T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİZİ UZAYLARI İLE TANIMLANAN OPERATÖR İDEALLERİ

Pınar ZENGİN ALP

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. EMRAH EVREN KARA

DÜZCE, 2018

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİZİ UZAYLARI İLE TANIMLANAN OPERATÖR İDEALLERİ

Pınar ZENGİN ALP tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi

Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 06/08/2018

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

06/08/2018

Pınar ZENGİN ALP

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimime devam etmem konusunda ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Emrah Evren KARA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Doktora öğrenimim süresince her konuda bana destek olan ve yardımlarını esirgemeyen başta sevgili doktora arkadaşım Arş. Gör. Dr. Merve İLKHAN olmak üzere tüm hocalarım ve çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Hayatım boyunca sevgilerini, yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme, hayatıma girdiği andan itibaren her konuda bana destek olan sevgili eşim Kamil ALP'e ve hayatımın anlamı oğlum Kutay ALP'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

06/08/2018 **Pınar ZENGİN ALP**

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	$[0,+\infty)$ aralığı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
ω	Tüm reel değerli dizilerin uzayı
l_p	Tüm mutlak p-toplanabilir dizilerin uzayı
l_∞	Tüm sınırlı dizilerin uzayı
c	Tüm yakınsak dizilerin uzayı
c_0	Tüm sıfıra yakınsak dizilerinin uzayı
$L(X,Y)$	X normlu uzayından Y normlu uzayına tanımlı bütün sınırlı lineer dönüşümlerin uzayı
$\mathcal{L}$	Herhangi iki keyfi Banach uzayı arasındaki tüm sınırlı lineer operatörlerin uzayı
X'	X in dual uzayı (Xin sürekli duali)
T'	T operatörünün duali
$T(X)$	X in T operatörü altındaki görüntü kümesi
$\text{rank}(T)$	$T(X)$ in boyutu
$\text{Boy}(X)$	X in boyutu
$\text{kard}(x)$	Sınırlı x dizisinin sıfırdan farklı elemanlarının sayısı
$\text{Ekboy}(X)$	Ekboyut
$L_{GSTOL,p}$	Genelleştirilmiş Stolz dönüşümlerinin sınıfı
$L^{\alpha}_{GSTOL,p}$	Genelleştirilmiş yaklaşım sayıları ile üretilen genelleştirilmiş Stolz dönüşümlerinin sınıfı
$\mathfrak{I}^{\alpha}_{\phi_{(p)}}$	Genelleştirilmiş yaklaşım sayıları ve simetrik norm fonksiyonu ile üretilen genelleştirilmiş Stolz dönüşümlerinin sınıfı
$l_p(E)$	Blok dizi uzayı
$L_{p,E}$	s-tipindeki $l_p(E)$ operatörlerinin sınıfı
$L_{\phi_{(p)},E}$	Simetrik norm fonksiyonu ve s-tipindeki $l_p(E)$ operatörleri ile üretilen operatörlerin sınıfı
$L_{z,p,E}$	s-tipindeki $Z(u,v;l_p(E))$ operatörlerinin sınıfı

ÖZET

BAZI DİZİ UZAYLARI İLE TANIMLANAN OPERATÖR İDEALLERİ

Pınar ZENGİN ALP
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi
Danışman: Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Ağustos 2018, 81 sayfa

Bu çalışmada bazı dizi uzayları ile tanımlanan operatör idealleri üzerine çalışılmıştır. Çalışma dört bölümden oluşmaktadır, üçüncü ve dördüncü bölümler elde edilen orjinal sonuçları içermektedir. İlk olarak çalışma için yapılan literatür araştırmaları ve tezde kullanılan temel kavramlar ile tanımlar verilmiştir. Daha sonra, Iseki tarafından tanımlanmış Stolz p-tipindeki dönüşümler sınıfının genelleştirmesi olan genelleştirilmiş Stolz dönüşümlerinin sınıfı tanımlanmıştır. Ayrıca bu sınıfın bir operatör ideal olduğu ve üzerinde tanımlı bir kuasi-norm ile kuasi-Banach operatör ideal olduğu gösterilmiştir. Sonrasında s-sayı dizisinin diğer örnekleri ile tanımlanan sınıfların sağladığı çeşitli özellikler incelenmiştir. Genelleştirilmiş yaklaşım sayıları kullanılarak üretilen genelleştirilmiş Stolz dönüşümlerinin sınıfı tanımlanmıştır. Ayrıca simetrik norm fonksiyonu ve genelleştirilmiş Stolz dönüşümleri kullanılarak operatör ideallerin yeni bir sınıfı tanımlanmıştır. Daha sonra blok dizi uzayları üzerinde çeşitli operatör idealler tanımlanmıştır. Sırasıyla s-tipindeki $l_p(E)$ dönüşümlerinin sınıfı, simetrik norm fonksiyonu ile s-tipindeki $l_p(E)$ dönüşümleri kullanılarak üretilen operatörlerin sınıfı ve s-tipindeki $Z(u,v;l_p(E))$ operatörlerinin sınıfı verilmiştir. Ayrıca tanımlanan her bir sınıfın bir operatör ideal olduğu ve üzerinde tanımlı bir kuasi-norm ile kuasi-Banach operatör ideal olduğu gösterilmiştir. Son olarak s-sayı dizisinin diğer örnekleri ile tanımlanan sınıfların sağladığı çeşitli özellikler incelenmiş ve tanımlanan operatör idealler üzerindeki bazı denk kuasi-normlar elde edilmiştir.

Anahtar sözcükler: Blok dizi uzayı, Dizi uzayı, Kuasi-norm, Operatör ideal, Simetrik norm fonksiyonu.

ABSTRACT

OPERATOR IDEALS DEFINED BY SOME SEQUENCE SPACES

Pınar ZENGİN ALP
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Emrah Evren KARA
August 2018, 81 pages

In this work, operator ideals defined by some sequence spaces are studied. This thesis consists of four chapters and the original results of the thesis are given in the third and the fourth chapter. Firstly literature review and the basic concepts with definitions used in the thesis are given. Then the class of Stolz p-type mappings defined by Iseki is generalized to the class of generalized Stolz mappings. It is also shown that this class is an operator ideal and a quasi-Banach operator ideal by a quasi-norm defined on this class. Then classes defined by using other examples of the s-number sequences and various properties provided by these classes are examined. Later on a generalized class of Stolz transformations is defined by using generalized approximation numbers. Also a new operator ideal is defined by using symmetric norming function and generalized Stolz transformations. Subsequently various operator ideals are defined on the block sequence spaces. The class of s-type $l_p(E)$ operators, the class of operators which are generated by the symmetric norming function with s-type $l_p(E)$ operators and the class of s-type $Z(u,v;l_p(E))$ operators are given respectively. It is also shown that all of these new classes are operator ideals and quasi-Banach operator ideals by a quasi-norm defined on relevant classes. Then classes defined by using the other examples of s- number sequences and various properties provided by these classes are examined. Finally some equivalent quasi-norms on these operator ideals are given.

Keywords: Block sequence space, Operator ideal, Quasi-norm, Sequence space, Symmetric norming function.

EXTENDED ABSTRACT

OPERATOR IDEALS DEFINED BY SOME SEQUENCE SPACES

Pınar ZENGİN ALP
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Emrah Evren KARA
August 2018, 81 pages

1. INTRODUCTION

Frequently encountered sequence spaces in the literature are the set of all absolutely p-summable sequences l_p, the set of all bounded sequences l_∞, the set of all convergent sequences c and the set of all null sequences c_0. In the past, many new sequence spaces have been defined with the help of matrix domains of some triangular matrices in the sequence spaces l_p, l_∞, c and c_0. Some examples where matrix domains of various matrices have been studied are [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]. The matrix domains have obtained by triangle matrices in these studies are normed sequence spaces. For more information about the domain of triangle matrices in some sequence spaces it is referred to the book [8].

Shiue defined Cesaro sequence space ces_p by using Cesaro matrix. Later on a number of authors studied on the geometry and generalizations of Cesaro sequence spaces in [9], [10], [11], [12] and [13]. The weighted Cesaro sequence space $ces(p,q)$ is defined by Maji and Srivastava in [14]. For special cases this class turns to ces_p. The sequence space $ces(p,q)$ is generalized to the sequence space $Z(u,v;l_p)$ defined by Malkowsky and Savaş in [15]. Recently, Foroutannia defined the block sequence space $l_p(E)$ as a generalization of sequence space l_p in [16].

Operator ideal theory has a special importance in functional analysis since the theory has several applications in spectral theory, geometry of Banach spaces, theory of eigenvalue distribution, etc. The normed operator ideal theory is first introduced by Grothendieck in [17] and by Shatten in [18], [19]. The main examples of operator ideals are nuclear, integral and absolutely summable operator ideals. In functional analysis, most of the operator ideals in Banach spaces and normed spaces, are defined by using different scalar sequence spaces. One of the most important ways of constructing an operator ideal is via s- numbers. The definition of s-numbers is introduced in the theory of integral operators in the paper [20] by Schmidt. Later on in Banach spaces, it became obvious that there are certain rules assigning to every operator a decreasing sequence of numbers which characterize its approximation or compactness properties. The most comprehensive work on the theory was made by Gohenberg in [21]. There are many different ways of defining some equivalents of s-numbers in Banach spaces. For combining different s-numbers in one definition, Pietsch defined s- sequence in [22]. Then after some revisions on this definition, the axiomatic theory of s-numbers is presented and some special properties of s-numbers are given such as symmetry, injectivity, surjectivity, etc. [23], [24].

The idea of quasi-normed operator ideals arise from the necessity of covering some operator ideals which do not have a natural norm. There exists many different quasi-norms on every operator ideal. But the nice quasi-norms are chosen by the completeness of the corresponding topology. From this perspective, for every operator ideal there is, up to equivalence, at most one reasonable quasi-norm [22].

Pietsch [25] defined l_p type operators by using approximation numbers and the sequence space l_p. Afterwards, Constantin [26] generalized the class of l_p type operators to ces_p type operators by using Cesaro sequence space. Iseki [27] generalized ces-p type operators to Stolz type mappings. In 2015, Kara and İlkhan [28] defined s-type $Z(u,v;l_p)$ operators by using sequence space $Z(u,v;l_p)$.

2. MATERIAL AND METHODS

When preparing this thesis firstly a comprehensive literature review is done. The operator ideals defined by some different sequence spaces via s-numbers are examined. Being inspired from these studies, the presence of generalizations of some operator ideals are investigated. Also it is tried to generalize some well known operator ideals by using block sequence spaces. Then it was observed whether these classes provide some specific properties. Furthermore, some equivalent quasi-norms on these operator ideals are examined.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

The main results obtained in the thesis are given in the third and the fourth chapter. In the third chapter, the class of Stolz p-type mappings defined by Iseki is generalized to the class of generalized Stolz mappings. It is also shown that this class is an operator ideal and a quasi-Banach operator ideal by a quasi-norm defined on this class. Then classes defined by using the other examples of s-number sequences and various properties provided by these classes are examined. Later on a generalized class of Stolz transformations is defined by using generalized approximation numbers. Also a new operator ideal is defined by using symmetric norming function and generalized Stolz transformations. In the fourth chapter various operator ideals are defined on the block sequence spaces. The class of s-type $l_p(E)$ operators, the class of operators which are generated by the symmetric norming function and s-type $l_p(E)$ operators and the class of s-type $Z(u,v;l_p(E))$ operators are defined respectively in this chapter. It is also shown that all of these new classes are operator ideals and quasi-Banach operator ideals by a quasi-norm defined on relevant classes. Then classes defined by using the other examples of s-number sequences and various properties provided by these classes are examined. Finally some equivalent quasi-norms on these operator ideals are given.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK

In this thesis different operator ideals are defined by using sequence spaces. Then it is proved that these operator ideals are quasi-Banach operator ideals. Then classes defined by using the other examples of s-number sequences and various properties provided by these classes are examined. Finally some equivalent quasi-norms are defined on these classes. It is shown that all these new operator ideals are generalizations of some operator ideals in the literature.

