aynı ε için) için de sağlanır.

(2) $P = \{x_0, ..., x_n\}$ parçalanışı için (2.2) eşitsizliği sağlanıyor ve s_i, t_i noktaları $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında keyfi noktalar ise bu takdirde

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f(s_i) - f(t_i) \right| \Delta\alpha_i < \varepsilon$$

dir.

(3) Eğer (2) nin hipotezi sağlanyor ve $f \in \Re(\alpha)$ ise bu durumda

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon$$

sağlanır.

Teorem 2.2.5. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında monoton ve α, $[a,b]$ aralığında sürekli (ve monoton) ise bu takdirde $f \in \Re(\alpha)$ dir [53].

Teorem 2.2.6. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı ve sonlu sayıda süreksizlik noktası olsun. Ayrıca f fonksiyonunu süreksiz olduğu her yerde α sürekli ise $f \in \Re(\alpha)$ dir [53].

Teorem 2.2.7. Eğer $f = f_1 + f_2$ ve P de $[a,b]$ aralığının bir parçalanışı ise bu takdirde

$$L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) \le L(P, f, \alpha) \le U(P, f, \alpha) \le U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha)$$

dir [53].

Teorem 2.2.8. Eğer $[a,b]$ aralığında $f \in \Re(\alpha)$, $m \le f \le M$, ϕ fonksiyonu $[m,M]$ de sürekli ve $[a,b]$ aralığında $h(x) = \phi(f(x))$ ise bu durumda $[a,b]$ aralığında $h \in \Re(\alpha)$ dir [53].

2.2.1. Riemann-Stieltjes İntegrallerinin Özellikleri

Şimdi Riemann-Stieltjes integralinin bazı özellikleri verilecektir.

Teorem 2.2.9.

(a) Eğer $f_1, f_2 \in \Re(\alpha)$ ise

$$f_1 + f_2 \in \Re(\alpha),$$

her c sabiti için $cf \in \Re(\alpha)$ ve

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\,d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha,$$

$$\int_a^b cf d\alpha = c\int_a^b f d\alpha$$

dir[53].

(b) $[a,b]$ aralığında $f_1(x) \leq f_2(x)$ ise

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leq \int_a^b f_2 d\alpha$$

dir.

(c) $[a,b]$ aralığında $f \in \Re(\alpha)$ ve $a < c < b$ ise bu takdirde $[a,c]$ ve $[c,b]$ aralıklarında $f \in \Re(\alpha)$ ve

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$$

dir.

(d) $[a,b]$ aralığında $f \in \Re(\alpha)$ ve her $x \in [a,b]$ için $|f(x)| \leq M$ ise

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

dır.

(e) Eğer $f \in \Re(\alpha_1)$ ve $f \in \Re(\alpha_2)$ ise $f \in \Re(\alpha_1 + \alpha_2)$ dir ve

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2$$

sağlanır. Eğer $f \in \Re(\alpha)$ ve c bir pozitif sabit ise $f \in \Re(c\alpha)$ ve

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c\int_a^b f d\alpha$$

dir [53].

Teorem 2.2.10. Eğer $[a,b]$ aralığında $f \in \Re(\alpha)$ ve $g \in \Re(\alpha)$ ise, bu takdirde

(a) $fg \in \Re(\alpha)$

(b) $|f| \in \Re(\alpha)$ ve $\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq \int_a^b |f| d\alpha,$

ifadeleri sağlanır [53].

Teorem 2.2.11. *(Değişken Değiştirme)* φ fonksiyonu görüntüsü $[a,b]$ aralığının içine düşen $[A,B]$ aralığında kesin artan sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca α, $[a,b]$ aralığında monoton artan ve $[a,b]$ aralığında $f \in \Re(\alpha)$ olsun. $[A,B]$ aralığında β ve g fonksiyonları

$$\beta(y) = \alpha(\varphi(y)), \;\; g(y) = f(\varphi(y))$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $g \in \Re(\varphi)$ ve

$$\int_a^b f d\alpha = \int_A^B g d\varphi$$

dır [53].

Teorem 2.2.12. $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar için g sürekli ve f fonksiyonu $[a,b]$ üzerine sınırlı varyasyonlu ise, $\int_a^b g(t) df(t)$ integrali vardır ve

$$\left|\int_a^b g(t) df(t)\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} |g(t)| V_f(a,b) \tag{2.3}$$

eşitsizliği sağlanır [54].

Bu bilgiler ışığında Riemann-Stieltjes integrasyonu ve sınırlı varyasyonlu olma arasındaki ilişki şu şekilde verilebilir: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sınırlı varyasyonlu olduğu farz edilsin. Bu durumda f fonksiyonu artan iki fonksiyonun farkı şeklinde yazılabilir yani f_1 ve f_2 artan olmak üzere $f = f_1 - f_2$ dir. Böylece, Teorem

2.2.5 gereğince α sürekli olduğunda $f_1, f_2 \in \Re(\alpha)$ dir. Ayrıca Teorem 2.2.9 un (a) şıkkı gereğince α sürekli olmak üzere $f \in \Re(\alpha)$ dir. Yani f fonksiyonu sınırlı varyasyonlu ve α sürekli ise bu durumda f fonksiyonu α ya göre Riemann-Stieltjes anlamda integrallenebilirdir.

f_1 ve f_2 fonksiyonları kapalı ve sınırlı bir aralıkta artan olduklarından, bu fonksiyonlar $[a,b]$ aralığında sınırlıdırlar. Böylece, bu fonksiyonlar $[a,b]$ aralığında sonlu sayıda süreksizlik noktalara sahip ve α bu süreksizlik noktalarında sürekli olduğundan, $f_1, f_2 \in \Re(\alpha)$ yazılabilir. Yani, f sınırlı varyasyonlu olmak üzere, f sonlu sayıda süreksizlik noktasına sahip ve α bu noktalarda sürekli ise, f fonksiyonu α ya göre Riemann-Stieltjes integrallenebilirdir.

2.3. İKİ DEĞİŞKENLİ SINIRLI VARYASYONLU FONKSİYONLAR

Bu alt bölümde iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonların tanımları verilecektir. Ayrıca iki katlı Riemann-Stieltjes integrallerinin önemli özelliklerinden bazıları sunulacaktır.

[3]'te Clarkson ve Adams iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için yapılan aşağıdaki tanımları vermişlerdir:

$f(x,y)$ fonksiyonunun $Q(a \le x \le b,\ c \le y \le d)$ dikdörtgeninde tanımlı olduğunu kabul edelim.

$$x = x_i\,(i = 0,1,2,...,n),\ a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b;$$
$$y = y_j\,(j = 0,1,2,...,m),\ c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d$$

olmak üzere aşağıdaki notasyonlar verilsin:

$$\Delta_{11} f(x_i, y_j) = f(x_{i+1}, y_{j+1}) - f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_{j+1}) + f(x_i, y_j)$$

$$\Delta f(x_i, y_j) = f(x_{i+1}, y_{j+1}) - f(x_i, y_j).$$

Tanım 2.3.1. (Vitali-Lebesque-Fréchet-de la Vallée Poussin). Eğer

$$\sum_{i=0,\ j=0}^{n-1,\ m-1} \left|\Delta_{11} f(x_i, y_j)\right|$$

toplamı bütün parçalanmalar için sınırlı ise $f(x,y)$ fonksiyonu sınırlı varyasyonlu olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.2 (Fréchet) Eğer

$$\sum_{i=0,\ j=0}^{n-1,\ m-1} \varepsilon_i \overline{\varepsilon_j} \left|\Delta_{11} f(x_i, y_j)\right|$$

toplamı bütün parçalanmalar ve bütün muhtemel $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $\overline{\varepsilon_j} = \pm 1$ seçimleri için sınırlı ise $f(x,y)$ fonksiyonu sınırlı varyasyonlu olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.3 (Hardy-Krause). Tanım 2.3.1'in koşullar sağlansın. Buna ek olarak $f(\bar{x}, y)$ fonksiyonu en az bir $\bar{x}$ için sınırlı varyasyonlu ve $f(x, \bar{y})$ fonksiyonu en az bir $\bar{y}$ için sınırlı varyasyonlu ise $f(x,y)$ fonksiyonuna sınırlı varyasyonludur denir.

Tanım 2.3.4 (Arzelà). (x_i, y_i) $(i = 0,1,2,...,m)$ noktalar

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b;$$
$$c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d.$$

koşullarını sağlayan herhangi noktalar olsunlar. Bu takdirde, eğer

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\Delta f(x_i, y_i)\right|$$

toplamı bu şekilde seçilen tüm noktalar için sınırlı ise $f(x,y)$ fonksiyonu sınırlı varyasyonlu olarak adlandırılır.

Bu takdirde, iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için toplam varyasyon kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

Tanım 2.3.5. f fonksiyonu $Q = [a,b] \times [c,d]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon ve $\sum(P)$ sembolü de, Q nun keyfi bir P parçalanması için

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left|\Delta_{11}f(x_i,y_j)\right|$$

toplamını göstersin. Bu durumda,

$$V_f(Q):=V_a^bV_c^d(f):=\sup\left\{\sum(P)\ :\ P\in P(Q)\right\}$$

sayısına, Q üzerinde f fonksiyonunun toplam varyasyonu denir. Burada, $P(Q)$ sembolü, Q üzerindeki bütün parçalanmaların ailesini gösterir.

1910 yılında [55]'te Fréchet iki katlı Riemann-Stieltjes integralleri için aşağıdaki karakterizasyonu vermiştir:

$f(x,y)$ ve $\alpha(x,y)$ fonksiyonlar

$$Q\ :\ (a\le x\le b; c\le y\le d)$$

dikdörtgeni üzerinde tanımlı olsun. Ayrca R

$$a=x_0<x_1<...<x_n=b,\ \text{ve}\ c=y_0<y_1<...<y_m=d$$

parçalanmalarıyla elde edilen dikdörtgensel alt bölümler olsun. ξ_i ve η_j, sayıları $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$, ve $y_{j-1}\le\eta_j\le y_j$ $(i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,m)$ eşitsizliklerini sağlayan herhangi iki sayı olmak üzere her i ve j için

$$\Delta_{11}\alpha(x_i,y_j)=\alpha(x_{i-1},y_{j-1})-\alpha(x_{i-1},y_j)-\alpha(x_i,y_{j-1})+\alpha(x_i,y_j)$$

olsun. Eğer altbölümlerin normu sıfıra giderken

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(\xi_i,\eta_j)\Delta_{11}\alpha(x_i,y_j)$$

toplamının sonlu bir limiti varsa, bu takdirde f fonksiyonunun α fonksiyonuna göre Riemann-Stieltjes integrali vardır denir ve $f\in RS(\alpha)$ ile gösterilir. Bu limite kısıtlanmış (restricted) integral denir ve

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)d_y d_x \alpha(x,y) \tag{2.4}$$

sembolü ile gösterilir.

ξ_{ij} ve η_{ij} sayları $x_{i-1} \le \xi_{ij} \le x_i$, ve $y_{j-1} \le \eta_{ij} \le y_j$ eşitsizliklerini sağlayan herhangi iki sayı olmak üzere, yukardaki S formülünü

$$S^* = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_{ij},\eta_{ij}\right)\Delta_{11}\alpha(x_i,y_j),$$

toplamı ile yer değiştirilebilirse, limit var olduğunda bu limit kısıtlanmamış (unrestricted) integral olarak adlandırılır ve

$$(*)\int_a^b\int_c^d f(x,y)d_y d_x \alpha(x,y). \tag{2.5}$$

sembolü ile gösterilir.

Açıktır ki, (2.5)'in varlığı (2.4)'ün varlığını gerektirir. Diğer yandan, [56]'da Clarkson (2.4)'in varlığının (2.5)'ın varlığını gerektirmediğini göstermiştir.

But tezde birçok teorem ispatlanırken kullanılacak iki katlı Riemann-Stieltjes integrallerinin aşağıdaki özellikleri verilsin:

Lemma 2.3.1. (*Kısmi İntegrasyon*) Eğer $f(t,s)$, $Q=[a,b]\times[c,d]$ üzerinde sürekli ve $\alpha(t,s)$ sınırlı varyasyonlu ise, bu durumda $\alpha(t,s)$, $f(t,s)$ ye göre Q üzerinde Riemann-Stieltjes anlamında integrallenebilir ve

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\int_c^d f(t,s)d_t d_s \alpha(t,s) \\
&= \int_a^b\int_c^d \alpha(t,s)d_t d_s f(t,s) \\
&\quad -\int_a^b \alpha(t,d)d_t f(t,d) + \int_a^b \alpha(t,c)d_t f(t,c) \\
&\quad -\int_c^d \alpha(b,s)d_s f(b,s) + \int_c^d \alpha(a,s)d_s f(a,s) \\
&= f(b,d)\alpha(b,d) - f(b,c)\alpha(b,c) - f(a,d)\alpha(a,d) + f(a,c)\alpha(a,c).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

dir [57].

Lemma 2.3.2. Eğer f fonksiyonu Q üzerinde sürekli ve α fonksiyonu Q üzerinde sınırlı varyasyonlu ise, bu takdirde $f \in RS(\alpha)$ dir [49].

Lemma 2.3.3. Q üzerinde $g \in RS(\alpha)$ ve α fonksiyonunun Q üzerinde sınırlı varyasyonlu ise, bu takdirde,

$$\left| \int_a^b \int_c^d g(x,y) d_y d_x \alpha(x,y) \right| \leq \sup_{(x,y)\in Q} |g(x,y)| V_\alpha(Q) \tag{2.7}$$

dir [49].

2.4. SINIRLI VARYASYONLU FONKSİYONLAR İÇİN BAZI ÖNEMLİ OSTROWSKI TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için literatürde var olan Ostrowski tipli eşitsizliklerin bazıları verilecektir.

Tek değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için Ostrowski tipli ilk eşitsizlik S.S. Dragomir tarafından ispatlanmıştır. Bu eşitsizlik aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.4.1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun ve $V_f(a,b)$ ise bu fonksiyonun toplam varyasyonunu göstersin. Bu takdirde, her $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left[\frac{1}{2} + \left| \frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right| \right] V_f(a,b) \tag{2.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki $\frac{1}{2}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez [11].

Sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için elde edilmiş ve literatürde mevcut olan diğer Ostrowski tipli eşitsizliklerin bazıları aşağıda verilmiştir:

Teorem 2.4.2. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)-\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{1}{2}(b-a)V_f(a,b) \tag{2.9}$$

"Yamuk eşitsizliği" sağlanır. Buradaki $\frac{1}{2}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez [14].

Teorem 2.4.3. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\left|\frac{b-a}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{1}{3}(b-a)V_f(a,b) \tag{2.10}$$

Simpson tipli eşitsizliği sağlanır [12].

Teorem 2.4.4. $[a,b]$ aralığının bir parçalanışı $I_k\ :\ a=x_0<x_1<...<x_{k-1}<x_k=b$ ve α_i $(i=0,...,k+1)$ noktaları $\alpha_0=0,\ \alpha_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,...,k)$ ve $\alpha_{k+1}=b$ şeklinde olsun. Eğer $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon ise, bu takdirde

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{i=0}^{k}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)f(x_i)\right|\\&\leq\left[\frac{1}{2}v(h)+\max\left\{\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|, i=0,...,k-1\right\}\right]V_f(a,b)\\&\leq v(h)V_f(a,b)\end{aligned} \tag{2.11}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $h_i:=x_{i+1}-x_i\quad(i=1,...,k-1)$ olmak üzere $v(h):=\max\{h_i\ :\ i=0,...,k-1\}$ dir [15].

Teorem 2.4.5. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu durumda, her $x\in[a,b]$ için

$$\left|(x-a)f(a)+(b-x)f(b)-\int_a^b f(t)dt\right| \leq \left[\frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]V_f(a,b) \tag{2.12}$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradaki $\frac{1}{2}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez [16].

Teorem 2.4.6. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu durumda, her $x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}[f(x)+f(a+b-x)]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{b-a}\left[(x-a)V_f(a,x)+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)V_f(x,a+b-x)+(x-a)V_f(a+b-x,b)\right] \\
&\leq \begin{cases}
\left[\frac{1}{4}+\left|\frac{x-\frac{3a+b}{4}}{b-a}\right|\right]V_f(a,b), \\
\left[2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\frac{a+b}{2}-x}{b-a}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \\
\times\left[[V_f(a,x)]^{\beta}+[V_f(x,a+b-x)]^{\beta}+[V_f(a+b-x,b)]^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}}, \\
\qquad \text{if } \alpha>1,\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \\
\left[\frac{x-a+\frac{b-a}{2}}{b-a}\right]\max\{V_f(a,x),V_f(x,a+b-x),V_f(a+b-x,b)\}
\end{cases}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

dir. İkinci eşitsizliğin birinci satırındaki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştiremez [20].

Teorem 2.4.7. $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan ve sürekli bir fonksiyon ve $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ise $h'(t)=g(t)$ olacak şekilde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu bir fonksiyon ise, bu takdirde her $x\in[h(a),h(b)]$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b g(t)f(t)dt-[(x-h(a))f(a)+(h(b)-x)f(b)]\right| \\
&\leq\left[\frac{1}{2}\int_a^b g(t)dt+\left|x-\frac{h(a)+h(b)}{2}\right|\right]V_f(a,b)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradaki $\frac{1}{2}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsaydır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez [22].

Teorem 2.4.8. $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan ve sürekli bir fonksiyon ve $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ise $h'(t) = w(t)$ olacak şekilde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca $0 \le \alpha \le 1$, $a_1 = h^{-1}\left(\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h(a) + \frac{\alpha}{2}h(b)\right)$ ve $b_1 = h^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}h(a) + \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h(b)\right)$ olarak tanımlansın. Eğer $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu bir fonksiyon ise, bu takdirde her $x \in [a_1, b_1]$ için

$$\left| \int_a^b w(t) f(t)dt - \left[(1-\alpha) f(x) + \alpha \frac{f(a)+f(b)}{2} \right] \int_a^b w(t)dt \right| \le K V_f(a,b) \tag{2.15}$$

dir. Burada

$$K := \begin{cases} \frac{1-\alpha}{2} \int_a^b w(t)dt + \left| h(x) - \frac{h(a)+h(b)}{2} \right|, & \text{if } 0 \le \alpha \le \frac{1}{2} \\ \max\left\{ \frac{1-\alpha}{2} \int_a^b w(t)dt + \left| h(x) - \frac{h(a)+h(b)}{2} \right|, \frac{\alpha}{2} \int_a^b w(t)dt \right\}, & \text{if } \frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3} \\ \frac{\alpha}{2} \int_a^b w(t)dt, & \text{if } \frac{2}{3} \le \alpha \le 1 \end{cases}$$

olarak tanımlı olup $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$ durumu için $\frac{1-\alpha}{2}$ katsayısı ve $\frac{2}{3} \le \alpha \le 1$ durumu için $\frac{\alpha}{2}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayılardır ve daha küçük olan katsayılar ile yer değiştirilemezler [24].

Teorem 2.4.9. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\Psi_f(t) := f(t) - \frac{f(a)(t-a) + (b-t) f(b)}{b-a}$$

olmak üzere

$$\left|\Psi_f(t)\right| \le \frac{1}{b-a}\left[(t-a)V_f(a,t)+(b-t)V_f(t,b)\right]$$

$$\le \begin{cases} \left[\frac{1}{2}+\left|\frac{t-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right|\right]V_f(a,b), \\ \left[\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^q+\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}\left[\left(V_f(a,t)\right)^p+\left(V_f(t,b)\right)^p+\right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{if } p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \\ \frac{1}{2}V_f(a,b)+\frac{1}{2}\left|V_f(a,t)-V_f(t,b)\right| \end{cases} \tag{2.16}$$

eşitsizlikleri vardır. Eşitsizliğin birinci ve üçüncü satırındaki $\frac{1}{2}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez [21].

Teorem 2.4.10. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu durumda her $\lambda\in[0,1]$ ve $a+\lambda\frac{b-a}{2}\le x\le\frac{a+b}{2}$ için

$$\left|(b-a)\left[\lambda\frac{f(a)+f(b)}{2}+(1-\lambda)\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2}\right]-\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\le \begin{cases} \max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(x-\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right),\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right\}V_f(a,b), \\ \frac{b-a}{2}\max\left\{V_f(a,x),V_f(x,a+b-x),V_f(a+b-x,b)\right\}, \end{cases} \tag{2.17}$$

eşitsizliği sağlanır. İkinci eşitsizlikteki $\frac{1}{2}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez [18].

Teorem 2.4.11. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonlu bir fonksiyon ve $w:[a,b]\to[0,\infty)$ fonksiyonu (a,b) aralığında sürekli ve pozitif bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $x\in[a,b]$ ve $\alpha\in[0,1]$ için

$$\left|\int_a^b f(t)w(t)dt-\left\{(1-\alpha)f(x)\int_a^b w(t)dt+\alpha\left[f(a)\int_a^x w(t)dt+f(b)\int_x^b w(t)dt\right]\right\}\right|$$

$$\le\left[\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{2}-\alpha\right|\right]\left[\frac{1}{2}\int_a^b w(t)dt+\left|\int_a^x w(t)dt-\frac{1}{2}\int_a^b w(t)dt\right|\right]V_f(a,b). \tag{2.18}$$

dir. Buradaki $\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{2}-\alpha\right|$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez [25].

Teorem 2.4.12. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned} &\left| (x-a)\left[f(a) + f(b) \right] + (a+b-2x) f\left(\frac{a+b}{2} \right) - \int_a^b f(t)dt \right| \\ &\leq \left[\frac{1}{4}(b-a) + \left| x - \frac{3a+b}{4} \right| \right] V_f(a,b) \end{aligned} \tag{2.19}$$

eşitsizliği vardır. Buradaki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez [19].

3. TEK DEĞİŞKENLİ SINIRLI VARYASYONLU FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde ilk olarak sınırlı varyasyona sahip tek değişkenli fonksiyonlar için bazı genelleşmiş Ostrowski tipli eşitsizlikler ispatlanacak ve özel durumları verilecektir. Bunun yanı sıra sırasıyla türevi ve n. türevi sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilecektir. Daha sonra kendisi veya türevi sınırlı varyasyona sahip fonksiyonlar için önemli ağırlıklı eşitsizlikler ispatlanıp özel durumları için sonuçlar verilecektir. Son olarakta, elde edilen eşitisizlikler yardımıyla integrallerin nümerik hesaplamalar için bazı formüller verilerek hatalar için üst sınırlar elde edilecektir. Ayrıca bazı belli fonksiyonlar için farklı yöntemlerle nümerik hesaplamalar yapılarak karşılaştırmalar yapılacaktır.

3.1. SINIRLI VARYASYONA SAHİP FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKI TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde tek değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için bazı geneleşmiş Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilip özel durumları incelenecektir.

Teorem 3.1.1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu durumda, $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}&\left|(b-a)\left(1-\frac{\lambda}{2}\right) f(x) + \lambda \frac{(x-a) f(a) + (b-x) f(b)}{2} - \int_a^b f(t)dt\right| \\ &\leq \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\left[\frac{b-a}{2} + \left|x - \frac{a+b}{2}\right|\right] V_f(a,b)\end{aligned} \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. İspat için ilk olarak $K_\lambda(x,t)$ dönüşümü

$$K_\lambda(x,t) = \begin{cases} t - \left(a + \lambda \frac{x-a}{2}\right), & a \leq t \leq x \\ t - \left(b - \lambda \frac{b-x}{2}\right), & x < t \leq b \end{cases}$$

şeklinde tanmlansın. Tek katlı Riemann-Stieltjes integralleri için ksmi integrasyon kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b K_\lambda(x,t)df(t) \\
&= \int_a^x \left(t-\left(a+\lambda\frac{x-a}{2}\right)\right)df(t) + \int_x^b \left(t-\left(b-\lambda\frac{b-x}{2}\right)\right)df(t) \\
&= \left(t-a-\lambda\frac{x-a}{2}\right)f(t)\Big|_a^x - \int_a^x f(t)dt \qquad\qquad (3.2)\\
&+\left(t-b+\lambda\frac{b-x}{2}\right)f(t)\Big|_x^b - \int_x^b f(t)dt \\
&= (x-a)\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)f(x) + \lambda\frac{x-a}{2}f(a) \\
&+\lambda\frac{b-x}{2}f(b) + (b-x)\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)f(x) - \int_a^b f(t)dt \\
&= (b-a)\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)f(x) + \lambda\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{2} - \int_a^b f(t)dt
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Diğer yandan, (2.3) eşitsizliğini kullanarak

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b K_\lambda(x,t)df(t)\right| \\
&\le \left|\int_a^x \left(t-\left(a+\lambda\frac{x-a}{2}\right)\right)df(t)\right| + \left|\int_x^b \left(t-\left(b-\lambda\frac{b-x}{2}\right)\right)df(t)\right| \\
&\le \sup_{t\in[a,x]}\left|t-a-\lambda\frac{x-a}{2}\right| V_f(a,x) + \sup_{t\in[x,b]}\left|t-b+\lambda\frac{b-x}{2}\right| V_f(x,b) \\
&= (x-a)\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)V_f(a,x) + (b-x)\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)V_f(x,b) \\
&\le \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\max\{x-a, b-x\}V_f(a,b) \\
&= \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\left[\frac{b-a}{2} + \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]V_f(a,b)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.1. Eğer Teorem 3.1.1'de özel olarak $\lambda = 0$ alınırsa, (3.1) eşitsizliği [11]'de Dragomir tarafından elde edilen (2.8)'deki Ostrowski eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.1.2. Teorem 3.1.1'in şartları altında özel olarak $\lambda = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2}(b-a)\,f(x)+\frac{(x-a)\,f(a)+(b-x)\,f(b)}{2}-\int_a^b f(t)dt\right|\\&\leq \frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]V_f(a,b)\end{aligned} \tag{3.3}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.3. Sonuç 3.1.2'de $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa, [18]'de Alomari tarafından verilen

$$\left|\frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]-\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)V_f(a,b)$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.1.4. Teorem 3.1.1'in şartları altında özel olarak $\lambda = \frac{2}{3}$ seçilirse

$$\begin{aligned}&\left|\frac{2}{3}(b-a)\,f(x)+\frac{(x-a)\,f(a)+(b-x)\,f(b)}{3}-\int_a^b f(t)dt\right|\\&\leq \frac{2}{3}\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]V_f(a,b)\end{aligned} \tag{3.4}$$

olur.

Sonuç 3.1.5. Sonuç 3.1.4'de $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa, (3.4) eşitsizliği [12]'de Dragomir tarafından elde edilen (2.10)'daki Simpson tipli eşitsizliğe dönüşür.

Sonuç 3.1.6. Teorem 3.1.1'in şartları altında, $f \in C^1[a,b]$ olduğu kabul edilirse, her $x \in [a,b]$ için

$$\left|(b-a)\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)f(x)+\lambda\frac{(x-a)\,f(a)+(b-x)\,f(b)}{2}-\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]\|f'\|_1$$

olur. Burada $\|.\|_1$ ifadesi,

$$\|f'\|_1 := \int_a^b |f'(t)|\,dt.$$

şeklinde tanmlanan L_1-normudur.

Sonuç 3.1.7. Teorem 3.1.1'in şartları altında, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $L>0$ sabiti için Lipschitz fonksiyonu olduğu kabul edlirse, her $x \in [a,b]$ için

$$\left|(b-a)\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)f(x)+\lambda\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{2}-\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a)L$$

olur.

Sonuç 3.1.8. Teorem 3.1.1'in şartları altında, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton ise, her $x \in [a,b]$ için

$$\left|(b-a)\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)f(x)+\lambda\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{2}-\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]|f(b)-f(a)|$$

eşitsizliği bulunur.

Teorem 3.1.2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ için

$$\left|\frac{b-a}{4}\left[f(x)+f(a+b-x)+f\left(\frac{a+x}{2}\right)+f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \max\left\{\left|x-\frac{3a+b}{4}\right|,\left(\frac{a+b}{2}-x\right),\frac{x-a}{2}\right\}V_f(a,b) \tag{3.5}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. [58]'de Qayyum ve diğ. tarafından

$$P(x,t)=\begin{cases} t-a, & t\in\left[x,\frac{a+x}{2}\right] \\ t-\frac{3a+b}{4}, & t\in\left(\frac{a+x}{2},x\right] \\ t-\frac{a+b}{2}, & t\in\left(x,a+b-x\right] \\ t-\frac{a+3b}{4}, & t\in\left(a+b-x,\frac{a+2b-x}{2}\right] \\ t-b, & t\in\left[\frac{a+2b-x}{2},b\right] \end{cases}$$

şeklinde tanmladığı $P(x,t)$ çekirdeği ele alnsın. Ksmi itegrasyon yardımıyla

$$\int_a^b P(x,t)df(t)$$
$$=\frac{b-a}{4}\left[f(x)+f(a+b-x)+f\left(\frac{a+x}{2}\right)+f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt$$

olduğu kolaylıkla görülür. (2.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\int_a^b P(x,t)df(t)\right|$$
$$\leq\left|\int_a^{\frac{a+x}{2}}(t-a)df(t)\right|+\left|\int_{\frac{a+x}{2}}^{x}\left(t-\frac{3a+b}{4}\right)df(t)\right|+\left|\int_x^{a+b-x}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)df(t)\right|$$
$$+\left|\int_{a+b-x}^{\frac{a+b-x}{2}}\left(t-\frac{a+3b}{4}\right)df(t)\right|+\left|\int_{\frac{a+b-x}{2}}^{b}(t-b)df(t)\right|$$
$$\leq\sup_{t\in\left[a,\frac{a+x}{2}\right]}|t-a|V_f\left(a,\frac{a+x}{2}\right)+\sup_{t\in\left[\frac{a+x}{2},x\right]}\left|t-\frac{3a+b}{4}\right|V_f\left(\frac{a+x}{2},x\right)$$
$$+\sup_{t\in[x,a+b-x]}\left|t-\frac{a+b}{2}\right|V_f(x,a+b-x)$$
$$+\sup_{t\in\left[a+b-x,\frac{a+2b-x}{2}\right]}\left|t-\frac{a+3b}{4}\right|V_f\left(a+b-x,\frac{a+2b-x}{2}\right)$$

$$+\sup_{t\in\left[\frac{a+2b-x}{2},b\right]}|t-b|V_f\left(\frac{a+2b-x}{2},b\right)$$

$$=\frac{x-a}{2}V_f\left(a,\frac{a+x}{2}\right)+\max\left\{\left|x-\frac{3a+b}{4}\right|,\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right\}V_f\left(\frac{a+x}{2},x\right)$$

$$+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)V_f(x,a+b-x)$$

$$+\max\left\{\left|x-\frac{3a+b}{4}\right|,\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right\}V_f\left(a+b-x,\frac{a+2b-x}{2}\right)$$

$$+\frac{x-a}{2}V_f\left(\frac{a+2b-x}{2},b\right)$$

$$\leq\max\left\{\left|x-\frac{3a+b}{4}\right|,\left(\frac{a+b}{2}-x\right),\frac{x-a}{2}\right\}V_f(a,b)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da istenilen sonuçtur.

Sonuç 3.1.9. Teorem 3.1.2'de özel olarak $x=a$ alınırsa (3.5) eşitsizliği [14]'te Dragomir tarafından elde edilen (2.9)'daki Yamuk eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.1.10. Teorem 3.1.2'nin şartları altında $x=\frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\left|\frac{b-a}{4}\left[2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{1}{4}(b-a)V_f(a,b) \tag{3.6}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.11. Teorem 3.1.2'nin şartları altında $x=\frac{a+b}{2}$ alnırsa

$$\left|\frac{b-a}{4}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+f\left(\frac{7a+b}{8}\right)+f\left(\frac{a+7b}{8}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq\frac{1}{8}(b-a)V_f(a,b) \tag{3.7}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.12. f fonksiyonu Teorem 3.1.2'deki şartları sağlasın. Eğer $f(x)=f(a+b-x)$ ise

$$\left|\frac{b-a}{4}\left[2f(x)+f\left(\frac{a+x}{2}\right)+f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \max\left\{\left|x-\frac{3a+b}{4}\right|,\left(\frac{a+b}{2}-x\right),\frac{x-a}{2}\right\}V_f(a,b)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.13. Sonuç 3.1.12'de özel olarak $x=a$ için

$$\left|\frac{3f(a)+f(b)}{4}(b-a)-\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{2}(b-a)V_f(a,b) \tag{3.8}$$

dir. Buradaki $\frac{1}{2}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi sabittir ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez

İspat. Katsayının en iyi katsayı olduğunu ispatlamak için (3.8) eşitsizliğinin keyfi bir $A>0$ sabiti için sağlandığı kabul edilsin. Yani

$$\left|\frac{3f(a)+f(b)}{4}(b-a)-\int_a^b f(t)dt\right| \leq A(b-a)V_f(a,b)$$

olsun. $f\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{if } x\in\{a,b\}\\ 0, & \text{if } x\in(a,b)\end{cases}$$

olarak seçilirse, bu durumda f , $[a,b]$ aralığı üzerinde sınırlı varyasyonlu bir fonksiyon ve

$$3f(a)+f(b)=4,\ \int_a^b f(t)dt=0,\ \text{ve}\,V_f(a,b)=2,$$

olur. Bu ifadeler yukarıdaki eşitsizlikte yerilerine yazılırsa $1\leq 2A \Rightarrow\ A\geq\frac{1}{2}$ olarak bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.14. Teorem 3.1.2'nin şartları altında $f\in C^1[a,b]$ ise, her $x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ için

$$\left|\frac{b-a}{4}\left[f(x)+f(a+b-x)+f\left(\frac{a+x}{2}\right)+f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \max\left\{\left|x-\frac{3a+b}{4}\right|,\left(\frac{a+b}{2}-x\right),\frac{x-a}{2}\right\}\|f'\|_1$$

dir.