1. GİRİŞ

ω reel terimli tüm dizilerin uzayı olsun. p-mutlak toplanabilir dizilerin uzayı l_p, sınırlı dizilerin uzayı l_∞, yakınsak dizilerin uzayı c, sıfıra yakınsak dizilerin uzayı c_0 literatürde sıkça karşılaşılan dizi uzaylarına örnektir.

$A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli sonsuz bir matris, X ve Y, ω nın herhangi iki altuzayı olsun. $x = (x_k) \in X$ dizisi için eğer her bir terimi sonsuz bir seri olan $Ax = \{(Ax)_n\}$ dizisi Y dizi uzayının bir elemanı oluyorsa $A = (a_{nk})$ matrisine X dizi uzayından Y dizi uzayına bir matris dönüşümü denir [29].

Bir X dizi uzayı için sonsuz bir A matrisinin etki alanı

$$X_A = \{x \in \omega : Ax \in X\}$$

şeklinde tanımlanır ve X_A da bir dizi uzayıdır. $A = (a_{nk})$ matrisi eğer $k > n$ için $a_{nk} = 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{nn} \neq 0$ şartlarını sağlıyorsa alt üçgensel matris olarak adlandırılır. A bir alt üçgensel matris olduğunda X_A ve X dizi uzaylarının lineer izomorfik oldukları kolayca görülür [16].

Literatürde $l_p,\ l_\infty,\ c$ ve c_0 gibi klasik dizi uzaylarında bazı üçgensel matrislerin matris etki alanları yardımıyla pek çok yeni dizi uzayı tanımlanmıştır. Örneğin fark matrislerinin matris etki alanı [1], [2], [30], [31] ve [32] nolu çalışmalarda, Riesz matrislerinin matris etki alanı [3] ve [4] nolu çalışmalarda, Cesaro matrislerinin matris etki alanı [5], [6] ve [7] nolu çalışmalarda ele alınmıştır. Bu çalışmalarda elde edilen matris etki alanları birer normlu dizi uzayıdır. Bazı dizi uzaylarındaki, üçgensel matrislerin etki alanları hakkında daha detaylı bilgi için [8] nolu kaynak önerilmektedir.

$1 < p < \infty$ için Cesaro dizi uzayı ces_p, Shiue tarafından Cesaro matrisi yardımıyla

$$ces_p = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k| \right)^p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır [33]. Daha sonra pek çok yazar Cesaro dizi uzaylarının geometrisi ve genelleştirmeleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalardan bazıları Liu, Wu ve Lee [9], Cui ve Hudik [10], Sanhan ve Suantai [11], Suantai [12] ve Saejung [13] tarafından yapılmıştır.

$q = (q_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi, $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k$ ve $1 < p < \infty$ olmak üzere ağırlıklı Cesaro dizi uzayı $ces(p,q)$

$$ces(p,q) = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_n} \sum_{k=1}^{n} |q_k x_k| \right)^p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır [14]. Özel olarak burada $q_k = 1$ ve $Q_n = n$ seçilirse $ces(p,q)$ ağırlıklı Cesaro dizi uzayı ces_p dizi uzayına dönüşür.

Herhangi bir sonsuz $A = (a_{nk})$ matrisi için $|A,p|$ ile gösterilen A-p uzayı Rhoades tarafından [34] nolu makalede $0 < p < \infty$ için

$$|A,p| = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} x_k| \right)^p < \infty \right\}$$

ve $p = \infty$ için

$$|A,\infty| = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} x_k| \right) < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

(u_n) ve (v_n) reel sayı dizileri ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n, v_n \neq 0$ olsun. Bu durumda $1 < p < \infty$ için $Z(u,v;l_p)$ uzayı Malkowsky ve Savaş tarafından [15] nolu çalışmada

$$Z(u,v;l_p) = \left\{ x \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n \sum_{k=1}^{n} v_k x_k \right|^p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Özel olarak burada $v_k = q_k$ ve $u_n = \frac{1}{Q_n}$ alınırsa $Z(u,v;l_p)$ dizi uzayı $ces(p,q)$ dizi uzayına dönüşür.

$1 \leq p < \infty$ ve $n = 1,2,\ldots$ için $E = (E_n)$ pozitif tamsayıların sonlu alt kümelerinin

$$\max E_n < \min E_{n+1}$$

şartını sağlayan bir bölüntüsü olmak üzere l_p dizi uzayının genelleştirilmesi olarak $l_p(E)$ seminormlu blok dizi uzayı, Foroutannia tarafından

$$\|x\|_{p,E} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{j \in E_n} x_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

seminormu ile

$$l_p(E) = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{j \in E_n} x_j \right|^p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır [16]. Bu uzayda her n için $E_n = \{2n-1, 2n\}$ seçildiğinde $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n-1} + x_{2n}|^p < \infty$ şartını sağlayan $x = (x_n)$ dizileri $l_p(E)$ nin elemanı olur. Ayrıca $\|\cdot\|_{p,E}$ un bir norm teşkil etmediği açıktır. Çünkü $x = (1,-1,0,0,\ldots)$ ve $n = 1,2,\ldots$ için $E_n = \{2n-1, 2n\}$ olduğunda $x \neq \theta$ için $\|x\|_{p,E} = 0$ olur. Özel olarak bu uzayda $n = 1,2,\ldots$ için $E_n = \{n\}$ alınırsa $l_p(E) = l_p$ olur.

Blok dizi uzayları hakkında daha detaylı bilgi için [35], [36] ve [37] nolu çalışmalar önerilmektedir.

Operator ideal teorisi fonksiyonel analizin spektral teori, Banach uzaylarının geometrisi, özdeğer dağılımı gibi dallarında çok geniş uygulama alanına sahip olduğu için ayrı bir öneme sahiptir. Normlu operatör ideal teorisi ilk olarak 1950'li yıllarda [17] nolu kitapta Grothendieck, [18] ve [19] nolu kitaplarda Shatten tarafından ortaya konulmuştur. Operatör ideallerinin temel örnekleri nükleer, integral ve mutlak toplanabilir operatör idealleridir. Foksiyonel analizde, Banach uzaylarında veya normlu uzaylarda çoğu operatör ideal farklı skaler dizi uzayları aracılığıyla tanımlanmıştır. Operatör ideal oluşturmanın en önemli yollarından biri s-sayı dizilerini kullanmaktır. s-sayıları kavramı ilk olarak integral operatörleri teorisinde Schmidt tarafından [20] nolu çalışmada ortaya atılmıştır. 1930'lu yıllarda, s-sayı dizileri Hilbert uzayındaki kompakt operatörlere genelleştirilmiştir. Daha sonraki yıllarda Banach uzaylarında her operatöre yaklaşım veya kompaktlık özelliklerini karakterize eden azalan bir sayı dizisi atayan belirli kuralların olduğu belirlenmiştir. Bu teori ile ilgili en kapsamlı çalışma Gohenberg tarafından [21] nolu kaynakta yapılmıştır. Banach uzaylarında s-sayılarının eşdeğerleri çok farklı şekillerde tanımlanabilir. İlk olarak Kolmogorov tarafından [38] nolu çalışmada sınırlı altkümelerin n. çapları tanımlanmıştır. Sonrasında Gelfand tarafından [39] nolu çalışmada dual kavramı (dual concept) fikri ortaya atılmıştır. Yaklaşım sayıları Pietsch tarafından [25] nolu makalede çalışılmıştır. Sonraki yıllarda farklı s-sayılarının tek bir yerde birleştirilmesi için s-sayı dizisi kavramı [22] nolu çalışmada Pietsch tarafından ortaya atılmış olup birtakım değişiklikler yapılarak [23] ve [24] nolu kitaplardaki halini almıştır. [22] nolu çalışmada tanımlanmış olan s-sayıları teorisinin [23] de tanımlanan aksiyomatik teoriden daha farklı olduğu özellikle belirtilmelidir. Bu çalışmada [23] ve [24] nolu kitaplardaki tanım kullanılacaktır. Ayrıca bu kitaplarda yer alan s-sayılarının sağladığı simetrik olma, birebirlik, örtenlik gibi bazı özellikler üzerine çalışılacaktır.

Yıllar içerisinde, Banach uzaylarındaki operatörlerin özdeğerlerini hesaplamak için s-sayılarını kullanmak çok kullanışlı bir yöntem haline gelmiştir. Örnek olarak [24], [40] ve [41] nolu çalışmalara bakılabilir. Ayrıca dizi uzaylarındaki köşegen operatörlerin ve fonksiyon uzaylarındaki gömme dönüşümlerinin s-sayılarının hesaplanması üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Bu konuyla ilgili yapılan çalışmalardan bazıları [42], [43] ve [44] nolu çalışmalardır.

Doğal normu olmayan bazı önemli operatör ideallerinin bir norma sahip olabilmesi için kuasi-normlu operatör ideal kavramı ortaya çıkmıştır. Her operatör ideali üzerinde tanımlı pek çok farklı kuasi-norm vardır. Bununla birlikte uygun kuasi-normlar ilgili topolojinin tamlığı ile belirlenir. Buradan yola çıkarak, her operatör idealin (denklik de dikkate alınarak) en fazla bir tane uygun kuasi-normu vardır. Bu nedenle tamlık durumunu kuasi-normlu operatör ideallerinin tanımına dahil etmek gerekir [22].

Bu bölümün sonuna kadar X,Y iki Banach uzayı ve $T \in L(X,Y)$ olarak kabul edilecektir.

Pietsch bir T sınırlı lineer operatörünün yaklaşım sayı dizisi olan $(a_n(T))$ yi ve $0 < p < \infty$ için l_p uzayını kullanarak üretilen operatör idealler üzerine çalışmıştır. T operatörü için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n(T))^p < \infty$ oluyorsa T operatörünü l_p tipinde bir operatör olarak tanımlamıştır [25].

Sonrasında Constantin [26] nolu çalışmada, Cesaro dizi uzayını kullanarak l_p tipinde operatörlerin sınıfını $ces - p$ tipindeki operatörlerin sınıfına genelleştirmiştir. $1 < p < \infty$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(T) \right)^p < \infty$ şartını sağlayan T operatörünü ces-p tipinde operatör (ces_p operatörü) olarak tanımlamıştır. Burada özel olarak $n = 1$ alınırsa l_p tipinde operatörlerin sınıfı elde edilir.

Daha sonra Maji ve Srivastava, ağırlıklı Cesaro dizi uzayı yardımıyla ces_p operatörlerinin sınıfını genelleştirerek s-tipindeki $ces(p,q)$ operatörlerini tanımlamışlardır. $1 < p < \infty$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_n} \sum\limits_{k=1}^{n} q_k s_k(T) \right)^p < \infty$ şartını sağlayan bir T operatörü s-tipindeki $ces(p,q)$ operatörü olarak adlandırılmış ve bu operatörlerin sınıfı $A_{p,q}^{(s)}$ ile gösterilmiştir [14].

[34] nolu makalede Rhoades ces-p tipindeki operatörlerin sınıfını A-p tipindeki operatörlerin sınıfına taşımıştır.

Daha sonra Maji ve Srivastava tarafından [45] ve [46] nolu çalışmalarda sırasıyla s-sayı dizisi ve Cesaro dizi uzayları kullanılarak s-tipindeki ces_p operatörlerinin $A^{(s)}$-p sınıfı ve A sonsuz bir matris olmak üzere s-tipindeki $|A,p|$ operatörlerinin $A^{(s)}$-p sınıfı tanımlanmıştır.

(α_n) dizisi reel sayıların $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots > 0$ şartını sağlayan bir dizisi ve $0 < p < \infty$ olmak üzere Stolz p- tipindeki dönüşümlerin sınıfı Iseki tarafından

$$L_{STOL,p}(X,Y) = \left\{ T \in L(X,Y) : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i(T) \right)^p < \infty \right\} \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlamıştır [27]. Özel olarak (1.1) de $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$ alınırsa ces_p operatörlerinin sınıfı elde edilir [26].

Daha sonraki yıllarda Tita tarafından [47] nolu çalışmada $1 < p < \infty$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0$ olduğunda Stolz p- tipindeki dönüşümlerin sınıfı ile l_p tipinde operatörlerin sınıfının çakıştığı gösterilmiştir. Ayrıca [48] nolu çalışmada $L_{STOL,p}(X,Y)$ sınıfının sağladığı özellikler üzerine çalışılmıştır.

$u = (u_n)$ ve $v = (v_n)$ pozitif reel sayı dizileri olmak üzere $1 < p < \infty$ için $Z(u,v;l_p)$ dizi uzayı kullanılarak, s-tipindeki $Z(u,v;l_p)$ operatörleri Kara ve İlkhan tarafından [28] nolu çalışmada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n} v_k s_k(T)\right)^p < \infty$$

şartını sağlayan T operatörleri olarak tanımlanmıştır ve bu operatörlerin bulunduğu sınıf $\varsigma_p^{(s)}$ ile gösterilmiştir. Yine aynı çalışmada bu sınıfın sağladığı bazı özellikler gösterilmiştir.

Bu çalışmada bazı dizi uzayları ile tanımlanan operatör idealleri üzerine çalışılmıştır. İkinci bölümde çalışmada kullanılan temel kavramlar verilmiştir. Çalışmada bulunan orjinal sonuçlara üçüncü ve dördüncü bölümde yer verilmiştir. Üçüncü bölümde [27] nolu çalışmada Iseki tarafından tanımlanmış olan Stolz dönüşümleri sınıfını kapsayan genelleştirilmiş Stolz dönüşümlerinin sınıfı tanımlanmıştır. Bu sınıfın bazı özel şartlar altında bir kuasi-Banach operatör ideal olduğu gösterilmiştir. Bu sınıfın sağlamış olduğu çeşitli özellikler incelenmiştir. Sonrasında s-sayı dizilerinin diğer örnekleri kullanılarak oluşturulan sınıfların birebirlik, örtenlik, simetrik olma gibi özellikleri araştırılmış ve bu sınıfların sağladığı kapsama bağıntıları bulunmuştur. Daha sonra [49] nolu çalışmada Tita tarafından tanımlanan genelleştirilmiş yaklaşım sayıları kullanılarak üretilen genelleştirilmiş Stolz dönüşümlerinin sınıfı tanımlanmış ve bu sınıfın bir kuasi-normlu operatör ideal olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, [16] nolu çalışmada Foroutannia tarafından tanımlanan $l_p(E)$ dizi uzayı kullanılarak literatürde tanımlanmış bazı operatör ideallerinin genelleştirmesi yapılmıştır. İlk olarak l_p tipindeki operatörler sınıfının sonrasında [49] ve [50] nolu makalelerde çalışılan $L_\phi(X,Y)$ sınıfının genelleştirmesi yapılmıştır. Son olarak [28] nolu çalışmada tanımlanan $\varsigma_p^{(s)}$ dan daha genel olan bir sınıf elde edilmiştir. Ayrıca bu bölümde tanımlanan $L_{p,E}$, $L_{\phi_{(p)},E}$ ve $L_{z,p,E}$ sınıflarının birer kuasi-Banach operatör ideal oldukları gösterilmiştir. Daha sonra tanımlanan sınıflar ve s-sayı dizisinin diğer örnekleri kullanılarak oluşturulan sınıfların birebirlik, örtenlik, simetrik olma gibi özellikleri araştırılmış ve bu sınıfların sağladığı kapsama bağıntıları incelenmiştir. Bu bölümün son kısmında ise bu sınıflar üzerinde tanımlanan çeşitli kuasi-normların denk olup olmadıkları araştırılmıştır. Bu kuasi-normların [51] nolu çalışmada verilen kuasi-normların genellemesi olduğu gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. $\mathbb{K}$ bir cisim ve X boş olmayan bir küme olsun.

V1) $x+y=y+x$ eşitliği her $x,y \in X$ için geçerlidir.

V2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ eşitliği her $x,y,z \in X$ için geçerlidir.

V3) Her $x \in X$ için $x+\theta=x$ denklemini sağlayan bir $\theta \in X$ vardır.

V4) Her $x \in X$ için $x+(-x)=\theta$ denklemini sağlayan bir $(-x) \in X$ vardır.

V5) $\mathbb{K}$ cismindeki her α,β ve X kümesindeki her x,y için

- $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$
- $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$
- $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

eşitlikleri geçerlidir.

V6) Cismin birim öğesi 1 ve her $x \in X$ için $1x=x$ geçerlidir.

V1-V6 koşullarını sağlayan X kümesine ait $x+y$ ve αx ile gösterilen elemanlar varsa, X e $\mathbb{K}$ üzerinde bir vektör uzayıdır denir. Eğer $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ise X e bir reel vektör uzayı, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ise kompleks vektör uzayı denir.

Bir vektör uzayı X için $X \times X$ kartezyen çarpımındaki her (x,y) öğesini $x+y$ öğesine gönderen işleme toplama ve $\mathbb{K} \times X$ kümesindeki (α,x) öğesini de αx öğesine gönderen işleme ise skalerle çarpma denir [52].

Tanım 2.2. Bir X vektör uzayındaki $x_1,x_2,\ldots,x_m$ vektörlerinden oluşan bir M kümesi için $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ birer skaler olmak üzere

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = 0$$

eşitliği, ancak ve ancak, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ olması durumunda gerçekleniyorsa $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vektörleri, diğer bir deyimle M kümesi, lineer bağımsız aksi halde lineer bağımlıdır denir [53].

Bir vektör uzayının boyutu, lineer bağımlılık ve bağımsızlık kavramları kullanılarak tanımlanabilir.

Tanım 2.3. n pozitif bir tamsayı olmak üzere, bir X vektör uzayı lineer bağımsız n tane vektör içeriyor ve $n+1$ ya da daha fazla sayıda vektör lineer bağımlı oluyorsa, bu X vektör uzayı sonlu boyutludur denir. n sayısına da X in boyutu adı verilir ve $n = \text{Boy}X$ ile gösterilir [53].

Tanım 2.4. X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değeri $\|x\|$ ile gösterilsin. Bu fonksiyon her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

N1) $\|x\| = 0 \iff x = \theta$ ve $x \neq \theta$ için $\|x\| > 0$

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde bir norm adını alır. Bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı ya da kısaca normlu uzay denir.

X bir normlu uzay ise $\|x\| = 1$ eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ vektörüne birim vektör adı verilir [54].

Tanım 2.5. Bir X vektör uzayı üzerinde $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|'$ normları tanımlı olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$m \|x\| \leq \|x\|' \leq M \|x\|$$

olacak biçimde $m, M > 0$ sayıları varsa $\|\cdot\|'$ normu $\|\cdot\|$ normuna denktir denir [55].

Tanım 2.6. X ve Y aynı $\mathbb{K}$ skaler cismi üzerinde birer vektör uzayı olsun. Bir $T : X \to Y$ operatörü her $\alpha, \beta \in K$ ve $x, y \in X$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

özelliğini sağlıyorsa veya buna denk olarak her $\alpha \in \mathbb{K}$ ve $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(x) + T(y) \quad \text{ve} \\ T(\alpha x) &= \alpha T(x) \end{aligned}$$

özelliğini sağlıyorsa T ye bir lineer operatör adı verilir [56].

Tanım 2.7. Tanım 2.6 da $Y = \mathbb{K}$ ise o zaman T ye X üzerinde bir lineer fonksiyoneldir denir. $T : X \to Y$ lineer operatörlerinin tamamının oluşturduğu küme vektör toplamı ve skaler çarpımla bir vektör uzayıdır [57].

Önerme 2.8. X, Y, Z vektör uzayları ve $T : X \to Y$ ve $S : Y \to Z$ birer lineer operatör olsun. O zaman $S \circ T : X \to Z$ bir lineer operatör ($S \circ T = ST$) [55].

Tanım 2.9. X, Y vektör uzayları ve $T : X \to Y$ bir lineer operatör olsun.

a) T nin görüntü kümesi $T(X)$, Y nin bir altuzayıdır. T nin rankı rank(T) =Boy$T(X)$ sayısıdır.

b) rank (T) sonlu ise T sonlu ranka sahiptir denir; yani görüntü kümesi sonlu boyutlu olan bir lineer operatör sonlu ranka sahip bir lineer operatördür. rank$(T) = \infty$ ise T sonsuz ranka sahiptir denir [55].

Önerme 2.10. X, Y vektör uzayları ve $T : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. T örtendir ancak ve ancak $T(X) = Y$ dir. Bu durumda Boy$Y$ sonlu ise bu rank(T) =Boy$Y$ olmasına denktir [55].

Tanım 2.11. $(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_Y \leq K \|x\|_X \tag{2.1}$$

olacak şekilde pozitif bir K reel sayısı varsa T ye sınırlıdır denir [55].

Teorem 2.12. X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda

a) T süreklidir.

b) T sınırlıdır.

ifadeleri denktir [55].

Not 2.13. X ve Y normlu uzaylar olsun. X den Y ye tüm sürekli lineer operatörlerin kümesi $L(X,Y)$ ile gösterilecektir. $T \in L(X,Y)$ ve $x \in X$ ise $T(x)$ yerine Tx yazılışı da kullanılır. Ayrıca X ve Y üzerindeki normlar kısaca $\|\cdot\|$ ile gösterilebilir. X ve Y normlu uzaylar olduğunda $L(X,Y)$ de bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.14. X ve Y normlu uzaylar ve $T \in L(X,Y)$ olsun. Bu durumda T nin operatör normu $\|T\|$ ile gösterilir ve

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq \theta \right\} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $X = \{\theta\}$ ise $\|T\| = 0$ olarak tanımlanır. Bu durumda $T(\theta) = \theta'$ olduğu için T sıfır operatörüdür.

(2.1) de K yerine bu şartı sağlayan K ların en küçüğü olan $\|T\|$ alınırsa

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \tag{2.3}$$

elde edilir [56].

Teorem 2.15. X ve Y normlu uzaylar ve $T \in L(X,Y)$ olsun. $\|T\|$, T nin (2.2) ile tanımlanan normu ise

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \quad (X \neq \{\theta\}) \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| < 1\} \\ &= \inf\{K : \|Tx\| \leq K\|x\|\} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır [56].