Sonuç 3.1.15. Teorem 3.1.2'nin şartları altında, eğer $f\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $L>0$ ile Lipschitz fonksiyonu ise, her $x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ için

$$\left|\frac{b-a}{4}\left[f(x)+f(a+b-x)+f\left(\frac{a+x}{2}\right)+f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \max\left\{\left|x-\frac{3a+b}{4}\right|,\left(\frac{a+b}{2}-x\right),\frac{x-a}{2}\right\}(b-a)L$$

eşitsizliği vardır.

3.2. TÜREVİ SINIRLI VARYASYONLU FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKI TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde türevi sınırlı varyasyona sahip tek değişkenli fonksiyonlar için yeni Ostrowski tipli eşitsizlikler ispatlanacaktır.

Teorem 3.2.1. $f\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$ olmak üzere, f' türev fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ve sınırlı varyasyonlu olsun. Bu durumda, her $x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ için,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{1}{2}\left[f(x)+f(a+b-x)\right]\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)\left[f'(x)-f'(a+b-x)\right]\right|\\&\leq\frac{1}{16}\left[\frac{5(x-a)^2-2(x-a)(b-x)+(b-x)^2}{b-a}+4\left|x-\frac{3a+b}{4}\right|\right]V_{f'}(a,b)\end{aligned} \tag{3.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. İspat için $p(x,t)$ dönüşümü,

$$p(x,t)=\begin{cases}(t-a)^2 & t\in[a,x] \\ \left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2 & t\in(x,a+b-x] \\ (t-b)^2 & t\in(a+b-x,b]\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşüm yardımıyla

$$\begin{aligned}&\int_a^b p(x,t)df'(t) \\ &=\int_a^x (t-a)^2 df'(t)+\int_x^{a+b-x}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2 df'(t)+\int_{a+b-x}^b (t-b)^2 df'(t) \qquad (3.10) \\ &=I_1+I_2+I_3\end{aligned}$$

yazılır. Kısmi integrasyon kullanılarak

$$\begin{aligned}I_1 &=\int_a^x (t-a)^2 df'(t) \\ &=(x-a)^2 f'(x)-2\int_a^x (t-a)f'(t)dt \qquad (3.11) \\ &=(x-a)^2 f'(x)-2(x-a)f(x)+2\int_a^x f(t)dt\end{aligned}$$

olduğu açıktır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}I_2 &=\int_x^{a+b-x}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2 df'(t) \\ &=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\left[f'(a+b-x)-f'(x)\right] \qquad (3.12) \\ &\quad+2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)+f(a+b-x)\right]+2\int_x^{a+b-x} f(t)dt\end{aligned}$$

ve

$$I_3=\int_{a+b-x}^b (t-b)^2 df'(t) \qquad (3.13)$$

$$= -(x-a)^2 f'(a+b-x) - 2(x-a) f(a+b-x) + 2\int_{a+b-x}^{b} f(t)dt$$

eşitliklerinin sağlandığı açıktır. (3.11)-(3.13) eşitlikleri (3.10)'da yerine yazılıp elde edilen eşitliğin her iki tarafı $\frac{1}{2(b-a)}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b p(x,t)df'(t) \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2}\left[f(x) + f(a+b-x)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{3a+b}{4}\right)\left[f'(x) - f'(a+b-x)\right] \end{aligned} \tag{3.14}$$

eşitliği bulunur.

(3.14) eşiliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınıp, (2.3) eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2}\left[f(x) + f(a+b-x)\right]\right. \\ &\left.+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{3a+b}{4}\right)\left[f'(x) - f'(a+b-x)\right]\right| \\ &= \left|\int_a^b p(x,t)df'(t)\right| \\ &\le \frac{1}{2(b-a)}\left[\left|\int_a^x (t-a)^2 df'(t)\right| + \left|\int_x^{a+b-x}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 df'(t)\right| + \left|\int_{a+b-x}^{b} (t-b)^2 df'(t)\right|\right] \\ &\le \frac{1}{2(b-a)}\left[\sup_{t\in[a,x]}(t-a)^2 V_{f'}(a,x)\right. \\ &\left.+ \sup_{t\in[x,a+b-x]}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 V_{f'}(x,a+b-x) + \sup_{t\in[a+b-x,b]}(t-b)^2 V_{f'}(a+b-x,b)\right] \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} &\le \frac{1}{2(b-a)}\left[(x-a)^2 V_{f'}(a,x) + \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 V_{f'}(x,a+b-x)\right. \\ &\left.+ (x-a)^2 V_{f'}(a+b-x,b)\right] \\ &= \frac{1}{2(b-a)}\max\left\{(x-a)^2, \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2\right\} V_{f'}(a,b) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Yani,

$$\left| \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2}\left[f(x)+f(a+b-x)\right] \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)\left[f'(x)-f'(a+b-x)\right] \right| \tag{3.16}$$
$$\leq \frac{1}{2(b-a)}\max\left\{(x-a)^2, \left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2\right\} V_{f'}(a,b)$$

eşitliği bulunur. Bu son ifade de $\max\{x,y\}=\frac{x+y+|x-y|}{2}$ eşitliği uygulanırsa istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.1. Teorem 3.2.1'in şartları altında özel olarak $x=\frac{a+b}{2}$ alınırsa, (3.9) eşitsizliği [30]'da Liu tarafından elde edilen

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{b-a}{8} V_{f'}(a,b) \tag{3.17}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.2.2. Teorem 3.2.1'in şartları altında özel olarak $x=\frac{3a+b}{4}$ alınırsa,

$$\left| \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] \right| \leq \frac{b-a}{32} V_{f'}(a,b) \tag{3.18}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.2.3. Teorem 3.2.1'in şartları altında özel olarak $x=a$ alınırsa,

$$\left| \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{b-a}{8}\left[f'(b)-f'(a)\right] \right|$$
$$\leq \frac{1}{8}(b-a)V_{f'}(a,b) \tag{3.19}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe benzer bir eşitsizlik [30]'da Liu tarafından verilmiştir. Fakat eşitsizliğin sağ tarafındaki katsayı $\frac{1}{4}$ olarak verilmiştir. Burada ki katsayı daha küçük bir sabit olan $\frac{1}{8}$ olduğundan, elde edilen bu eşitsizlik daha kesindir.

Teorem 3.2.1'in şartları altında, bu sonuçlara ek olarak aşağıdaki sonuçlar da verilebilir.

Sonuç 3.2.4. Eğer $f \in C^2[a,b]$ ise her $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2}\left[f(x) + f(a+b-x)\right]\right. \\
&\left.+\frac{1}{2}\left(x - \frac{3a+b}{4}\right)\left[f'(x) - f'(a+b-x)\right]\right| \\
&\leq \frac{1}{16}\left[\frac{5(x-a)^2 - 2(x-a)(b-x) + (b-x)^2}{b-a} + 4\left|x - \frac{3a+b}{4}\right|\right]\|f''\|_{[a,b],1}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

eşitsizliği vardır.

Sonuç 3.2.5. Sonuç 3.2.4'te $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse, (3.20) eşitsizliği [59]'de Liu tarafından elde edilen

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{b-a}{8}\|f''\|_{[a,b],1}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.2.6. Eğer $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonu $L > 0$ için bir Lipschitz dönüşümü ise, her $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2}\left[f(x) + f(a+b-x)\right]\right. \\
&\left.+\frac{1}{2}\left(x - \frac{3a+b}{4}\right)\left[f'(x) - f'(a+b-x)\right]\right| \\
&\leq \frac{L}{16}\left[5(x-a)^2 - 2(x-a)(b-x) + (b-x)^2 + 4(b-a)\left|x - \frac{3a+b}{4}\right|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

Sıradaki teorem verilmeden önce aşağıdaki Lemmanın verilmesine gereksinim vardır.

Lemma 3.2.1. [60]'da Qayyum ve diğ. tarafından tanımlanan aşağıdaki $P(x,t)$ çekirdeği göz önüne alınsın;

$$P(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-a)^2, & t\in\left[x,\frac{a+x}{2}\right]\\ \frac{1}{2}\left(t-\frac{3a+b}{4}\right)^2, & t\in\left(\frac{a+x}{2},x\right]\\ \frac{1}{2}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2, & t\in(x,a+b-x]\\ \frac{1}{2}\left(t-\frac{a+3b}{4}\right)^2, & t\in\left(a+b-x,\frac{a+2b-x}{2}\right]\\ \frac{1}{2}(t-b)^2, & t\in\left[\frac{a+2b-x}{2},b\right]\end{cases},\quad x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right].$$

Bu takdirde her $x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned}&\int_a^b P(x,t)df'(t)\\ &=\int_a^b f(t)dt-\frac{b-a}{4}\left[f(x)+f(a+b-x)+f\left(\frac{a+x}{2}\right)+f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right.\\ &+\left(x-\frac{5a+3b}{8}\right)\{f'(a+b-x)-f'(x)\}\\ &\left.+\frac{1}{2}\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)\left\{f'\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)-f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right\}\right]\end{aligned}\tag{3.21}$$

eşitliği vardır.

İspat. $P(x,t)$ çekirdeği kullanılarak

$$\begin{aligned}&\int_a^b P(x,t)df'(t)\\ &=\frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+x}{2}}(t-a)^2df'(t)+\frac{1}{2}\int_{\frac{a+x}{2}}^{x}\left(t-\frac{3a+b}{4}\right)^2df'(t)+\frac{1}{2}\int_x^{a+b-x}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2df'(t)\\ &+\frac{1}{2}\int_{a+b-x}^{\frac{a+2b-x}{2}}\left(t-\frac{a+3b}{4}\right)^2df'(t)+\frac{1}{2}\int_{\frac{a+2b-x}{2}}^{b}(t-b)^2df'(t)\end{aligned}\tag{3.22}$$

parçalanışı yazılabilir. Burada her bir integral için kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_a^b P(x,t)df'(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(x-a)^2}{8} f'\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{x-a}{2} f\left(\frac{a+x}{2}\right) + \int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t)dt \\
&+\frac{1}{2}\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^2 f'(x) - \frac{1}{8}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f'\left(\frac{a+x}{2}\right) \\
&-\left(x-\frac{3a+b}{4}\right) f(x) - \frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right) f\left(\frac{a+x}{2}\right) + \int_{\frac{a+x}{2}}^{x} f(t)dt \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2 f'(a+b-x) - \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2 f'(x) \\
&-\left(\frac{a+b}{2}-x\right) f(a+b-x) - \left(\frac{a+b}{2}-x\right) f(x) + \int_x^{a+b-x} f(t)dt \\
&+\frac{1}{8}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2 f'\left(\frac{a+2b-x}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3a+b}{4}-x\right)^2 f'(a+b-x) \\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-x\right) f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right) + \left(\frac{3a+b}{4}-x\right) f(a+b-x) + \int_{a+b-x}^{\frac{a+2b-x}{2}} f(t)dt \\
&-\frac{(x-a)^2}{8} f'\left(\frac{a+2b-x}{2}\right) - \frac{x-a}{2} f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right) + \int_{\frac{a+2b-x}{2}}^{b} f(t)dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler ve sadeleştirmeler yapılırsa istenen eşitlik elde edilebilir.

Şimdi bulunan bu eşitlik yardımıyla aşağıdaki eşitsizlik ispatlanacaktır.

Teorem 3.2.2. Teorem 3.2.1'in şartları sağlansın. Bu durumda $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ için

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{4}\left[f(x) + f(a+b-x) + f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right) \right.\right. \\
&+\left(x-\frac{5a+3b}{8}\right)\left\{ f'(a+b-x) - f'(x) \right\} \\
&\left.\left. +\frac{1}{2}\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)\left\{ f'\left(\frac{a+2b-x}{2}\right) - f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right\}\right]\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\max\left\{ \left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^2, \frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2, \frac{(x-a)^2}{4} \right\} V_{f'}(a,b)
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

dır.

İspat. (3.21) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınıp, (2.3) eşitsizliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b P(x,t)\,df'(t)\right| \\
&\le \frac{1}{2}\left[\left|\int_a^{\frac{a+x}{2}} (t-a)^2\,df'(t)\right| + \left|\int_{\frac{a+x}{2}}^{x}\left(t-\frac{3a+b}{4}\right)^2 df'(t)\right| + \left|\int_x^{a+b-x}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2 df'(t)\right|\right. \\
&\quad \left. + \left|\int_{a+b-x}^{\frac{a+2b-x}{2}}\left(t-\frac{a+3b}{4}\right)^2 df'(t)\right| + \left|\int_{\frac{a+2b-x}{2}}^{b} (t-b)^2\,df'(t)\right|\right] \\
&\le \frac{1}{2}\left[\sup_{t\in\left[a,\frac{a+x}{2}\right]} (t-a)^2 V_{f'}\left(a,\frac{a+x}{2}\right) + \sup_{t\in\left[\frac{a+x}{2},x\right]}\left(t-\frac{3a+b}{4}\right)^2 V_{f'}\left(\frac{a+x}{2},x\right)\right. \\
&\quad + \sup_{t\in[x,a+b-x]}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2 V_{f'}(x,a+b-x) \\
&\quad + \sup_{t\in\left[a+b-x,\frac{a+2b-x}{2}\right]}\left(t-\frac{a+3b}{4}\right)^2 V_{f'}\left(a+b-x,\frac{a+2b-x}{2}\right) \\
&\quad \left. + \sup_{t\in\left[\frac{a+2b-x}{2},b\right]} (t-b)^2 V_{f'}\left(\frac{a+2b-x}{2},b\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^2}{4} V_{f'}\left(a,\frac{a+x}{2}\right) + \max\left\{\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^2, \frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2\right\} V_{f'}\left(\frac{a+x}{2},x\right)\right. \\
&\quad + \left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2 V_{f'}(x,a+b-x) \\
&\quad + \max\left\{\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^2, \frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2\right\} V_{f'}\left(a+b-x,\frac{a+2b-x}{2}\right) \\
&\quad \left. + \frac{(x-a)^2}{4} V_{f'}\left(\frac{a+2b-x}{2},b\right)\right] \\
&\le \frac{1}{2}\max\left\{\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^2, \left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2, \frac{(x-a)^2}{4}\right\} V_{f'}(a,b)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2.7. Eğer Teorem 3.2.2'de $x = a$ alınırsa, (3.23) eşitsizliği bir önceki teoremin sonucu olan (3.19) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.2.8. Teorem 3.2.2'nin şartları altında özel olarak $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]\right.\\&\left.-\frac{b-a}{32}\left\{f'\left(\frac{a+3b}{4}\right) - f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right\}\right|\\&\le \frac{b-a}{32} V_{f'}(a,b)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

Sonuç 3.2.8. Teorem 3.2.2'nin şartları altında özel olarak $x = \frac{3a+b}{4}$ alınırsa, bu durumda (3.23) eşitsizği

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{4}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f\left(\frac{7a+b}{8}\right) + f\left(\frac{a+7b}{8}\right)\right]\right.\\&\left.+\frac{b-a}{32}\left\{f'\left(\frac{a+3b}{4}\right) - f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right\}\right|\\&\le \frac{b-a}{32} V_{f'}(a,b)\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.2.2'nin şartları altında aşağdaki sonuçlarda yazlabilir.

Sonuç 3.2.9. $f \in C^2[a,b]$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{4}\left[f(x) + f(a+b-x) + f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right.\right.\\&+\left(x - \frac{5a+3b}{8}\right)\{f'(a+b-x) - f'(x)\}\\&\left.\left.+\frac{1}{2}\left(x - \frac{3a+b}{4}\right)\left\{f'\left(\frac{a+2b-x}{2}\right) - f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right\}\right]\right|\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}\max\left\{\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^2, \frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2, \frac{(x-a)^2}{4}\right\}\|f''\|_{[a,b],1}$$

dır.

Sonuç 3.2.10. $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonu $L > 0$ sabiti ile bir Lipschitz dönüşüm olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{4}\left[f(x) + f(a+b-x) + f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right.\right.$$
$$+\left(x-\frac{5a+3b}{8}\right)\{f'(a+b-x) - f'(x)\}$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)\left\{f'\left(\frac{a+2b-x}{2}\right) - f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right\}\right]\right|$$
$$\leq \frac{L(b-a)}{2}\max\left\{\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^2, \frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2, \frac{(x-a)^2}{4}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.3. *n*. TÜREVİ SINIRLI VARYASYONLU FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKI TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölüm için ana teoremler verilmeden önce gerekli aşağıdaki lemmalar verilecektir:

Lemma 3.3.1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $f^{(n)}$ türev fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli olsun. Bu durumda,

$$P_n^1(x,t) = \begin{cases} \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}, & a \leq t \leq x \\ \frac{(t-b)^{n+1}}{(n+1)!}, & x < t \leq b \end{cases}$$

olmak üzere her $x \in [a,b]$ için,

$$\int_a^b P_n^1(x,t)df^{(n)}(t)$$
$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}\left[(-1)^k (x-a)^{k+1} + (b-x)^{k+1}\right] f^{(k)}(x) + (-1)^{n+1}\int_a^b f(t)dt \qquad (3.24)$$

eşitliği vardır.

İspat. (3.24) eşitliği matematiksel tümevarım yöntemiyle ispatlanacaktır.
$n=1$ için,

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b P_1^1(x,t)df'(t) \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_a^x (t-a)^2 df'(t) + \int_x^b (t-b)^2 df'(t)\right] \\
&= -(b-a)f(x) - (b-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) + \int_a^b f(t)dt
\end{aligned}
$$

olup (3.24) eşitliği sağlanır.

(3.24) eşitliğinin n için sağlandı kabul edilip, $n+1$ için doğruluğu gösterilecektir. Bu durumda $n+1$ için

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b P_{n+1}^1(x,t)df^{(n+1)}(t) \\
&= \frac{1}{(n+2)!}\left[\int_a^x (t-a)^{n+2} df^{(n+1)}(t) + \int_x^b (t-b)^{n+2} df^{(n+1)}(t)\right] \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)^{n+2} - (x-b)^{n+2}\right] f^{(n+1)}(x) \\
&\quad -\frac{1}{(n+2)!}\left[\int_a^x (t-a)^{n+1} df^{(n)}(t) + \int_x^b (t-b)^{n+1} df^{(n)}(t)\right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}\left[(-1)^{n+1}(x-a)^{n+2} + (b-x)^{n+2}\right] f^{(n+1)}(x) \\
&\quad -(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}\left[(-1)^k (x-a)^{k+1} + (b-x)^{k+1}\right] f^{(k)}(x) - (-1)^{n+1}\int_a^b f(t)dt \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}\left[(-1)^k (x-a)^{k+1} + (b-x)^{k+1}\right] f^{(k)}(x) + (-1)^{n+2}\int_a^b f(t)dt
\end{aligned}
$$

olduğundan (3.24) eşitliği vardır. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.3.2. Lemma 3.3.1'in şartları sağlansın. Her $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ için

$$P_n^2(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{(n+1)!}(t-a)^{n+1}, & t\in\left(a,\frac{a+x}{2}\right]\\ \frac{1}{(n+1)!}\left(t-\frac{3a+b}{4}\right)^{n+1}, & t\in\left(\frac{a+x}{2},x\right]\\ \frac{1}{(n+1)!}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}, & t\in\left(x,a+b-x\right]\\ \frac{1}{(n+1)!}\left(t-\frac{a+3b}{4}\right)^{n+1}, & t\in\left(a+b-x,\frac{a+2b-x}{2}\right]\\ \frac{1}{(n+1)!}(t-b)^{n+1}, & t\in\left(\frac{a+2b-x}{2},b\right]\end{cases}$$

olarak tanımlı $P_n^2(x,t)$ dönüşümü için

$$\begin{aligned}&\int_a^b P_n^2(x,t)df^{(n)}(t)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n+k}}{(k+1)!}\left[\frac{1}{2^{k+1}}\left\{(x-a)^{k+1}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}\right\}f^{(k)}\left(\frac{a+x}{2}\right)\right.\\&+\left\{\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^{k+1}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}\right\}f^{(k)}(x)\\&+(-1)^{k+1}\left\{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}-\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^{k+1}\right\}f^{(k)}(a+b-x)\\&\left.+\left(\frac{-1}{2}\right)^{k+1}\left\{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}-(x-a)^{k+1}\right\}f^{(k)}\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right]\\&+(-1)^{n+1}\int_a^b f(t)dt\end{aligned}\tag{3.25}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. İspat yine matematiksel tümevarım metoduyla yapılacaktır.

$n=1$ için,

$$\begin{aligned}&\int_a^b P_1^2(x,t)df'(t)\\&=\int_a^b f(t)dt-\frac{b-a}{4}\left[f(x)+f(a+b-x)+f\left(\frac{a+x}{2}\right)+f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right.\end{aligned}$$

$$+\left(x-\frac{5a+3b}{8}\right)\{f'(a+b-x)-f'(x)\}$$

$$+\frac{1}{2}\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)\left\{f'\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)-f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right\}\Bigg]$$

olup (3.25) eşitliği $n=1$ için sağlanır.

(3.25) eşitliği n için doğru olsun. $n+1$ için

$$\int_a^b P_n^2(x,t)df^{(n)}(t)$$

$$=\frac{(-1)^{2n+2}}{(k+1)!}\left[\frac{1}{2^{n+2}}\left\{(x-a)^{n+2}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{n+2}\right\}f^{(n+1)}\left(\frac{a+x}{2}\right)\right.$$

$$+\left\{\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^{n+2}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{n+2}\right\}f^{(n+1)}(x)$$

$$+(-1)^{n+2}\left\{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{n+2}-\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^{n+2}\right\}f^{(n+1)}(a+b-x)$$

$$\left.+\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+2}\left\{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{n+2}-(x-a)^{n+2}\right\}f^{(n+1)}\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right]$$

$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n+k}}{(k+1)!}\left[\frac{1}{2^{k+1}}\left\{(x-a)^{k+1}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}\right\}f^{(k)}\left(\frac{a+x}{2}\right)\right.$$

$$+\left\{\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^{k+1}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}\right\}f^{(k)}(x)$$

$$+(-1)^{k+1}\left\{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}-\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^{k+1}\right\}f^{(k)}(a+b-x)$$

$$\left.+\left(\frac{-1}{2}\right)^{k+1}\left\{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}-(x-a)^{k+1}\right\}f^{(k)}\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right]$$

$$-(-1)^{n+1}\int_a^b f(t)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^{n+k+1}}{(k+1)!}\left[\frac{1}{2^{k+1}}\left\{(x-a)^{k+1}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}\right\}f^{(k)}\left(\frac{a+x}{2}\right)\right.$$

$$+\left\{\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^{k+1}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}\right\}f^{(k)}(x)$$

$$+(-1)^{k+1}\left\{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}-\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^{k+1}\right\}f^{(k)}(a+b-x)$$

$$\left.+\left(\frac{-1}{2}\right)^{k+1}\left\{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}-(x-a)^{k+1}\right\}f^{(k)}\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right]$$

$$+(-1)^{n+2}\int_a^b f(t)dt$$

olup, (3.25) eşitliğinin doğruluğu ispatlanmış olur.

Şimdi bu iki lemma kullanılarak *n.* türevi sınırlı varyasyonlu olan fonksiyonlar için bazı Ostrowski tipli eşitlikler verilecektir.

Teorem 3.3.1. $f:[a,b]\to \mathrm{R}$ olmak üzere, $f^{(n)}$ türev fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ve sınırlı varyasyonlu olsun. Bu durumda, her $x\in[a,b]$ için

$$\left|(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)!}\left[(-1)^k(x-a)^{k+1}+(b-x)^{k+1}\right]f^{(k)}(x)+(-1)^{n+1}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\le\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]^{n+1}V_{f^{(n)}}(a,b) \tag{3.26}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Lemma 3.3.1'de mutlak değer alınıp (2.3) eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\int_a^b P_n^1(x,t)df^{(n)}(t)\right|$$
$$\le\frac{1}{(n+1)!}\left[\left|\int_a^x(t-a)^{n+1}df^{(n)}(t)\right|+\left|\int_x^b(t-b)^{n+1}df^{(n)}(t)\right|\right]$$
$$\le\frac{1}{(n+1)!}\left[\sup_{t\in[a,x]}|t-a|^{n+1}V_{f^{(n)}}(a,x)+\sup_{t\in[a,b]}|t-b|^{n+1}V_{f^{(n)}}(x,b)\right]$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)^{n+1}V_{f^{(n)}}(a,x)+(b-x)^{n+1}V_{f^{(n)}}(x,b)\right]$$
$$\le\frac{1}{(n+1)!}\max\left\{(x-a)^{n+1},(b-x)^{n+1}\right\}V_{f^{(n)}}(a,b)$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]^{n+1}V_{f^{(n)}}(a,b)$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.3.1. Theorem 3.3.1'de özel olarak $n=0$ seçilirse, (3.26) eşitsizliği [11]'de Dragomir tarafından verilen (2.8)'deki Ostrowski tipli eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.3.2. Teorem 3.3.1'in şartları altında $n=1$ alınırsa, her $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-f(x)-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f'(x)\right|\\&\leq\frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]^2 V_{f'}(a,b)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3.3. Sonuç 3.3.2'de $x=\frac{a+b}{2}$ seçilirse (3.26) eşitsizliği [30]'da Liu tarafından elde edilen (3.17) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.3.2. Teorem 3.3.1'in şartları sağlansın. Bu durumda, her $x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n+k}}{(k+1)!}\left[\frac{1}{2^{k+1}}\left\{(x-a)^{k+1}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}\right\}f^{(k)}\left(\frac{a+x}{2}\right)\right.\right.\\&+\left\{\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^{k+1}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}\right\}f^{(k)}(x)\\&+(-1)^{k+1}\left\{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}-\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^{k+1}\right\}f^{(k)}(a+b-x)\\&\left.+\left(\frac{-1}{2}\right)^{k+1}\left\{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}-(x-a)^{k+1}\right\}f^{(k)}\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right]\\&\left.+(-1)^{n+1}\int_a^b f(t)dt\right|\\&\leq\frac{1}{(n+1)!}\max\left\{\left|x-\frac{3a+b}{4}\right|^{n+1},\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^{n+1},\frac{(x-a)^{n+1}}{2^{n+1}}\right\}V_{f^{(n)}}(a,b)\end{aligned}\tag{3.27}$$

dır.

İspat. Lemma 3.3.2'de mutlak değer alınıp, (2.3) eşitsizliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b P_n^2(x,t)\,df^{(n)}(t)\right| \\
&\le \frac{1}{(n+1)!}\left[\left|\int_a^{\frac{a+x}{2}} (t-a)^{n+1}\,df^{(n)}(t)\right| + \left|\int_{\frac{a+x}{2}}^{x}\left(t-\frac{3a+b}{4}\right)^{n+1} df^{(n)}(t)\right|\right. \\
&\quad + \left|\int_x^{a+b-x}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} df^{(n)}(t)\right| + \left|\int_{a+b-x}^{\frac{a+2b-x}{2}}\left(t-\frac{a+3b}{4}\right)^{n+1} df^{(n)}(t)\right| \\
&\quad \left.+ \left|\int_{\frac{a+2b-x}{2}}^{b} (t-b)^{n+1}\,df^{(n)}(t)\right|\right] \\
&\le \frac{1}{(n+1)!}\left[\sup_{t\in\left[a,\frac{a+x}{2}\right]}|t-a|^{n+1} V_{f^{(n)}}\left(a,\frac{a+x}{2}\right) + \sup_{t\in\left[\frac{a+x}{2},x\right]}\left|t-\frac{3a+b}{4}\right|^{n+1} V_{f^{(n)}}\left(\frac{a+x}{2},x\right)\right. \\
&\quad + \sup_{t\in[x,a+b-x]}\left|t-\frac{a+b}{2}\right|^{n+1} V_{f^{(n)}}(x,a+b-x) \\
&\quad + \sup_{t\in\left[a+b-x,\frac{a+2b-x}{2}\right]}\left|t-\frac{a+3b}{4}\right|^{n+1} V_{f^{(n)}}\left(a+b-x,\frac{a+2b-x}{2}\right) \\
&\quad \left.+ \sup_{t\in\left[\frac{a+2b-x}{2},b\right]}|t-b|^{n+1} V_{f^{(n)}}\left(\frac{a+2b-x}{2},b\right)\right] \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{(x-a)^{n+1}}{2^{n+1}} V_{f^{(n)}}\left(a,\frac{a+x}{2}\right)\right. \\
&\quad + \max\left\{\left|x-\frac{3a+b}{4}\right|^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^{n+1}\right\} V_{f^{(n)}}\left(\frac{a+x}{2},x\right) \\
&\quad + \left(\frac{a+b}{2}-x\right)^{n+1} V_{f^{(n)}}(x,a+b-x) \\
&\quad + \max\left\{\left|x-\frac{3a+b}{4}\right|^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^{n+1}\right\} V_{f^{(n)}}\left(a+b-x,\frac{a+2b-x}{2}\right) \\
&\quad \left.+ \frac{(x-a)^{n+1}}{2^{n+1}} V_{f^{(n)}}\left(\frac{a+2b-x}{2},b\right)\right] \\
&\le \frac{1}{(n+1)!}\max\left\{\left|x-\frac{3a+b}{4}\right|^{n+1}, \left(\frac{a+b}{2}-x\right)^{n+1}, \frac{(x-a)^{n+1}}{2^{n+1}}\right\} V_{f^{(n)}}(a,b)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.3.4. Teorem 3.3.2'de özel olarak $n=0$ alınırsa, (3.27) eşitsizliği daha önce ispat verilen (3.5) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.3.5. Teorem 3.3.2'de özel olarak $n=1$ alınırsa, (3.27) eşitsizliği bir önceki alt bölümde ispatı verilen (3.23) eşitsizliğine dönüşür.

3.4. SINIRLI VARYASYONLU FONKSİYONLAR İÇİN BAZI AĞIRLIKLI OSTROWSKI TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde sırasıyla kendisi ve türevi sınırlı vayasyonlu fonksiyonlar için bazı ağırlıklı Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilecektir.

İlk olarak, ana teoremlerde kullanılacak bazı gösterimler verilecektir.

$[a,b]$ aralığının bir parçalanışı $I_n : a=x_0<x_1<...<x_n=b$ olsun. Ayrıca $\alpha_i(i=0,1,...,n+1)$ noktaları $\alpha_0=a,\quad \alpha_i\in[x_{i-1},x_i]\quad (i=1,...,n),\quad \alpha_{n+1}=b$ şeklinde verilsin. $w:[a,b]\to(0,\infty)$ fonksiyonu (a,b) üzerinde sürekli ve pozitif bir dönüşüm olmak üzere

$$\upsilon(h):=\max\{h_i \mid i=0,...,n-1\},\quad h_i:=x_{i+1}-x_i\ (i=0,1,...,n-1),$$

ve

$$\upsilon(L):=\max\{L_i \mid i=0,...,n-1\},\ L_i=\int_{x_i}^{x_{i+1}} w(u)du\,(i=0,1,...,n-1)$$

olarak tanmlansın.

Teorem 3.4.1. Eğer $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu ise, bu takdirde

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=0}^{n}\left(\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du\right)f(x_i)-\int_a^b f(t)w(t)dt\right| \\
&\le \|w\|_{\infty,[a,b]}\left[\frac{1}{2}\upsilon(h)+\max_{i\in\{0,1,...,k-1\}}\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right]V_f(a,b) \qquad (3.28)\\
&\le \|w\|_{\infty,[a,b]}\upsilon(h)V_f(a,b)
\end{aligned}$$

ve

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\left(\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du\right) f(x_i) - \int_a^b f(t)w(t)dt\right|$$
$$\leq \left[\frac{1}{2}v(L) + \max_{i\in\{0,1,\dots,n-1\}} \frac{1}{2}\left|\int_{x_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du - \int_{\alpha_{i+1}}^{x_{i+1}} w(u)du\right|\right] V_f(a,b) \tag{3.29}$$
$$\leq v(L)V_f(a,b)$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat. Bu eşitsizlikleri ispatlamak için

$$K(t) = \begin{cases} \int_{\alpha_1}^{t} w(u)du, & t\in[a,x_1) \\ \int_{\alpha_2}^{t} w(u)du, & t\in[x_1,x_2) \\ \vdots & \\ \int_{\alpha_{n-1}}^{t} w(u)du, & t\in[x_{n-2},x_{n-1}) \\ \int_{\alpha_n}^{t} w(u)du, & t\in[x_{n-1},b] \end{cases}$$

ile tanmlı K dönüşümü ele alınsın.

Kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\int_a^b K(t)df(t)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} K(t)df(t)\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\int_{\alpha_{i+1}}^{t} w(u)du\right)df(t)\right] \tag{3.30}$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(\int_{\alpha_{i+1}}^{x_{i+1}} w(u)du\right) f(x_{i+1}) + \left(\int_{x_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du\right) f(x_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)w(t)dt\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\alpha_i}^{x_i} w(u)du\right) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du\right) f(x_i) - \int_a^b f(t)w(t)dt$$

bulunur. (3.30) eşitliğinin son satırındaki toplamlar

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\alpha_i}^{x_i} w(u)du\right) f(x_i) = \left(\int_{\alpha_n}^{b} w(u)du\right) f(b) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\int_{\alpha_i}^{x_i} w(u)du\right) f(x_i),$$

ve

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du\right) f(x_i) = \left(\int_{a}^{\alpha_1} w(u)du\right) f(a) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du\right) f(x_i)$$

olarak yazlabilir. Bu ifadeler (3.30) eşitliğinde yerine yazılrsa,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b K(t)df(t) \\
&= \left(\int_{\alpha_n}^{b} w(u)du\right) f(b) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du\right) f(x_i) \\
&\quad + \left(\int_{a}^{\alpha_1} w(u)du\right) f(a) - \int_a^b f(t)w(t)dt \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du\right) f(x_i) - \int_a^b f(t)w(t)dt
\end{aligned} \tag{3.31}$$

bulunur. Elde edilen (3.31) eşitliğinde mutlak değer alınıp üçgen eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=0}^{n}\left(\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du\right) f(x_i) - \int_a^b f(t)w(t)dt\right| \\
&= \left|\int_a^b K(t)df(t)\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\int_{\alpha_{i+1}}^{t} w(u)du\right)df(t)\right]\right| \\
&\le \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\int_{\alpha_{i+1}}^{t} w(u)du\right)df(t)\right| \\
&\le \|w\|_{\infty,[a,b]} \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(t-\alpha_{i+1}\right)df(t)\right|
\end{aligned} \tag{3.32}$$

bulunur. (3.32)'nin son satırında (2.3) eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}(t-\alpha_{i+1})df(t)\right| \le \sup_{t\in[x_i,x_{i+1}]}|t-\alpha_{i+1}|V_f(x_i,x_{i+1})$$
$$= \max\{\alpha_{i+1}-x_i, x_{i+1}-\alpha_{i+1}\}V_f(x_i,x_{i+1})$$
$$= \left[\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)+\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right]V_f(x_i,x_{i+1})$$

elde edilimiş olup, bu ifade yerine yazılıp maksimumun özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=0}^{n}\left(\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du\right)f(x_i)-\int_a^b f(t)w(t)dt\right| \\
&\le \|w\|_{\infty,[a,b]}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)+\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right]V_f(x_i,x_{i+1}) \\
&\le \|w\|_{\infty,[a,b]}\max_{i\in[0,\dots,n-1]}\left\{\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)+\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right\}\sum_{i=0}^{n-1}V_f(x_i,x_{i+1}) \\
&\le \|w\|_{\infty,[a,b]}\left[\frac{1}{2}\upsilon(h)+\max_{i\in[0,\dots,n-1]}\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right]V_f(a,b)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

bulunur ve (3.28) deki ilk eşitsizlik ispatlanmş olur.

Diğer taraftan (3.33)'te

$$\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right| \le \frac{1}{2}h_i \text{ ve } \max_{i\in[0,\dots,n-1]}\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right| \le \frac{1}{2}\upsilon(h)$$

eşitsizlikleri kullanılırsa (3.28)'deki ikinci eşitsizliğin doğruluğuda kolaylıkla gösterilebilir.

(3.29) eşitsizliğini ispatlamak için (3.31)'de mutlak değer alnırsa

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\left(\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du\right)f(x_i)-\int_a^b f(t)w(t)dt.\right| = \left|\int_a^b K(t)df(t)\right|$$
$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\int_{\alpha_{i+1}}^{t} w(u)du\right)df(t)\right]\right|$$
$$\le \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\int_{\alpha_{i+1}}^{t} w(u)du\right)df(t)\right|$$

bulunur. Burada yine (2.3) eşitsizliği uygulanarak

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\int_{\alpha_{i+1}}^{t} w(u)du\right)df(t)\right| \\
&\leq \sup_{t\in[x_i,x_{i+1}]}\left|\int_{\alpha_{i+1}}^{t} w(u)du\right| V_f\left(x_i,x_{i+1}\right) \\
&= \max\left\{\int_{x_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du,\ \int_{\alpha_{i+1}}^{x_{i+1}} w(u)du\right\} V_f\left(x_i,x_{i+1}\right) \\
&= \left[\frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} w(u)du+\frac{1}{2}\left|\int_{x_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du-\int_{\alpha_{i+1}}^{x_{i+1}} w(u)du\right|\right] V_f\left(x_i,x_{i+1}\right)
\end{aligned}
$$

elde dilip, bu ifade yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=0}^{n}\left(\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du\right)f(x_i)-\int_a^b f(t)w(t)dt.\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} w(u)du+\frac{1}{2}\left|\int_{x_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du-\int_{\alpha_{i+1}}^{x_{i+1}} w(u)du\right|\right] V_f\left(x_i,x_{i+1}\right) \\
&\leq \max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\left\{\frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} w(u)du+\frac{1}{2}\left|\int_{x_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du-\int_{\alpha_{i+1}}^{x_{i+1}} w(u)du\right|\right\}\sum_{i=0}^{n-1} V_f\left(x_i,x_{i+1}\right) \\
&\leq \left[\frac{1}{2}v(L)+\max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\frac{1}{2}\left|\int_{x_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du-\int_{\alpha_{i+1}}^{x_{i+1}} w(u)du\right|\right] V_f\left(a,b\right)
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

bulunur. Bu da (3.29)'daki ilk eşitsizliğin ispatını tamamlamış olur.

(3.29)'daki ikinci eşitsizliğin ispat için, (3.34)'ün son satırında üçgen eşitsizliği uygulanarak

$$
\left|\int_{x_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du-\int_{\alpha_{i+1}}^{x_{i+1}} w(u)du\right| \leq \left|\int_{x_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du\right|+\left|\int_{\alpha_{i+1}}^{x_{i+1}} w(u)du\right| = \int_{x_i}^{x_{i+1}} w(u)du
$$

olduğu ve böylece

$$
\max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\frac{1}{2}\left|\int_{x_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du-\int_{\alpha_{i+1}}^{x_{i+1}} w(u)du\right| \leq \frac{1}{2}v(L)
$$

olduğu görülebilir, bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.4.1. Teorem 3.4.1'de $w(u)=1$ alınırsa, (3.28) ve (3.29) eşitsizlikleri [15]'de Dragomir tarafından verilen (2.11) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.4.2. Eğer Teorem 3.4.1'de $w(u)=h'(u)$ (u ya göre diferansiyellenebilir) alınırsa, bu durumda (3.29) eşitsizliği [26]'da Tseng ve diğ. tarafından ispatlanan

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=0}^{n}\left(\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} w(u)du\right) f(x_i)-\int_a^b f(t)w(t)dt\right| \\
&\leq \left[\frac{1}{2}v(L)+\max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\left|h(\alpha_{i+1})-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right] V_f(a,b) \\
&\leq v(L)V_f(a,b)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.4.3. Teorem 3.4.1'in şartları altında, $x_0=a, x_1=b,\ \alpha_0=a,\ \alpha_1=\alpha, \alpha_2=b$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\int_a^\alpha w(u)du\right) f(a)+\left(\int_\alpha^b w(u)du\right) f(b)-\int_a^b f(t)w(t)dt\right| \\
&\leq \left[\frac{1}{2}\int_a^b w(u)du+\frac{1}{2}\left|\int_a^\alpha w(u)du-\int_\alpha^b w(u)du\right|\right] V_f(a,b) \qquad (3.35)\\
&\leq \left(\int_a^b w(u)du\right) V_f(a,b)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.4.4. (3.35) eşitsizliğinde

1) $\alpha=b$ alınırsa

$$\left|\left(\int_a^b w(u)du\right) f(a)-\int_a^b f(t)w(t)dt\right| \leq \left(\int_a^b w(u)du\right) V_f(a,b),$$

2) $\alpha=a$ alınırsa

$$\left|\left(\int_a^b w(u)du\right)f(b)-\int_a^b f(t)w(t)dt\right|\le\left(\int_a^b w(u)du\right)V_f(a,b)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Teorem 3.4.2. $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan ve sürekli bir fonksiyon ve $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu da (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer f' türev fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonlu ise, bu durumda her $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}&\left|\left(\int_a^b (u-x)w(u)du\right)f'(x)+\left(\int_a^b w(u)du\right)f(x)-\int_a^b w(t)f(t)dt\right|\\&\le\left(\int_a^x (u-x)w(u)du\right)V_{f'}(a,x)+\left(\int_x^b (u-x)w(u)du\right)V_{f'}(x,b)\end{aligned}\tag{3.36}$$

dir.

İspat.

$$P_w(x,t)=\begin{cases}\int_a^t (u-t)w(u)du, & a\le t<x\\ \int_b^t (u-t)w(u)du & x\le t\le b\end{cases}$$

ile tanımlı $P_w(x,t)$ dönüşümü göz önüne alınsın. Kısmi integtrasyon kullanılarak

$$\begin{aligned}&\int_a^b P_w(x,t)df'(t)\\&=\int_a^x\left(\int_a^t (u-t)w(u)du\right)df'(t)+\int_x^b\left(\int_b^t (u-t)w(u)du\right)df'(t)\\&=\left(\int_a^t (u-t)w(u)du\right)f'(t)\Big|_a^x+\int_a^x\left(\int_a^t w(u)du\right)f'(t)dt\\&+\left(\int_b^t (u-t)w(u)du\right)f'(t)\Big|_x^b+\int_x^b\left(\int_b^t w(u)du\right)f'(t)dt\\&=\left(\int_a^x (u-x)w(u)du\right)f'(x)-\left(\int_b^x (u-x)w(u)du\right)f'(x)\end{aligned}\tag{3.37}$$

$$+\left(\int_a^t w(u)du\right) f(t)\Big|_a^x - \int_a^x w(t) f(t)dt$$

$$+\left(\int_b^t w(u)du\right) f(t)\Big|_x^b - \int_x^b w(t) f(t)dt$$

$$= \left(\int_a^b (u-x)w(u)du\right) f'(x) + \left(\int_b^b w(u)du\right) f(t) - \int_a^b w(t) f(t)dt$$

bulunur. Elde edilen bu ifadede (2.3) eşitsizliği kullanılırsa, bu takdirde

$$\left|\left(\int_a^b (u-x)w(u)du\right) f'(x) + \left(\int_b^b w(u)du\right) f(t) - \int_a^b w(t) f(t)dt\right|$$

$$= \left|\int_a^b P_w(x,t)df'(t)\right|$$

$$\leq \left|\int_a^x \left(\int_a^t (u-t)w(u)du\right) df'(t)\right| + \left|\int_x^b \left(\int_b^t (u-t)w(u)du\right) df'(t)\right|$$

$$\leq \sup_{t\in[a,x]}\left|\int_a^t (u-t)w(u)du\right| V_{f'}(a,x) + \sup_{t\in[x,b]}\left|\int_b^t (u-t)w(u)du\right| V_{f'}(x,b)$$

$$\leq \sup_{t\in[a,x]}\left\{\int_a^t (t-u)w(u)du\right\} V_{f'}(a,x) + \sup_{t\in[x,b]}\left\{\int_t^b (u-t)w(u)du\right\} V_{f'}(x,b)$$

$$= \left(\int_a^x (x-u)w(u)du\right) V_{f'}(a,x) + \left(\int_x^b (u-x)w(u)du\right) V_{f'}(x,b)$$

olduğu görülür ki bu da istenen sonuçtur.

Sonuç 3.4.5. Teorem 3.4.2'nin şartları altında $w \equiv 1$ olarak alınırsa, Teorem 3.4.2 bir önceki alt bölümde verilen Sonuç 3.3.2**'**ye dönüşür.

İspat. Teorem 3.4.2'de $w \equiv 1$ alınıp maksimum özelliği kullanılırsa

$$\left|(b-a)\left(\frac{a+b}{2} - x\right) f'(x) + (b-a) f(x) - \int_a^b w(t) f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[(x-a)^2 V_{f'}(a,x) + (b-x)^2 V_{f'}(x,b)\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\max\left\{(x-a)^2, (b-x)^2\right\} V_{f'}(a,b) = \frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{2} + \left|x - \frac{a+b}{2}\right|\right]^2 V_{f'}(a,b)$$

olduğu kolaylıkla görülüp, ifadenin doğruluğu ispatlanmış olur.

Ayrıca, Teorem 3.4.2 nin özel durumu olarak aşağdaki sonuçlar da verilebilir:

Sonuç 3.4.6. Eğer $f \in C^{(2)}[a,b]$ ise her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}&\left|\left(\int_a^b (u-x)w(u)du\right) f'(x) + \left(\int_a^b w(u)du\right) f(x) - \int_a^b w(t) f(t)dt\right| \\ &\leq \left(\int_a^x (u-x)w(u)du\right)\|f''\|_{[a,x],1} + \left(\int_x^b (u-x)w(u)du\right)\|f''\|_{[x,b],1}\end{aligned} \tag{3.38}$$

dir.

Sonuç 3.4.7. Sonuç 3.4.6'da $w \equiv 1$ ve $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa, (3.38) eşitsizliği [59]'da Liu tarafından elde edilen ve Sonuç 3.2.5'te verilen eşitsizliğe dönüşür.

Sonuç 3.4.8. Eğer $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $L_1 > 0$ sabiti için $[a,x]$ aralığında ve $L_2 > 0$ sabiti için $[x,b]$ aralığında Lipschitz dönüşüm olsun. Bu durumda her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}&\left|\left(\int_a^b (u-x)w(u)du\right) f'(x) + \left(\int_a^b w(u)du\right) f(x) - \int_a^b w(t) f(t)dt\right| \\ &\leq \left(\int_a^x (u-x)w(u)du\right)(x-a)L_1 + \left(\int_x^b (u-x)w(u)du\right)(b-x)L_2 \\ &\leq \left(\int_a^b (u-x)w(u)du\right)\left[\frac{1}{2}(b-a) + \left|x - \frac{a+b}{2}\right|\right]L\end{aligned} \tag{3.39}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $L = \max\{L_1, L_2\}$ dir.

3.5. İNTEGRALLER İÇİN BAZI NÜMERİK GÖSTERİMLER VE HATA ÜST SINIRLARI

İlk olarak bu alt bölümde kullanılacak bazı tanım ve gösterimler verilecektir:
$I_n \; : \; a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b,$ $[a,b]$ aralğının bir parçalanışı olsun. Ayrıca $h_i := x_{i+1} - x_i$ ve $v(h) = \max\{h_i \; : \; i = 0,1,...,n-1\}$ olarak tanımlansın.

Şimdi önceki alt bölümlerde verilen eşitsizlikler yardımıyla aşağıdaki teoremler ve sonuçlar verilebilir.

Teorem 3.5.1. f fonksiyonu Teorem 3.1.1'deki gibi tanımlı olmak üzere $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ için

$$A(f, I_n, \xi) := \sum_{i=0}^{n} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) f(\xi_i) h_i + \lambda \frac{(\xi_i - x_i) f(x_i) + (x_{i+1} - \xi_i) f(x_{i+1})}{2} \right] \tag{3.40}$$

olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(t)dt = A(f, I_n, \xi) + R(f, I_n, \xi) \tag{3.41}$$

olmak üzere $R(f, I_n, \xi)$ kalan terimi

$$\begin{aligned} |R(f, I_n, \xi)| &\le \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \left[\frac{1}{2} v(h) + \max_{i \in \{0,1,\dots,n-1\}} \left| \xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right| \right] V_f(a,b) \\ &\le \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) v(h) V_f(a,b) \end{aligned} \tag{3.42}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. Teorem 3.1.1, $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0,1,\dots,n-1)$ aralıkları için uygulanırsa, her $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$ için

$$\begin{aligned} &\left| \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) f(\xi_i) h_i + \lambda \frac{(\xi_i - x_i) f(x_i) + (x_{i+1} - \xi_i) f(x_{i+1})}{2} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt \right| \\ &\le \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \left[\frac{h_i}{2} + \left| \xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right| \right] V_f(x_i, x_{i+1}) \end{aligned} \tag{3.43}$$

elde edilir. (3.43)'te i üzerinden, 0 dan $n-1$ e kadar toplam alınıp ve genelleşmiş üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
|R(f,I_n,\xi)| &\leq \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{h_i}{2}+\left|\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right]V_f\left(x_i,x_{i+1}\right) \\
&\leq \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\left[\frac{h_i}{2}+\left|\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right]\sum_{i=0}^{n}V_f\left(x_i,x_{i+1}\right) \\
&\leq \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\left[\frac{1}{2}v(h)+\max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\left|\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right]V_f\left(a,b\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu da ilk eşitsizliğin ispatını tamamlar.

İkinci eşitsizlik için

$$
\left|\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\leq\frac{h_i}{2}\; i\in\{0,1,\ldots,n-1\}
$$

ve

$$
\max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\left|\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\leq\frac{1}{2}v(h)
$$

olduğu göz önüne alınırsa, ikinci eşitsizliğin de doğruluğu kolaylıkla görülebilir.

Sonuç 3.5.1. Teorem 3.5.1'de özel olarak $\lambda=0$ alınırsa, (3.42) eşitsizliği [11]'de Dragomir'in

$$
A(f,I_n,\xi):=\sum_{i=0}^{n}f(\xi_i)h_i \text{ ve} \int_a^b f(t)dt=A(f,I_n,\xi)+R(f,I_n,\xi)
$$

için elde ettiği

$$
\begin{aligned}
|R(f,I_n,\xi)| &\leq \left[\frac{1}{2}v(h)+\max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\left|\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right]V_f\left(a,b\right) \\
&\leq v(h)V_f\left(a,b\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.5.2. Teorem 3.5.1'de özel olarak $\lambda=\frac{2}{3}$ ve $\xi_i=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ alınırsa, bu durumda

$$\int_a^b f(t)dt = A_S(f, I_n) + R_S(f, I_n)$$

ve

$$A_S(f, I_n) = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]h_i + \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)h_i$$

olmak üzere, (3.42) eşitsizliği [15]'te Dragomir'in ispatladığı

$$\left|R_S(f, I_n)\right| \leq \frac{1}{3}\nu(h)V_f(a,b)$$

eşitsizliğine dönüşür.

Ayrca Teorem 3.5.1'in özel durumları için aşağıdaki sonuçlar da verilebilir.

Sonuç 3.5.3. $\lambda = 1$ seçilirse

$$\int_a^b f(t)dt = A(f, I_n, \xi) + R(f, I_n, \xi)$$

ve

$$A(f, I_n, \xi) = \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{2} f(\xi_i)h_i + \frac{(\xi_i - x_i) f(x_i) + (x_{i+1} - \xi_i) f(x_{i+1})}{2}\right]$$

olmak üzere, $R(f, I_n, \xi)$ kalan terimi için

$$\begin{aligned}\left|R(f, I_n, \xi)\right| &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\nu(h) + \max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\left|\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right|\right]V_f(a,b)\\ &\leq \frac{1}{2}\nu(h)V_f(a,b)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Özel olarak, $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ alınırsa

$$A(f, I_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left[f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\right]h_i$$

gösterimi ve

$$\left|R(f,I_n,\xi)\right| \le \frac{1}{4}\nu(h)V_f\left(a,b\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.5.4. $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $L > 0$ sabiti ile bir Lipschitz dönüşüm olsun. Bu durumda, (3.40) ve (3.41) gösterimleriyle birlikte $R(f,I_n,\xi)$ kalan terimi için

$$\begin{aligned}\left|R(f,I_n,\xi)\right| &\le L\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\nu(h)+\max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\left|\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right](b-a)\\ &\le L\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\nu(h)(b-a)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 3.5.5. $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde monoton bir dönüşüm olsun. Bu durumda, (3.40) ve (3.41) gösterimleriyle birlikte $R(f,I_n,\xi)$ kalan terimi için

$$\begin{aligned}\left|R(f,I_n,\xi)\right| &\le \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\nu(h)+\max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\left|\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right]\left|f(b)-f(a)\right|\\ &\le \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\nu(h)\left|f(b)-f(a)\right|\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 3.5.2. f fonksiyonu Torem 3.1.2'deki gibi tanımlansın. $\xi_i \in \left[x_i, \frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned}&A(f,I_n,\xi)\\ &:=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}h_i\left[f(\xi_i)+f\left(x_i+x_{i+1}-\xi_i\right)+f\left(\frac{x_i+\xi_i}{2}\right)+f\left(\frac{x_i+2x_{i+1}-\xi_i}{2}\right)\right]\end{aligned} \tag{3.44}$$

ve

$$\int_a^b f(t)dt = A(f,I_n,\xi)+R(f,I_n,\xi) \tag{3.45}$$

olmak üzere $R(f,I_n,\xi)$ kalan terimi

$$\left|R(f,I_n,\xi)\right| \le \max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\left[\max\left\{\left|\xi_i-\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right|,\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-\xi_i\right),\frac{\xi_i-x_i}{2}\right\}\right]V_f(a,b) \quad (3.46)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. Teorem 3.1.2'yi $[x_i,x_{i+1}]$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ aralıkları için uygulanırsa her $i\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{h_i}{4}\left[f(\xi_i)+f(x_i+x_{i+1}-\xi_i)+f\left(\frac{x_i+\xi_i}{2}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.\quad+f\left(\frac{x_i+2x_{i+1}-\xi_i}{2}\right)\right]-\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(t)dt\right| \qquad (3.47)\\
&\le \max\left\{\left|\xi_i-\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right|,\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-\xi_i\right),\frac{\xi_i-x_i}{2}\right\}V_f(x_i,x_{i+1})
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.47) eşitsizliğinde i üzerinden 0 dan $n-1$ e kadar toplam alınıp genelleşmiş üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\left|R(f,I_n,\xi)\right|\\
&\le \sum_{i=0}^{n}\max\left\{\left|\xi_i-\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right|,\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-\xi_i\right),\frac{\xi_i-x_i}{2}\right\}V_f(x_i,x_{i+1})\\
&\le \max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\left[\max\left\{\left|\xi_i-\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right|,\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-\xi_i\right),\frac{\xi_i-x_i}{2}\right\}\right]\sum_{i=0}^{n}V_f(x_i,x_{i+1})\\
&= \max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\left[\max\left\{\left|\xi_i-\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right|,\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-\xi_i\right),\frac{\xi_i-x_i}{2}\right\}\right]V_f(a,b)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.5.6. Teorem 3.5.2'de özel olarak $\xi_i=x_i$ seçilirse, bu durumda [14]'te Dragomir tarafından verilen

$$A_T(f,I_n):=\sum_{i=0}^{n}h_i\left[\frac{f(\xi_i)+f(x_{i+1})}{2}\right]$$

ve

$$\int_a^b f(t)dt = A_T(f, I_n) + R_T(f, I_n)$$

integraller için Yamuk kural gösterimleri ve $R(f, I_n, \xi)$ kalan terimi için

$$|R_T(f, I_n)| \leq \frac{1}{2} v(h) V_f(a,b)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.5.7. Eğer Teorem 3.5.2'de $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ alınırsa, bu durumda

$$\int_a^b f(t)dt = A(f, I_n) + R(f, I_n)$$

ve

$$A(f, I_n) := \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n} h_i \left[2f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f\left(\frac{3x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f\left(\frac{x_i + 3x_{i+1}}{2}\right)\right]$$

gösterimleri ve $R(f, I_n)$ kalan terimi için

$$|R(f, I_n)| \leq \frac{1}{4} v(h) V_f(a,b)$$

eşitsizliği elde edlir.

Sonuç 3.5.8. Son olarak Teorem 3.5.2'de $\xi_i = \frac{3x_i + x_{i+1}}{4}$ seçilirse

$$\int_a^b f(t)dt = A(f, I_n) + R(f, I_n),$$

$$A(f, I_n)$$
$$:= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n} h_i \left[f\left(\frac{3x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f\left(\frac{x_i + 3x_{i+1}}{2}\right) + f\left(\frac{7x_i + x_{i+1}}{8}\right) + f\left(\frac{x_i + 7x_{i+1}}{8}\right)\right]$$

ve

$$|R(f, I_n)| \leq \frac{1}{8} v(h) V_f(a,b)$$

bulunur.

Teorem 3.5.3. f fonksiyonu Teorem 3.2.1'deki gibi tanımlansın. Bu durumda her $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0,...,n-1)$ için

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(\xi_i) + f(x_i + x_{i+1} - \xi_i)]h_i$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_i - \frac{3x_i + x_{i+1}}{4}\right)[f(\xi_i) - f(x_i + x_{i+1} - \xi_i)]h_i + R(I_n, f, \xi)$$

gösterimi için $R(I_n, f, \xi)$ kalan terimi

$$|R(I_n, f, \xi)| \le \frac{1}{2}\max_{i\in\{0,...,n-1\}}\left\{\max\left\{(\xi_i - x_i)^2, \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \xi_i\right)^2\right\}\right\}V_{f'}(a,b) \tag{3.48}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. Teorem 3.2.1'deki eşitsizliğe denk olan (3.15) eşitsizliği $[x_i, x_{i+1}]$ aralığı için uygulanırsa

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt - \frac{1}{2}[f(\xi_i) + f(x_i + x_{i+1} - \xi_i)]h_i\right.$$
$$\left.\left(\xi_i - \frac{3x_i + x_{i+1}}{4}\right)[f(\xi_i) - f(x_i + x_{i+1} - \xi_i)]h_i\right| \tag{3.49}$$
$$\le \frac{1}{2}\max\left\{(\xi_i - x_i)^2, \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \xi_i\right)^2\right\}V_{f'}(x_i, x_{i+1})$$

bulunur. (3.49) eşitsizliğinde i üzerinden toplam alınırsa

$$|R(I_n, f, \xi)|$$
$$\le \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\max\left\{(\xi_i - x_i)^2, \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \xi_i\right)^2\right\}V_{f'}(x_i, x_{i+1})$$
$$\le \frac{1}{2}\max_{i\in\{0,...,n-1\}}\left\{\max\left\{(\xi_i - x_i)^2, \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \xi_i\right)^2\right\}\right\}\sum_{i=0}^{n-1}V_{f'}(x_i, x_{i+1})$$

$$\leq \frac{1}{2}\max_{i\in\{0,\dots,n-1\}}\left\{\max\left\{(\xi_i - x_i)^2, \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \xi_i\right)^2\right\}\right\} V_{f'}(a,b)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.5.9. Teorem 3.5.3'te özel olarak $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ $(i = 0,\dots,n-1)$ alınırsa, integral için

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)h_i + R_M(I_n, f)$$

şeklinde Orta Nokta gösterimi ve kalan terim için

$$|R_M(I_n, f)| \leq \frac{(\upsilon(h))^2}{8} V_{f'}(a,b)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.5.10. Teorem 3.5.3'te $\xi_i = \frac{3x_i + x_{i+1}}{4}$ $(i = 0,\dots,n-1)$ alınırsa,

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(\xi_i) + f(x_i + x_{i+1} - \xi_i)\right]h_i + R(I_n, f)$$

ve

$$|R(I_n, f)| \leq \frac{(\upsilon(h))^2}{32} V_{f'}(a,b)$$

elde edilir.

Teorem 3.5.4. f fonksiyonu Teorem 3.2.1'deki gibi tanımlansın. Bu durumda her $\xi_i \in \left[x_i, \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right]$ $(i = 0,\dots,n-1)$ için

$$\int_a^b f(t)dt$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(\xi_i) + f(x_i + x_{i+1} - \xi_i) + f\left(\frac{x_i + \xi_i}{2}\right) + f\left(\frac{x_i + 2x_{i+1} - \xi_i}{2}\right)\right]h_i$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_i-\frac{5x_i+3x_{i+1}}{8}\right)\left\{f'\left(\frac{x_i+2x_{i+1}-\xi_i}{2}\right)-f'\left(\frac{a+\xi_i}{2}\right)\right\}h_i\\
&+\frac{1}{8}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_i-\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)\left\{f'\left(\frac{x_i+2x_{i+1}-\xi_i}{2}\right)-f'\left(\frac{x_i+\xi_i}{2}\right)\right\}h_i\\
&+R(I_n,f,\xi)
\end{aligned}
$$

nümerik integral hesaplama gösterimi vardır. Burada $R(I_n, f, \xi)$ kalan terimi için

$$
\begin{aligned}
&\left|R(I_n,f,\xi)\right|\\
&\le\frac{1}{2}\max_{i\in\{0,\ldots,n-1\}}\left\{\max\left\{\left(\xi_i-\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)^2,\frac{1}{4}\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-\xi_i\right)^2,\frac{(\xi_i-x_i)^2}{4}\right\}\right\}V_{f'}(a,b)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Teorem 3.2.2, $[x_i, x_{i+1}]$ aralığı için uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(t)dt-\frac{h_i}{4}\left[f(\xi_i)+f(x_i+x_{i+1}\right.\right.\\
&-\xi_i)+f\left(\frac{x_i+\xi_i}{2}\right)+f\left(\frac{x_i+2x_{i+1}-\xi_i}{2}\right)\\
&+\left(\xi_i-\frac{5x_i+3x_{i+1}}{8}\right)\left\{f'\left(\frac{x_i+2x_{i+1}-\xi_i}{2}\right)-f'\left(\frac{a+\xi_i}{2}\right)\right\}\\
&\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\xi_i-\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)\left\{f'\left(\frac{x_i+2x_{i+1}-\xi_i}{2}\right)-f'\left(\frac{x_i+\xi_i}{2}\right)\right\}\right]\right|\\
&\le\frac{1}{2}\max\left\{\left(\xi_i-\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)^2,\frac{1}{4}\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-\xi_i\right)^2,\frac{(\xi_i-x_i)^2}{4}\right\}V_{f'}(x_i,x_{i+1})
\end{aligned}
$$

olur. Burada i üzerinden toplam alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|R(I_n,f,\xi)\right|\\
&\le\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\max\left\{\left(\xi_i-\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)^2,\frac{1}{4}\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-\xi_i\right)^2,\frac{(\xi_i-x_i)^2}{4}\right\}V_{f'}(x_i,x_{i+1})\\
&\le\frac{1}{2}\max_{i\in\{0,\ldots,n-1\}}\left\{\max\left\{\left(\xi_i-\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)^2,\frac{1}{4}\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-\xi_i\right)^2,\frac{(\xi_i-x_i)^2}{4}\right\}\right\}\\
&\times\sum_{i=0}^{n-1}V_{f'}(x_i,x_{i+1})
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{1}{2}\max_{i\in\{0,\ldots,n-1\}}\left\{\max\left\{\left(\xi_i-\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)^2,\frac{1}{4}\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-\xi_i\right)^2,\frac{(\xi_i-x_i)^2}{4}\right\}\right\}V_{f'}(a,b)$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.5.11. Teorem 3.5.4'te $\xi_i = x_i$ yazılırsa

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(\xi_i)+f(x_{i+1})-\frac{f'(x_{i+1})-f'(x_i)}{4}h_i\right]h_i + R(I_n,f)$$

gösterimi ve

$$\left|R(I_n,f)\right| \leq \frac{(\upsilon(h))^2}{8}V_{f'}(a,b)$$

eşitsizliği bulunur.

3.6. BAZI İNTEGRALLER İÇİN FARKLI NÜMERİK YAKLAŞIMLAR VE KIYASLARI

Bu alt bölümde bazı özel fonksiyonlar için nümerik integraller hesaplanacaktır. Bu hesaplamalar Bölüm 3.3'te verilen Teorem 3.3.2'den faydalanılarak elde edilen ve fonksiyonun n. türevini içeren farklı nümerik integral hesaplama yöntemleri yardımıyla yapılacaktır. Daha sonra bu nümerik hesaplama yöntemleri arasında kıyas yapılarak hangisinin daha iyi olduğuna karar verilecektir. Teorem 3.3.2'de x yerine sırasıyla a, $\frac{3a+b}{4}$ ve $\frac{a+b}{2}$ özel değerleri yazılarak integraller için aşağıdaki nümerik hesaplama yöntemleri bulunabilir:

$$\begin{aligned} Q_{n,1}(f) &:= \int_a^b f(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)!}\frac{(b-a)^{k+1}}{2^{k+1}}\left[f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{n,2}(f) &:= \int_a^b f(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\left[\frac{\left(1+(-1)^k\right)}{4^{k+1}2^{k+1}}(b-a)^{k+1}\left\{f^{(k)}\left(\frac{7a+b}{8}\right)+f^{(k)}\left(\frac{a+7b}{8}\right)\right\}\right. \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4^{k+1}}(b-a)^{k+1}\left\{(-1)^k f^{(k)}\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f^{(k)}\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right\}\Bigg],$$

ve

$$Q_{n,3}(f) := \int_a^b f(t)dt$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\left[\left\{f^{(k)}\left(\frac{3a+b}{4}\right)+\left(1+(-1)^k\right)f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)+(-1)^k f^{(k)}\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right\}\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{4^{k+1}}(b-a)^{k+1}\right].$$

Bu nümerik metodlar sırasıyla

$$f_1(x)=x^2+x+2, \qquad f_2(x)=x\sin x,$$
$$f_3(x)=e^x\sin x, \qquad f_4(x)=x^2+\sin x,$$
$$f_5(x)=e^{x^2}, \qquad f_6(x)=e^x\cos\left(e^x-2x\right),$$
$$f_7(x)=x+\cos x, \qquad f_8(x)=\log\left(x^2+2\right)\sin\left[\log\left(x^2+2\right)\right]$$

fonksiyonlarının $[0,1]$ aralığı üzerinde integralleri için kullanılacaktır. Mathematica programında yapılan hesaplamalar sonucunda Çizelge 3.1'deki sonuçlar ortaya çıkmıştır.