Teorem 2.16. Eğer X bir normlu uzay ve Y bir Banach uzayı ise o zaman $L(X,Y)$, (2.2) normu ile bir Banach uzayıdır [57].

Tanım 2.17. X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir normlu uzay olsun. $L(X,K)$ uzayına X in dual uzayı ya da sürekli duali adı verilir ve X' ile gösterilir [55].

Tanım 2.18. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi $\{x_n\}$ olsun.

a) $x \in X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq N$ için

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar denir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ veya } x_n \to x$$

yazılır.

b) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n \geq N$ için

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [55].

Tanım 2.19. Bir normlu uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir [57].

Tanım 2.20. X, Y normlu uzaylar ve $T \in L(X,Y)$ bir lineer operatör olsun. Eğer X içindeki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için Y içindeki $\{Tx_n\}$ dizisi yakınsak bir altdiziye sahipse T ye kompakt operatör denir [55].

Tanım 2.21.

$$\omega = \{x = (x_k) \mid x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, k \to x_k = x(k)\}$$

kümesi tüm reel değerli dizilerin kümesi olarak adlandırılır. ω kümesi

$$((x_k),(y_k)) \to (x_k + y_k) \qquad \text{ve} \qquad (\lambda,(x_k)) \to (\lambda x_k)$$

ikili işlemleri ile $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzaydır. ω nın herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir [58].

Klasik dizi uzaylarından bazıları

$$c_0 = \{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k\to\infty} x_k = 0\}$$

$$c = \{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k\to\infty} x_k = l,\ \exists\, l \in \mathbb{R}\}$$

$$l_\infty = \{x = (x_k) \in \omega : \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\}$$

$$l_p = \{x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}\ (1 \leq p < \infty)$$

şeklindedir.

l_p uzayındaki toplam n ye kadar alındığında l_p yerine l_p^n gösterimi kullanılacaktır.

Önerme 2.22. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, her $x = \{x_n\} \in l_p$ ve $y = \{y_n\} \in l_p$ için Minkowski eşitsizliği

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{k} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklindedir [59].

Önerme 2.23. p ile q, $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan iki reel sayı olsun. $x = \{x_n\} \in l_p$ ve $y = \{y_n\} \in l_q$ için Hölder eşitsizliği

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklindedir. [59].

Önerme 2.24. (a_n) negatif olmayan reel sayıların sıfırdan farklı bir dizisi olmak üzere her $p > 1$ için Hardy eşitsizliği

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

şeklindedir [55].

Not 2.25. Bu aşamadan sonra çalışma boyunca X, Y, X_0 ve Y_0 reel Banach uzayları olarak alınacaktır. Herhangi iki keyfi Banach uzayı arasındaki tüm sınırlı lineer operatörlerin uzayı $\mathcal{L}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.26. Bir X vektör uzayının herhangi bir altuzayı M olsun. Tüm $x+M$ denklik sınıflarından oluşan X/M ye bölüm uzayı denir ve $X/M = \{x+M : x \in X\}$ ile gösterilir [24].

Tanım 2.27. M, X in kapalı bir altuzayı olsun.

$$Q(x) = x+M$$

formülü ile tanımlı olan X den X/M ye tanımlı olan örten Q fonksiyonuna bölüm dönüşümü (quotient map) adı verilir [55].

Tanım 2.28. Bir X vektör uzayı için X/N bölüm uzayının sonlu boyutlu olmasını sağlayan bir alt vektör uzayı N olsun. Bu durumda N nin X içerisindeki ek boyutu (codimension)

$$\text{Ekboy}(N) = \text{Boy}(X/N) = \text{Boy}(X) - \text{Boy}(N)$$

şeklinde tanımlanır [24].

Tanım 2.29. Her $x \in X$ için $\|x\| = \|Tx\|$ olacak şekilde X den Y içine birebir bir T operatörü varsa bu operatöre gömme dönüşümü denir [56].

Tanım 2.30. Her $T \in \mathcal{L}$ operatörünü bir negatif olmayan sayı dizisi $(s_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ ye eşleyen $s = (s_n) : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü eğer

($S1$) Her $T \in L(X,Y)$ için $\|T\| = s_1(T) \geq s_2(T) \geq \ldots \geq 0$ dır,

($S2$) Her $S,T \in L(X,Y)$ ve $m,n \in \mathbb{N}$ için $s_{m+n-1}(S+T) \leq s_m(S) + s_n(T)$ dır,

($S3$) Her $R \in L(Y,Y_0)$, $S \in L(X,Y)$ ve $T \in L(X_0,Y)$ için X_0, Y_0 herhangi Banach uzayları olmak üzere $s_n(RST) \leq \|R\| s_n(S) \|T\|$ dır,

($S4$) Eğer $\text{rank}(T) \leq n$ ise $s_n(T) = 0$ dır,

($S5$) I, l_2^n üzerindeki birim operatör olmak üzere $s_n(I) = 1$ dir şartlarını sağlıyorsa s-sayı dizisi olarak adlandırılır. T operatörünün n. s-sayısı $s_n(T)$ ile gösterilir [60].

Lemma 2.31. $T, S \in L(X,Y)$ olsun. Bu durumda $|s_n(T) - s_n(S)| \leq \|T - S\|$ olur [22].

Tanım 2.32. Bir sınırlı lineer operatörün s-sayı dizisi örnekleri aşağıdaki gibidir.
$T \in L(X,Y)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun.

(a) $a_n(T)$ ile gösterilen n. yaklaşım sayısı

$$a_n(T) = \inf\{\|T - A\| : A \in L(X,Y), \operatorname{rank}(A) < n\}$$

şeklinde tanımlanır.

(b) M, X in bir altuzayı ve $J_M : M \to X$ bir doğal gömme dönüşümü olsun.

$$c_n(T) = \inf\{\|TJ_M\| : M \subset X,\ \text{Ekboy}(M) < n\}$$

şeklinde tanımlanan $c_n(T)$ ye, n. Gelfand sayısı denir.

(c) $Q_N : X \to X/N$, bir bölüm dönüşümü olsun. $d_n(T)$ ile gösterilen n. Kolmogorov sayısı

$$d_n(T) = \inf\{\|Q_N(T)\| : N \subset Y,\ \text{Boy}(N) < n\}$$

şeklinde tanımlanır.

(d) $a_n(TA)$, TA operatörünün n. yaklaşım sayısı olmak üzere T operatörünün $x_n(T)$ ile gösterilen n. Weyl sayısı

$$x_n(T) = \inf\{a_n(TA) : \|A\| \leq 1,\ A : l_2 \to X \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanır.

(e) $a_n(BT)$, BT operatörünün n. yaklaşım sayısı olmak üzere T operatörünün $y_n(T)$ ile gösterilen n. Chang sayısı

$$y_n(T) = \inf\{a_n(BT) : \|B\| \leq 1,\ B : F \to l_2 \quad \text{için}\}$$

şeklinde tanımlanır.

(f) T operatörünün $h_n(T)$ ile gösterilen n. Hilbert sayısı

$$h_n(T)) = \sup\{a_n(BTA) : \|B\| \leq 1, \|A\| \leq 1, B : Y \to l_2 \text{ ve } A : l_2 \to X \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanır [23].

Bu sayı dizileri hakkında daha fazla bilgi için [14], [22], [24], [60], [61], [62], [63] nolu kaynaklar önerilmektedir.

Önerme 2.33. $T \in L(X,Y)$ olmak üzere $h_n(T) \leq x_n(T) \leq c_n(T) \leq a_n(T)$ ve $h_n(T) \leq y_n(T) \leq d_n(T) \leq a_n(T)$ eşitsizlikleri sağlanır [24].

Tanım 2.34. Görüntü kümesi kapalı olan birebir bir $J \in L(X,Y)$ operatörüne içine (injection) denir. Ayrıca $\|Jx\| = \|x\|$ ise J ye içine metrik (metric injection) adı verilir [24].

Tanım 2.35. Eğer verilen herhangi bir $J \in L(Y,Y_0)$ içine metriği ve her $T \in L(X,Y)$ için $s_n(T) = s_n(JT)$ eşitliği sağlanıyorsa $s = (s_n)$ sayı dizisi birebirdir denir [24].

Önerme 2.36. Gelfand ve Weyl sayı dizileri birebirdir [24].

Tanım 2.37. X den Y üzerine tanımlı örten bir $Q \in L(X,Y)$ operatörüne üzerine (surjection) denir. Bu durumda her $y \in Y$ için

$$\|y\|_Q = inf\{\|x\| : x \in X, Qx = y\}$$

ile Y üzerinde bir denk norm tanımlanır. Ayrıca $\|\cdot\| = \|\cdot\|_Q$ ise Q ya bir üzerine metrik (metric surjection) denir [23].

Tanım 2.38. Eğer verilen herhangi bir $S \in L(X_0,X)$ üzerine metriği ve her $T \in L(X,Y)$ için $s_n(T) = s_n(TS)$ eşitliği sağlanıyorsa $s = (s_n)$ sayı dizisi örtendir denir [24].

Önerme 2.39. Kolmogorov ve Chang sayı dizileri örtendir [24].

Tanım 2.40. $T \in L(X,Y)$ olsun. $x \in X$ ve $f \in Y'$ için

$$T'(f)(x) = f(Tx)$$

şartını sağlayan $T' \in L(Y', X')$ operatörüne T nin duali denir [55].

Tanım 2.41. T', T nin duali olsun. Bir s-sayı dizisi eğer her $T \in L$ için $s_n(T) \geq s_n(T')$ şartını sağlıyorsa simetriktir denir. Eğer $s_n(T) = s_n(T')$ ise s-sayı dizisi tam simetriktir denir [23].

Önerme 2.42. Yaklaşım sayıları simetriktir. Yani $T \in L(X,Y)$ için

$$a_n(T') \leq a_n(T)$$

eşitsizliği sağlanır [23].

Önerme 2.43. $T \in L(X,Y)$ olsun. Bu durumda

$$c_n(T) = d_n(T') \quad \text{ve} \quad d_n(T) \geq c_n(T')$$

olur. Ayrıca T kompakt ise

$$d_n(T) = c_n(T')$$

dır [23].

Önerme 2.44. Her $T \in L(X,Y)$ için

$$x_n(T) = y_n(T') \quad \text{ve} \quad y_n(T) = x_n(T')$$

eşitlikleri sağlanır [24].

Önerme 2.45. Her $T \in L(X,Y)$ için

$$h_n(T) = h_n(T')$$

dır [24].

Tanım 2.46. $x' \in X'$ ve $y \in Y$ olsun. Bu durumda $x' \otimes y : X \to Y$ operatörü

$$\left(x' \otimes y\right)(x) = x'(x)\, y, \; x \in X$$

şeklinde tanımlanır ve sonlu ranka sahip bir operatördür. Ayrıca $\|x'\otimes y\| = \|x'\|\|y\|$ eşitliği sağlanır [23].

Tanım 2.47. $\Im$, $\mathcal{L}$ nin bir alt ailesi olsun. Eğer her bir $\Im(X,Y) = \Im \cap L(X,Y)$ bileşeni için

($O.I-1$**)** $x' \in X'$ ve $y \in Y$ ise $x' \otimes y \in \Im(X,Y)$ dir,
($O.I-2$**)** $S,T \in \Im(X,Y)$ ise $S+T \in \Im(X,Y)$ dir,
($O.I-3$**)** $S \in \Im(X,Y)$, $T \in L(X_0,X)$ ve $R \in L(Y,Y_0)$ ise $RST \in \Im(X_0,Y_0)$ dir

şartları sağlanıyorsa $\Im$ bir operatör ideal olarak adlandırılır [23].