Hesaplamalar gösterdi ki, $n=2$ için üç kuralda f_1 fonksiyonunun integralinin gerçek değerini verdi. Keyfi bir k dereceli polinom için, $n=k+1$ alınırsa fonksiyonun integralinin gerçek değeri elde edilebilir. Bu yöntemlerde kabul edilebilir hata tahminleri n değerinin küçük değerleri için elde edilebilir.

Genel olarak, n in küçük değerleri için $Q_{n,2}(f)$ diğer iki metotla kıyaslandığında daha iyi sonuç vermektedir. Bu nedenle, $Q_{n,2}(f)$ metodunun hata yaklaşım, sadelik ve zaman açısından daha etkili olduğu sonucuna varılabilir. Örneğin, Mathematica 8.0 de yazılan algoritma ile $\log\left(x^2+2\right)\sin\left[\log\left(x^2+2\right)\right]$ fonksiyonunun integrali hesaplanmış ve yaklaşık değerini elde etmek 26.30 saniye sürmüştür. Aynı fonksiyonun benzer yaklaşımı, $Q_{n,2}(f)$ metodu ile bir saniyeden az zaman almıştır.

Bu incelemeye bağlı olarak, $Q_{n,2}(f)$ metodunun en etkili metot olduğu varsayılabilir. Arzu edildiği takdirde n nin değeri hata sınırları geliştirmek veya hesaplama zamanını azaltmak için ayarlanabilir.

Çizelge 3.1. Bazı fonksiyonların nümerik integrallleri

Sr. No.	**Metot**	n : $Q_{n,1}(f)$	n : $Q_{n,2}(f)$	n : $Q_{n,3}(f)$	**Gerçek Değer**
1.	$\int_0^1 f_1(x)dx$	**2**: 2.83333	**2**: 2.83333	**2**: 2.83333	2.83333
	Hata:	0	0	0	
2.	$\int_0^1 f_2(x)dx$	**6**: 0.301168	**4**: 0.301169	**4**: 0.301168	0.301169
	Hata:	5.5921×10^{-7}	7.20674×10^{-7}	1.07696×10^{-6}	
3.	$\int_0^1 f_3(x)dx$	**6**: 0.909332	**4**: 0.909329	**4**: 0.909333	0.909331
	Hata:	1.22345×10^{-6}	1.66306×10^{-6}	2.48778×10^{-6}	
4.	$\int_0^1 f_4(x)dx$	**4**: 0.793022	**3**: 0.793023	**4**: 0.793031	0.793031
	Hata:	8.63182×10^{-6}	8.08331×10^{-6}	1.03192×10^{-7}	
5.	$\int_0^1 f_5(x)dx$	**10**: 1.46266	**6**: 1.46265	**6**: 1.46265	1.46265
	Hata:	5.8789×10^{-6}	1.54452×10^{-6}	2.29707×10^{-6}	
6.	$\int_0^1 f_6(x)dx$	**10**: 1.31384	**6**: 1.31383	**6**: 1.31383	1.31383
	Hata:	7.37624×10^{-6}	3.15394×10^{-7}	1.47843×10^{-7}	
7.	$\int_0^1 f_7(x)dx$	**5**:1.34147	**4**: 1.34147	**4**: 1.34147	1.34147
	Hata:	2.46065×10^{-6}	1.26192×10^{-7}	1.88891×10^{-7}	
8.	$\int_0^1 f_8(x)dx$	**8**: 0.62977	**4**: 0.629773	**4**: 0.629762	0.629769
	Hata:	1.18074×10^{-6}	4.86274×10^{-6}	6.3567×10^{-6}	

4. İKİ DEĞİŞKENLİ SINIRLI VARYASYONLU FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKI TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde tek değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için literatürde var olan bazı Ostrowski tipli eşitsizlikler iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için elde edilecektir.

4.1. SINIRLI VARYASYONA SAHİP İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKI TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde ilk olarak iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikler ispatlanacak ve daha sonra bu eşitsizliklerin genellemeleri elde edilecektir.

Teorem 4.1.1. $f\ :\ Q:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu Q üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu durumda, her $(x,y)\in Q$ için

$$\left| f(x,y)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t,y)dt-\frac{1}{d-c}\int_c^d f(x,s)ds+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq\left[\frac{1}{2}+\frac{\left|x-\frac{a+b}{2}\right|}{b-a}\right]\left[\frac{1}{2}+\frac{\left|y-\frac{c+d}{2}\right|}{d-c}\right]V_f(Q)$$

Ostrowski eşitsizliği vardır. Burada $V_f(Q)$ ifadesi f fonksiyonunun toplam varyasyonunu göstermektedir.

İspat. Lemma 2.3.1 kullanılarak

$$\int_a^x\int_c^y (t-a)(s-c)d_t d_s f(t,s)$$
$$=(x-a)(y-c)-(y-c)\int_a^x f(t,y)dt-(x-a)\int_c^y f(x,s)ds+\int_a^x\int_c^y f(t,s)dsdt,$$

olur. Benzer şekilde,

$$\int_a^x\int_y^d (t-a)(s-d)d_t d_s f(t,s)$$
$$=(x-a)(d-y)-(d-y)\int_a^x f(t,y)dt-(x-a)\int_y^d f(x,s)ds+\int_a^x\int_y^d f(t,s)dsdt,$$

$$\int_x^b\int_c^y (t-b)(s-c)d_t d_s f(t,s)$$
$$=(b-x)(y-c)-(y-c)\int_x^b f(t,y)dt-(b-x)\int_c^y f(x,s)ds+\int_x^b\int_c^y f(t,s)dsdt,$$

ve

$$\int_x^b\int_y^d (t-b)(s-d)d_t d_s f(t,s)$$
$$=(b-x)(d-y)-(d-y)\int_x^b f(t,y)dt-(b-x)\int_y^d f(x,s)ds+\int_x^b\int_y^d f(t,s)dsdt$$

dir. Böylece $P(x,t;y,s)$ dönüşümü

$$P(x,t;y,s)=\begin{cases}(t-a)(s-c) & (t,s)\in[a,x]\times[c,y]\\ \\ (t-a)(t-b) & (t,s)\in[a,x]\times(y,d]\\ \\ (t-b)(s-c) & (t,s)\in(x,b]\times[c,y]\\ \\ (t-b)(t-b) & (t,s)\in(x,b]\times(y,d].\end{cases}$$

olarak tanımlanmak üzere

$$\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d P(x,t;y,s)d_t d_s f(t,s)$$
$$=f(x,y)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t,y)dt-\frac{1}{d-c}\int_c^d f(x,s)ds+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt$$

dir. Diğer yandan Lemma 2.3.3 uygulanarak

$$\left|\int_a^b\int_c^d P(x,t;y,s)d_t d_s f(t,s)\right|$$
$$\leq \sup_{(x,y)\in Q} |P(x,t;y,s)| V_f(Q)$$
$$= \max_{x,y}\{(x-a)(y-c),(x-a)(d-y),(b-x)(y-c),(b-x)(d-y)\}V_f(Q)$$
$$= \max_{x}\left\{\max_{y}\{(x-a)(y-c),(x-a)(d-y),(b-x)(y-c),(b-x)(d-y)\}\right\}V_f(Q)$$
$$= \max_{x}\left\{(x-a)\max_{y}\{(y-c),d-y\},(b-x)\max_{y}\{(y-c),d-y\}\right\}V_f(Q)V_f(Q)$$
$$= \max_{x}\{(x-a),(b-x)\}\max_{y}\{(y-c),d-y\}$$
$$= \left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]\left[\frac{d-c}{2}+\left|y-\frac{c+d}{2}\right|\right]V_f(Q)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.1. Eğer Teorem 4.1.1'de özel olarak $x=\frac{a+b}{2}$ ve $y=\frac{c+d}{2}$ alınırsa, Bu durumda aşağıdaki Orta Nokta eşitsizliği elde edilir:

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt-\frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds \right.$$
$$\left. +\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt \right|$$
$$\leq \frac{1}{4}V_f(Q).$$

Bu eşitsizlikteki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile değiştirilemez.

İspat. Katsayının en iyi katsayı olduğunu ispatlamak için bu eşitsizliğin keyfi bir $A>0$ sayısı için sağlandığı kabul edilsin. Yani,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt-\frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds \right.$$
$$\left. +\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt \right|$$
$$\leq AV_f(Q)$$

olsun. Eğer $f : Q\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{c+d}{2} \text{ ise}\\ 0, & (x,y)\in[a,b]\times[c,d]\setminus\left\{\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right\} \text{ ise}\end{cases}$$

olarak seçilirse, bu takdirde f fonksiyonu Q üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon ve

$$\int_a^b f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt=\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds=\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt=0,$$

$$f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)=1 \ ve\ V_f(Q)=4$$

olur. Bu ifadeler yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa $1\le 4A$ ve $A\ge\frac{1}{4}$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2. $f\ :\ Q\to\mathbb{R}$ fonksiyonu Q üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki Yamuk tipli eşitsizlik vardır:

$$\left|\frac{f(b,d)+f(b,c)+f(a,d)+f(a,c)}{4}-\frac{1}{2(d-c)}\left[\int_c^d f(a,s)ds+\int_c^d f(b,s)ds\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2(b-a)}\left[\int_a^b f(t,c)dt+\int_a^b f(t,d)dt\right]+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|$$
$$\le\frac{1}{4}V_f(Q).$$

Bu eşitsizlikteki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile değiştirilemez.

İspat. $R(t,s)=\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\left(s-\frac{c+d}{2}\right),\ a\le t\le b,\ c\le s\le d$ olmak üzere, Lemma 2.3.1'den yararlanarak

$$\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d R(t,s)d_t d_s f(t,s)$$
$$=\frac{f(b,d)+f(b,c)+f(a,d)+f(a,c)}{4}-\frac{1}{2(d-c)}\left[\int_c^d f(a,s)ds+\int_c^d f(b,s)ds\right]$$
$$-\frac{1}{2(b-a)}\left[\int_a^b f(t,c)dt+\int_a^b f(t,d)dt\right]+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt$$

dir. Bu eşitlikte Lemma 2.3.3 kullanılırsa

$$\frac{1}{(b-a)(d-c)}\left|\int_a^b\int_c^d R(t,s)d_t d_s f(t,s)\right| \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\sup_{(t,s)\in Q}|R(t,s)|V_f(Q)=\frac{1}{4}V_f(Q)$$

olur, bu da ispatı tamamlar.

Sabitin en iyi sabit olduğunu ispatlamak için eşitsizliğin keyfi bir $B>0$ sayısı için sağlandığı kabul edilsin. Yani,

$$\left|\frac{f(b,d)+f(b,c)+f(a,d)+f(a,c)}{4}-\frac{1}{2(d-c)}\left[\int_c^d f(a,s)ds+\int_c^d f(b,s)ds\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2(b-a)}\left[\int_a^b f(t,c)dt+\int_a^b f(t,d)dt\right]+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq BV_f(Q)$$

olsun. E kümesi $=\{(b,d),(b,c),(a,d),(a,c)\}$ olmak üzere, eğer $f:Q\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (\mathrm{x},\mathrm{y})\in E \text{ ise}\\ \\ 0, & (x,y)\in[a,b]\times[c,d]\setminus E \text{ ise}\end{cases}$$

olarak seçilirse, bu takdirde f fonksiyonu Q üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon ve

$$\int_c^d f(a,s)ds=\int_c^d f(b,s)ds=\int_a^b f(t,c)dt=\int_a^b f(t,d)dt=0$$

$$f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)=1,\ \int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt=0,\ V_f(Q)=4$$

olur. Bu ifadeler yerlerine yazılırsa $1\leq 4B$ ve $B\geq\frac{1}{4}$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

İki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için aşağıdaki Simpson tipli eşitsizlik sağlanır.

Teorem 4.1.3. $f : Q \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Q üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{9}\left[\frac{f(b,d)+f(b,c)+f(a,d)+f(a,c)}{4} \right.\right. \\
&+f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)+4f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) \\
&-\frac{1}{6(d-c)}\left[\int_c^d f(a,s)ds-4\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds-\int_c^d f(b,s)ds\right] \\
&-\frac{1}{6(b-a)}\left[\int_a^b f(t,c)dt-4\int_a^b f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt-\int_a^b f(t,d)dt\right] \\
&\left.+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right| \\
&\le \frac{1}{9}V_f(Q)
\end{aligned}$$

dir.

İspat. Lemma 2.3.1'den,

$$\begin{aligned}
&\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_c^{\frac{c+d}{2}}\left(t-\frac{5a+b}{6}\right)\left(s-\frac{5c+d}{6}\right)d_td_s f(t,s) \\
&=\frac{(b-a)(d-c)}{9}\left[f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2},c\right)+\frac{1}{2}\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+\frac{1}{4}(a,c)\right] \\
&-\frac{d-c}{3}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt+\frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t,c)dt\right] \\
&-\frac{b-a}{3}\left[\int_c^{\frac{c+d}{2}} f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds+\frac{1}{2}\int_c^{\frac{c+d}{2}} f(a,s)ds\right]+\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_c^{\frac{c+d}{2}} f(t,s)dsdt
\end{aligned}$$

eşitliği vardır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
&\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d}\left(t-\frac{5a+b}{6}\right)\left(s-\frac{c+6d}{6}\right)d_td_s f(t,s) \\
&=\frac{(b-a)(d-c)}{9}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2},d\right)+f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)+\frac{1}{4}(a,d)+\frac{1}{2}\left(a,\frac{c+d}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$-\frac{d-c}{3}\left[\frac{1}{2}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(t,d)dt+\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt\right]$$

$$-\frac{b-a}{3}\left[\int_{\frac{c+d}{2}}^{d} f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds+\frac{1}{2}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d} f(a,s)ds\right]+\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d} f(t,s)dsdt,$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\int_{c}^{\frac{c+d}{2}}\left(t-\frac{a+5b}{6}\right)\left(s-\frac{5c+d}{6}\right)d_t d_s f(t,s)$$

$$=\frac{(b-a)(d-c)}{9}\left[\frac{1}{2}\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+\frac{1}{4}(b,c)+f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2},c\right)\right]$$

$$-\frac{d-c}{3}\left[\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(t,c)dt\right]$$

$$-\frac{b-a}{3}\left[\frac{1}{2}\int_{c}^{\frac{c+d}{2}} f(b,s)ds+\int_{c}^{\frac{c+d}{2}} f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds\right]+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\int_{c}^{\frac{c+d}{2}} f(t,s)dsdt,$$

ve

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d}\left(t-\frac{a+5b}{6}\right)\left(s-\frac{c+5d}{6}\right)d_t d_s f(t,s)$$

$$=\frac{(b-a)(d-c)}{9}\left[\frac{1}{4}(b,d)+\frac{1}{2}\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2},d\right)+f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]$$

$$-\frac{d-c}{3}\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(t,d)dt+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt\right]$$

$$-\frac{b-a}{3}\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d} f(b,s)ds+\int_{\frac{c+d}{2}}^{d} f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds\right]+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d} f(t,s)dsdt$$

eşitlikleri vardır. Yukardaki eşitlikler taraf tarafa toplanırsa, $K(s,t)$ dönüşümü

$$K(t,s)=\begin{cases}\left(t-\frac{5a+b}{6}\right)\left(s-\frac{5c+d}{6}\right) & (t,s)\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\times\left[c,\frac{c+d}{2}\right]\\ \left(t-\frac{5a+b}{6}\right)\left(s-\frac{c+5d}{6}\right) & (t,s)\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\times\left(\frac{c+d}{2},d\right]\\ \left(t-\frac{a+5b}{6}\right)\left(s-\frac{5c+d}{6}\right) & (t,s)\in\left(\frac{a+b}{2},b\right]\times\left[c,\frac{c+d}{2}\right]\\ \left(t-\frac{a+5b}{6}\right)\left(s-\frac{c+5d}{6}\right), & (t,s)\in\left(\frac{a+b}{2},b\right]\times\left(\frac{c+d}{2},d\right]\end{cases}$$

olarak tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d K(t,s)d_t d_s f(t,s)\\ &=\frac{1}{9}\left[\frac{f(b,d)+f(b,c)+f(a,d)+f(a,c)}{4}\right.\\ &+f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)+4f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\\ &-\frac{1}{6(d-c)}\left[\int_c^d f(a,s)ds-4\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds-\int_c^d f(b,s)ds\right]\\ &-\frac{1}{6(b-a)}\left[\int_a^b f(t,c)dt-4\int_a^b f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt-\int_a^b f(t,d)dt\right]+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Diğer yandan Lemma 2.3.3 uygulanarak

$$\left|\int_a^b\int_c^d K(t,s)d_t d_s f(t,s)\right|\le\sup_{(t,s)\in Q}|K(t,s)|V_f(Q)=\frac{(b-a)(d-c)}{9}V_f(Q)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sıradaki teoremin ifadesi verilmeden önce aşağıdaki notasyonlar verilmelidir:

$$\Delta_{n,m}:=\{(x_0,y_0),(x_0,y_1),\ldots,(x_0,y_m),(x_1,y_0),\ldots,(x_1,y_m),\ldots,(x_n,y_0),(x_n,y_1),\ldots,(x_n,y_m)\}$$

ifadesi, $Q=[a,b]\times[c,d]$ nun, $a=x_0$, $b=x_n$, $y_0=c$, $y_m=d$, $\alpha_0=a$, $\alpha_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\ldots,n)$, $\alpha_{n+1}=b$, $\beta_0=c$, ve $\beta_j\in[y_{j-1},y_j]$ $(j=1,\ldots,m)$, $\beta_{m+1}=d$ koşullarını sağlayan bir parçalanışı olsun. Ayrıca $h_i:=x_{i+1}-x_i$, $l_j:=y_{j+1}-y_j$ ve $Q_{ij}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$ olmak üzere

$$\upsilon(h):=\max\{h_i \mid i=0,\ldots,n-1\}$$

ve

$$\upsilon(l) := \max\{l_j \mid j = 0,...,m-1\}$$

olsun.

Teorem 4.1.4. $f : Q \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Q üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun Q üzerinde toplam varyasyonu $V_f(Q)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)(\beta_{j+1}-\beta_j)f(x_i,y_j)+\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right. \\
&\left.-\sum_{i=0}^{n}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\int_c^d f(x_i,s)ds-\sum_{j=0}^{m}(\beta_{j+1}-\beta_j)\int_a^b f(t,y_j)dt\right| \\
&\le\left[\frac{1}{2}\upsilon(h)+\max_{i\in\{0,...,n-1\}}\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right] \\
&\times\left[\frac{1}{2}\upsilon(l)+\max_{j\in\{0,...,m-1\}}\left|\beta_{j+1}-\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right|\right]V_f(Q) \\
&\le \upsilon(h)\upsilon(l)V_f(Q)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. K ve L dönüşümleri

$$K(t)=\begin{cases} t-\alpha_1, & t\in[a,x_1) \\ t-\alpha_2, & t\in[x_1,x_2) \\ \vdots & \\ t-\alpha_{n-1}, & t\in[x_{n-2},x_{n-1}) \\ t-\alpha_n, & t\in[x_{n-1},b] \end{cases}, \quad L(s)=\begin{cases} s-\beta_1, & s\in[c,y_1) \\ s-\beta_2, & s\in[y_1,y_2) \\ \vdots & \\ s-\beta_{m-1}, & s\in[y_{m-2},y_{m-1}) \\ s-\beta_m, & s\in[y_{m-1},d] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

İki katlı Riemann-Stieltjes integralleri için kısmi integrasyon (Lemma 2.3.1) yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\int_c^d K(t)L(s)d_td_s f(t,s) \\
&=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} K(t)L(s)d_td_s f(t,s)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}(t-\alpha_{i+1})(s-\beta_{j+1})d_t d_s f(t,s)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(t,s)dsdt+(x_{i+1}-\alpha_{i+1})(y_{j+1}-\beta_{j+1})f(x_{i+1},y_{j+1})\right. \\
&\quad -(x_{i+1}-\alpha_{i+1})(y_j-\beta_{j+1})f(x_{i+1},y_j) \\
&\quad -(x_i-\alpha_{i+1})(y_{j+1}-\beta_{j+1})f(x_i,y_{j+1}) \\
&\quad +(x_i-\alpha_{i+1})(y_j-\beta_{j+1})f(x_i,y_j) \\
&\quad -(y_{j+1}-\beta_{j+1})\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t,y_{j+1})dt-(\beta_{j+1}-y_j)\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t,y_j)dt \\
&\quad \left.-(x_{i+1}-\alpha_{i+1})\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_{i+1},s)ds-(\alpha_{i+1}-x_i)\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i,s)ds\right]
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

eşitliği elde edilir. Oluşan son eşitlikteki ilk toplam ifadesi

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-\alpha_i)(y_j-\beta_j)f(x_i,y_j) \\
&= (b-\alpha_n)(d-\beta_m)f(b,d)+(b-\alpha_n)\sum_{j=1}^{m-1}(y_j-\beta_j)f(b,y_j) \\
&\quad +(d-\beta_m)\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\alpha_i)f(x_i,d)+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}(x_i-\alpha_i)(y_j-\beta_j)f(x_i,y_j)
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

şeklinde yazılabilir. Benzer olarak, diğer toplam ifadelerinin de

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}(x_i-\alpha_i)(y_j-\beta_{j+1})f(x_i,y_j) \\
&= (b-\alpha_n)(c-\beta_1)f(b,c)+(b-\alpha_n)\sum_{j=1}^{m-1}(y_j-\beta_{j+1})f(b,y_j) \\
&\quad +(c-\beta_1)\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\alpha_i)f(x_i,c)+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}(x_i-\alpha_i)(y_j-\beta_{j+1})f(x_i,y_j),
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(x_i-\alpha_{i+1})(y_j-\beta_j)f(x_i,y_j) \\
&= (a-\alpha_1)(d-\beta_m)f(a,d)+(a-\alpha_1)\sum_{j=1}^{m-1}(y_j-\beta_j)f(a,y_j) \\
&\quad +(d-\beta_m)\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\alpha_{i+1})f(x_i,d)+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}(x_i-\alpha_{i+1})(y_j-\beta_j)f(x_i,y_j),
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}(x_i-\alpha_{i+1})(y_j-\beta_{j+1})f(x_i,y_j)$$

$$=(a-\alpha_1)(c-\beta_1)f(a,c)+(a-\alpha_1)\sum_{j=1}^{m-1}(y_j-\beta_{j+1})f(a,y_j) \tag{4.6}$$

$$+(c-\beta_1)\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\alpha_{i+1})f(x_i,c)+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}(x_i-\alpha_{i+1})(y_j-\beta_{j+1})f(x_i,y_j),$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(y_j-\beta_j)\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(t,y_j)dt=(d-\beta_m)\int_a^b f(t,d)dt+\sum_{j=1}^{m-1}(y_j-\beta_j)\int_a^b f(t,y_j)dt, \tag{4.7}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}(\beta_{j+1}-y_j)\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(t,y_j)dt=(\beta_1-c)\int_a^b f(t,c)dt+\sum_{j=1}^{m-1}(\beta_{j+1}-y_j)\int_a^b f(t,y_j)dt, \tag{4.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}(x_i-\alpha_i)\int_{y_j}^{y_{j+1}}f(x_i,s)ds=(b-\alpha_n)\int_c^d f(b,s)ds+\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\alpha_i)\int_c^d f(x_i,s)ds \tag{4.9}$$

ve

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}(\alpha_{i+1}-x_i)\int_{y_j}^{y_{j+1}}f(x_i,s)ds=(\alpha_1-a)\int_c^d f(a,s)ds++\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_{i+1}-x_i)\int_c^d f(x_i,s)ds. \tag{4.10}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Elde edilen (4.3)-(4.10) eşitlikleri, (4.2) eşitliğinde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\int_a^b\int_c^d K(t)L(s)d_t d_s f(t,s)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)(\beta_{j+1}-\beta_j)f(x_i,y_j)+\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt.$$

$$-\sum_{i=0}^{n}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\int_c^d f(x_i,s)ds-\sum_{j=0}^{m}(\beta_{j+1}-\beta_j)\int_a^b f(t,y_j)dt$$

eşitiliği elde edilir. Diğer yandan, mutlak değer fonksiyonunun özelliği yardımıyla

$$\left|\int_a^b\int_c^d K(t)L(s)d_t d_s f(t,s)\right|=\left|\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}K(t)L(s)d_t d_s f(t,s)\right]\right| \tag{4.11}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}(t-\alpha_{i+1})(s-\beta_{j+1})d_t d_s f(t,s)\right|$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu son ifadede Lemma 2.3.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}(t-\alpha_{i+1})(s-\beta_{j+1})d_t d_s f(t,s)\right| \\
&\leq \sup_{\substack{t\in[x_i,x_{i+1}]\\ s\in[y_j,y_{j+1}]}}\left[|t-\alpha_{i+1}||s-\beta_{j+1}|\right]V_f(Q_{ij}) \\
&= \max\{\alpha_{i+1}-x_i, x_{i+1}-\alpha_{i+1}\}\max\{\beta_{j+1}-y_j, y_{j+1}-\beta_{j+1}\}V_f(Q_{ij}) \\
&= \left[\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)+\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right]\left[\frac{1}{2}(y_{j+1}-y_j)+\left|\beta_{j+1}-\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right|\right]V_f(Q_{ij})
\end{aligned} \tag{4.12}$$

eşitsizliği bulunur. (4.12) eşitsizliği, (4.11)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b\int_c^d K(t)L(s)d_s d_t f(t,s)\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)+\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right] \\
&\times\left[\frac{1}{2}(y_{j+1}-y_j)+\left|\beta_{j+1}-\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right|\right]V_f(Q_{ij}) \\
&\leq \max_{i\in[0,\ldots,n-1]}\left[\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)+\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right] \\
&\times \max_{j\in[0,\ldots,m-1]}\left[\frac{1}{2}(y_{j+1}-y_j)+\left|\beta_{j+1}-\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right|\right]\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left[V_f(Q_{ij})\right] \\
&\leq \left[\frac{1}{2}\upsilon(h)+\max_{i\in[0,\ldots,n-1]}\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right]\left[\frac{1}{2}\upsilon(l)+\max_{j\in[0,\ldots,m-1]}\left|\beta_{j+1}-\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right|\right]V_f(Q)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. Böylece, (4.1)'deki ilk eşitsizliğin ispatı tamamlanmış olur.

(4.1) eşitsizliğindeki ikinci eşitsizliğin ispatı için (4.12)'nin son satırında,

$$\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\leq\frac{1}{2}h_i$$

ve

$$\max_{i\in[0,\ldots,n-1]}\left|\alpha_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\le\frac{1}{2}\upsilon(h)$$

olduğu, ve benzer şekilde,

$$\max_{j\in[0,\ldots,m-1]}\left|\beta_{j+1}-\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right|\le\frac{1}{2}\upsilon(l)$$

olduğu göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4 kullanılarak elde edilen bazı sonuçlar aşağıdaki şekilde verilebilir.

Sonuç 4.1.2. Teorem 4.1.4'ün koşulları altında,

$$\alpha_0=a,\ \alpha_1=\frac{a+x_1}{2},\ \alpha_2=\frac{x_1+x_2}{2},\ldots,\alpha_{n-1}=\frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2},\ \alpha_n=\frac{x_{n-1}+b}{2},\ \alpha_{n+1}=b$$

ve

$$\beta_0=c,\ \beta_1=\frac{c+y_1}{2},\ \beta_2=\frac{y_1+y_2}{2},\ldots,\beta_{n-1}=\frac{y_{m-2}+y_{m-1}}{2},\ \beta_n=\frac{y_{m-1}+d}{2},\ \beta_{m+1}=d$$

seçilirse

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{1}{4}\Big[(b-x_{n-1})(d-y_{m-1})\,f(b,d)+(b-x_{n-1})(y_1-c)\,f(b,c)\\
&+(x_1-a)(d-y_{m-1})\,f(a,d)+(x_1-a)(y_1-c)\,f(a,c)\\
&+(b-x_{n-1})\sum_{j=1}^{m-1}\left(y_{j+1}-y_{j-1}\right)f(b,y_j)+(x_1-a)\sum_{j=1}^{m-1}\left(y_{j+1}-y_{j-1}\right)f(a,y_j)\\
&+(d-y_{m-1})\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_{i+1}-x_{i-1}\right)f(x_i,d)+(y_1-c)\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_{i+1}-x_{i-1}\right)f(x_i,c)\\
&+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}\left(x_{i+1}-x_{i-1}\right)\left(x_{i+1}-x_{i-1}\right)f(x_i,y_j)\Big]+\int_a^b\int_c^d f(t,s)\,ds\,dt\\
&-\frac{1}{2}\left[(y_1-c)\int_a^b f(t,c)dt+(d-y_{m-1})\int_a^b f(t,d)dt+\sum_{j=1}^{m-1}\left(y_{j+1}-y_{j-1}\right)\int_a^b f(t,y_j)dt\right]\\
&-\frac{1}{2}\left[(\alpha_1-a)\int_c^d f(a,s)ds+(b-\alpha_{n-1})\int_c^d f(b,s)ds+\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_{i+1}-x_{i-1}\right)\int_c^d f(x_i,s)ds\right]\Bigg|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{4}\upsilon(h)\upsilon(l)V_f(Q)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1.3. Sonuç 4.1.2'de $x_i := a+(b-a)\frac{i}{n}$ $(i=0,1,...,n)$ ve $y_j := c+(d-c)\frac{j}{m}$ $(j=0,1,...,m)$ alınırsa,

$$\left|\frac{(b-a)(d-c)}{4nm}\left[f(b,d)+f(b,c)+f(a,d)+f(a,c)+2\left[\sum_{j=1}^{m-1} f\left(b,\frac{(m-j)c+jd}{m}\right)\right.\right.\right.$$
$$+\sum_{j=1}^{m-1} f\left(a,\frac{(m-j)c+jd}{m}\right)+\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n},d\right)+\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n},c\right)\Bigg]$$
$$\left.+4\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n},\frac{(m-j)c+jd}{m}\right)\right]+\int_a^b\int_c^d f(t,s)\,ds\,dt$$
$$-\frac{(d-c)}{2m}\left[\int_a^b f(t,c)\,dt+\int_a^b f(t,d)\,dt+2\sum_{j=1}^{m-1}\int_a^b f\left(t,\frac{(m-j)c+jd}{m}\right)dt\right]$$
$$\left.-\frac{(b-a)}{2n}\left[\int_c^d f(a,s)\,ds+\int_c^d f(b,s)\,ds+2\sum_{i=1}^{n-1}\int_c^d f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n},s\right)ds\right]\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{4nm}V_f(Q)$$

eşitsizliği bulunur.

Sonuç 4.1.4. Teorem 4.1.4'ün koşullar altında özel olarak $x_0=a,\;\; x_1=b,\;\; \alpha_0=a,$ $\alpha_1=\alpha,\; \alpha_2=b,\; y_0=c,\; y_1=d,\; \beta_0=c,\; \beta_1=\beta$ ve $\beta_2=d$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\Big|(\alpha-a)(\beta-c)f(a,c)+(\alpha-a)(d-\beta)f(a,d)\\
&+(b-\alpha)(\beta-c)f(b,c)+(b-\alpha)(d-\beta)f(b,d)\\
&-(\alpha-a)\int_c^d f(a,s)\,ds-(b-\alpha)\int_c^d f(b,s)\,ds\\
&-(\beta-c)\int_a^b f(t,c)\,dt-(d-\beta)\int_a^b f(t,d)\,dt+\int_a^b\int_c^d f(t,s)\,ds\,dt\Big|\\
&\leq\left[\frac{1}{2}(b-a)+\left|\alpha-\frac{a+b}{2}\right|\right]\left[\frac{1}{2}(d-c)+\left|\beta-\frac{c+d}{2}\right|\right]V_f(Q)
\end{aligned}\tag{4.14}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1.5. (4.14) eşitsizliğinde özel olarak

a) $\alpha = b$ ve $\beta = d$ olarak alınırsa

$$\left| f(a,c) - \frac{1}{d-c}\int_c^d f(a,s)ds - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t,c)dt + \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt \right| \leq V_f(Q)$$

sol dikdörtgen eşitsizliği (left rectangle inequality),

b) $\alpha = a$ ve $\beta = c$ olarak alınırsa

$$\left| f(b,d) - \frac{1}{d-c}\int_c^d f(b,s)ds - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t,d)dt + \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt \right| \leq V_f(Q)$$

sağ dikdörtgen eşitsizliği (right rectangle inequality),

c) $\alpha = \frac{a+b}{2}$ and $\beta = \frac{c+d}{2}$ olarak alınırsa Teorem 4.1.2'de ispatlanan Yamuk eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1.6. Teorem 4.1.4'ün koşulları altında özel olarak $a \leq x \leq b,$ $a \leq \alpha_1 \leq x \leq \alpha_2 \leq b,$ $c \leq y \leq d,$ $c \leq \beta_1 \leq y \leq \beta_2 \leq d$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\big|(\alpha_1 - a)(\beta_1 - c) f(a,c) + (\alpha_1 - a)(\beta_2 - \beta_1) f(a,y) \\
&+(\alpha_1 - a)(d - \beta_2) f(a,d) + (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_1 - c) f(x,c) \\
&+(\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) f(x,y) + (\alpha_2 - \alpha_1)(d - \beta_2) f(x,d) \\
&+(b - \alpha_2)(\beta_1 - c) f(b,c) + (b - \alpha_2)(\beta_2 - \beta_1) f(b,y) \\
&+(b - \alpha_2)(d - \beta_2) f(b,d) + \int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt \\
&-(\alpha_1 - a)\int_c^d f(a,s)ds - (\alpha_2 - \alpha_1)\int_c^d f(x,s)ds - (b - \alpha_2)\int_c^d f(b,s)ds \\
&-(\beta_1 - c)\int_a^b f(t,c)dt - (\beta_2 - \beta_1)\int_a^b f(t,y)dt - (d - \beta_2)\int_a^b f(t,d)dt\bigg| \\
\leq\ & \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(b-a) + \left|x - \frac{a+b}{2}\right| + \left|\alpha_1 - \frac{a+x}{2}\right| + \left|\alpha_2 - \frac{x+b}{2}\right|\right. \\
&\left. + \left\| \alpha_1 - \frac{a+x}{2}\right| - \left|\alpha_2 - \frac{x+b}{2}\right\|\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left[\frac{1}{2}(d-c)+\left|y-\frac{c+d}{2}\right|+\left|\beta_1-\frac{c+y}{2}\right|+\left|\beta_2-\frac{y+d}{2}\right|\right.\\
&\left.+\left\|\beta_1-\frac{c+y}{2}\right|-\left|\beta_2-\frac{y+d}{2}\right\|\right]V_f(Q)\\
&\le\left[\frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]\left[\frac{1}{2}(d-c)+\left|y-\frac{c+d}{2}\right|\right]V_f(Q)\\
&\le(b-a)(d-c)V_f(Q)
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Sonuç 4.1.7. (4.15) eşitsizliğinde özel olarak $\alpha_1=a,\quad \alpha_2=b$ ve $\beta_1=c,\quad \beta_2=d$ alınırsa (4.15) eşitsizliği Teorem 4.1.1'de ispatlanan Ostrowski eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.1.8. (4.15) eşitsizliğinde özel olarak $\alpha_1=\frac{5a+b}{6},\quad \alpha_2=\frac{a+5b}{6},\quad x\in\left[\frac{5a+b}{6},\frac{a+5b}{6}\right]$, $\beta_1=\frac{5c+d}{6},\quad \beta_2=\frac{c+5d}{6}$ ve $y\in\left[\frac{5c+d}{6},\frac{c+5d}{6}\right]$ alınırsa, bu durumda (4.15) eşitsizliği Teorem 4.1.3'de ispatlanan Simpson eşitsizliğine dönüşür.

Sıradaki teoremde iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için genelleşmiş Ostrowski tipli eşitsizlik ispatlanacaktır.

Teorem 4.1.5. $f:Q\to\mathbb{R}$ fonksiyonu Q üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu durumda $\lambda,\eta\in[0,1]$, $a+\lambda\frac{b-a}{2}\le x\le b-\lambda\frac{b-a}{2}$ ve $c+\eta\frac{d-c}{2}\le y\le d-\eta\frac{d-c}{2}$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&\left|(1-\lambda)(1-\eta)f(x,y)+\frac{(1-\lambda)\eta}{2}[f(a,y)+f(b,y)]\right.\\
&+\frac{\lambda(1-\eta)}{2}[f(x,c)+f(x,d)]+\frac{\lambda\eta}{4}[f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)]\\
&-\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda}{d-c}\int_c^d[f(b,s)+f(a,s)]ds+\frac{\eta}{b-a}\int_a^b[f(t,d)+f(t,c)]dt\right]\\
&\left.-\frac{1-\eta}{b-a}\int_a^b f(t,y)dt-\frac{1-\lambda}{d-c}\int_c^d f(x,s)ds+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|\\
&\le\frac{1}{(b-a)(d-c)}\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(x-\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right),\left(\frac{(2-\lambda)b+\lambda a}{2}-x\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

$$\times \max\left\{\eta\frac{d-c}{2}, \left(y-\frac{(2-\eta)c+\eta d}{2}\right), \left(\frac{(2-\eta)d+\eta c}{2}-y\right)\right\} V_f(Q)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. İki katlı Riemann-Stieltjes integralleri için kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\int_a^x\int_c^y \left(t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(c+\eta\frac{d-c}{2}\right)\right) d_t d_s f(t,s) \\
&= \left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right) f(x,y) \\
&+\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right) f(x,c) \\
&+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right) f(a,y)+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right) f(a,c) \\
&-\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_a^x f(t,y)dt-\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_a^x f(t,c)dt \\
&-\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_c^y f(x,s)ds-\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_c^y f(a,s)ds+\int_a^x\int_c^y f(t,s)dsdt,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

eşitliği elde edilir. Benzer olarak,

$$\begin{aligned}
&\int_a^x\int_y^d \left(t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(d-\eta\frac{d-c}{2}\right)\right) d_t d_s f(t,s) \\
&= \left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right) f(x,d) \\
&+\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(d-y-\eta\frac{d-c}{2}\right) f(x,y) \\
&+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right) f(a,d)+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(d-y-\eta\frac{d-c}{2}\right) f(a,y) \\
&-\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_a^x f(t,d)dt-\left(d-y-\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_a^x f(t,y)dt \\
&-\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_y^d f(x,s)ds-\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_y^d f(a,s)ds+\int_a^x\int_y^d f(t,s)dsdt,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
&\int_x^b\int_c^y \left(t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(c+\eta\frac{d-c}{2}\right)\right) d_t d_s f(t,s) \\
&= \left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right) f(b,y)+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right) f(a,c)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(x,y)\\
&+\left(b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(x,c)\\
&-\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_x^b f(t,y)dt-\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_x^b f(t,c)dt\\
&-\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_c^y f(b,s)ds-\left(b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_c^y f(x,s)ds+\int_x^b\int_c^y f(t,s)dsdt,
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\int_x^b\int_y^d\left(t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(d-\eta\frac{d-c}{2}\right)\right)d_t d_s f(t,s)\\
&=\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(b,d)+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(d-y-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(b,y)\\
&+\left(b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(x,d)\\
&+\left(b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(d-y-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(x,y)\\
&-\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_x^b f(t,d)dt-\left(d-y-\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_x^b f(t,y)dt\\
&-\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_y^d f(b,s)ds-\left(b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_y^d f(x,s)ds+\int_x^b\int_y^d f(t,s)dsdt.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

eşitlikleri kolaylıkla elde edilebilir. (4.16)-(4.20) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d P(x,t;y,s)d_t d_s f(t,s)\\
&=(1-\lambda)(1-\eta)f(x,y)+\frac{(1-\lambda)\eta}{2}\left[f(a,y)+f(b,y)\right]\\
&+\frac{\lambda(1-\eta)}{2}\left[f(x,c)+f(x,d)\right]+\frac{\lambda\eta}{4}\left[f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)\right]\\
&-\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda}{d-c}\int_c^d\left[f(b,s)+f(a,s)\right]ds+\frac{\eta}{b-a}\int_a^b\left[f(t,d)+f(t,c)\right]dt\right]\\
&-\frac{1-\eta}{b-a}\int_a^b f(t,y)dt-\frac{1-\lambda}{d-c}\int_c^d f(x,s)ds+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

eşitliği elde edilir. Burada $P(x,t;y,s)$ dönüşümü $\lambda,\eta \in [0,1]$, $a+\lambda\frac{b-a}{2} \le x \le b-\lambda\frac{b-a}{2}$ ve $c+\eta\frac{d-c}{2} \le y \le d-\eta\frac{d-c}{2}$ olmak üzere,

$$P(x,t;y,s)=\begin{cases} \left(t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(c+\eta\frac{d-c}{2}\right)\right) & ,(t,s)\in[a,x]\times[c,y] \\ \left(t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(d-\eta\frac{d-c}{2}\right)\right) & ,(t,s)\in[a,x]\times(y,d] \\ \left(t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(c+\eta\frac{d-c}{2}\right)\right) & ,(t,s)\in(x,b]\times[c,y] \\ \left(t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(d-\eta\frac{d-c}{2}\right)\right) & ,(t,s)\in(x,b]\times(y,d] \end{cases}$$

olarak tanımlıdır.

Şimdi (4.21) eşitliğinin her iki yanının mutlak değeri alınıp, Lemma 2.3.3 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\Bigg|(1-\lambda)(1-\eta)f(x,y)+\frac{(1-\lambda)\eta}{2}[f(a,y)+f(b,y)] \\
&+\frac{\lambda(1-\eta)}{2}[f(x,c)+f(x,d)]+\frac{\lambda\eta}{4}[f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)] \\
&-\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda}{d-c}\int_c^d[f(b,s)+f(a,s)]ds+\frac{\eta}{b-a}\int_a^b[f(t,d)+f(t,c)]dt\right] \\
&-\frac{1-\eta}{b-a}\int_a^b f(t,y)dt-\frac{1-\lambda}{d-c}\int_c^d f(x,s)ds+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\Bigg| \\
&=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\left|\int_a^b\int_c^d P(x,t;y,s)d_t d_s f(t,s)\right| \\
&\le \frac{1}{(b-a)(d-c)}\sup_{(t,s)\in Q}|P(x,y;t,s)|V_f(Q) \\
&=\frac{1}{(b-a)(d-c)} \\
&\times\max\left\{\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(x-\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right)\right\}\max\left\{\eta\frac{d-c}{2},\left(y-\frac{(2-\eta)c+\eta d}{2}\right)\right\},\right. \\
&\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(x-\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right)\right\}\max\left\{\eta\frac{d-c}{2},\left(\frac{(2-\eta)d+\eta c}{2}-y\right)\right\}, \\
&\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(\frac{(2-\lambda)b+\lambda a}{2}-x\right)\right\}\max\left\{\eta\frac{d-c}{2},\left(y-\frac{(2-\eta)c+\eta d}{2}\right)\right\}, \\
&\left.\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(\frac{(2-\lambda)b+\lambda a}{2}-x\right)\right\}\max\left\{\eta\frac{d-c}{2},\left(\frac{(2-\eta)d+\eta c}{2}-y\right)\right\}\right\}V_f(Q)
\end{aligned}$$

$$\le \frac{1}{(b-a)(d-c)}\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(x-\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right),\left(\frac{(2-\lambda)b+\lambda a}{2}-x\right)\right\}$$
$$\times\max\left\{\eta\frac{d-c}{2},\left(y-\frac{(2-\eta)c+\eta d}{2}\right),\left(\frac{(2-\eta)d+\eta c}{2}-y\right)\right\}V_f(Q)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.9. Teorem 4.1.5'de özel olarak,

a) $\lambda=0$ ve $\eta=0$ seçilirse, (4.16) eşitsizliği Teorem 4.1.1'deki Ostrowski eşitsizliğine dönüşür.

b) $\lambda=1$ ve $\eta=1$ seçilirse, (4.16) eşitsizliği Teorem 4.1.2'deki Yamuk eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.1.10. Teorem 4.1.5'nin koşulları altnda $\lambda=\frac{1}{3}$ ve $\eta=\frac{1}{3}$ alınırsa, $\frac{5a+b}{6}\le x\le\frac{5b+a}{6}$ ve $\frac{5c+d}{6}\le y\le\frac{5d+c}{6}$ için

$$\begin{aligned}&\left|\frac{4}{9}f(x,y)+\frac{f(a,y)+f(b,y)+f(x,c)+f(x,d)}{9}\right.\\&+\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{36}\\&-\frac{1}{6}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d\left[f(b,s)+4f(x,s)+f(a,s)\right]ds+\right]\\&\left.-\frac{1}{6}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(t,d)+4f(t,y)+f(t,c)\right]dt\right]+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|\\&\le\frac{1}{(b-a)(d-c)}\max\left\{\frac{b-a}{6},\left(x-\frac{5a+b}{6}\right),\left(\frac{5b+a}{6}-x\right)\right\}\\&\times\max\left\{\frac{d-c}{6},\left(y-\frac{5c+d}{6}\right),\left(\frac{5d+c}{6}-y\right)\right\}V_f(Q)\end{aligned}\tag{4.22}$$

dir.

Sonuç 4.1.11. Sonuç 4.1.10'da özel olarak $x=\frac{a+b}{2}$ ve $y=\frac{c+d}{2}$ seçilirse, (4.22) eşitsizliği Teorem 4.1.3'teki Simpson eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.1.12. Teorem 4.1.5'nin koşulları altında $\lambda=\frac{1}{2}$ ve $\eta=\frac{1}{2}$ alınırsa, bu durumda $\frac{3a+b}{4}\le x\le\frac{3b+a}{4}$ ve $\frac{3c+d}{4}\le y\le\frac{3d+c}{4}$ için

$$\left|\frac{1}{4}\left[f(x,y)+\frac{f(a,y)+f(b,y)+f(x,c)+f(x,d)}{2}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}\right]$$
$$-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d[f(b,s)+f(a,s)]ds+\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(t,d)+f(t,c)]dt\right] \tag{4.23}$$
$$\left.-\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f(t,y)dt-\frac{1}{2(d-c)}\int_c^d f(x,s)ds+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq\frac{1}{(b-a)(d-c)}\max\left\{\frac{b-a}{4},\left(x-\frac{3a+b}{4}\right),\left(\frac{3b+a}{4}-x\right)\right\}$$
$$\times\max\left\{\frac{d-c}{4},\left(y-\frac{3c+d}{4}\right),\left(\frac{3d+c}{4}-y\right)\right\}V_f(Q)$$

eşitsizliği bulunur.

Sonuç 4.1.13. Sonuç 4.1.12'de özel olarak $x=\frac{a+b}{2}$ ve $y=\frac{c+d}{2}$ seçilirse,

$$\left|\frac{1}{4}\left[\frac{f(b,d)+f(b,c)+f(a,d)+f(a,c)}{4}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left[f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right]+f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d[f(b,s)+f(a,s)]ds+\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(t,d)+f(t,c)]dt\right] \tag{4.24}$$
$$-\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt-\frac{1}{2(d-c)}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds$$
$$\left.+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq\frac{1}{16}V_f(Q)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradaki $\frac{1}{16}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez.

İspat. $\frac{1}{16}$ sabitinin en iyi sabit olduğunu ispatlmak için (4.24) eşitsizliğinin keyfi bir $C>0$ sabiti için sağlandığı, yani

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{4}\left[\frac{f(b,d)+f(b,c)+f(a,d)+f(a,c)}{4}\right.\right. \\
&+\frac{1}{2}\left[f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right]+f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\Bigg] \\
&-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d[f(b,s)+f(a,s)]ds+\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(t,d)+f(t,c)]dt\right] \\
&-\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt-\frac{1}{2(d-c)}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds \\
&\left.+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right| \\
&\le CV_f(Q)
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

olduğu kabul edilsin. E kümesi

$$
E:=\left\{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),\left(a,\frac{c+d}{2}\right),\left(b,\frac{c+d}{2}\right),\left(\frac{a+b}{2},c\right),\left(\frac{a+b}{2},d\right),\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right\}
$$

olarak tanmlansın. Eğer, $f\ :\ Q\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$
f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in E \text{ ise}\\[2ex] 0, & (x,y)\in[a,b]\times[c,d]\setminus E \text{ ise}\end{cases}
$$

şeklinde tanımlanırsa f, Q üzerinde sınırlı varyasyonlu ve

$$
\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{16}=\frac{1}{4},\quad \frac{1}{4}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)=\frac{1}{4},
$$

$$
\frac{f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)}{8}=\frac{1}{2}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_c^d[f(b,s)+f(a,s)]ds&=\int_a^b[f(t,d)+f(t,c)]dt \\
&=\int_a^b f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt=\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds \\
&=\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt=0
\end{aligned}
$$

ve $V_f(Q)=16$ olur. Bulunan bu ifadeler (4.25) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa, $1\leq 16C$ ve böylece $C\geq \frac{1}{16}$ elde edilir. Sonuç olarak, $\frac{1}{16}$ sabitinin en iyi sabit olduğu gösterilmiş olur.

Sıradaki teorem verilmeden önce aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 4.1.1. $f\ :\ Q\to\mathbb{R}$ fonksiyonu Q sınırlı varyasyonlu bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $(x,y)\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\times\left[c,\frac{c+d}{2}\right]$ için

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left[f(x,y)+f(x,c+d-y)+f(a+b-x,y)+f(a+b-x,c+d-y)\right]\\
&-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(t,y)+f(t,c+d-y)\right]dt\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d\left[f(x,s)+f(a+b-x,s)\right]ds\right]\\
&+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\\
=&\frac{1}{(b-a)(d-c)}\left[\int_a^x\int_c^y(t-a)(s-c)d_td_sf(t,s)+\int_a^x\int_y^{c+d-y}(t-a)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_td_sf(t,s)\right.\\
&+\int_a^x\int_{c+d-y}^{d}(t-a)(s-d)d_td_sf(t,s)+\int_x^{a+b-x}\int_c^y\left(t-\frac{a+b}{2}\right)(s-c)d_td_sf(t,s)\\
&+\int_x^{a+b-x}\int_y^{c+d-y}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_td_sf(t,s)\\
&+\int_x^{a+b-x}\int_{c+d-y}^{d}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)(s-d)d_td_sf(t,s)+\int_{a+b-x}^{b}\int_c^y(t-b)(s-c)d_td_sf(t,s)\\
&\left.+\int_{a+b-x}^{b}\int_y^{c+d-y}(t-b)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_td_sf(t,s)+\int_{a+b-x}^{b}\int_{c+d-y}^{d}(t-b)(s-d)d_td_sf(t,s)\right]
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

eşitliği vardır.

İspat. Kısmi integrasyon yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
&\int_a^x\int_c^y(t-a)(s-c)d_td_sf(t,s)\\
&=(x-a)(y-c)f(x,y)-(y-c)\int_a^x f(t,y)dt-(x-a)\int_c^y f(x,s)ds+\int_a^x\int_c^y f(t,s)dsdt,
\end{aligned}
$$

eşitliği kolaylıkla bulunur. Benzer olarak,

$$\int_{a}^{x}\int_{y}^{c+d-y}(t-a)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_t d_s f(t,s)$$

$$= (x-a)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(x,c+d-y)+(x-a)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(x,y)$$

$$-\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\int_{a}^{x}f(t,c+d-y)dt-\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\int_{a}^{x}f(t,y)dt$$

$$-(x-a)\int_{y}^{c+d-y}f(x,s)ds+\int_{a}^{x}\int_{y}^{c+d-y}f(t,s)dsdt,$$

$$\int_{a}^{x}\int_{c+d-y}^{d}(t-a)(s-d)d_t d_s f(t,s)$$

$$= (x-a)(y-c)f(x,c+d-y)-(y-c)\int_{a}^{x}f(t,c+d-y)dt$$

$$-(x-a)\int_{c+d-y}^{d}f(x,s)ds+\int_{a}^{x}\int_{c+d-y}^{d}f(t,s)dsdt,$$

$$\int_{x}^{a+b-x}\int_{c}^{y}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)(s-c+)d_t d_s f(t,s)$$

$$=\left(\frac{a+b}{2}-x\right)(y-c)f(a+b-x,y)+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)(y-c)f(x,y)$$

$$-(y-c)\int_{x}^{a+b-x}f(t,y)dt-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\int_{c}^{y}f(a+b-x,s)ds$$

$$-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\int_{c}^{y}f(x,s)ds+\int_{x}^{a+b-x}\int_{c}^{y}f(t,s)dsdt,$$

$$\int_{x}^{a+b-x}\int_{y}^{c+d-y}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_t d_s f(t,s)$$

$$=\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(a+b-x,c+d-y)$$

$$+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(a+b-x,y)$$

$$+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(x,c+d-y)$$

$$+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(x,y)$$

$$-\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\int_{x}^{a+b-x}f(t,c+d-y)dt-\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\int_{x}^{a+b-x}f(t,y)dt$$

$$-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\int_{y}^{c+d-y} f(a+b-x,s)ds-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\int_{y}^{c+d-y} f(x,s)ds$$
$$+\int_{x}^{a+b-x}\int_{y}^{c+d-y} f(t,s)dsdt,$$

$$\int_{x}^{a+b-x}\int_{c+d-y}^{d}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)(s-d)d_t d_s f(t,s)$$
$$=\left(\frac{a+b}{2}-x\right)(y-c)f(a+b-x,c+d-y)$$
$$+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)(y-c)f(x,c+d-y)-(y-c)\int_{x}^{a+b-x} f(t,c+d-y)dt$$
$$-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\int_{c+d-y}^{d} f(a+b-x,s)ds-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\int_{c+d-y}^{d} f(x,s)ds$$
$$+\int_{x}^{a+b-x}\int_{c+d-y}^{d} f(t,s)dsdt,$$

$$\int_{a+b-x}^{b}\int_{c}^{y}(t-b)(s-c+)d_t d_s f(t,s)$$
$$=+(x-a-)(y-c-)f(a+b-x,y)-(y-c)\int_{a+b-x}^{b} f(t,y)dt$$
$$-(x-a)\int_{a}^{x} f(a+b-x,s)ds+\int_{a+b-x}^{d}\int_{c}^{y} f(t,s)dsdt,$$

$$\int_{a+b-x}^{b}\int_{y}^{c+d-y}(t-b)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_t d_s f(t,s)$$
$$=(x-a)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(a+b-x,c+d-y)$$
$$+(x-a)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(a+b-x,y)$$
$$-\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\int_{a+b-x}^{b} f(t,c+d-y)dt-\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\int_{a+b-x}^{b} f(t,y)dt$$
$$-(x-a)\int_{y}^{c+d-y} f(a+b-x,s)ds+\int_{a+b-x}^{d}\int_{y}^{c+d-y} f(t,s)dsdt,$$

ve

$$\int_{a+b-x}^{b}\int_{c+d-y}^{d}(t-b)(s-d)d_t d_s f(t,s)$$

$$= (x-a)(y-c)f(a+b-x,c+d-y)-(y-c)\int_{a+b-x}^{b}f(t,c+d-y)dt$$

$$-(x-a)\int_{c+d-y}^{d}f(a+b-x,s)ds+\int_{a+b-x}^{d}\int_{c+d-y}^{d}f(t,s)dsdt$$

eşitlikleri de bulunur. Elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa ispat tamamlanmış olur.

Sıradaki teoremde kullanılacak bazı aralıklar sadelik için

$$\begin{aligned}
&Q_1=[a,x]\times[c,y],\ Q_2=[a,x]\times[y,c+d-y],\ Q_3=[a,x]\times[c+d-y,d],\\
&Q_4=[x,a+b-x]\times[c,y],\ Q_5=[x,a+b-x]\times[y,c+d-y],\\
&Q_6=[x,a+b-x]\times[c+d-y,d],\ Q_7=[a+b-x,b]\times[c,y],\\
&Q_8=[a+b-x,b]\times[y,c+d-y],\ Q_9=[a+b-x,b]\times[c+d-y,d]
\end{aligned} \tag{4.27}$$

olarak tanımlansın.

Teorem 4.1.6. $f : Q\to\mathbb{R}$ fonksiyonu Q sınırlı varyasyonlu bir fonksiyon olsun. Bu takdirde her $(x,y)\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\times\left[c,\frac{c+d}{2}\right]$ için

$$\left|\frac{1}{4}\left[f(x,y)+f(x,c+d-y)+f(a+b-x,y)+f(a+b-x,c+d-y)\right]\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(t,y)+f(t,c+d-y)\right]dt\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d\left[f(x,s)+f(a+b-x,s)\right]ds\right]$$

$$\left.-\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|$$

$$\leq\frac{1}{(b-a)(d-c)}\left[(x-a)(y-c)V_f(Q_1)+(x-a)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)V_f(Q_2)\right.$$

$$+(x-a)(y-c)V_f(Q_3)+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)(y-c)V_f(Q_4)$$

$$+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)V_f(Q_5)+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)(y-c)V_f(Q_6)$$

$$+(x-a)(y-c)V_f(Q_7)+(x-a)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)V_f(Q_8)+(x-a)(y-c)V_f(Q_9)\Bigg]$$

$$\leq \begin{cases} \left[\frac{1}{4}+\left|\frac{x-\frac{3a+b}{4}}{b-a}\right|\right]\left[\frac{1}{4}+\left|\frac{y-\frac{3c+d}{4}}{d-c}\right|\right]V_f(Q), \\ \left[4\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha}\left(\frac{y-c}{d-c}\right)^{\alpha}+2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha}\left(\frac{\frac{c+d}{2}-y}{d-c}\right)^{\alpha}+2\left(\frac{\frac{a+b}{2}-x}{b-a}\right)^{\alpha}\left(\frac{y-c}{d-c}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\frac{a+b}{2}-x}{b-a}\right)^{\alpha}\left(\frac{\frac{c+d}{2}-y}{d-c}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \\ \times\left[\left[V_f(Q_1)\right]^{\beta}+\left[V_f(Q_2)\right]^{\beta}+\ldots+\left[V_f(Q_9)\right]^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}},\ \text{if } \alpha>1,\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1, \\ \left\{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)+\left(\frac{y-c}{d-c}\right)+\left(\frac{\frac{a+b}{2}-x}{b-a}\right)\left(\frac{\frac{c+d}{2}-y}{d-c}\right)\right\}\max\left\{V_f(Q_1),V_f(Q_2),\ldots,V_f(Q_9)\right\} \end{cases} \tag{4.28}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. (4.26) da her iki yanın mutlak değeri alınıp, sonra Lemma 2.3.3 uygulanırsa,

$$\Bigg|\frac{1}{4}\left[f(x,y)+f(x,c+d-y)+f(a+b-x,y)+f(a+b-x,c+d-y)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(t,y)+f(t,c+d-y)\right]dt\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d\left[f(x,s)+f(a+b-x,s)\right]ds\right]$$

$$-\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\Bigg|$$

$$\leq\frac{1}{(b-a)(d-c)}\Bigg[\left|\int_a^x\int_c^y(t-a)(s-c)d_td_sf(t,s)\right|+\left|\int_a^x\int_y^{c+d-y}(t-a)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_td_sf(t,s)\right|$$

$$+\left|\int_a^x\int_{c+d-y}^{d}(t-a)(s-d)d_td_sf(t,s)\right|+\left|\int_x^{a+b-x}\int_c^y\left(t-\frac{a+b}{2}\right)(s-c)d_td_sf(t,s)\right|$$

$$+\left|\int_x^{a+b-x}\int_y^{c+d-y}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_td_sf(t,s)\right|$$

$$+\left|\int_x^{a+b-x}\int_{c+d-y}^{d}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)(s-d)d_td_sf(t,s)\right|+\left|\int_{a+b-x}^{b}\int_c^y(t-b)(s-c)d_td_sf(t,s)\right|$$

$$+\left|\int_{a+b-x}^{b}\int_y^{c+d-y}(t-b)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_td_sf(t,s)\right|+\left|\int_{a+b-x}^{b}\int_{c+d-y}^{d}(t-b)(s-d)d_td_{st}f(t,s)\right|\Bigg]$$

$$\leq\frac{1}{(b-a)(d-c)}\Bigg[(x-a)(y-c)V_f(Q_1)+(x-a)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)V_f(Q_2)$$

$$+(x-a)(y-c)V_f(Q_3)+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)(y-c)V_f(Q_4)$$

$$+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)V_f(Q_5)+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)(y-c)V_f(Q_6)$$

$$+(x-a)(y-c)V_f(Q_7)+(x-a)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)V_f(Q_8) \tag{4.29}$$

$$+(x-a)(y-c)V_f(Q_9)\Big] := M(x,y)$$

elde edilir. Bu da (4.28)'teki ilk eşitsizliğin ispatını tamamlar. Diğer yandan,

$$M(x,y) \le \frac{1}{(b-a)(d-c)}\max_{x,y}\left\{(x-a)(y-c),(x-a)\left(\frac{c+d}{2}-y\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{a+b}{2}-x\right)(y-c),\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\right\}$$

$$\times\left[V_f(Q_1)+V_f(Q_2)+\ldots+V_f(Q_9)\right]$$

$$=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\max_{x}\left\{(x-a)\max_{y}\left\{(y-c),\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\right\},\right.$$

$$\left.\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\max_{y}\left\{(y-c),\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\right\}\right\}$$

$$\times\left[V_f(Q_1)+V_f(Q_2)+\ldots+V_f(Q_9)\right]$$

dır. $\max_{y}$ ifadesi x den bağımsız olduğu için

$$M(x,y) \le \frac{1}{(b-a)(d-c)}\max_{x}\left\{(x-a),\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right\}\max_{y}\left\{(y-c),\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\right\}V_f(Q)$$

$$=\left[\frac{1}{4}+\left|\frac{x-\frac{3a+b}{4}}{b-a}\right|\right]\left[\frac{1}{4}+\left|\frac{y-\frac{3c+d}{4}}{d-c}\right|\right]V_f(Q)$$

bulunur. Böylece (4.28)'deki ikinci eşitsizliğin birinci satırı ispatlanmış olur. (4.29)'un son eşitsizliğinde ayrık Hölder eşitsizliği uygulanırsa, $\alpha>1$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ olmak üzere

$$M(x,y) \le \frac{1}{(b-a)(d-c)}\left[4(x-a)^{\alpha}(y-c)^{\alpha}+2(x-a)^{\alpha}\left(\frac{c+d}{2}-y\right)^{\alpha}\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^{\alpha}(y-c)^{\alpha}+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^{\alpha}\left(\frac{c+d}{2}-y\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\times\left[\left[V_f(Q_1)\right]^{\beta}+\left[V_f(Q_2)\right]^{\beta}+\ldots+\left[V_f(Q_9)\right]^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

elde edilir. Bu da (4.28)'deki ikinci eşitsizliğin ikinci satırının ispatını tamamlamış olur. Son olarak, maksimum fonksiyonu yardımıyla

$$
\begin{aligned}
M(x,y) &\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \max\{V_f(Q_1), V_f(Q_2), \ldots, V_f(Q_9)\} \\
&\quad \times \left\{ 4(x-a)(y-c) + 2(x-a)\left(\frac{c+d}{2} - y\right) \right. \\
&\quad \left. + 2\left(\frac{a+b}{2} - x\right)(y-c) + \left(\frac{a+b}{2} - x\right)\left(\frac{c+d}{2} - y\right) \right\} \\
&\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \max\{V_f(Q_1), V_f(Q_2), \ldots, V_f(Q_9)\} \\
&\quad \times \left\{ (x-a)(d-c) + (y-c)(b-a) + \left(\frac{a+b}{2} - x\right)\left(\frac{c+d}{2} - y\right) \right\}
\end{aligned}
$$

bulunur ve ispat tamamen tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.14. Teorem 4.1.6'da özel olarak $x = a$ ve $y = c$ alınırsa (4.28) eşitsizliği, Teorem 4.1.2'deki Yamuk eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.1.14. Teorem 4.1.6'da özel olarak $x = \frac{a+b}{2}$ ve $y = \frac{c+d}{2}$ alınırsa (4.28) eşitsizliği, Sonuç 4.1.1'deki Orta Nokta eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.1.16. Teorem 4.1.6'ın şartları altında $x = \frac{3a+b}{4}$ ve $y = \frac{3c+d}{4}$ seçilirse

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{f\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{3c+d}{4}\right) + f\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{c+3d}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}, \frac{3c+d}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}, \frac{c+3d}{4}\right)}{4} \right. \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \left[f\left(t, \frac{3c+d}{4}\right) + f\left(t, \frac{c+3d}{4}\right) \right] dt \right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{d-c} \int_c^d \left[f\left(\frac{3a+b}{4}, s\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}, s\right) \right] ds \right] \\
&\quad \left. + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(t,s)\, ds\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{16} V_f(Q)
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

eşitsizliği elde edilir. Buradaki $\frac{1}{16}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez.