Tanım 2.48. T operatörünün duali T', X ve Y uzaylarının dualleri sırasıyla X' ve Y' olsun. Bu durumda her $\Im$ operatör ideali için $\Im'$ dual operatör ideali

$$\Im'(X,Y) = \left\{T \in L(X,Y) : T' \in \Im\left(Y',X'\right)\right\}$$

ile tanımlanır [23].

Tanım 2.49. $\Im$ bir operatör ideal olsun.

a) Eğer $\Im \subset \Im'$ ise $\Im$ ya simetriktir,
b) Eğer $\Im = \Im'$ ise $\Im$ ya tam simetriktir

denir [23].

Tanım 2.50. Bir $\alpha : \Im \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

($K.N-1$**)** $x' \in X'$ ve $y \in Y$ ise $\alpha(x' \otimes y) = \|x'\|\,\|y\|$ dir,
($K.N-2$**)** Her $S,T \in \Im$ için $\alpha(S+T) \le C[\alpha(S)+\alpha(T)]$ olacak şekilde en az bir $C \ge 1$ sabiti vardır,
($K.N-3$**)** X_0, Y_0 birer Banach uzayı olmak üzere $S \in \Im(X,Y)$, $T \in L(X_0,X)$ ve $R \in L(Y,Y_0)$ ise $\alpha(RST) \le \|R\|\,\alpha(S)\,\|T\|$ dır,

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona $\Im$ operatör ideali üzerinde bir kuasi-normdur denir. Bu fonksiyon kısaca ideal kuasi-norm olarak adlandırılır [23]. Özel olarak $C = 1$ ise α, $\Im$ operatör ideali üzerinde bir normdur.

Tanım 2.51. α kuasi-normlu bir $\Im$ ideali $[\Im, \alpha]$ ile gösterilir. Eğer her $\Im(X,Y)$ bileşeni α kuasi-normu altında tam ise $[\Im, \alpha]$ ya bir kuasi-Banach operatör ideal denir [23].

Tanım 2.52. $[\Im, \alpha]$ bir kuasi-Banach operatör ideal olmak üzere bir $J \in L(Y, Y_0)$ metrik enjeksiyonu verilsin. Bu durumda her $T \in L(X,Y)$ operatörü ve $JT \in \Im(X, Y_0)$ için $T \in \Im(X,Y)$ ve $\alpha(JT) = \alpha(T)$ oluyorsa $[\Im, \alpha]$ ye bir birebir kuasi-Banach operatör idealdir denir [24].

Tanım 2.53. $[\Im, \alpha]$ bir kuasi-Banach operatör ideal olmak üzere bir $Q \in L(X, X_0)$ metrik surjeksiyonu verilsin. Bu durumda her $T \in L(X,Y)$ operatörü ve $TQ \in \Im(X_0, Y)$ için $T \in \Im(X,Y)$ ve $\alpha(TQ) = \alpha(T)$ oluyorsa $[\Im, \alpha]$ ye bir örten kuasi-Banach operatör idealdir denir [24].

Tanım 2.54. $x \in l_\infty$ için $kard(x) = kard\{i \in \mathbb{N},\ x_i \neq 0\}$ olmak üzere, $kard(x) < n$ ve $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq 0$ şartlarını sağlayan tüm x dizilerinin kümesi K ($K \subset \ell_\infty$) ile gösterilir [51].

Tanım 2.55. $\phi : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

(ϕ1) Her $x \in K$ için $\phi(x) > 0$ dır,
(ϕ2) Her $x \in K$ ve $\alpha \geq 0$ için $\phi(\alpha x) = \alpha\phi(x)$ dır,
(ϕ3) Her $x, y \in K$ için $\phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y)$ dır,
(ϕ4) $\phi(1,0,0,\ldots) = 1$ dir,
(ϕ5) Eğer $k = 1,2,\ldots$ için $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \leq \sum\limits_{i=1}^{k} y_i$ ise $\phi(x) \leq \phi(y)$ dir,

koşullarını sağlıyorsa ϕ ye simetrik norm fonksiyonudenir [51].

Not 2.56. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere her ϕ simetrik norm fonksiyonu için $\phi_{(p)} : (x_i) \in K \to \left(\phi\left(\left\{x_i^p\right\}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$ şeklinde tanımlanan $\phi_{(p)}$ fonksiyonu da bir simetrik norm fonksiyonudur [64], [65].

Simetrik norm fonksiyonu ile ilgili daha fazla bilgi için [21],[50], [64], [66], [67], [68] nolu çalışmalar önerilmektedir.

Tanım 2.57. Simetrik norm fonksiyonu ve $(a_n(T))$ dizisi kullanılarak $L_\phi(X,Y)$ sınıfı

$$L_\phi(X,Y) = \{T \in L(X,Y) : \phi(\{a_n(T)\}) < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır [49], [50].

Tanım 2.58. $\Im(X,Y)$, α kuasi-normu ile bir operatör ideal olsun. Her $T \in \Im(X,Y)$ operatörünü bir negatif olmayan sayı dizisi $\{s_n^\alpha(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ye eşleyen $s^\alpha = (s_n^\alpha) : \Im(X,Y) \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü

$(S^\alpha 1)$ Her $T \in \Im(X,Y)$ için $\alpha(T) = s_1^\alpha(T) \geq s_2^\alpha(T) \geq \ldots \geq 0$ dır,

$(S^\alpha 2)$ Her $S,T \in \Im(X,Y)$ ve $m,n \in \mathbb{N}$ için $s_{m+n-1}^\alpha(S+T) \leq s_m^\alpha(S) + s_n^\alpha(T)$ dir,

$(S^\alpha 3)$ Her $R \in L(Y,Y_0)$, $S \in \Im(X,Y)$ ve $T \in L(X_0,X)$ için $s_n^\alpha(RST) \leq \|R\| s_n^\alpha(S) \|T\|$ dir,

$(S^\alpha 4)$ Eğer $\dim(T) \leq n$ ise $s_n^\alpha(T) = 0$ dır,

şartlarını sağlıyorsa genelleştirilmiş s-sayı dizisi olarak adlandırılır [49], [66].

Tanım 2.59. Genelleştirilmiş s-sayılarının bir örneği olan genelleştirilmiş yaklaşım sayıları

$$a_n^\alpha(T) = \inf\{\alpha(T-K) : K \in \Im, \mathrm{Boy}K < n\}$$

şeklinde tanımlanır [49].

Lemma 2.60. Genelleştirilmiş yaklaşım sayıları için

$$\sum_{n=1}^{k} a_n^\alpha(S+T) \leq 2\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^\alpha(S) + a_n^\alpha(T)\right);\ k = 1,2,\ldots \tag{2.4}$$

eşitsizliği sağlanır [66].

İspat. Genelleştirilmiş yaklaşım sayılarının özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k} a_n^\alpha(S+T) &\leq \sum_{n=1}^{2k} a_n^\alpha(S+T)\\ &= \sum_{n=1}^{k} a_{2n-1}^\alpha(S+T) + \sum_{n=1}^{k} a_{2n}^\alpha(S+T)\end{aligned}$$

$$\leq \quad 2\sum_{n=1}^{k} a_{2n-1}^{\alpha}(S+T) \leq 2\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^{\alpha}(S)+a_n^{\alpha}(T)\right)$$

elde edilir. $\square$

Not 2.61. $n = 1,2,\ldots$ için $a_{2n-1}^{\alpha}(T_1+T_2) \leq a_n^{\alpha}(T_1)+a_n^{\alpha}(T_2)$, β bir sabit olmak üzere $a_n^{\alpha}(\beta T) = |\beta|\, a_n^{\alpha}(T)$ olduğu ve ϕ fonksiyonunun özellikleri kullanılarak $\|T\|_{\phi}^{\alpha} = \phi\left(\{a_n^{\alpha}(T)\}\right)$ ve $\|T\|_{\phi_{(p)}}^{\alpha} = \phi_{(p)}\left(\{a_n^{\alpha}(T)\}\right)$ nın bir kuasi-norm olduğu kolaylıkla görülebilir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ STOLZ DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölüm boyunca (u_n) ve (w_n) dizileri $u_1 \geq u_2 \geq ... \geq u_n \geq \ldots$, $w_1 \leq w_2 \leq ... \leq w_n \leq ...$ ve $w_n \leq n \leq \dfrac{w_n}{u_n}$ şartlarını sağlayan negatif olmayan reel sayı dizileri olarak kabul edilecektir.

3.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ STOLZ DÖNÜŞÜMLERİNİN SINIFI $L_{GSTOL,p}(X,Y)$

Bu bölümde [27] nolu çalışmada Iseki tarafından tanımlanan Stolz dönüşümlerinin sınıfı genelleştirilecektir. Ayrıca bu yeni sınıfın sağladığı çeşitli özellikler incelenecektir.

Tanım 3.1. Genelleştirilmiş Stolz dönüşümlerinin sınıfı olan $L_{GSTOL,p}(X,Y)$, $0 < p < \infty$ için

$$L_{GSTOL,p}(X,Y) = \left\{ T \in L(X,Y) : \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{w_n} \sum_{i=1}^{n} u_i a_i(T) \right]^p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2. $M > 0$, $1 < p < \infty$ ve her $k = 1,2,\ldots$ için

$$u_{2k-1} + u_{2k} \leq M u_k \tag{3.1}$$

olsun. Eğer (w_n) dizisi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{w_n} \right)^p < \infty$ şartını sağlıyorsa $L_{GSTOL,p}(X,Y)$ sınıfı

$$\|T\|_{\beta} = \left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{w_n} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_i(T) \right)^p}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u_1}{w_n} \right)^p} \right]^{\frac{1}{p}}$$

kuasi-normu ile bir kuasi-normlu operatör idealdir.

İspat. Operatör ideal ve ideal kuasi-norm olma şartları aynı anda incelenecektir. $x' \in X'$ ve $y \in Y$ için $x' \otimes y$ operatörünün rankı birdir. Dolayısıyla $(S4)$ özelliğine göre her $n \geq 2$

için $a_n(x'\otimes y)=0$ olur. Bu bilgi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left\|x'\otimes y\right\|_{\beta} &= \left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i a_i(x'\otimes y)\right)^p}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}u_1 a_1(x'\otimes y)\right)^p}{(u_1)^p\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\left(u_1\left\|x'\otimes y\right\|\right)^p\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\right)^p}{(u_1)^p\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\|x'\right\|\|y\|<\infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x'\otimes y\in L_{GSTOL,p}(X,Y)$ olduğu ve $\|x'\otimes y\|_{\beta}=\|x'\|\|y\|$ eşitliğinin sağlandığı görülür.