İspat. Sabitin en iyi sabit olduğunu ispatlamak için, (4.30) eşitsizliğinin $C > 0$ sabiti için sağlandığı, yani,

$$\left| \frac{f\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{3c+d}{4}\right) + f\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{c+3d}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}, \frac{3c+d}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}, \frac{c+3d}{4}\right)}{4} \right.$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \left[f\left(t, \frac{3c+d}{4}\right) + f\left(t, \frac{c+3d}{4}\right)\right] dt\right] \tag{4.31}$$
$$\left. -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d \left[f\left(\frac{3a+b}{4}, s\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}, s\right)\right] ds\right] + \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt \right|$$
$$\leq C V_f(Q)$$

olduğu kabul edilsin. $f : Q \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$E = \left\{ \left(\frac{3a+b}{4}, \frac{3c+d}{4}\right), \left(\frac{3a+b}{4}, \frac{c+3d}{4}\right), \left(\frac{a+3b}{4}, \frac{3c+d}{4}\right), \left(\frac{a+3b}{4}, \frac{c+3d}{4}\right) \right\}$$

olmak üzere

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in E \text{ ise} \\ 0, & (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \setminus E \text{ ise} \end{cases}$$

olarak seçilsin. Bu durumda, f fonksiyonu Q üzerinde sınırlı varyasyonludur ve

$$\frac{\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{3c+d}{4}\right), \left(\frac{3a+b}{4}, \frac{c+3d}{4}\right), \left(\frac{a+3b}{4}, \frac{3c+d}{4}\right), \left(\frac{a+3b}{4}, \frac{c+3d}{4}\right)}{4} = 1,$$

$$\int_a^b \left[f\left(t, \frac{3c+d}{4}\right) + f\left(t, \frac{c+3d}{4}\right)\right] dt = 0$$

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d \left[f\left(\frac{3a+b}{4}, s\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}, s\right)\right] ds = 0$$

$$\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt = 0, \text{ ve } V_f(Q) = 16$$

dir. Bulunan bu ifadeler (4.31) eşitsizliğinde yazılırsa $1 \leq 16C$ olur,yani $C \geq \frac{1}{16}$ dir. Buda ispatı tamamlar.

Sonraki teoremin ispat için kullanılacak aşağıdaki lemma verilsin.

Lemma 4.1.2. $f : Q \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Q üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $\lambda, \eta \in [0,1]$ ve $a + \lambda \frac{b-a}{2} \le x \le \frac{a+b}{2}$, $c + \eta \frac{d-c}{2} \le y \le \frac{c+d}{2}$ için

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\Big[\lambda\eta\big[f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)\big] \\
&+\lambda(1-\eta)\big[f(a,y) + f(a,c+d-y) + f(b,y) + f(b,c+d-y)\big] \\
&+(1-\lambda)\eta\big[f(x,c) + f(x,d) + f(a+b-x,c) + f(a+b-x,d)\big] \\
&(1-\lambda)(1-\eta)\big[f(x,y) + f(x,c+d-y) + f(a+b-x,y) + f(a+b-x,c+d-y)\big]\Big] \\
&-\frac{1-\eta}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(t,y) + f(t,c+d-y)]dt\right] - \frac{\eta}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(t,c) + f(t,d)]dt\right] \\
&-\frac{1-\lambda}{2}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d [f(x,s) + f(a+b-x,s)]ds\right] - \frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d [f(a,s) + f(b,s)]ds\right] \\
&+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt \\
&= \frac{1}{(b-a)(d-c)}\Bigg[\int_a^x\int_c^y \left(t - \left(a + \lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s - \left(c + \eta\frac{d-c}{2}\right)\right) d_t d_s f(t,s) \\
&+\int_a^x\int_y^{c+d-y} \left(t - \left(a + \lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s - \frac{c+d}{2}\right) d_t d_s f(t,s) \\
&+\int_a^x\int_{c+d-y}^{d} \left(t - \left(a + \lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s - \left(d - \eta\frac{d-c}{2}\right)\right) d_t d_s f(t,s) \\
&+\int_x^{a+b-x}\int_c^{y} \left(t - \frac{a+b}{2}\right)\left(s - \left(c + \eta\frac{d-c}{2}\right)\right) d_t d_s f(t,s) \\
&+\int_x^{a+b-x}\int_y^{c+d-y} \left(t - \frac{a+b}{2}\right)\left(s - \frac{c+d}{2}\right) d_t d_s f(t,s) \\
&+\int_x^{a+b-x}\int_{c+d-y}^{d} \left(t - \frac{a+b}{2}\right)\left(s - \left(d - \eta\frac{d-c}{2}\right)\right) d_t d_s f(t,s) \qquad (4.32) \\
&+\int_{a+b-x}^{b}\int_c^{y} \left(t - \left(b - \lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s - \left(c + \eta\frac{d-c}{2}\right)\right) d_t d_s f(t,s) \\
&+\int_{a+b-x}^{b}\int_y^{c+d-y} \left(t - \left(b - \lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s - \frac{c+d}{2}\right) d_t d_s f(t,s)
\end{aligned}
$$

$$+\int_{a+b-x}^{b}\int_{c+d-y}^{d}\left(t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(d-\eta\frac{d-c}{2}\right)\right)d_t d_s f(t,s)\Bigg]$$

eşitliği vardır.

İspat. Kısmi integrasyonla

$$\begin{aligned}
&J_1\\
&=\int_a^x\int_c^y\left(t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(c+\eta\frac{d-c}{2}\right)\right)d_t d_s f(t,s)\\
&=\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(x,y)+\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(x,c)\\
&+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(a,y)+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(a,c)\\
&-\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_a^x f(t,y)dt-\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_a^x f(t,c)dt\\
&-\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_c^y f(x,s)ds-\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_c^y f(a,s)ds+\int_a^x\int_c^y f(t,s)dsdt,
\end{aligned}\tag{4.33}$$

eşitliği elde edilebilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
J_2&=\int_a^x\int_y^{c+d-y}\left(t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_t d_s f(t,s)\\
&=\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(x,c+d-y)+\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(x,y)\\
&+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(a,c+d-y)+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(a,y)\\
&-\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\int_a^x f(t,c+d-y)dt-\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\int_a^x f(t,y)dt\\
&-\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_y^{c+d-y} f(x,s)ds-\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_y^{c+d-y} f(a,s)ds+\int_a^x\int_y^{c+d-y} f(t,s)dsdt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3&=\int_a^x\int_{c+d-y}^{d}\left(t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(d-\eta\frac{d-c}{2}\right)\right)d_t d_s f(t,s)\\
&=\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(x,d)\\
&+\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(x,c+d-y)
\end{aligned}$$

$$+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(a,d)+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(a,c+d-y)$$
$$-\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_a^x f(t,d)dt-\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_a^x f(t,c+d-y)dt$$
$$-\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_{c+d-y}^{d} f(x,s)ds-\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_{c+d-y}^{d} f(a,s)ds+\int_a^x\int_{c+d-y}^{d} f(t,s)dsdt,$$

$$J_4=\int_x^{a+b-x}\int_c^y\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\left(s-\left(c+\eta\frac{d-c}{2}\right)\right)d_td_s f(t,s)$$
$$=\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(a+b-x,y)+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(a+b-x,c)$$
$$+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(x,y)+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(x,c)$$
$$-\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_x^{a+b-x} f(t,y)dt-\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_x^{a+b-x} f(t,c)dt$$
$$-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\int_c^y f(a+b-x,s)ds-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\int_c^y f(x,s)ds+\int_x^{a+b-x}\int_c^y f(t,s)dsdt,$$

$$J_5=\int_x^{a+b-x}\int_y^{c+d-y}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_td_s f(t,s)$$
$$=\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(a+b-x,c+d-y)+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(a+b-x,y)$$
$$+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(x,c+d-y)+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(x,y)$$
$$-\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\int_x^{a+b-x} f(t,c+d-y)dt-\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\int_x^{a+b-x} f(t,y)dt$$
$$-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\int_y^{c+d-y} f(a+b-x,s)ds-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\int_y^{c+d-y} f(x,s)ds+\int_x^{a+b-x}\int_y^{c+d-y} f(t,s)dsdt,$$

$$J_6=\int_x^{a+b-x}\int_{c+d-y}^{d}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\left(s-\left(d-\eta\frac{d-c}{2}\right)\right)d_td_s f(t,s)$$
$$=\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(a+b-x,d)$$
$$+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(a+b-x,c+d-y)$$
$$+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(x,d)+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(x,c+d-y)$$

$$-\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_{x}^{a+b-x} f(t,d)dt-\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_{x}^{a+b-x} f(t,c+d-y)dt$$
$$-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\int_{c+d-y}^{d} f(a+b-x,s)ds-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\int_{c+d-y}^{d} f(x,s)ds+\int_{x}^{a+b-x}\int_{c+d-y}^{d} f(t,s)dsdt,$$

$$J_7=\int_{a+b-x}^{b}\int_{c}^{y}\left(t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(c+\eta\frac{d-c}{2}\right)\right)d_td_s f(t,s)$$
$$=\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(b,y)+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(b,c)$$
$$+\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(a+b-x,y)$$
$$+\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(a+b-x,c)$$
$$-\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_{a+b-x}^{b} f(t,y)dt-\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_{a+b-x}^{b} f(t,c)dt$$
$$-\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_{a}^{x} f(b,s)ds-\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_{a}^{x} f(a+b-x,s)ds+\int_{a+b-x}^{d}\int_{c}^{y} f(t,s)dsdt,$$

$$J_8=\int_{a+b-x}^{b}\int_{y}^{c+d-y}\left(t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_td_s f(t,s)$$
$$=\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(b,c+d-y)+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(b,y)$$
$$+\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(a+b-x,c+d-y)$$
$$+\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)f(a+b-x,y)$$
$$-\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\int_{a+b-x}^{b} f(t,c+d-y)dt-\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\int_{a+b-x}^{b} f(t,y)dt$$
$$-\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_{y}^{c+d-y} f(b,s)ds-\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_{y}^{c+d-y} f(a+b-x,s)ds$$
$$+\int_{a+b-x}^{d}\int_{y}^{c+d-y} f(t,s)dsdt,$$

$$J_9=\int_{a+b-x}^{b}\int_{c+d-y}^{d}\left(t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(d-\eta\frac{d-c}{2}\right)\right)d_td_s f(t,s)$$
$$=\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(b,d)+\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(b,c+d-y)$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)f(a+b-x,d) \\
&+\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)f(a+b-x,c+d-y) \\
&-\left(\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_{a+b-x}^{b}f(t,d)dt-\left(y-c-\eta\frac{d-c}{2}\right)\int_{a+b-x}^{b}f(t,c+d-y)dt \\
&-\left(\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_{c+d-y}^{d}f(b,s)ds-\left(x-a-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\int_{c+d-y}^{d}f(a+b-x,s)ds \\
&+\int_{a+b-x}^{d}\int_{c+d-y}^{d}f(t,s)dsdt.
\end{aligned}
$$

eşitlikleri de kolaylıkla elde edilir. Bulunan bu integral eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.17. Eğer Lemma 4.1.2'de özel olarak $\lambda=0$ ve $\eta=0$ seçilirse, bu durumda (4.32) eşitliği (4.26) eşitliğine dönüşür.

Teorem 4.1.7. Lemma 4.1.2'nin şartları sağlansın. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{4}[\lambda\eta[f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)]\right. \\
&+\lambda(1-\eta)[f(a,y)+f(a,c+d-y)+f(b,y)+f(b,c+d-y)] \\
&+(1-\lambda)\eta[f(x,c)+f(x,d)+f(a+b-x,c)+f(a+b-x,d)] \\
&(1-\lambda)(1-\eta)[f(x,y)+f(x,c+d-y)+f(a+b-x,y)+f(a+b-x,c+d-y)]] \\
&-\frac{1-\eta}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(t,y)+f(t,c+d-y)]dt\right]-\frac{\eta}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(t,c)+f(t,d)]dt\right] \\
&-\frac{1-\lambda}{2}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d[f(x,s)+f(a+b-x,s)]ds\right]-\frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d[f(a,s)+f(b,s)]ds\right] \\
&\left.+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right| \\
&\le\frac{1}{(b-a)(d-c)}\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(x-\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right),\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right\} \\
&\times\max\left\{\eta\frac{d-c}{2},\left(y-\frac{(2-\eta)c+\eta d}{2}\right),\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\right\}V_f(Q)
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Q_i ($i=1,2,...9$) aralıkları (4.27)'deki gibi olsun. (4.26) eşitliğinde mutlak değer alındıktan sonra üçgen eşitsizliği ve Lemma 2.3.3 kulalanılırsa

$$\Bigg|\frac{1}{4}\Big[\lambda\eta\left[f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)\right]$$
$$+\lambda(1-\eta)\left[f(a,y)+f(a,c+d-y)+f(b,y)+f(b,c+d-y)\right]$$
$$+(1-\lambda)\eta\left[f(x,c)+f(x,d)+f(a+b-x,c)+f(a+b-x,d)\right]$$
$$(1-\lambda)(1-\eta)\left[f(x,y)+f(x,c+d-y)+f(a+b-x,y)+f(a+b-x,c+d-y)\right]\Big]$$
$$-\frac{1-\eta}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(t,y)+f(t,c+d-y)\right]dt\right]-\frac{\eta}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(t,c)+f(t,d)\right]dt\right]$$
$$-\frac{1-\lambda}{2}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d\left[f(x,s)+f(a+b-x,s)\right]ds\right]-\frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d\left[f(a,s)+f(b,s)\right]ds\right]$$
$$+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\Bigg|$$
$$\leq\frac{1}{(b-a)(d-c)}\Bigg[\left|\int_a^x\int_c^y\left(t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(c+\eta\frac{d-c}{2}\right)\right)d_td_s f(t,s)\right|$$
$$+\left|\int_a^x\int_c^{c+d-y}\left(t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_td_s f(t,s)\right|$$
$$+\left|\int_a^x\int_{c+d-y}^d\left(t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(d-\eta\frac{d-c}{2}\right)\right)d_td_s f(t,s)\right|$$
$$+\left|\int_x^{a+b-x}\int_c^y\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\left(s-\left(c+\eta\frac{d-c}{2}\right)\right)d_td_s f(t,s)\right|$$
$$+\left|\int_x^{a+b-x}\int_y^{c+d-y}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_td_s f(t,s)\right|$$
$$+\left|\int_x^{a+b-x}\int_{c+d-y}^d\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\left(s-\left(d-\eta\frac{d-c}{2}\right)\right)d_td_s f(t,s)\right|$$
$$+\left|\int_{a+b-x}^b\int_c^y\left(t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(c+\eta\frac{d-c}{2}\right)\right)d_td_s f(t,s)\right|$$
$$+\left|\int_{a+b-x}^b\int_y^{c+d-y}\left(t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\frac{c+d}{2}\right)d_td_s f(t,s)\right|$$
$$+\left|\int_{a+b-x}^b\int_{c+d-y}^d\left(t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(s-\left(d-\eta\frac{d-c}{2}\right)\right)d_td_s f(t,s)\right|\Bigg]$$
$$\leq\frac{1}{(b-a)(d-c)}\Bigg[\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(x-\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right)\right\}$$

$$\times \max\left\{\eta\frac{d-c}{2},\left(y-\frac{(2-\eta)c+\eta d}{2}\right)\right\}V_f(Q_1)$$

$$+\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(x-\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right)\right\}\left(\frac{c+d}{2}-y\right)V_f(Q_2)$$

$$+\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(x-\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right)\right\}\max\left\{\eta\frac{d-c}{2},\left(y-\frac{(2-\eta)c+\eta d}{2}\right)\right\}V_f(Q_3)$$

$$+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\max\left\{\eta\frac{d-c}{2},\left(y-\frac{(2-\eta)c+\eta d}{2}\right)\right\}V_f(Q_4)$$

$$+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\frac{c+d}{2}-y\right)V_f(Q_5)$$

$$+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\max\left\{\eta\frac{d-c}{2},\left(y-\frac{(2-\eta)c+\eta d}{2}\right)\right\}V_f(Q_6)$$

$$+\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(x-\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right)\right\}\max\left\{\eta\frac{d-c}{2},\left(y-\frac{(2-\eta)c+\eta d}{2}\right)\right\}V_f(Q_7)$$

$$+\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(x-\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right)\right\}\left(\frac{c+d}{2}-y\right)V_f(Q_8)$$

$$+\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(x-\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right)\right\}\max\left\{\eta\frac{d-c}{2},\left(y-\frac{(2-\eta)c+\eta d}{2}\right)\right\}V_f(Q_9)\Bigg]$$

$$:= N(x,y)$$

bulunur. Son eşitsizlikte maksimum ifadeleri ortak parantezlerde toplanırsa

$$N(x,y) \le \frac{1}{(b-a)(d-c)}\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(x-\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right),\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right\}$$

$$\times \max\left\{\eta\frac{d-c}{2},\left(y-\frac{(2-\eta)c+\eta d}{2}\right),\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\right\}$$

$$\times\left[V_f(Q_1)+V_f(Q_2)+V_f(Q_3)+\ldots+V_f(Q_9)\right]$$

$$=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},\left(x-\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right),\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right\}$$

$$\times \max\left\{\eta\frac{d-c}{2},\left(y-\frac{(2-\eta)c+\eta d}{2}\right),\left(\frac{c+d}{2}-y\right)\right\}V_f(Q)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.18. Teorem 4.1.7'de özel olarak $\lambda = 0$ ve $\eta = 0$ seçilirse, (4.34) eşitsizliği (4.28)'deki ikinci eşitsizliğin birinci satırındaki ifadeye dönüşür.

Sonuç 4.1.19. Teorem 4.1.7'nin şartları altında özel olarak $x = \frac{a+b}{2}$ ve $y = \frac{c+d}{2}$ seçilirse, her $\lambda, \eta \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{1}{4}[\lambda\eta[f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)] \\
&+2\lambda(1-\eta)\left[f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\right] \\
&+2(1-\lambda)\eta\left[f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right]+4(1-\lambda)(1-\eta)f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\Bigg] \\
&-\frac{1-\eta}{b-a}\int_a^b f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt-\frac{\eta}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(t,c)+f(t,d)]dt\right] \\
&-\frac{1-\lambda}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds-\frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d [f(a,s)+f(b,s)]ds\right] \\
&+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\Bigg| \\
&\le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|\right]\left[\frac{1}{2}+\left|\eta-\frac{1}{2}\right|\right]V_f(Q)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1.20. Eğer Sonuç 4.1.18'de özel olarak,

a) $\lambda = 0$ ve $\eta = 0$ alınırsa, (4.35) eşitsizliği Teorem 4.1.1'deki Ostrowski eşitsizliğine dönüşür.

b) $\lambda = 1$ ve $\eta = 1$ alınırsa, (4.35) eşitsizliği Teorem 4.1.2'deki Yamuk eşitsizliğine dönüşür.

c) $\lambda = \frac{1}{3}$ ve $\eta = \frac{1}{3}$ alınırsa, (4.35) eşitsizliği Teorem 4.1.3'teki Simpson eşitsizliğine dönüşür.

d) $\lambda = \frac{1}{2}$ and $\eta = \frac{1}{2}$ alınırsa, (4.35) eşitsizliği Sonuç 4.1.13'teki (4.24) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.1.21. Eğer Sonuç 4.1.19'da özel olarak $\lambda = 1$ ve $\eta = 0$ seçilirse

$$\left| \frac{1}{2}\left[f\left(a,\frac{c+d}{2}\right) + f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2(d-c)}\int_c^d [f(a,s)+f(b,s)]ds + \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt \right| \tag{4.36}$$
$$\le \frac{1}{4}V_f(Q)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradaki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez.

İspat. Sabitin en iyi sabit olduğunu göstermek için (4.36) eşitsizliğini sağlayan keyfi bir sabitin $\frac{1}{4}$ den daha büyük olduğunu göstermek yeterlidir. (4.36) eşitsizliği $A > 0$ sabiti için sağlansın, yani

$$\left| \frac{1}{2}\left[f\left(a,\frac{c+d}{2}\right) + f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2(d-c)}\int_c^d [f(a,s)+f(b,s)]ds + \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt \right| \tag{4.37}$$
$$\le AV_f(Q)$$

olsun. $f : Q \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = a,b \text{ ve } y = \frac{c+d}{2} \text{ ise} \\ 0, & (x,y) \in [a,b]\times[c,d] \setminus \left\{\left(a,\frac{c+d}{2}\right),\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\right\} \text{ ise} \end{cases}$$

olarak alınsın. Bu durumda f fonksiyonu Q üzerinde sınırlı varyasyonludur. Ayrıca,

$$\frac{1}{2}\left[f\left(a,\frac{c+d}{2}\right) + f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\right] = 1,\ \int_a^b f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt = \int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt = 0,\ \text{ve}\, V_f(Q) = 4$$

dır. Bu eşitlikler (4.37)'de yerine yazılırsa $1 \le 4A$ elde edilir. Böylece, $A \ge \frac{1}{4}$ bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.22. Eğer Sonuç 4.1.19'da özel olarak $\lambda = 0$ ve $\eta = 1$ seçilirse

$$\left|\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right]-\frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b [f(t,c)+f(t,d)]dt+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right| \tag{4.38}$$
$$\leq \frac{1}{4}V_f(Q)$$

eşitsizliği bulunur. Buradaki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez.

İspat. Sabitin en iyi sabit olduğunu göstermek için keyfi bir $B>0$ sabiti için (4.38) eşitsizliğin sağlandığı, yani

$$\left|\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right]-\frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b [f(t,c)+f(t,d)]dt+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right| \tag{4.39}$$
$$\leq BV_f(Q)$$

olduğu kabul edilsin. Sonuç 4.1.21 in ispatına benzer olarak, $f : Q\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x,y)=\begin{cases}1. & x=\frac{a+b}{2} \text{ ve } y=c,d \text{ ise}\\ 0, & (x,y)\in[a,b]\times[c,d]\setminus\left\{\left(\frac{a+b}{2},c\right),\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right\} \text{ ise}\end{cases}$$

olarak alınırsa f fonksiyonu Q üzerinde sınırlı varyasyonlu olur ve

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right]=1, \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds=\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt=0,\ V_f(Q)=4$$

eşitlikleri geçerli olur. Buradan $1\leq 4B$ ve $B\geq\frac{1}{4}$ dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.8. $f : Q\to\mathbb{R}$ fonksiyonu Q üzerinde sınırlı varyasyonlu fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $(x,y)\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\times\left[c,\frac{c+d}{2}\right]$ için

$$\left|(x-a)(y-c)[f(b,d)+f(b,c)+f(a,d)+f(a,c)]\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+(x-a)(c+d-2y)\left[f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\right]\\
&+(a+b-2x)(y-c)\left[f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right]\\
&+(a+b-2x)(c+d-2y)\,f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\\
&-(y-c)\int_a^b[f(t,c)+f(t,d)]dt-(c+d-2y)\int_a^b\left[f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)\right]dt\\
&\left.-(x-a)\int_c^d[f(a,s)+f(b,s)]ds-(a+b-2x)\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds+\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|\\
\le&\left[\frac{1}{4}(b-a)+\left|x-\frac{3a+b}{4}\right|\right]\left[\frac{1}{4}(d-c)+\left|y-\frac{3c+d}{4}\right|\right]V_f(Q)
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

dır.

İspat. İspat için ilk olarak $p(x,t)$ ve $q(y,s)$ çekirdekleri

$$
p(x,t)=\begin{cases} t-x & \text{if } t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\\ t-(a+b-x) & \text{if } t\in\left(\frac{a+b}{2},b\right]\end{cases}
$$

ve

$$
q(x,t)=\begin{cases} s-y & \text{if } s\in\left[c,\frac{c+d}{2}\right]\\ s-(c+d-y) & \text{if } s\in\left(\frac{c+d}{2},d\right]\end{cases}
$$

olarak tanımlansın. Tanımlanan bu çekirdekler yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b\int_c^d p(x,t)q(y,s)d_td_s f(t,s)\\
=&\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_c^{\frac{c+d}{2}}(t-x)(s-y)d_td_s f(t,s)+\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d}(t-x)(s-(c+d-y))d_td_s f(t,s)\\
&+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\int_c^{\frac{c+d}{2}}(t-(a+b-x))(s-y)d_td_s f(t,s)
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

$$+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d}\big(t-(a+b-x)\big)\big(s-(c+d-y)\big)d_t d_s f(t,s)$$

$$=K_1+K_2+K_3+K_4$$

integralleri elde edilebilir. Kısmi integrtasyon kullanılarak K_1 integrali

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\int_{c}^{\frac{c+d}{2}}(t-x)(s-y)d_t d_s f(t,s)\\
&= \frac{(a+b-2x)(c+d-2y)}{4} f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)+\frac{(a+b-2x)(y-c)}{2} f\left(\frac{a+b}{2},c\right)\\
&\quad+\frac{(x-a)(c+d-2y)}{2} f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+(x-a)(y-c)f(a,c)\\
&\quad-\frac{(c+d-2y)}{2}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt-(y-c)\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(t,c)dt\\
&\quad-\frac{(a+b-2x)}{2}\int_{c}^{\frac{c+d}{2}} f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds-(x-a)\int_{c}^{\frac{c+d}{2}} f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds\\
&\quad+\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\int_{c}^{\frac{c+d}{2}} f(t,s)dsdt.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde K_2, K_3 ve K_4 integralleri de

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d}(t-x)\big(s-(c+d-y)\big)d_t d_s f(t,s)\\
&= \frac{(a+b-2x)(y-c)}{2} f\left(\frac{a+b}{2},d\right)\\
&\quad+\frac{(a+b-2x)(c+d-2y)}{4} f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\\
&\quad+(x-a)(y-c)f(a,d)+\frac{(x-a)(c+d-2y)}{2} f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)\\
&\quad-(y-c)\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(t,d)dt-\frac{(c+d-2y)}{2}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$-\frac{(a+b-2x)}{2}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d} f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds-(x-a)\int_{\frac{c+d}{2}}^{d} f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds+\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d} f(t,s)dsdt,$$

$$K_3=\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\int_{c}^{\frac{c+d}{2}}(t-(a+b-x))(s-y)d_t d_s f(t,s)$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{(x-a)(c+d-2y)}{2} f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+(x-a)(y-c) f(b,c)\\
&+\frac{(a+b-2x)(c+d-2y)}{4} f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)+\frac{(a+b-2x)(y-c)}{2} f\left(\frac{a+b}{2},c\right)\\
&-\frac{(c+d-2y)}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt-(y-c)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(t,c)dt\\
&-(x-a)\int_{c}^{\frac{c+d}{2}} f(b,s)ds-\frac{(a+b-2x)}{2}\int_{c}^{\frac{c+d}{2}} f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\int_{c}^{\frac{c+d}{2}} f(t,s)dsdt,
\end{aligned} \tag{4.44}$$

ve

$$K_4=\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d}(t-(a+b-x))(s-(c+d-y))d_t d_s f(t,s)$$

$$\begin{aligned}
&=(x-a)(y-c) f(b,d)+\frac{(x-a)(c+d-2y)}{2} f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\\
&+\frac{(a+b-2x)(y-c)}{2} f\left(\frac{a+b}{2},d\right)+\frac{(a+b-2x)(c+d-2y)}{4} f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\\
&-(y-c)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(t,d)dt-(y-c)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)dt\\
&-(x-a)\int_{\frac{c+d}{2}}^{d} f(b,s)ds-\frac{(a+b-2x)}{2}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d} f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds\\
&+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d} f(t,s)dsdt.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

olarak elde edilir. Bulunan (4.42)-(4.45) eşitlikleri (4.41)'de yerlerine yazılırlarsa

$$\int_a^b\int_c^d p(x,t)q(y,s)d_t d_s f(t,s)=K_1+K_2+K_3+K_4$$

$$= (x-a)(y-c)\left[f(b,d)+f(b,c)+f(a,d)+f(a,c)\right]$$
$$+(x-a)(c+d-2y)\left[f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\right]$$
$$+(a+b-2x)(y-c)\left[f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right]$$
$$+(a+b-2x)(c+d-2y)\,f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) \tag{4.46}$$
$$-(y-c)\int_a^b\left[f(t,c)+f(t,d)\right]dt-(c+d-2y)\int_a^b\left[f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)\right]dt$$
$$-(x-a)\int_c^d\left[f(a,s)+f(b,s)\right]ds-(a+b-2x)\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds+\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt.$$

eşitliği elde edilmiş olur. Diğer yandan Lemma 2.3.3 uygulanılarak

$$\left|\int_a^b\int_c^d p(x,t)q(y,s)d_t d_s f(t,s)\right|$$
$$\leq\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_c^{\frac{c+d}{2}}(t-x)(s-y)d_t d_s f(t,s)\right|+\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d}(t-x)(s-(c+d-y))d_t d_s f(t,s)\right|$$
$$+\left|\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\int_c^{\frac{c+d}{2}}(t-(a+b-x))(s-y)d_t d_s f(t,s)\right|$$
$$+\left|\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\int_{\frac{c+d}{2}}^{d}(t-(a+b-x))(s-(c+d-y))d_t d_s f(t,s)\right|$$
$$\leq \max\left\{\frac{a+b}{2}-x,x-a\right\}\max\left\{\frac{c+d}{2}-y,y-x\right\}V_f\left(\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\times\left[c,\frac{c+d}{2}\right]\right)$$
$$+\max\left\{\frac{a+b}{2}-x,x-a\right\}\max\left\{\frac{c+d}{2}-y,y-x\right\}V_f\left(\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\times\left[\frac{c+d}{2},d\right]\right)$$
$$+\max\left\{\frac{a+b}{2}-x,x-a\right\}\max\left\{\frac{c+d}{2}-y,y-x\right\}V_f\left(\left[\frac{a+b}{2},b\right]\times\left[c,\frac{c+d}{2}\right]\right)$$
$$+\max\left\{\frac{a+b}{2}-x,x-a\right\}\max\left\{\frac{c+d}{2}-y,y-x\right\}V_f\left(\left[\frac{a+b}{2},b\right]\times\left[\frac{c+d}{2},b\right]\right)$$
$$=\max\left\{\frac{a+b}{2}-x,x-a\right\}\max\left\{\frac{c+d}{2}-y,y-x\right\}V_f(Q)$$

$$= \left[\frac{1}{4}(b-a) + \left| x - \frac{3a+b}{4} \right| \right] \left[\frac{1}{4}(d-c) + \left| y - \frac{3c+d}{4} \right| \right] V_f(Q)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.23. Teorem 4.1.8'de özel olarak

a) $x = a$ ve $y = c$ seçilirse, (4.40) eşitsizliği Sonuç 4.1.1'deki Orta Nokta eşitsizliğine dönüşür.

b) $x = \frac{a+b}{2}$ and $y = \frac{c+d}{2}$ seçilirse, (4.40) eşitsizliği Teorem 4.1.2'deki Yamuk eşitsizliğine dönüşür.

c) $x = \frac{3a+b}{4}$ ve $y = \frac{3c+d}{4}$ seçilirse, (4.40) eşitsizliği Sonuç 4.1.13'teki (4.24) eşitsizliğine dönüşür.

d) $x = \frac{a+b}{2}$ ve $y = c$ seçilirse, (4.40) eşitsizliği Sonuç 4.1.21'deki (4.36) eşitsizliğine dönüşür.

e) $x = a$ ve $y = \frac{c+d}{2}$ seçilirse, (4.40) eşitsizliği Sonuç 4.1.22'deki (4.38) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.1.24. Teorem 4.1.8'in şartları altında, $x = a$ ve $y = \frac{3c+d}{4}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2} \left[\frac{f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right] \right. \\
&- \frac{1}{4(b-a)} \int_a^b [f(t,c) + f(t,d)]dt - \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b \left[f\left(t, \frac{c+d}{2}\right) \right] dt \\
&\left. - \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, s \right) ds + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(t,s)\,ds\,dt \right| \\
&\leq \frac{1}{8} V_f(Q)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradaki $\frac{1}{8}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez.

İspat. $\frac{1}{8}$ katsayısının bu şartlar altında en iyi katsayı olduğunu ispatlamak için bu eşitsizliği sağlayacak şekilde alınan keyfi bir $A>0$ sayısı için $A\geq\frac{1}{8}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $A>0$ sayısı (4.47) eşitsizliğini sağlasın, yani

$$\begin{aligned}&\Bigg|\frac{1}{2}\left[\frac{f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]\\&-\frac{1}{4(b-a)}\int_a^b[f(t,c)+f(t,d)]dt-\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left[f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)\right]dt\\&-\frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\Bigg|\\&\leq AV_f(Q)\end{aligned}\tag{4.48}$$

olsun.0 $f\ :\ Q\to\mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$E=\left\{\left(\frac{a+b}{2},c\right),\left(\frac{a+b}{2},d\right),\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right\}$$

olmak üzere,

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in E \text{ ise}\\ 0, & (x,y)\in Q\setminus E \text{ ise}\end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, f fonksiyonu Q üzerinde sınırlı varyasyonlu olur. Ayrıca bu şartlar altında

$$\frac{1}{2}\left[\frac{f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]=1,$$

$$\int_a^b[f(t,c)+f(t,d)]dt=\int_a^b\left[f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)\right]dt=\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds=0,$$

$$\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt=0,\ \text{ve}\,V_f(Q)=8$$

eşitlikleri vardır. Bu eşitlikler (4.48) de yazılırsa, $A\geq\frac{1}{8}$ olur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.25. Teorem 4.1.8'in şartları altında $x=\frac{3a+b}{4}$ ve $y=c$ seçilirse, (4.40) eşitsizliği

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2}\left[\frac{f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]\right.\\&-\frac{1}{4(d-c)}\int_c^d[f(a,s)+f(b,s)]ds-\frac{1}{2(d-c)}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds\\&\left.-\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)\right]dt+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|\\&\leq\frac{1}{8}V_f(Q)\end{aligned}\tag{4.49}$$

esitsizliğine dönüşür. Buradaki $\frac{1}{8}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez.

İspat. Sonuç 4.1.23'ün ispatına benzer olarak, $B>0$ keyfi bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2}\left[\frac{f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]\right.\\&-\frac{1}{4(d-c)}\int_c^d[f(a,s)+f(b,s)]ds-\frac{1}{2(d-c)}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds\\&\left.-\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)\right]dt+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\right|\\&\leq\frac{1}{8}V_f(Q)\end{aligned}\tag{4.50}$$

sağlansın. Burada,

$$E=\left\{\left(a,\frac{c+d}{2}\right),f\left(b,\frac{c+d}{2}\right),\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right\}$$

olmak üzere, $f\ :\ Q\to\mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in E \text{ ise}\\ 0, & (x,y)\in Q\setminus E \text{ ise}\end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, f fonksiyonu sınırlı varyasyonlu olur. Ayrıca

$$\frac{1}{2}\left[\frac{f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]=1,$$

$$\int_c^d [f(a,s)+f(b,s)]ds=\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds=\int_a^b\left[f\left(t,\frac{c+d}{2}\right)\right]dt=0,$$

$$\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt=0,\ \text{ve}\, V_f(Q)=8$$

eşitlikleri vardır. Bu eşitlikler (4.50)'de yazılırsa, $B\geq\frac{1}{8}$ olur ve ispat tamamlanır.

4.2. İKİ DEĞİŞKENLİ SINIRLI VARYASYONLU FONKSİYONLAR İÇİN BAZI AĞIRLIKLI OSTROWSKI TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde sınırlı varyasyona sahip iki değişkenli fonksiyonlar için ağırlıklı Ostrowski eşitsizlikleri ispatlanacak ve özel durumları incelenecektir.

İlk olarak ağırlık fonksiyonları aşağıdaki şekilde verilsin:
$w_1\ :\ [a,b]\rightarrow[0,\infty)$ sürekli ve (a,b) üzerinde negatif olmayan bir fonksiyon ve $h_1\ :\ [a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ ise $[a,b]$ üzerinde $h_1'(t)=w_1(t)$ olacak şekilde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Benzer şekilde, $w_2\ :\ [c,d]\rightarrow[0,\infty)$ sürekli ve (c,d) üzerinde negatif olmayan bir fonksiyon ve $h_2\ :\ [c,d]\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu da $[c,d]$ üzerinde $h_2'(t)=w_2(t)$ olacak şekilde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

Şimdi sıradaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.1. Eğer $f\ :\ [a,b]\times[c,d]\rightarrow\mathbb{R}$ fonkksiyonu $[a,b]\times[c,d]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu ise, bu durumda her $(x,y)\in[h_1(a),h_1(b)]\times[h_2(c),h_2(d)]$ için

$$\begin{aligned}&\left|(h_1(b)-x)(h_2(d)-y)f(b,d)+(h_1(b)-x)(y-h_2(c))f(b,c)\right.\\&+(x-h_1(a))(h_2(d)-y)f(a,d)+(x-h_1(a))(y-h_2(c))f(a,c)\\&-(h_2(d)-y)\int_a^b w_1(t)f(t,d)dt-(y-h_2(c))\int_a^b w_1(t)f(t,d)dt\\&-(h_1(b)-x)\int_c^d w_2(s)f(b,s)ds-(x-h_1(a))\int_c^d w_2(s)f(a,s)ds\end{aligned}\tag{4.51}$$

$$
+\int_a^b\int_c^d w_1(t)w_2(s)f(t,s)dsdt\Bigg|
$$

$$
\leq\left[\frac{1}{2}\int_a^b w_1(t)dt+\left|x-\frac{h_1(a)+h_1(b)}{2}\right|\right]\left[\frac{1}{2}\int_c^d w_2(t)dt+\left|y-\frac{h_2(c)+h_2(d)}{2}\right|\right]V_f(Q)
$$

eşitsizliği vardır.

İspat. $(x,y)\in[h_1(a),h_1(b)]\times[h_2(c),h_2(d)]$ olmak üzere kısmi integrasyon yardımıyla

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b\int_c^d (x-h_1(t))(y-h_2(s))d_t d_s f(t,s)\\
&=(h_1(b)-x)(h_2(d)-y)f(b,d)+(h_1(b)-x)(y-h_2(c))f(b,c)\\
&+(x-h_1(a))(h_2(d)-y)f(a,d)+(x-h_1(a))(y-h_2(c))f(a,c)\\
&-(h_2(d)-y)\int_a^b w_1(t)f(t,d)dt-(y-h_2(c))\int_a^b w_1(t)f(t,d)dt\\
&-(h_1(b)-x)\int_c^d w_2(s)f(b,s)ds-(x-h_1(a))\int_c^d w_2(s)f(a,s)ds\\
&+\int_a^b\int_c^d w_1(t)w_2(s)f(t,s)dsdt.
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

dir. (4.52)'de mutlak değer alınıp Lemma 2.3.3 kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|(h_1(b)-x)(h_2(d)-y)f(b,d)+(h_1(b)-x)(y-h_2(c))f(b,c)\\
&+(x-h_1(a))(h_2(d)-y)f(a,d)+(x-h_1(a))(y-h_2(c))f(a,c)\\
&-(h_2(d)-y)\int_a^b w_1(t)f(t,d)dt-(y-h_2(c))\int_a^b w_1(t)f(t,d)dt\\
&-(h_1(b)-x)\int_c^d w_2(s)f(b,s)ds-(x-h_1(a))\int_c^d w_2(s)f(a,s)ds\\
&+\int_a^b\int_c^d w_1(t)w_2(s)f(t,s)dsdt\Bigg|\\
&=\left|\int_a^b\int_c^d (x-h_1(t))(y-h_2(s))d_t d_s f(t,s)\right|\\
&\leq\sup_{t\in[a,b]}|x-h_1(t)|\sup_{s\in[c,d]}|y-h_2(s)|V_f(Q)
\end{aligned}
$$

bulunur.

$h_1(a)\leq x\leq h_1(b)$ için $[a,b]$ üzerinde $x-h_1(t)$ azalan ve $h_1'(t)=w_1(t)$ olduğundan

$$\sup_{t\in[a,b]}|x-h_1(t)| = \max\{x-h_1(a),h_1(b)-x\}$$
$$= \frac{h_1(a)+h_1(b)}{2}+\left|x-\frac{h_1(a)+h_1(b)}{2}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\int_a^b w_1(t)dt+\left|x-\frac{h_1(a)+h_1(b)}{2}\right|$$

bulunur. Benzer yolla

$$\sup_{s\in[c,d]}|y-h_2(s)| = \frac{1}{2}\int_c^d w_2(t)dt+\left|y-\frac{h_2(c)+h_2(d)}{2}\right|$$

olduğu görülebilir. Bulunan bu ifadeler kullanılarak istenen (4.51) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.1. Teorem 4.2.1'de özel olarak, $[a,b]$ üzerinde $w_1(t)\equiv 1$, $h_1(t)=t$ ve $[c,d]$ üzerinde $w_2(s)=1$, $h_2(s)=s$ alınırsa, bu takdirde (4.51) eşitsizliği, [61]'de Budak ve Sarıkaya tarafından ispatlanan

$$\begin{aligned}
&\Big|(b-x)(d-y)f(b,d)+(b-x)(y-c)f(b,c)\\
&+(x-a)(d-y)f(a,d)+(x-a)(y-c)f(a,c)\\
&-(d-y)\int_a^b f(t,d)dt-(y-c)\int_a^b f(t,d)dt\\
&-(b-x)\int_c^d f(b,s)ds-(x-a)\int_c^d f(a,s)ds-\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt\Big|\\
&\le\left[\frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]\left[\frac{1}{2}(d-c)+\left|y-\frac{c+d}{2}\right|\right]V_f(Q)
\end{aligned}\tag{4.53}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.2.2. *(Ağırlıklı Yamuk Eşitsizliği)* Teorem 4.2.1'in şartları altında $x=\frac{h_1(a)+h_1(b)}{2}$ ve $y=\frac{h_2(c)+h_2(d)}{2}$ seçilirse, bu durumda Teorem 4.1.2'de ispatlanan Yamuk eşitsizliğinin ağırlıklı hali olan

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)\frac{f(b,d)+f(b,c)+f(a,d)+f(a,c)}{4}\\
&-\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)\left[\int_a^b w_1(t)f(t,d)dt+\int_a^b w_1(t)f(t,c)dt\right]
\end{aligned}$$

$$-\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left[\int_c^d w_2(s)f(b,s)ds+\int_c^d w_2(s)f(a,s)ds\right]$$
$$\left.+\int_a^b\int_c^d w_1(t)w_2(s)f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq \frac{1}{4}\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)V_f(Q)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradaki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez.

Sonuç 4.2.3. Teorem 4.2.1'in şartları altında $x=h_1(b)$ ve $y=h_2(d)$ seçilirse, bu durumda Sonuç 4.1.5'ün a) şıkkında verilen eşitsizliğin ağırlıklı hali olan

$$\left|\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)f(a,c)-\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)\int_a^b w_1(t)f(t,d)dt\right.$$
$$\left.-\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\int_c^d w_2(s)f(a,s)ds+\int_a^b\int_c^d w_1(t)w_2(s)f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq \left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)V_f(Q)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.4. Teorem 4.2.1'in şartları altında $x=h_1(a)$ ve $y=h_2(c)$ seçilirse, bu durumda Sonuç 4.1.5'ün b) şıkkında verilen eşitsizliğin ağırlıklı hali olan

$$\left|\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)f(b,d)-\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)\int_a^b w_1(t)f(t,d)dt\right.$$
$$\left.-\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\int_c^d w_2(s)f(b,s)ds+\int_a^b\int_c^d w_1(t)w_2(s)f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq \left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)V_f(Q)$$

eşitsizliği bulunur.

Sıradaki teoreme geçmeden aşağıdaki varsayımlar verilmelidir.

w_1, h_1, w_2 ve h_2 bir önceki teoremde tanımlandığı gibi olsun ve $0 \le \alpha, \beta \le 1$ olsun. Ayrıca,

$$a_1 = h_1^{-1}\left(\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right)h_1(a) + \tfrac{\alpha}{2} h_1(b)\right),$$

$$b_1 = h_1^{-1}\left(\tfrac{\alpha}{2} h_1(a) + \left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right)h_1(b)\right),$$

$$c_1 = h_2^{-1}\left(\left(1-\tfrac{\beta}{2}\right)h_2(c) + \tfrac{\beta}{2} h_2(d)\right)$$

ve

$$d_1 = h_2^{-1}\left(\tfrac{\beta}{2} h_2(c) + \left(1-\tfrac{\beta}{2}\right)h_2(d)\right)$$

olarak tanımlansın.

Teorem 4.2.2. $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]\times[c,d]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu olsun. Bu durumda her $(x,y) \in [a_1,b_1]\times[c_1,d_1]$ için K ve L sırasıyla

$$K = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{2}\int_a^b w_1(t)dt + \left|h_1(x) - \frac{h_1(a)+h_1(b)}{2}\right|, & 0 \le \alpha \le \frac{1}{2} \\ \max\left\{\frac{1-\alpha}{2}\int_a^b w_1(t)dt + \left|h_1(x) - \frac{h_1(a)+h_1(b)}{2}\right|, \frac{\alpha}{2}\int_a^b w_1(t)dt\right\}, & \frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3} \\ \frac{\alpha}{2}\int_a^b w_1(t)dt, & \frac{2}{3} \le \alpha \le 1 \end{cases}$$

ve

$$L = \begin{cases} \frac{1-\beta}{2}\int_c^d w_2(t)dt + \left|h_2(y) - \frac{h_2(c)+h_2(d)}{2}\right|, & 0 \le \beta \le \frac{1}{2} \\ \max\left\{\frac{1-\beta}{2}\int_c^d w_2(t)dt + \left|h_2(y) - \frac{h_2(c)+h_2(d)}{2}\right|, \frac{\beta}{2}\int_c^d w_2(t)dt\right\}, & \frac{1}{2} < \beta < \frac{2}{3} \\ \frac{\beta}{2}\int_c^d w_2(t)dt, & \frac{2}{3} \le \beta \le 1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\left|\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)\left[(1-\alpha)(1-\beta) f(x,y)\right.\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+(1-\alpha)\beta\frac{f(x,c)+f(x,d)}{2}+\alpha(1-\beta)\frac{f(a,y)+f(b,y)}{2}\\
&+\alpha\beta\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}\Bigg]\\
&-\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)\left[\frac{\beta}{2}\int_a^b w_1(t)[f(t,c)+f(t,d)]dt+(1-\beta)\int_a^b w_1(t)f(t,y)dt\right]\\
&-\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left[\frac{\alpha}{2}\int_c^d w_2(s)[f(a,s)+f(b,s)]ds+(1-\alpha)\int_c^d w_2(s)f(y,s)ds\right]\\
&+\int_a^b\int_c^d w_1(t)w_2(s)f(t,s)dsdt\Bigg|\\
&\le KLV_f(Q)
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

eşitsizliği vardır.

Bu eşitsizlikte $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ için $\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{4}$ sabiti ve $\alpha,\beta\in\left[\frac{2}{3},1\right]$ için $\frac{\alpha\beta}{4}$ sabiti en iyi sabittir ve daha küçük bir sabit ile yer değiştirilemezler.

İspat. Her $(x,y)\in[a_1,b_1]\times[c_1,d_1]$ için q ve p dönüşümleri sırasıyla

$$
q(t)=\begin{cases} h_1(t)-\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(a)+\frac{\alpha}{2}h_1(b)\right], & t\in[a,x)\\ h_1(t)-\left[\frac{\alpha}{2}h_1(a)+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(b)\right], & t\in[x,b]\end{cases}
$$

ve

$$
p(s)=\begin{cases} h_2(s)-\left[\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(c)+\frac{\beta}{2}h_2(d)\right], & s\in[c,y)\\ h_2(s)-\left[\frac{\beta}{2}h_2(c)+\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(d)\right], & s\in[y,d]\end{cases}
$$

olarak tanımlansınlar. Bu çekirdekler yardımıyla

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b\int_c^d q(t)p(s)d_td_sf(t,s)\\
&=\int_a^x\int_c^y\left(h_1(t)-\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(a)+\frac{\alpha}{2}h_1(b)\right]\right)\left(h_2(s)-\left[\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(c)+\frac{\beta}{2}h_2(d)\right]\right)d_td_sf(t,s)\\
&+\int_a^x\int_y^d\left(h_1(t)-\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(a)+\frac{\alpha}{2}h_1(b)\right]\right)\left(h_2(s)-\left[\frac{\beta}{2}h_2(c)+\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(d)\right]\right)d_td_sf(t,s)
\end{aligned}
$$

$$+\int_x^b\int_c^y\left(h_1(t)-\left[\frac{\alpha}{2}h_1(a)+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(b)\right]\right)\left(h_2(s)-\left[\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(c)+\frac{\beta}{2}h_2(d)\right]\right)d_t d_s f(t,s)$$

$$+\int_x^b\int_y^d\left(h_1(t)-\left[\frac{\alpha}{2}h_1(a)+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(b)\right]\right)\left(h_2(s)-\left[\frac{\beta}{2}h_2(c)+\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(d)\right]\right)d_t d_s f(t,s)$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

elde edilir. Kısmi integrasyon yardımıyla birinci integral

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_a^x\int_c^y\left(h_1(t)-\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(a)+\frac{\alpha}{2}h_1(b)\right]\right) \\
&\quad\times\left(h_2(s)-\left[\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(c)+\frac{\beta}{2}h_2(d)\right]\right)d_t d_s f(t,s) \\
&=\left[h_1(x)-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(a)-\frac{\alpha}{2}h_1(b)\right]\left[h_2(y)-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(c)-\frac{\beta}{2}h_2(d)\right]f(x,y) \\
&\quad+\left[h_1(x)-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(a)-\frac{\alpha}{2}h_1(b)\right]\left(\beta\frac{h_2(d)-h_2(c)}{2}\right)f(x,c) \\
&\quad+\left(\alpha\frac{h_1(b)-h_1(a)}{2}\right)\left[h_2(y)-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(c)-\frac{\beta}{2}h_2(d)\right]f(a,y) \\
&\quad+\left(\alpha\frac{h_1(b)-h_1(a)}{2}\right)\left(\beta\frac{h_2(d)-h_2(c)}{2}\right)f(a,c) \\
&\quad-\left[h_2(y)-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(c)-\frac{\beta}{2}h_2(d)\right]\int_a^x w_1(t)f(t,y)dt \\
&\quad-\left(\beta\frac{h_2(d)-h_2(c)}{2}\right)\int_a^x w_1(t)f(t,c)dt \\
&\quad-\left[h_1(x)-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(a)-\frac{\alpha}{2}h_1(b)\right]\int_c^y w_2(s)f(x,s)ds \\
&\quad-\left(\alpha\frac{h_1(b)-h_1(a)}{2}\right)\int_c^y w_2(s)f(a,s)ds \\
&\quad+\int_a^x\int_c^y w_1(t)w_2(s)f(t,s)dsdt,
\end{aligned} \tag{4.55}$$

olur. Benzer şekilde, diğer integraller için kısmi integrasyon uygulanırsa, sırasıyla

$$I_2=\int_a^x\int_y^d\left(h_1(t)-\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(a)+\frac{\alpha}{2}h_1(b)\right]\right)$$

$$\times\left(h_2(s)-\left[\frac{\beta}{2}h_2(c)+\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(d)\right]\right)d_t d_s f(t,s)$$

$$\begin{aligned}
&=\left[h_1(x)-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(a)-\frac{\alpha}{2}h_1(b)\right]\left(\beta\frac{h_2(d)-h_2(c)}{2}\right)f(x,d)\\
&-\left[h_1(x)-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(a)-\frac{\alpha}{2}h_1(b)\right]\\
&\times\left[h_2(y)-\frac{\beta}{2}h_2(c)-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(d)\right]f(x,y)\\
&+\left(\alpha\frac{h_1(b)-h_1(a)}{2}\right)\left(\beta\frac{h_2(d)-h_2(c)}{2}\right)f(a,d)\\
&-\left(\alpha\frac{h_1(b)-h_1(a)}{2}\right)\left[h_2(y)-\frac{\beta}{2}h_2(c)-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(d)\right]f(a,y)\\
&-\left(\beta\frac{h_2(d)-h_2(c)}{2}\right)\int_a^x w_1(t)f(t,d)dt\\
&+\left[h_2(y)-\frac{\beta}{2}h_2(c)-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(d)\right]\int_a^x w_1(t)f(t,y)dt\\
&-\left[h_1(x)-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(a)-\frac{\alpha}{2}h_1(b)\right]\int_y^d w_2(s)f(x,s)ds\\
&-\left(\alpha\frac{h_1(b)-h_1(a)}{2}\right)\int_y^d w_2(s)f(a,s)ds\\
&+\int_a^x\int_y^d w_1(t)w_2(s)f(t,s)dsdt,
\end{aligned}\tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
I_3&=\int_x^b\int_c^y\left(h_1(t)-\left[\frac{\alpha}{2}h_1(a)+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(b)\right]\right)\\
&\times\left(h_2(s)-\left[\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(c)+\frac{\beta}{2}h_2(d)\right]\right)d_s d_t f(t,s)\\
&=\left(\alpha\frac{h_1(b)-h_1(a)}{2}\right)\left[h_2(y)-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(c)-\frac{\beta}{2}h_2(d)\right]f(b,y)\\
&+\left(\alpha\frac{h_1(b)-h_1(a)}{2}\right)\left(\beta\frac{h_2(d)-h_2(c)}{2}\right)f(b,c)\\
&-\left[h_1(x)-\frac{\alpha}{2}h_1(a)-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(b)\right]\\
&\times\left[h_2(y)-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(c)-\frac{\beta}{2}h_2(d)\right]f(x,y)
\end{aligned}\tag{4.57}$$

$$-\left[h_1(x)-\frac{\alpha}{2}h_1(a)-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(b)\right]\left(\beta\frac{h_2(d)-h_2(c)}{2}\right)f(x,c)$$
$$-\left[h_2(y)-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(c)-\frac{\beta}{2}h_2(d)\right]\int_x^b w_1(t)f(t,y)dt$$
$$-\left(\beta\frac{h_2(d)-h_2(c)}{2}\right)\int_x^b w_1(t)f(t,c)dt$$
$$-\left(\alpha\frac{h_1(b)-h_1(a)}{2}\right)\int_c^y w_2(s)f(b,s)ds$$
$$+\left[h_1(x)-\frac{\alpha}{2}h_1(a)-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(b)\right]\int_c^y w_2(s)f(x,s)ds$$
$$+\int_x^b\int_c^y w_1(t)w_2(s)f(t,s)dsdt,$$

ve

$$I_4=\int_x^b\int_y^d\left(h_1(t)-\left[\frac{\alpha}{2}h_1(a)+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(b)\right]\right)$$
$$\times\left(h_2(s)-\left[\frac{\beta}{2}h_2(c)+\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(d)\right]\right)d_sd_t f(t,s)$$
$$=\left(\alpha\frac{h_1(b)-h_1(a)}{2}\right)\left(\beta\frac{h_2(d)-h_2(c)}{2}\right)f(b,d) \tag{4.58}$$
$$-\left(\alpha\frac{h_1(b)-h_1(a)}{2}\right)\left[h_2(y)-\frac{\beta}{2}h_2(c)-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(d)\right]f(b,y)$$
$$-\left[h_1(x)-\frac{\alpha}{2}h_1(a)-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(b)\right]\left(\beta\frac{h_2(d)-h_2(c)}{2}\right)f(x,d)$$
$$+\left[h_1(x)-\frac{\alpha}{2}h_1(a)-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(b)\right]\left[h_2(y)-\frac{\beta}{2}h_2(c)-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(d)\right]f(x,y)$$
$$-\left(\beta\frac{h_2(d)-h_2(c)}{2}\right)\int_x^b w_1(t)f(t,d)dt$$
$$+\left[h_2(y)-\frac{\beta}{2}h_2(c)-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(d)\right]\int_x^b w_1(t)f(t,y)dt$$
$$-\left(\alpha\frac{h_1(b)-h_1(a)}{2}\right)\int_y^d w_2(s)f(b,s)ds$$
$$+\left[h_1(x)-\frac{\alpha}{2}h_1(a)-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(b)\right]\int_y^d w_2(s)f(x,s)ds$$

$$+\int_x^b\int_y^d w_1(t)w_2(s)f(t,s)dsdt$$

bulunur. Elde edilen (4.55)-(4.58) eşitlikler yerlerine konulup ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\int_a^b\int_c^d q(t)p(s)d_sd_t f(t,s)$$
$$=\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)\left[(1-\alpha)(1-\beta)f(x,y)+(1-\alpha)\beta\frac{f(x,c)+f(x,d)}{2}\right.$$
$$\left.+\alpha(1-\beta)\frac{f(a,y)+f(b,y)}{2}+\alpha\beta\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}\right]$$
$$-\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)\left[\frac{\beta}{2}\int_a^b w_1(t)[f(t,c)+f(t,d)]dt+(1-\beta)\int_a^b w_1(t)f(t,y)dt\right]$$
$$-\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left[\frac{\alpha}{2}\int_c^d w_2(s)[f(a,s)+f(b,s)]ds+(1-\alpha)\int_c^d w_2(s)f(y,s)ds\right]$$
$$+\int_a^b\int_c^d w_1(t)w_2(s)f(t,s)dsdt$$

elde edilir.

Diğer taraftan bulunan bu eşitlikte mutlak değer alınıp Lemma 2.3.3 kullanılırsa,

$$\left|\int_a^b\int_c^d q(t)p(s)d_td_s f(t,s)\right|$$
$$\le \sup_{t\in[a,b]}|q(t)|\sup_{s\in[c,d]}|p(s)|V_f(Q)$$
$$=\max\left\{h_1(x)-\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(a)+\frac{\alpha}{2}h_1(b)\right],\right.$$
$$\left.\left[\frac{\alpha}{2}h_1(a)+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)h_1(b)\right]-h_1(x),\frac{\alpha}{2}[h_1(b)-h_1(a)]\right\}$$
$$\times\max\left\{h_2(y)-\left[\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(c)+\frac{\beta}{2}h_2(d)\right],\right.$$
$$\left.\left[\frac{\beta}{2}h_2(c)+\left(1-\frac{\beta}{2}\right)h_2(d)\right]-h_2(y),\frac{\beta}{2}[h_2(d)-h_2(c)]\right\}V_f(Q)$$
$$=\max\left\{\frac{1-\alpha}{2}[h_1(b)-h_1(a)]+\left|h_1(x)-\frac{h_1(a)+h_1(b)}{2}\right|,\frac{\alpha}{2}[h_1(b)-h_1(a)]\right\}$$
$$\times\max\left\{\frac{1-\beta}{2}[h_2(d)-h_2(c)]+\left|h_2(y)-\frac{h_2(c)+h_2(d)}{2}\right|,\frac{\beta}{2}[h_2(d)-h_2(c)]\right\}V_f(Q)$$

$$
\begin{aligned}
&= \max\left\{\frac{1-\alpha}{2}\int_a^b w_1(t)dt + \left|h_1(x) - \frac{h_1(a)+h_1(b)}{2}\right|, \frac{\alpha}{2}\int_a^b w_1(t)dt\right\} \\
&\quad \times \max\left\{\frac{1-\beta}{2}\int_c^d w_2(t)dt + \left|h_2(y) - \frac{h_2(c)+h_2(d)}{2}\right|, \frac{\beta}{2}\int_c^d w_2(t)dt\right\} V_f(Q) \\
&= KLV_f(Q)
\end{aligned}
$$

bulunur ve böylece istenen (4.54) eşitsizliği elde edilmiş olur.

$(\alpha,\beta) \in \left[0,\tfrac{1}{2}\right] \times \left[0,\tfrac{1}{2}\right]$ sabitlerin kesinliğini ispatlamak için (4.54) eşitsizliğinin $A = A_1.A_2$, $A_1, A_2 > 0$ sabiti için sağlandığı kabul edilsin, yani,

$$
\begin{aligned}
&\Bigg| \left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)\Bigg[(1-\alpha)(1-\beta) f(x,y) \\
&\quad + (1-\alpha)\beta \frac{f(x,c)+f(x,d)}{2} + \alpha(1-\beta)\frac{f(a,y)+f(b,y)}{2} \\
&\quad + \alpha\beta \frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}\Bigg] \\
&\quad - \left(\int_c^d w_2(t)dt\right)\left[\frac{\beta}{2}\int_a^b w_1(t)\left[f(t,c)+f(t,d)\right]dt + (1-\beta)\int_a^b w_1(t) f(t,y)dt\right] \\
&\quad - \left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left[\frac{\alpha}{2}\int_c^d w_2(s)\left[f(a,s)+f(b,s)\right]ds + (1-\alpha)\int_c^d w_2(s) f(y,s)ds\right] \\
&\quad + \int_a^b\int_c^d w_1(t) w_2(s) f(t,s)dsdt \Bigg| \\
&\leq \left[A_1 \int_a^b w_1(t)dt + \left|h_1(x) - \frac{h_1(a)+h_1(b)}{2}\right|\right] \\
&\quad \times \left[A_2 \int_c^d w_2(t)dt + \left|h_2(y) - \frac{h_2(c)+h_2(d)}{2}\right|\right] V_f(Q)
\end{aligned} \tag{4.59}
$$

olsun. Eğer $f : Q \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$
f(t,s) = \begin{cases} 1, & (t,s) = \left(h_1\left(\frac{h_1(a)+h_1(b)}{2}\right), h_2\left(\frac{h_2(c)+h_2(d)}{2}\right)\right) \\ 0, & (t,s) \in [a,b]\times[c,d] \setminus \left\{\left(h_1\left(\frac{h_1(a)+h_1(b)}{2}\right), h_2\left(\frac{h_2(c)+h_2(d)}{2}\right)\right)\right\} \end{cases}
$$

olarak alınırsa f, Q üzerinde sınırlı varyasyonlu olur. Ayrıca

$$(x,y)=\left(h_1\left(\frac{h_1(a)+h_1(b)}{2}\right),h_2\left(\frac{h_2(c)+h_2(d)}{2}\right)\right)$$

için

$$\beta\frac{f(x,c)+f(x,d)}{2}=0,\ \frac{f(a,y)+f(b,y)}{2}=0,\ \frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}=0$$

$$\int_a^b w_1(t)\left[f(t,c)+f(t,d)\right]dt=\int_a^b w_1(t)f(t,y)dt=0$$
$$\int_c^d w_2(s)\left[f(a,s)+f(b,s)\right]ds=\int_c^d w_2(s)f(y,s)ds=0$$

$$\int_a^b\int_c^d w_1(t)w_2 f(t,s)dsdt=0,\text{ve}\,V_f(Q)=4$$

olur. Bulunan bu değerler (4.59) da yazılırsa,

$$\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)(1-\alpha)(1-\beta)\le 4\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)A_1A_2,$$

elde edilir ve $A\ge\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{4}$ bulunur. Bu da $\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{4}$ sabitinin en iyi sabit olduğunu gösterir.

$\alpha,\beta\in\left[\frac{2}{3},1\right]$ için (4.54) teki sabitin kesinliği

$$f(t,s)=\begin{cases}1, & (t,s)=(b,d)\\ 0, & (t,s)\in[a,b]\times[c,d]\setminus\{(b,d)\}\end{cases}$$

alınarak gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.5. Teorem 4.2.2'de özel olarak $w_1(t)\equiv w_2(s)\equiv 1$ $(h_1(t)=t$ ve $h_2(s)=s)$ alınsın

i) $\alpha=1,\ \ \beta=0,\ \ x=\frac{a+b}{2}$ ve $y=\frac{c+d}{2}$ için (4.54) eşitsizliği Sonuç 4.1.21'deki (4.36) eşitsizliğine, *ii)* $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ x = \frac{a+b}{2}$ ve $y = \frac{c+d}{2}$ için (4.54) eşitsizliği Sonuç 4.1.22'deki (4.38) eşitsizliğine,

iii) $\alpha = \beta = \frac{1}{2},\ x = \frac{a+b}{2}$ and $y = \frac{c+d}{2}$ için (4.54) eşitsizliği Sonuç 4.1.13'teki (4.24) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.2.6. *(Ağırlıklı Ostrowski eşitsizliği)* Teorem 4.2.2'nin şartları altında $\alpha = \beta = 0$ seçilirse, bu takdirde her $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$ için Teorem 4.1.1'de ispatlanan Ostrowski eşitsizliğinin ağırlıklı hali olan

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\int_a^b w_1(t)dt \right)\left(\int_c^d w_2(t)dt \right) f(x,y) - \left(\int_c^d w_2(t)dt \right) \int_a^b w_1(t) f(t,y)dt \right. \\
&\left. - \left(\int_a^b w_1(t)dt \right) \int_c^d w_2(s) f(y,s)ds + \int_a^b \int_c^d w_1(t) w_2(s) f(t,s)dsdt \right| \\
&\leq \left[\frac{1}{2} \int_a^b w_1(t)dt + \left| h_1(x) - \frac{h_1(a)+h_1(b)}{2} \right| \right] \\
&\times \left[\frac{1}{2} \int_c^d w_2(t)dt + \left| h_2(y) - \frac{h_2(c)+h_2(d)}{2} \right| \right] V_f(Q)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.7. Teorem 4.2.2'nin şartları altında $\alpha = \beta = 1$, bu durumda Teorem 4.2.2'deki (4.54) eşitsizlik Sonuç 4.2.2'deki ağırlıklı Yamuk eşitsizliğinine dönüşür.

Sonuç 4.2.7. *(Ağırlıklı Simpson eşitsizliği)* Teorem 4.2.2'nin şartları altında $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$, $x = h_1^{-1}\left(\frac{h_1(a)+h_1(b)}{2} \right)$ ve $y = h_2^{-1}\left(\frac{h_2(c)+h_2(d)}{2} \right)$ seçilirse, bu durumda Teorem 4.1.3'te ispatlanan Simpson eşitsizliğinin ağırlıklı hali olan

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\int_a^b w_1(t)dt \right)\left(\int_c^d w_2(t)dt \right) \left[\frac{f(b,d)+f(b,c)+f(a,d)+f(a,c)}{36} \right. \right. \\
&\left. + \frac{f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)}{9} + \frac{4}{9} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right] \\
&- \frac{1}{6} \left(\int_c^d w_2(t)dt \right) \int_a^b w_1(t) \left[f(t,c) + 4f(t,y) + f(t,d) \right] dt
\end{aligned}$$

$$
-\frac{1}{6}\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\int_c^d w_2(s)\left[f(a,s)+4f(y,s)+f(b,s)\right]ds+\int_a^b\int_c^d w_1(t)w_2(s)f(t,s)dsdt\Bigg|
$$

$$
\leq \frac{1}{9}\left(\int_a^b w_1(t)dt\right)\left(\int_c^d w_2(t)dt\right)V_f(Q)
$$

eşitsizliği elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezin esasını oluşturan üçüncü ve dördüncü bölümlerde elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

1. İlk olarak sınırlı varyasyona sahip fonksiyonlar için literatürdeki birçok çalışmanın genellemesi olan bazı Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca ağırlık fonksiyonu kullanılarak ağılıklı eşitsizlikler de elde edilmiştir. Elde edilen bu eşitsizliklerin özel durumları incelenerek literatürdeki birçok çalışmanın genellemesi olduğu gösterilmiştir.