$S,T\in L_{GSTOL,p}(X,Y)$ olsun. (u_n) ve $(a_n(T))$ dizilerinin azalan olduğu, (3.1) eşitliği ve $(S2)$ özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}u_i a_i(S+T) &= \sum_{i=1}^{n}u_{2i-1}a_{2i-1}(S+T)+\sum_{i=1}^{n}u_{2i}a_{2i}(S+T) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(u_{2i-1}+u_{2i})\,a_{2i-1}(S+T) \\
&\leq M\sum_{i=1}^{n}u_i a_{2i-1}(S+T) \\
&\leq M\left(\sum_{i=1}^{n}u_i a_i(S)+\sum_{i=1}^{n}u_i a_i(T)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ile birlikte Minkowsky eşitsizliği kullanılırsa

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i a_i(S+T)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i a_i(S)+\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i a_i(T)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad M\left[\begin{array}{c}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i a_i(S)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ +\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i a_i(T)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{array}\right]\\
&< \infty \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $S+T\in L_{GSTOL,p}$ elde edilir. Ayrıca (3.2) eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\|S+T\|_{\beta} &= \left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i a_i(S+T)\right)^p}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq M\left(\left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i a_i(S)\right)^p}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i a_i(T)\right)^p}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\\
&= M\left(\|S\|_{\beta}+\|T\|_{\beta}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece $\|S+T\|_{\beta}\leq M\left(\|S\|_{\beta}+\|T\|_{\beta}\right)$ olduğu gösterilmiş olur.

Son olarak $S\in L_{GSTOL,p}(X,Y)$, $T\in L(X_0,X)$ ve $R\in L(Y,Y_0)$ olsun. $(S3)$ özelliğinden

$$
\begin{aligned}
\|RST\|_{\beta} &= \left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i a_i(RST)\right)^p}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i\|R\|\,a_i(S)\,\|T\|\right)^p}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}}\\
&= \|R\|\,\|T\|\left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i a_i(S)\right)^p}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}}\\
&= \|R\|\,\|T\|\,\|S\|_{\beta}<\infty
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $RST\in L_{GSTOL,p}(X_0,Y_0)$ ve $\|RST\|_{\beta}\leq\|R\|\,\|T\|\,\|S\|_{\beta}$ şartlarının sağlandığı ispatlanmış olur. Sonuç olarak $L_{GSTOL,p}(X,Y)$ bir operatör ideal ve $\|\cdot\|_\beta$ fonksiyonu bir ideal kuasi-normdur. $\square$

Teorem 3.3. $1 \leq p < \infty$ için $\left[L_{GSTOL,p}, \|T\|_\beta\right]$ bir kuasi-Banach operatör idealdir.

İspat. $1 \leq p < \infty$ olsun. $(a_n(T))$ dizisi azalan olduğundan $T \in L_{GSTOL,p}$ için

$$\begin{aligned}
\|T\|_\beta &= \left[\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i(T)\right)^p}{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \left[\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\right)^p (u_1 a_1(T))^p}{(u_1)^p \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \|T\| \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(T_m), $L_{GSTOL,p}(X,Y)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, l \geq n_0$ için

$$\|T_m - T_l\|_\beta < \varepsilon \qquad (3.4)$$

dır. (3.3) ve (3.4) eşitsizlikleri birlikte ele alındığında

$$\|T_m - T_l\| \leq \|T_m - T_l\|_\beta < \varepsilon$$

olduğu görülür. Böylece (T_m) dizisinin $L(X,Y)$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğu görülür. Teorem 2.16 dan dolayı $L(X,Y)$ de bir Banach uzayı olduğundan bir $T \in L(X,Y)$ için $m \to \infty$ iken $\|T_m - T\| \to 0$ olur. Şimdi $T \in L_{GSTOL,p}(X,Y)$ için $m \to \infty$ iken $\|T_m - T\|_\beta \to 0$ olduğu gösterilecektir.

Her $m, l \in \mathbb{N}$ için $T_m, T_l, T \in L(X,Y)$ olduğundan $T_l - T_m$ ve $T - T_m$ operatörleri de

$L(X,Y)$ sınıfındadır. Lemma 2.31 dan her $m,l \in \mathbb{N}$ için

$$|a_n(T_l - T_m) - a_n(T - T_m)| \leq \|T_l - T_m - (T - T_m)\| = \|T_l - T\|$$

eşitsizliği sağlanır. $l \to \infty$ için $T_l \to T$ olduğundan her $l \geq n_0$ için $\|T_l - T\| < \varepsilon$ yazılabilir. Buradan $l \to \infty$ ve her $m \geq n_0$ için

$$a_n(T_l - T_m) \to a_n(T - T_m); \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.5}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.4) eşitsizliğinden dolayı her $m,l \geq n_0$ için

$$\|T_m - T_l\|_\beta = \left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_i(T_m - T_l)\right)^p}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

dır. (3.5) den $l \to \infty$ ve her $m \geq n_0$ için

$$\left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_i(T_m - T)\right)^p}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla her $m \geq n_0$ için

$$\|T_m - T\|_\beta < \varepsilon$$

bulunur. Son olarak $T \in L_{GSTOL,p}(X,Y)$ olduğu gösterilmelidir. (u_n) ve $(a_n(T))$ dizilerinin azalan olduğu ve (3.1) eşitsizliği ile $(S2)$ özelliği kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} u_i a_i(T) &= \sum_{i=1}^{n} u_{2i-1} a_{2i-1}(T) + \sum_{i=1}^{n} u_{2i} a_{2i}(T) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (u_{2i-1} + u_{2i})\, a_{2i-1}(T) \\
&\leq M \sum_{i=1}^{n} u_i a_{2i-1}(T)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= M\sum_{i=1}^{n} u_i a_{i+i-1}\left(T-T_m+T_m\right) \\
&\leq M\left(\sum_{i=1}^{n} u_i a_i\left(T-T_m\right)+\sum_{i=1}^{n} u_i a_i\left(T_m\right)\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliğine ulaşılır. Her m için $T_m \in L_{GSTOL,p}(X,Y)$ olur ve $m\to\infty$ için $\|T_m - T\|_\beta \to 0$ olduğundan Minkowski eşitsizliği yardımıyla

$$
\begin{aligned}
\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i(T)\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} &\leq M\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i\left(T-T_m\right)+\sum_{i=1}^{n} u_i a_i\left(T_m\right)\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq M\left(\begin{array}{c}\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_i\left(T-T_m\right)\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ +\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_i\left(T_m\right)\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\end{array}\right) \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla $T \in L_{GSTOL,p}(X,Y)$ bulunur. Böylece $\left[L_{GSTOL,p}, \|T\|_\beta\right]$ nin bir kuasi-Banach operatör ideal olduğu gösterilmiş olur. □

Sıradaki teoremde l_p tipindeki dönüşümlerin genelleştirilmiş Stolz dönüşümleri sınıfının içinde kaldığı ispatlanacaktır.

Teorem 3.4. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \neq 0$ ise l_p tipindeki dönüşümler sınıfı genelleştirilmiş Stolz dönüşümleri sınıfının içinde kalır $(1 \leq p < \infty)$.

İspat. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \neq 0$ ve $T \in L(X,Y)$ olsun. (u_n) ve (w_n) dizilerinin özellikleri kullanılarak

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i(T)\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{n u_n}\sum_{i=1}^{n} a_i(T)\right)^p = \left(\frac{u_1}{u}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(T)\right)^p
$$

eşitsizliği elde edilir. Hardy eşitsizliği ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p(T) < \infty$ olduğu kullanılarak

$$
\left(\frac{u_1}{u}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(T)\right)^p \leq \left(\frac{u_1}{u}\right)^p \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p(T) < \infty
$$

olur. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i a_i(T)\right)^p<\infty$$

bulunur.

Böylece l_p tipindeki dönüşümlerin sınıfı $1\leq p<\infty$ için genelleştirilmiş Stolz dönüşümleri sınıfının içinde kalır. □

Teorem 3.5. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u\neq 0$ ise $1\leq p<\infty$ için $\|T\|_{\phi_{(p)}}$ kuasi-normu ile

$$\|T\|_{\phi_{(p)}}^{\gamma}=\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i a_i(T)\right\}\right)$$

kuasi-normu denktir.

İspat. (u_n) ve $(a_n(T))$ dizileri azalan olduğundan

$$\frac{1}{n}nu_n a_n(T)\leq\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i a_i(T)\leq\frac{1}{nu_n}u_1\sum_{i=1}^{n}a_i(T)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $n=1$ den k ya kadar toplam alındığında

$$\sum_{n=1}^{k}(u_n a_n(T))^p\leq\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i a_i(T)\right)^p\leq\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{u_1}{nu_n}\sum_{i=1}^{n}a_i(T)\right)^p$$

elde edilir. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u\neq 0$ ise her $k\in\mathbb{N}$ için

$$u^p\sum_{n=1}^{k}a_n^p(T)\leq\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i a_i(T)\right)^p\leq\left(\frac{u_1}{u}\right)^p\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i(T)\right)^p$$

olur. Buradan her $k\in\mathbb{N}$ için Hardy eşitsizliği yardımıyla

$$u^p\sum_{n=1}^{k}a_n^p(T)\leq\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i a_i(T)\right)^p\leq\left(\frac{u_1}{u}\right)^p\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{k}a_n^p(T)$$

elde edilir. Dolayısıyla ϕ fonksiyonunun özellikleri ve Not 2.56 kullanılarak

$$u\|T\|_{\phi_{(p)}}\leq\|T\|_{\phi_{(p)}}^{\gamma}\leq\left(\frac{u_1}{u}\right)\left(\frac{p}{p-1}\right)\|T\|_{\phi_{(p)}}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece istenilen sonuç elde edilmiş olur. $\square$

Sonuç 3.6. Özel olarak Teorem 3.5 de $u_i = \alpha_i$ ve $w_n = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ alınırsa $\alpha_1 \leq 1$ için [51] nolu çalışmadaki Teorem 1.4 elde edilir. Eğer Teorem 3.5 de $u_i = 1$ ve $w_n = n$ alınırsa [51] nolu çalışmadaki Önerme 1.2 elde edilir.

Teorem 3.7. $1 = \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun.

$$L_{GSTOL,s,q}(X,Y) = \left\{ T \in L(X,Y) : \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{w_n} \sum_{i=1}^{n} u_i a_i^s (T) \right)^{\frac{q}{s}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

olmak üzere $S \in L_{GSTOL,s,q}(X,Y)$ ve $T \in L_{GSTOL,t,r}(X,Y)$ ise $ST \in L_{GSTOL,p}(X,Y)$ dir.

İspat. $n = 1,2,...$ için

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(ST) \leq 2 \sum_{i=1}^{n} [a_i(S) a_i(T)] \tag{3.6}$$

eşitsizliğinin sağlandığı [69] nolu çalışmada gösterilmiştir. $1 = \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ olmak üzere, (3.6) eşitsizliği ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|ST\|_{GSTOL,p} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{w_n} \sum_{i=1}^{n} u_i a_i (ST) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{w_n} \sum_{i=1}^{n} u_i a_i (S) a_i(T) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_i^s (S) \right)^{\frac{1}{s}}}{w_n^{\frac{1}{s}}} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_i^t (T) \right)^{\frac{1}{t}}}{w_n^{\frac{1}{t}}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_i^s (S)}{w_n} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_i^t (T)}{w_n} \right)^{\frac{1}{t}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^s(S)}{w_n}\right)^{\frac{q}{s}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^t(T)}{w_n}\right)^{\frac{r}{t}}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $ST \in L_{GSTOL,p}(X,Y)$ bulunur. □

Önerme 3.8. $1 < p \leq q < \infty$ için $L_{GSTOL,p} \subseteq L_{GSTOL,q}$ kapsaması sağlanır.
İspat. $1 < p \leq q < \infty$ için $l_p \subseteq l_q$ olduğundan bu kapsama açıktır. □

Şimdi s-sayı dizilerinin diğer örnekleri kullanılarak oluşturulan sınıflar ve bu sınıfların birbirleriyle olan ilişkileri incelenecektir.

Tanım 3.9. $\mu = (\mu_n(T))$ ile $s = (s_n(T))$, $c = (c_n(T))$, $d = (d_n(T))$, $x = (x_n(T))$, $y = (y_n(T))$ ve $h = (h_n(T))$ sayı dizileri yardımıyla oluşturulan sınıflar $L_{GSTOL,p}^{(\mu)}$ ile gösterilir ve

$$L_{GSTOL,p}^{(\mu)}(X,Y) = \left\{T \in L(X,Y) : \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i\mu_i(T)\right)^p < \infty\right\};\ 1 < p < \infty$$

şeklinde tanımlanır. Her bir sınıfa ait $\|T\|_{\beta,(\mu)}$ kuasi-normu

$$\|T\|_{\beta,(\mu)} = \left[\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i\mu_i(T)\right)^p}{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.10. $1 < p < \infty$ olmak üzere eğer s-sayı dizisi birebir ise $\left[L_{GSTOL,p}^{(s)}, \|T\|_{\beta,(s)}\right]$ kuasi-Banach operatör ideali de birebirdir.
İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Bir $I \in L(Y,Y_0)$ içine metriği ve her $T \in L(X,Y)$ için $IT \in L_{GSTOL,p}^{(s)}(X,Y_0)$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i s_i(IT)\right)^p < \infty$$

yazılabilir. $s = (s_n)$ birebir olduğundan her $T \in L(X,Y)$ ve $n = 1,2,\ldots$ için

$$s_n(T) = s_n(IT) \tag{3.7}$$

olur. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i s_i(T)\right]^p = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i s_i(IT)\right]^p < \infty$$

bulunur. Dolayısıyla $T \in L^{(s)}_{GSTOL,p}(X,Y)$ dır. Ayrıca (3.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\|IT\|_{\beta,(s)} &= \left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i s_i(IT)\right)^p}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i s_i(T)\right)^p}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}} = \|T\|_{\beta,(s)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\left[L^{(s)}_{GSTOL,p}, \|T\|_{\beta,(s)}\right]$ kuasi-Banach operator idealinin birebir olduğunu gösterir. $\square$

Sonuç 3.11. Gelfand ve Weyl sayı dizileri birebirdir. Dolayısıyla $\left[L^{(c)}_{GSTOL,p}, \|T\|_{\beta,(c)}\right]$ ve $\left[L^{(x)}_{GSTOL,p}, \|T\|_{\beta,(x)}\right]$ kuasi-Banach operatör idealleri de birebirdir [24].

Teorem 3.12. $1 < p < \infty$ olmak üzere eğer s-sayı dizisi örten ise $\left[L^{(s)}_{GSTOL,p}, \|T\|_{\beta,(s)}\right]$ kuasi-Banach operatör ideali örtendir.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Bir $S \in L(X_0, X)$ üzerine metriği ve her $T \in L(X,Y)$ için $TS \in L^{(s)}_{GSTOL,p}(X_0,Y)$ olsun. O halde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i s_i(TS)\right)^p < \infty$$

dır. $s = (s_n)$ örten olduğundan her $T \in L(X,Y)$ ve $n = 1,2,\ldots$ için

$$s_n(T) = s_n(TS) \tag{3.8}$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i s_i(T)\right)^p=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i s_i(TS)\right)^p<\infty$$

dır. Böylece $T\in L_{GSTOL,p}^{(s)}(X,Y)$ olur. Diğer taraftan (3.8) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\|TS\|_{\beta,(s)} &= \left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i s_i(TS)\right)^p}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}}\\ &= \left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i s_i(T)\right)^p}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{w_n}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}}=\|T\|_{\beta,(s)}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum $\left[L_{GSTOL,p}^{(s)},\|T\|_{\beta,(s)}\right]$ kuasi-Banach operatör idealinin örten olduğunu gösterir. □

Sonuç 3.13. Kolmogorov ve Chang sayı dizileri örten olduğundan $\left[L_{GSTOL,p}^{(d)},\|T\|_{\beta,(d)}\right]$ ve $\left[L_{GSTOL,p}^{(y)},\|T\|_{\beta,(y)}\right]$ kuasi-Banach operatör idealleri de örtendir [24].

Teorem 3.14. $1<p<\infty$ olmak üzere

i) $L_{GSTOL,p}\subseteq L_{GSTOL,p}^{(c)}\subseteq L_{GSTOL,p}^{(x)}\subseteq L_{GSTOL,p}^{(h)}$ ve
ii) $L_{GSTOL,p}\subseteq L_{GSTOL,p}^{(d)}\subseteq L_{GSTOL,p}^{(y)}\subseteq L_{GSTOL,p}^{(h)}$

kapsama bağıntıları sağlanır.

İspat. $1<p<\infty$ ve $T\in L_{GSTOL,p}$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i a_i(T)\right)^p<\infty$$

dır. Dolayısıyla Önerme 2.33 den

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i h_i(T)\right)^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i x_i(T)\right)^p\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i c_i(T)\right)^p\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_i a_i(T)\right)^p<\infty\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_ih_i(T)\right)^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_iy_i(T)\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_id_i(T)\right)^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_ia_i(T)\right)^p < \infty\end{aligned}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı görülür. Böylece kapsama bağıntıları sağlanır. □

Teorem 3.15. $1 < p < \infty$ için $L_{GSTOL,p}$ operatör ideali simetrik ve $L^{(h)}_{GSTOL,p}$ operatör ideali tam simetriktir.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Öncelikle $L_{GSTOL,p} \subseteq \left(L_{GSTOL,p}\right)'$ kapsama bağıntısının sağlandığı gösterilecektir. $T \in L_{GSTOL,p}$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_ia_i(T)\right)^p < \infty$$

olur. Önerme 2.42 den $a_n(T') \leq a_n(T)$ olduğu bilinmektedir. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_ia_i(T')\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_ia_i(T)\right)^p < \infty$$

elde edilir. Buradan $T \in \left(L_{GSTOL,p}\right)'$ bulunur. Sonuç olarak $L_{GSTOL,p}$ simetriktir.

Şimdi de $L^{(h)}_{GSTOL,p} = \left(L^{(h)}_{GSTOL,p}\right)'$ eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir. Önerme 2.45 den $h_n(T') = h_n(T)$ olduğu bilinmektedir. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_ih_i(T')\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}u_ih_i(T)\right)^p$$

elde edilir. Yani $L^{(h)}_{GSTOL,p}$ tam simetriktir. □

Teorem 3.16. $1 < p < \infty$ olmak üzere $L^{(c)}_{GSTOL,p} = \left(L^{(d)}_{GSTOL,p}\right)'$ eşitliği ve $L^{(d)}_{GSTOL,p} \subseteq \left(L^{(c)}_{GSTOL,p}\right)'$ kapsama bağıntısı sağlanır. Ayrıca kompakt operatörler için $L^{(d)}_{GSTOL,p} = \left(L^{(c)}_{GSTOL,p}\right)'$ eşitliği sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Önerme 2.43 den $c_n(T) = d_n(T')$ ve $c_n(T') \leq d_n(T)$ ifadeleri bilinmektedir. Ayrıca T kompakt olduğunda $c_n(T') = d_n(T)$ dır. Bu bilgiler kullanılarak istenilen sağlanır. □

Teorem 3.17. $1 < p < \infty$ olmak üzere $L^{(x)}_{GSTOL,p} = \left(L^{(y)}_{GSTOL,p}\right)'$ ve $L^{(y)}_{GSTOL,p} = \left(L^{(x)}_{GSTOL,p}\right)'$ bağıntıları sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$ olmak üzere, Önerme 2.44 de verilen $x_n(T) = y_n(T')$ ve $y_n(T) = x_n(T')$ bağıntıları kullanılarak ispat tamamlanır. □

3.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ YAKLAŞIM SAYILARI İLE ÜRETİLEN OPERATÖR SINIFLARI $L^{\alpha}_{GSTOL,p}$ ve $\Im^{\alpha}_{\phi_{(p)}}$

Bu bölümde Tanım 2.59 da tanımlanan genelleştirilmiş yaklaşım sayıları kullanılarak genelleştirilmiş Stolz dönüşümlerinin sınıfı $L^{\alpha}_{GSTOL,p}(X,Y)$ ve simetrik norm fonksiyonu kullanılarak $\Im^{\alpha}_{\phi_{(p)}}$ sınıfı tanımlanacaktır.

Tanım 3.18. $\Im(X,Y)$ bir operatör ideal, α bir ideal norm, $T \in \Im(X,Y)$ olmak üzere $0 < p < \infty$ için genelleştirilmiş yaklaşım sayıları kullanılarak üretilen genelleştirilmiş Stolz dönüşümlerinin sınıfı $L^{\alpha}_{GSTOL,p}(X,Y)$

$$L^{\alpha}_{GSTOL,p}(X,Y) = \left\{ T : \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{w_n} \sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\alpha}(T) \right]^p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.19. Genelleştirilmiş yaklaşım sayıları kullanılarak l_p^{α} tipindeki operatörler

$$L_p^{\alpha}(X,Y) = \left\{ T \in \Im(X,Y) : \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{\alpha}(T)\right)^p < \infty \right\};\ 0 < p < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

Sıradaki teoremde l_p^{α} tipindeki dönüşümlerin, genelleştirilmiş yaklaşım sayıları kullanılarak üretilen genelleştirilmiş Stolz dönüşümlerinin sınıfının içinde kaldığı gösterilecektir.

Teorem 3.20. $1 < p < \infty$ olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \neq 0$ ise l_p^α tipindeki dönüşümlerin sınıfı $L^\alpha_{GSTOL,p}(X,Y)$ sınıfının içinde kalır.

İspat. $1 < p < \infty$ ve $T \in \Im(X,Y)$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ olması ve (u_n), (w_n) dizilerinin özellikleri kullanılarak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^\alpha(T)\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_1}{nu_n}\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha(T)\right)^p \leq \left(\frac{u_1}{u}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha(T)\right)^p$$

eşitsizliği yazılabilir. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^\alpha(T))^p < \infty$ olduğundan Hardy eşitsizliği kullanılarak

$$\left(\frac{u_1}{u}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha(T)\right)^p \leq \left(\frac{u_1}{u}\right)^p \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^\alpha(T))^p < \infty$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^\alpha(T)\right)^p < \infty$$

sonucuna ulaşılır. Böylece l_p^α tipindeki dönüşümlerin sınıfı $L^\alpha_{GSTOL,p}(X,Y)$ sınıfının içinde kalır. □

Tanım 3.21. Simetrik norm fonksiyonu kullanılarak operatör ideallerin yeni bir sınıfı olan $\Im^\alpha_{\phi_{(p)}}$ sınıfı

$$\Im^\alpha_{\phi_{(p)}}(X,Y) = \left\{T \in \Im(X,Y) : \phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^\alpha(T)\right\}\right) < \infty\right\}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi $\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\right\}\right) < \infty$ olmak üzere $\Im^\alpha_{\phi_{(p)}}(X,Y)$ sınıfının bir operatör ideal olduğu ve bu sınıfın $\|T\|^{a,\gamma}_{\phi_{(p)}}$ kuasi-normu ile bir kuasi-normlu operatör ideal olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.22. $1 < p < \infty$ olsun. Eğer (w_n) dizisi için $\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\right\}\right) < \infty$ şartı sağlanıyorsa $\Im^{\alpha}_{\phi_{(p)}}(X,Y)$ sınıfı

$$\|T\|^{\alpha,\gamma}_{\phi_{(p)}} = \frac{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\alpha}(T)\right\}\right)}{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{u_1}{w_n}\right\}\right)}$$

kuasi-normu ile bir kuasi-normlu operatör idealdir.