2. Türevi veya *n.* türevi sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için Ostrowski tipinde eşitsizlikler ispatlanmıştır. Daha sonra bu eşitsizliklerin ağırlıklı versiyonları da verilmiştir. Yine bu eşitsizliklerin özel durumları incelenerek birçok çalımanın genellemesi olduğu saptanmıştır.

3. Elde edilen eşitsizlikler kullanılarak integrallerin nümerik hesaplamaları için bazı formüller verilerek hataları için üst sınırlar bulunmuştur. Ayrıca bazı belli fonksiyonlar için farklı yöntemlerle nümerik hesaplamalar yapılarak kıyasları yapılmıştır.

4. İki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için bazı genelleşmiş Ostrowski tipli eşitsizlikler ve bunların ağırlıklı halleri elde edilmiştir. Bulunan bu eşitsizlikler iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için literatürde var olan boşluğu büyük ölçüde doldurmuştur.

Sonraki çalışmalarda, üçüncü bölümde tek değişkenli fonksiyonlar için verilen uygulamalara benzer olarak, dördüncü bölümde elde edilen eşitsizlikler yardımıyla iki katlı integraller için bazı nümerik uygulamalar verilebilir. Ayrıca üçüncü bölümde ispatlanan eşitsizliklerin benzereleri iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için ispatlanabilir.

6. KAYNAKLAR

[1] C. Jordan, "Sur la série de Fourier," *C.R. Acad. Sci.* vol. 2, pp. 228-230, 1881.

[2] J. Appell, J. Banas, and N. Merentes, *Bounded Variation and Around*, 1st ed., Göttingen, Germany: De Gruyter, 2014.

[3] J. A. Clarkson and C. R. Adams, "On definitions of bounded variation for functions of two variables," *Bull. Amer. Math. Soc.* vol. 35, pp. 824-854, 1933.

[4] G. H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, 2nd ed., U.K.: Cambridge University Press, 1934.

[5] E. F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, 1st ed., Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1965.

[6] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1970.

[7] A. M. Ostrowski, "Über die absolutabweichung einer differentiebaren funktion von ihrem integralmitelwert," *Comment. Math. Helv.*, vol. 10, pp. 226-227, 1938.

[8] S. S. Dragomir and T. Rassias (Eds.), *Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2002.

[9] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and A.M. Fink, *Inequalities for Functions and Their Integrals and Derivatives*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994.

[10] S. S. Dragomir, "Ostrowski type inequalities for continuous functions of selfanjoint operators on Hilbert spaces: A survey of recent results," *Ann. Funct. Anal.*, vol. 2, no. 1, pp. 139-205, 2011.

[11] S. S. Dragomir, "On the Ostrowski's integral inequality for mappings with bounded variation and applications," *Math. Inequal. Appl.*, vol. 4, no. 1, pp. 59-66, 2001.

[12] S. S. Dragomir, "On Simpson's quadrature formula for mappings of bounded variation and applications," *Tamkang J. of Math.*, vol. 30, no. 1, pp. 53-58, 1999.

[13] S. S. Dragomir, "On the midpoint quadrature formula for mappings with bounded variation and applications," *Kragujevac J. Math.*, vol. 22, pp. 13-19, 2000.

[14] S. S. Dragomir, "On trapezoid quadrature formula and applications," *Kragujevac J. Math.*, vol. 23, pp. 25-36, 2001.

[15] S. S. Dragomir, "The Ostrowski integral inequality for mappings of bounded variation," *Bull.Austral. Math. Soc.*, vol. 60, no. 1, pp. 495-508, 1999.

[16] P. Cerone, S. S. Dragomir and C. E. M. Pearce, "A generalized trapezoid inequality for functions of bounded variation," *Turk J. Math.*, vol. 24, pp. 147-163, 2000.

[17] M. W. Alomari, "A companion of Ostrowski's inequality with applications," *TJMM*, vol. 3, no. 1, pp. 9-14, 2011.

[18] M. W. Alomari, "A Generalization of Dragomir's generalization of Ostrowski integral inequality and applications in numerical integration," *Ukrainian*

Mathematical Journal, vol. 64, no. 4, pp. 435-450, 2012.

[19] M. W. Alomari, "A companion of the generalized trapezoid inequality and applications," *Journal of Mathematics and Applications*, vol. 36, pp. 5-15, 2013.

[20] S. S. Dragomir, "A companion of Ostrowski's inequality for functions of bounded variation and applications," *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, vol. 5, no. 1, pp. 89-97, 2014.

[21] N.S. Barnett, S.S. Dragomir and I. Gomm, "A companion for the Ostrowski and the generalized trapezoid inequalities," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 50, pp. 179-187, 2009.

[22] K. L. Tseng, G. S Yang and S. S. Dragomir, "Generalizations of weighted trapezoidal inequality for mappings of bounded variation and their applications," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 40, pp. 77-84, 2004.

[23] K. L. Tseng, G. S. Yang and S. S. Dragomir, "On weighted Simpson type inequalities and applications," *Journal of Mathematical Inequalities*, vol. 1, no. 1, pp. 13-22, 2007.

[24] K. L. Tseng, S. R. Hwang and S. S. Dragomir, "Generalizations of weighted Ostrowski type inequalities for mappings of bounded variation and applications," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 55, pp. 1785-1793, 2008.

[25] Z. Liu, "Another generalization of weighted Ostrowski type inequality for mappings of bounded variation," *Applied Mathematics Letters*, vol. 25, pp. 393-397, 2012.

[26] K. L. Tseng, S. R. Hwang, G. S. Yang and Y. M. Chou, "Weighted Ostrowski integral inequality for mappings of bounded variation," *Taiwanese J. of Math.*, vol. 15, no. 2, pp. 573-585, 2011.

[27] M. W. Alomari and M.A. Latif, "A weighted companion for the Ostrowski and the generalized trapezoid inequalities for mappings of bounded variation," *RGMIA Research Report Collection*, vol. 14, Article 92, 2011.

[28] M. W. Alomari, "A Generalization of weighted companion of Ostrowski integral inequality for mappings of bounded variation," *RGMIA Research Report Collection*, vol. 14, Article 87, 2011.

[29] W. Liu, "Some weighted integral inequalities with a parameter and applications," *Acta Appl. Math.*, vol. 109, pp. 389-400, 2010.

[30] Z. Liu, "Some Ostrowski type inequalities," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 48, pp. 949-960, 2008.

[31] S. S. Dragomir, "Approximating real functions which possess nth derivatives of bounded variation and applications," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 56, pp. 2268-2278, 2008.

[32] S. S. Dragomir and S. Abelman, "Approximating the Riemann-Stieltjes integral of n-time differentiable integrands and of bounded variation integrators with applications," *Research Report Collection*, vol. 14, Article 41, 2011.

[33] M. W. Alomari, "New sharp Ostrowski-type inequalities and generalized trapezoid-type inequalities for Riemann-Stieltjes integrals and their applications," *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 65, no. 7, pp. 995-1018, 2013.

[34] M. W. Alomari, "A companion of Ostrowski's inequality for the Riemann--Stieltjes integral $\int_a^b f(t)du(t)$, where f is of bounded variation and u is of $r-H-$Hölder type and applications," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, pp. 4792-4799, 2013.

[35] M. W. Alomari and S. S. Dragomir, "Mercer-Trapezoid rule for the Riemann-Stieltjes integral with applications," *RGMIA Research Report Collection*, vol. 15, Article 76, 2012.

[36] P. Cerone, W. S. Cheung and S. S. Dragomir, "On Ostrowski type inequalities for Stieltjes integrals with absolutely continuous integrands and integrators of bounded variation," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 54, pp. 183-191, 2007.

[37] S. S. Dragomir, "On the Ostrowski inequality for Riemann-Stieltjes integral $\int_a^b f(t)du(t)$, where f is Hölder type and u is of bounded variation and applications," *J. KSIAM*, vol.5, no.1, pp. 35-45, 2001.

[38] S. S. Dragomir, "Refinements of the generalised trapezoid and Ostrowski inequalities for functions of bounded variation," *Arch. Math*. vol. 91, pp. 450-460, 2008.

[39] S. S. Dragomir and E. Momoniat, "A Three point quadrature rule for functions of bounded variation and applications," *RGMIA Research Report Collection*, vol. 14, Article 33, 16 pp., 2011.

[40] S. S. Dragomir, "Bounding the Cebyšev functional for functions of bounded variation and applications," *RGMIA Research Report Collection*, vol. 14 Article 5, 2011.

[41] D. Y. Hwang and S. S. Dragomir, "Comparing two integral means for mapping of bounded variation and applications," *RGMIA Research Report Collection*, vol. 16, Article 11, 2013.

[42] W. Liu and Y. Sun, "New estimates of the remainder term in Simpson's quadrature formula for functions of bounded variation," *Science Asia*, vol. 40, pp. 84-88, 2014.

[43] W. Liu and Y. Sun, "A refinement of the companion of Ostrowski inequality for functions of bounded variation and applications," arXiv:1207.3861v1, 17 Jul 2012.

[44] J. Pečarić and S. Varošanec, "A note on Simpson's inequality for functions of bounded variation," *Tamkang Journal of Mathematics*, vol. 31, no. 3, pp. 239-242, 2000.

[45] K. L. Tseng, Improvements of some inequalities of Ostrowski type and their applications, *Taiwanese J. of Math.*, vol. 12, no. 9, pp. 2427-2441, 2008.

[46] K. L. Tseng, S. R. Hwang, G. S. Yang and Y. M. Chou, "Improvements of the Ostrowski integral inequality for mappings of bounded variation I," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 217, pp. 2348-2355, 2010.

[47] K. L. Tseng, "Improvements of the Ostrowski integral inequality for mappings of bounded variation II," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, pp. 5841-5847, 2012.

[48] S. S. Dragomir, R. P. Agarwal and P. Cerone, "On Simpson's inequality and

applications," *J. of Inequal. & Appl.*, vol. 5, pp. 533-579, 2000.

[49] Y. Jawarneh and M. S. M Noorani, "Inequalities of Ostrowski and Simpson type for mappings of two variables with bounded variation and applications," *TJMM*, vol. 3, no. 2, pp. 81-94, 2011.

[50] C. S. Schumacher, *Closer and Closer: Introducing Real Analysis*, 1st ed., Boston, USA: Jones and Bartlett Publishers Inc., 2008.

[51] A. Dönmez, *Reel Analiz Lebesgue Ölçümü ve İntegrali*, 1. baskı, Ankara, Türkiye: Seçkin Yayncılık, 2001.

[52] R. A. Gordon, *Real Analysis: A First Course*, 2nd ed., Boston, USA: Pearson Education Inc., 2002.

[53] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1964.

[54] T. M. Apostol, Mathematical Analysis, 2nd ed., Addision-Wesley Publishing Company,1975.

[55] M. Fréchet, "Extension au cas des intégrals multiples d'une définition de l'intégrale due á Stieltjes," *Nouvelles Annales de Math ematiques*, vol. 10, pp. 241-256, 1910.

[56] J. A. Clarkson, "On double Riemann-Stieltjes integrals," *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 39, pp. 929-936, 1933.

[57] F. Moricz, "Order of magnitude of double Fourier coefficients of functions of bounded variation," *Analysis (Munich)*, vol. 22, no. 4, pp. 335-345, 2002.

[58] A. Qayyum, M. Shoaib and I. Faye, "A companion of Ostrowski type integral inequality using a 5-step kernel with some applications," *Filomat*, vol. 30, no. 13, pp. 3601–3614, 2016.

[59] Z. Liu, "Some Companion of an Ostrowski type inequality and application," *JIPAM*, vol. 10, no. 2, Article 52, 2009.

[60] A. Qayyum, M. Shoaib and I. Faye, "Companion of Ostrowski-type inequality based on 5-step quadratic kernel and applications," *Journal of Nonlinear Science and Applications*, vol. 9, no. 2, pp. 537-552, 2016.

[61] H. Budak and M.Z. Sarikaya, "On generalization trapezoid inequality for functions of two variables with bounded variation and applications," *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, vol.7, no. 1, pp. 77-85, 2016.

7. EKLER

7.1. EK 1: TEZDEN ÜRETİLEN BİLİMSEL MAKALELER

Bu tez iki ana bölümden oluşmuş ve bu ana bölümlerde verilen sonuçlar birçok uluslararası indekslerce taranan bilimsel dergilerde basılmış veya basım aşamasındadır. Bu bölümde bu yayınların ayrıntıları verilecektir.

Üçüncü bölümde tek değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için elde edilen sonuçları içeren yayınlar aşağıdaki gibidir:

1. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “On generalization of Dragomir’s inequalities,” *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, vol. 5, no. 5, pp. 191-196, 2017.

2. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “New weighted Ostrowski type inequalities for mappings with first derivatives of bounded variation,” *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics (TJMM)*, vol. 8, no. 1, pp. 21-27, 2016.

3. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “A new Ostrowski type inequality for functions whose first derivatives are of bounded variation,” *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis (MJPAA)*, vol. 2, no. 1, pp. 1-11, 2016.

4. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “A companion of Ostrowski type inequalities for mappings of bounded variation and some applications,” *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, vol. 171, no. 2, pp. 136–143, 2017. (ESCI)

5. H. Budak, M. Z. Sarikaya and A. Qayyum, “Improvement in companion of Ostrowski type inequalities for mappings whose first derivatives are of bounded variation and application,” *Filomat*, Basımda. (SCI-E)

6. H. Budak, M. Z. Sarikaya and A. Qayyum, “New refinements and applications of Ostrowski type inequalities for mappings whose nth derivatives are of bounded variation,” *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, Basımda. (ESCI)

Benzer şekilde dördüncü bölümde iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için elde edilen sonuçları içeren yayınlar aşağıdaki verilmiştir:

1. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “On generalization Ostrowski type inequalities for functions of two variables with bounded variation,” *Palestine Journal of Mathematics*, vol. 5, no.1, pp. 86-97, 2016.

2. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “A companion of Ostrowski type inequalities for functions of two variables with bounded variation,” *Journal of Advanced Mathematical Studies*, vol. 8, no. 2, 17-184, 2015.

3. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “A companion of generalization of Ostrowski type inequalities for functions of two variables with bounded variation,” *Applied and Computational Mathematics*, vol. 15, no. 3, pp. 297-312, 2016. (SCI-E)

4. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “On weighted Ostrowski type inequalities for functions of two variables with bounded variation,” *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, vol. 2017, Article ID 23, 2017. (ESCI)

5. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “A companion of the generalized trapezoid inequality for functions of two variables with bounded variation and applications,” *International Journal of Applied Nonlinear Science*, vol. 2, no. 4, pp. 311-327, 2016. (ESCI)

6. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “A new generalization of Ostrowski type inequalities for mappings of bounded variation,” *Lobachevskii Journal of Mathematics*, Basımda. (ESCI)

7. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “On weighted generalization of trapezoid inequalities for functions of two variables with bounded variation,” *Kragujevac Journal of Mathematics*, Basımda. (ESCI)

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Hüseyin BUDAK
Doğum Tarihi ve Yeri	: 05.02.1988-Oltu
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: hsyn.budak@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Doktora	Matematik	Düzce Üniversitesi	2017
Y. Lisans	Matematik	Kocaeli Üniversitesi	2013
Lisans	Matematik	Kocaeli Üniversitesi	2010
Lise		Erzurum Anadolu Lisesi	2006

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A1. M. Z. Sarikaya and H. Budak, "On an inequality of Ostrowski type via variant of Pompeiu's mean value theorem," *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, vol. 2, no. 3, pp. 80-84, 2014.

A2. M. Z. Sarikaya, H. Budak and H. Yaldiz, "Cebysev type inequalities for co-ordinated convex functions," *Pure and Applied Mathematics Letters*, vol. 2, pp. 36-40, 2014.

A3. M. Z. Sarikaya, H. Budak and H. Yaldiz, "Some new Ostrowski type inequalities for co-ordinated convex functions," *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, vol. 2, no. 5, pp. 176-182, 2014.

A4. M. Zeki Sarikaya and Hüseyin Budak, "Some Hermite -Hadamard type integral inequalities for twice differentiable mappings via fractional integrals," *Facta*

*Universitatis, Series: Mathematics and Informatics,*vol. 29, no. 4, pp. 371–384, 2014.

A5. M. Z. Sarikaya and H. Budak, “Generalized Hermite-Hadamard type integral inequalities for functions whose 3rd derivatives are s-convex,” *Tbilisi Mathematical Journal,* vol. 7, no. 2, pp:41-49, 2014.

A6. M. Z. Sarikaya and H. Budak, “An inequality of Gruss like via variant of Pompeiu's mean value theorem,” *Konuralp Journal of Mathematics,* vol. 3, no. 1, pp. 29-35, 2015.

A7. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “A companion of Ostrowski type inequalities for functions of two variables with bounded variation,” *Journal of Advanced Mathematical Studies*, vol. 8, no. 2, 17-184, 2015.

A8. M. Z. Sarikaya and H. Budak, “Some generalization of integral inequalities for twice differentiable mappings involving fractional integrals,” *Acta Universitatis Sapientiae Mathematica,* vol. 7, no. 2, pp. 251-264, 2015.

A9. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “On generalization trapezoid inequality for functions of two variables with bounded variation and applications,” *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.,* vol. 7, no. 1, pp. 77-85, 2016. (ESCI)

A10. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “On generalization Ostrowski type inequalities for functions of two variables with bounded variation,” *Palestine Journal of Mathematics*, vol. 5, no.1, pp. 86-97, 2016.

A11. M. Z. Sarikaya, T.a Tunc and H. Budak, “On generalized some integral inequalities for local fractional integrals,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 276, pp. 316–323, 2016. (SCI-E)

A12. M. Z. Sarikaya, H. Yaldiz and H. Budak, “Some integral inequalities for convex stochastic process,” *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, vol. LXXXV, no. 1, pp. 155-164, 2016.

A13. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “Comparing the integral means for functions of two variables with bounded variation,” *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 4, no. 2, pp. 46-55, 2016.

A14. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “A new Ostrowski type inequality for functions whose first derivatives are of bounded variation,” *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis (MJPAA)*, vol. 2, no. 1, pp. 1-11, 2016.

A15. M. Z. Sarikaya, S.t Erden and H. Budak, “Some generalized Ostrowski type inequalities involving local fractional integrals and applications,” *Advances in Inequalities and Applications,* vol. 2016:6, 2016.

A16. S. Erden, M. Z. Sarikaya and H. Budak, “Grüss type inequalities for generalized fractional integrals,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 1726, no. 020061, 2016. doi: 10.1063/1.4945887.

A17. M. Z. Sarikaya and H. Budak, “Generalized Hermite-Hadamard type integral inequalities for fractional integrals,” *Filomat*, vol. 30, no. 5, pp. 1315–1326, 2016. DOI 10.2298/FIL1605315S (SCI-E)

A18. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “Some perturbed Ostrowski type inequalities for functions whose first derivatives are of bounded variation,” *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 11, no. 2, pp. 146-156, 2016. (ESCI)

A19. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “A new companion of Ostrowski type inequalities for functions of two variables with bounded variation,” *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, vol. 31, no. 2, pp. 447–463, 2016.

A20. S. Erden, H. Budak and M. Z. Sarikaya, “An Ostrowski type inequality for twice differentiable mappings and applications,” *Mathematical Modelling and Analysis*, vol. 21, no. 4, pp. 522-532, 2016. (SCI-E)

A21. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “New weighted Ostrowski type inequalities for mappings with first derivatives of bounded variation,” *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics (TJMM)*, vol. 8, no. 1, pp. 21-27, 2016.

A22. M. Z. Sarikaya, H. Budak, T. Tunc, S. Erden and H. Yaldiz, “Perturbed companion of Ostrowski type inequality for twice differentiable functions,” *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, vol. 31, no. 3, pp. 593-607, 2016.

A23. H. Budak, S. Erden and M. Z. Sarikaya, “New weighted Ostrowski type inequalities for mappings whose nth derivatives are of bounded variation,” *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 12, no. 1, pp. 71-79, 2016. (ESCI)

A24. M. Z. Sarikaya, H. Budak and A. Qayyum, “An improved version of perturbed companion of Ostrowski type inequalities,” *Journal of Inequalities and Special Functions*, vol. 7, no. 3, pp. 12-25, 2016. (ESCI)

A25. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “On Ostrowski type inequalities for functions of two variables with bounded variation,” *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 12, no. 2, pp. 142-156, 2016. (ESCI)

A26. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “A companion of generalization of Ostrowski type inequalities for functions of two variables with bounded variation,” *Applied and Computational Mathematics*, vol. 15, no. 3, pp. 297-312, 2016. (SCI-E)

A27. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “On generalized Ostrowski type inequalities for functions whose first derivatives absolute value are convex,” *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 40, no. 6, pp. 1193 – 1210, 2016. (SCI-E)

A28. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “On Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex mappings via fractional integrals of a function with respect to another function,” *Fasciculi Mathematici*, No. 57, pp. 25-36. 2016.

A29. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “Weighted inequalities for Riemann-Stieltjes integrals,” *Application and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, vol. 11, no. 2, pp. 856 – 874, 2016. (ESCI)

A30. H. Budak, M. Z. Sarikaya and E. Set, "Generalized Ostrowski type inequalities for functions whose local fractional derivatives are generalized s-convex in the second sense," *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, vol. 15, no. 4, pp. 11-21, 2016. (ESCI)

A31. H. Budak and M. Z. Sarikaya, "A companion of the generalized trapezoid inequality for functions of two variables with bounded variation and applications," *International Journal of Applied Nonlinear Science*, vol. 2, no. 4, pp. 311-327, 2016. (ESCI)

A32. M. Z. Sarikaya and H. Budak, "On Fejér type inequalities via local fractional integrals," *Journal of Fractional Calculus and Applications (JFCA)*, vol. 8, no. 1, pp. 59-77, 2017.

A33. M. Z.Sarikaya, H. Budak, S. Erden and A. Qayyum, "A generalized and refined perturbed version of Ostrowski type inequalities," *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 13, no. 1, pp. 70-81, 2017. (ESCI)

A34. H. Budak and M. Z. Sarikaya, "On weighted Grüss type inequalities for double integrals," *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistic*, vol. 66, no. 2, pp. 53-61, 2017.

A35. M. Z. Sarikaya and H. Budak, "Generalized Ostrowski type inequalities for local fractional integrals," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 145, no. 4, pp. 1527–1538, 2017. (SCI)

A36. H. Budak and M. Z. Sarikaya, **"**On weighted Ostrowski type inequalities for functions of two variables with bounded variation," *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, vol. 2017, Article ID 23, 2017. (ESCI)

A37. H. Budak, M. Z. Sarikaya, A. Akkurt and H. Yıldırım **"**Perturbed companion of Ostrowski type inequality for functions whose first derivatives are of bounded variation," *Konuralp Journal of Mathematics*, vol. 5, no. 1, pp161-175, 2017.

A38. H. Budak and M. Z. Sarikaya, **"**On Ostrowski type inequalities for Fconvex function," *AIP Conference Proceedings*, vol. 1833, no.1. pp. 020057-1–020057-4, 2017.

A39. H. Budak, M. Z. Sarikaya and Z. Dahmani, "Chebyshev type inequalities for generalized stochastic fractional integrals," *AIP Conference Proceedings*, vol. 1833, no. 1, pp. 020007-1–020007-4, 2017.

A40. F. Usta, H. Budak and M. Z. Sarikaya, "On Chebychev type inequalities for fractional integral operators," *AIP Conference Proceedings*, vol. 1833, no. 1, pp. 020045-1–020045-4, 2017.

A41. T. Tunç, F. Usta, H. Budak and M. Z. Sarikaya, "On Grüss type inequalities utilizing generalized fractional integral operators," *AIP Conference Proceedings*, vol.

1833, no. 1, pp. 020054-1–020054-4, 2017.

A42. M. Z. Sarikaya, S. Erden and H. Budak, “Some integral inequalities for local fractional integrals,” *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 14, no. 1, pp. 9-19, 2017. (ESCI)

A43. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “An inequality of Ostrowski-Grüss type for double integrals,” *Studia Universitatis Babeș-Bolyai Mathematica*, vol. 62, no. 2, pp. 163-173, 2017.

A44. M. Z. Sarikaya and H. Budak, “Some new local fractional integral inequalities,” *Tbilisi Mathematical Journal*, vo. 10, no. 2, pp. 133-143, 2017. (ESCI)

A45. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “A companion of Ostrowski type inequalities for mappings of bounded variation and some applications,” *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, vol. 171, no. 2, pp. 136–143, 2017. (ESCI)

A46. A. Akkurt, M. Z. Sarikaya, H. Budak and H. Yildirim, “Generalized Ostrowski type integral inequalities involving generalized moments via local fractional integrals,” *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas (RACSAM)*, vol. 111, no. 3, pp. 797–807, 2017. (SCI-E)

A47. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “Generalized weighted Ostrowski type inequalities for local fractional integrals,” *Palestine Journal of Mathematics*, vol. 6, Special Issue: II, pp. 222-230, 2017.

A48. A. Akkurt, M. Z. Sarikaya, H. Budak and H. Yildirim, “On the Hadamard's type inequalities for co-ordinated convex functions via fractional integrals,” *Journal of King Saud University-Science*, vol. 29, no 3, pp. 380–387, 2017.

A49. Y. Erdem, H. Öğünmez and H. Budak, “Some generalized inequalities of Hermite-Hadamard type for strongly s-convex functions,” *New Trends in Mathematical Sciences*, vol.5, no. 3, pp. 22-32, 2017.

A50. M. Z. Sarikaya, H. Yaldız and H. Budak, “Steffensen's integral inequality for conformable fractional integrals,” *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 15, no. 1, 23-30, 2017.

A51. Y. Erdem, H. Öğünmez and H. Budak, “On some Hermite-Hadamard type inequalities for strongly s-convex functions,” *New Trends in Mathematical Sciences*, vol.5, no. 3, pp. 154-161, 2017.

A52. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “On generalization of Dragomir’s inequalities,” *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, vol. 5, no. 5, pp. 191-196, 2017.

A53. M. Z. Sarikaya and H. Budak, “New inequalities of Opial type for conformable fractional integrals,” *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 41, no. 5, pp. 1164-1173, 2017. (SCI-E)

A54. Y. Erdem, H. Budak and H. Öğünmez, “Some generalized Ostrowski type inequalities for functions whose second derivatives in absolute values are convex and applications," *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, vol. 171, no. 3, pp. 316-327, 2017.

B. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında (Proceedings) basılan bildiriler :

B1. H. K. Sevindir, C. Yazıcı, H. Budak, T. Meral, V. Yazıcı, "A Study on Secondary School Students' Mathematics Anxiety in Terms of Demographic Factors," presented at 6 th International Processing and Wavelet on Real World Applications Conference, Boğaziçi University, Istanbul, Turkey, September 28, 2012.

B2. H. Budak and M. Z. Sarikaya, "A new generalization of Ostrowski type inequality for mappings of bounded variation," presented at Workshop on Integral Geometry and Inverse Problems, Bulent Ecevit University, Zonguldak, pp 12, March 27-28, 2015.

B3. M. Z. Sarikaya, S.t Erden and H. Budak, "Some generalized Ostrowski type inequalities involving local fractional integrals and applications, presented at International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM 2015)," Yüzüncü Yıl University, Van, Turkey, pp 120, August 25-28, 2015.

B4. M. Z. Sarikaya, T. Tunc and H. Budak, "On generalized some integral inequalities for local fractional integrals," presented at Mathematical Inequalities and Application (MIA), Mostar, Bosnia and Herzegovina, pp 72, November, 11-15, 2015.

B5. H. Budak and M. Z. Sarikaya, "A new companion of Ostrowski type inequalities for mappings of bounded variation and applications, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016)," Fırat University, Turkey, pp 92-94, May 12-14, 2016.

B6. H. Budak, M. Z. Sarikaya, "Some companions of Ostrowski type inequalities for twice differentiable functions, presented at International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016),"Fırat University, Turkey, pp 197, May 12-14, 2016.

B7. A. Akkurt, H. Budak, M. Z. Sarikaya and H. Yıldırım, "On Feng Qi-type integral inequalities for local fractional integrals," presented at International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016), Fırat University, Turkey, pp 148-150, May 12-14, 2016.

B8. S. Erden, M. Z. Sarikaya and H. Budak, "Grüss type inequalities for generalized fractional integrals," presented at International Conference on Advances in Natural And Applied Sciences (ICANAS 2016), Antalya, Turkey, pp 180, April 21-23, 2016.

B9. H. Budak, F. Usta and M. Z. Sarikaya, "Weighted Ostrowski, Cebysev and Gruss type inequalities for conformable fractional integrals," presented at 3rd International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference (IFSCOM2016), Mersin, Turkey, pp 194. August 29 - September 1, 2016.

B10. H. Budak and M. Z. Sarikaya, “On Ostrowski type inequalities for Fconvex function,” presented at 2nd International Conference on Advances in Natural And Applied Sciences (ICANAS2017), Antalya, Turkey, pp. 18, 18-21 April, 2017.

B11. H. Budak, M. Z. Sarikaya and Z. Dahmani, “Chebyshev type inequalities for generalized stochastic fractional integrals,” presented at 2nd International Conference on Advances in Natural And Applied Sciences (ICANAS2017), Antalya, Turkey, pp. 21, 18-21 April, 2017.

B12. H. Budak, M. Z. Sarikaya and M. K. Yildiz, “Hermite-Hadamard type inequalities involving fractional integrals for F-convex functions,” presented at 2nd International Conference on Advances in Natural And Applied Sciences (ICANAS2017), Antalya, Turkey, pp. 85, 18-21 April, 2017.

B13. F. Usta, H. Budak and M. Z. Sarikaya, “On Chebychev type inequalities for fractional integral operators,” presented at 2nd International Conference on Advances in Natural And Applied Sciences (ICANAS2017), Antalya, Turkey, pp. 23, 18-21 April, 2017.

B14. T. Tunç, F. Usta, H. Budak and M. Z. Sarikaya, “On Grüss type inequalities utilizing generalized fractional integral operators,” presented at 2nd International Conference on Advances in Natural And Applied Sciences (ICANAS2017), Antalya, Turkey, pp. 19, 18-21 April, 2017.

B15. M. Z. Sarikaya, T. Tunç, and H. Budak, “On Simpson’s type inequality for F-convex,” presented at 2nd International Conference on Advances in Natural And Applied Sciences (ICANAS2017), Antalya, Turkey, pp. 86, 18-21 April, 2017.

B16. T. Tunç, H. Budak, F.Usta and M. Z. Sarikaya, “On Hermite-Hadamard type inequality for h-convex functions on fractal set,” presented at Mathematical Methods in Engineering, Ankara, Turkey, pp. 130, 27-29 April, 2017.

B17. T. Tunç, H. Budak, F. Usta and M. Z. Sarikaya, “On new generalized fractional integral operators and related fractional inequalities,” presented at International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2017), İstanbul, Turkey, 3-7 July, 2017.

B18. F. Ertuğral, M. Z. Sarikaya and H. Budak, “On refinements of Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for fractional integral operators,” presented at International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2017), İstanbul, Turkey, 3-7 July, 2017.

B19**.** H. Öğülmüş, F. Usta, M. Z. Sarikaya and H. Budak, “Some generalized Chebyshev type inequalities utilizing generalized fractional integral operators with exponential kernel,” presented at International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2017), İstanbul, Turkey, 3-7 July, 2017.

B20. F. Usta, M. Z. Sarikaya and H. Budak, “Some new Chebyshev type integral inequalities via fractional integral operatör with exponential kernel,” presented at

International Conference on Applied Physics and Mathematics (ICAPM), Mecca, Saudi Arabia, 23-24 July, 2017.

B21. M. Z. Sarikaya, F. Usta and H. Budak, "On conpare some integral inequalities associated with fractional integrals," presented at International Conference on Applied Physics and Mathematics (ICAPM), Mecca, Saudi Arabia, 23-24 July, 2017.

C. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve tam metin basılan bildiriler :

C1. H. Budak and M. Z. Sarikaya, "Some bounds for perturbed Čebysev functional via conformable fractional integrals," presented at Xth International Statistics Days Conference, Giresun, Turkey, 137-148, 7-9 October, 2016.

C2. H. Budak and M. Z.i Sarikaya, "Some generalizations of weighted Simpson type inequalities," presented at Xth International Statistics Days Conference, Giresun, Turkey, 149-156, 7-9 October, 2016.