İspat. Operatör ideal ve ideal kuasi-norm özellikleri birlikte incelenecektir.

$x' \in X'$, $y \in Y$ ise $x' \otimes y$ operatörünün rankı birdir. Böylece her $n \geq 2$ için $a_n^{\alpha}(x' \otimes y) = 0$ dir. Simetrik norm fonksiyonunun ve genelleştirilmiş yaklaşım sayılarının özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left\|x' \otimes y\right\|^{\alpha,\gamma}_{\phi_{(p)}} &= \frac{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\alpha}(x' \otimes y)\right\}\right)}{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{u_1}{w_n}\right\}\right)} \\
&= \frac{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n} u_1 a_1^{\alpha}(x' \otimes y)\right\}\right)}{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{u_1}{w_n}\right\}\right)} \\
&= \frac{u_1 \alpha(x' \otimes y)\,\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\right\}\right)}{u_1 \phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\right\}\right)} \\
&= \left\|x'\right\| \|y\| < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x' \otimes y \in \Im^{\alpha}_{\phi_{(p)}}(X,Y)$ olduğu ve $\|x' \otimes y\|^{\alpha,\gamma}_{\phi_{(p)}} = \|x'\| \|y\|$ eşitliğinin sağlandığı görülür.

$S,T \in \Im^{\alpha}_{\phi_{(p)}}(X,Y)$ olsun. (2.4) eşitsizliği ve simetrik norm fonksiyonunun özellikleri kullanılarak

$$\|S+T\|^{\alpha,\gamma}_{\phi_{(p)}} = \frac{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\alpha}(S+T)\right\}\right)}{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{u_1}{w_n}\right\}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{2\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i\left(a_i^{\alpha}(S)+a_i^{\alpha}(T)\right)\right\}\right)}{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{u_1}{w_n}\right\}\right)} \\
&= 2\left[\frac{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\alpha}(S)\right\}\right)}{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{u_1}{w_n}\right\}\right)}+\frac{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\alpha}(T)\right\}\right)}{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{u_1}{w_n}\right\}\right)}\right] \\
&= 2\left[\|S\|_{\phi_{(p)}}^{\alpha,\gamma}+\|T\|_{\phi_{(p)}}^{\alpha,\gamma}\right]<\infty
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece $S+T\in\Im_{\phi_{(p)}}^{\alpha}(X,Y)$ olduğu ve $\|S+T\|_{\phi_{(p)}}^{\alpha,\gamma}\leq 2\left[\|S\|_{\phi_{(p)}}^{\alpha,\gamma}+\|T\|_{\phi_{(p)}}^{\alpha,\gamma}\right]$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiş olur.

Şimdi $S\in\Im_{\phi_{(p)}}^{\alpha}(X,Y)$, $T\in\Im(X_0,X)$ ve $R\in\Im(Y,Y_0)$ olsun. Buradan

$$
\begin{aligned}
\|RST\|_{\phi_{(p)}}^{\alpha,\gamma} &= \frac{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\alpha}(RST)\right\}\right)}{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{u_1}{w_n}\right\}\right)} \\
&\leq \frac{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i \|R\|\, a_i^{\alpha}(S)\,\|T\|\right\}\right)}{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{u_1}{w_n}\right\}\right)} \\
&= \|R\|\,\|T\|\,\frac{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\alpha}(S)\right\}\right)}{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{u_1}{w_n}\right\}\right)} \\
&= \|R\|\,\|T\|\,\|S\|_{\phi_{(p)}}^{\alpha,\gamma}<\infty
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $RST\in\Im_{\phi_{(p)}}^{\alpha}(X_0,Y_0)$ olduğu ve $\|RST\|_{\phi_{(p)}}^{\alpha,\gamma}\leq\|R\|\,\|T\|\,\|S\|_{\phi_{(p)}}^{\alpha,\gamma}$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiş olur.

Sonuç olarak $\Im_{\phi_{(p)}}^{\alpha}(X,Y)$ bir operatör idealdir. Ayrıca $\|\cdot\|_{\phi_{(p)}}^{\alpha,\gamma}$ fonksiyonu $\Im_{\phi_{(p)}}^{\alpha}(X,Y)$ üzerinde bir kuasi-normdur. $\square$

Teorem 3.23. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ olsun. Bu durumda $\|T\|^{\alpha}_{\phi_{(p)}}$ kuasi-normu $1 < p < \infty$ için

$$\|\hat{T}\|^{\alpha,\gamma}_{\phi_{(p)}} = \phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\alpha}(T)\right\}\right)$$

kuasi-normu ile denktir.

İspat. (u_n) ve $(a_n^{\alpha}(T))$ dizileri azalan olduğu için

$$\frac{1}{n} n u_n a_n^{\alpha}(T) \leq \frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\alpha}(T) \leq \frac{1}{n u_n} u_1 \sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}(T)$$

yazılabilir. Burada $n = 1$ den k ya kadar toplam alındığında

$$\sum_{n=1}^{k}(u_n a_n^{\alpha}(T))^p \leq \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\alpha}(T)\right)^p \leq \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{u_1}{n u_n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}(T)\right)^p$$

elde edilir. Ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \neq 0$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için

$$u^p \sum_{n=1}^{k}(a_n^{\alpha}(T))^p \leq \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\alpha}(T)\right)^p \leq \left(\frac{u_1}{u}\right)^p \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}(T)\right)^p$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla Hardy eşitsizliği kullanılarak her $k \in \mathbb{N}$ için

$$u^p \sum_{n=1}^{k}(a_n^{\alpha}(T))^p \leq \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\alpha}(T)\right)^p \leq \left(\frac{u_1}{u}\right)^p \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{k}(a_n^{\alpha}(T))^p$$

bulunur. ϕ fonksiyonunun özellikleri ve Not 2.56 kullanılarak

$$u\|T\|^{\alpha}_{\phi_{(p)}} \leq \|\hat{T}\|^{\alpha,\gamma}_{\phi_{(p)}} \leq \left(\frac{u_1}{u}\right)\left(\frac{p}{p-1}\right)\|T\|^{\alpha}_{\phi_{(p)}}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece verilen kuasi-normların denkliği ispatlanmış olur. □

Örnek 3.24. Özel olarak $(u_n) = \left(\frac{2n+5}{10n}\right)$, $(w_n) = (n)$ ve $\phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ seçilirse $\|T\|^{a,\gamma}_{\phi_{(p)}} = \dfrac{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{2n+5}{10n}\right) a_i^{\alpha}(T)\right\}\right)}{\phi_{(p)}\left(\left\{\frac{7}{10n}\right\}\right)}$ kuasi-normu ile bir operatör ideal elde edilir.

4. BLOK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde $1 \leq p < \infty$ için [16] nolu çalışmada Foroutannia tarafından tanımlanan

$$l_p(E) = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{j \in E_n} x_j \right|^p < \infty \right\}$$

dizi uzayı kullanılarak üretilen üç farklı operatör ideal tanımlanacaktır. Daha sonra bu operatör idealler üzerinde tanımlanan kuasi-normlar ile kuasi-Banach operatör ideal oldukları gösterilecektir. Ayrıca s-sayı dizilerinin diğer örnekleri kullanılarak üretilen sınıfların birbirleri ile ilişkileri incelenecektir. Son olarak elde edilen yeni operatör idealler üzerindeki bazı kuasi-normların denk olup olmadıkları araştırılacaktır.

4.1. s-TİPİNDEKİ $l_p(E)$ OPERATÖRLERİNİN SINIFI $L_{p,E}$

Bu bölümde l_p tipindeki operatörler sınıfının genelleştirmesi olan s-tipindeki $l_p(E)$ operatörlerinin sınıfı verilecek daha sonra bu sınıfın üzerinde tanımlanan bir kuasi-norm ile kuasi-Banach operatör ideal olduğu gösterilecektir. Ayrıca s-sayı dizilerinin diğer örnekleri kullanılarak üretilen sınıfların birbirleri ile olan ilişkileri araştırılacaktır.

Tanım 4.1. Bir $T \in L(X,Y)$ operatörü eğer $1 \leq p < \infty$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in E_n} s_j(T) \right)^p < \infty$$

şartını sağlıyorsa T ye s-tipindeki $l_p(E)$ operatördür denir. Tüm s-tipindeki $l_p(E)$ operatörlerin sınıfı $L_{p,E}(X,Y)$ ile gösterilir.

Örnek 4.2. E_n in farklı durumları için elde edilen sınıflara örnekler verilecektir.

a) $n = 1,2,\ldots$ için $E_n = \{n\}$ ve $s_n(T) = a_n(T)$ alınırsa $L_{p,E}(X,Y)$ sınıfı l_p tipindeki operatörler sınıfına indirgenir.

b) $E_n = \{2n-1, 2n\}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} (s_{2n-1}(T) + s_{2n}(T))^p < \infty$$

şartını sağlayan T operatörleri $L_{p,E}(X,Y)$ sınıfının içinde kalır.

Teorem 4.3. $L_{p,E}$ sınıfı $1 \leq p < \infty$ için bir operatör idealdir.

İspat. $x' \in X$ ve $y \in Y$ olsun. $x' \otimes y$ operatörünün rankı bir olduğundan her $n \geq 2$ için $s_n(x' \otimes y) = 0$ olur. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in E_n} s_j \left(x' \otimes y \right) \right)^p = \left(s_1 \left(x' \otimes y \right) \right)^p = \left\| x' \otimes y \right\|^p = \left\| x' \right\|^p \|y\|^p < \infty$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla $x' \otimes y \in L_{p,E}$ olur.

$S, T \in L_{p,E}$ olsun. $(s_n(T))$ dizisinin azalanlığı ve $(S2)$ özelliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in E_n} s_j (S+T) \right)^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in E_n} s_{2j-1} (S+T) + \sum_{j \in E_n} s_{2j} (S+T) \right)^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \sum_{j \in E_n} s_{2j-1} (S+T) \right)^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \sum_{j \in E_n} s_j (S) + s_j (T) \right)^p \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ile birlikte Minkowski eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{j \in E_n} s_j(S+T) \Big)^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^p \Big(\sum_{j \in E_n} s_j(S) + s_j(T) \Big)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2 \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{j \in E_n} s_j(S))^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{j \in E_n} s_j(T))^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &< \infty \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $S + T \in L_{p,E}$ olur.

Ayrıca $R \in L(Y,Y_0),\ S \in L_{p,E}(X,Y)$ ve $T \in L(X_0,X)$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(RST)\right)^p \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} \|R\|\,\|T\|\,s_j(S)\right)^p \le \|R\|^p\,\|T\|^p \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(S)\right)^p < \infty$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan $RST \in L_{p,E}(X_0,Y_0)$ olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak $L_{p,E}(X,Y)$ bir operatör idealdir. $\square$

Teorem 4.4. $\|T\|_{p,E} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$ şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_{p,E}$ fonksiyonu $L_{p,E}$ operatör ideali üzerinde bir kuasi-normdur.

İspat. $x' \in X$ ve $y \in Y$ olsun. $x' \otimes y$ operatörünün rankı bir olduğundan her $n \ge 2$ için $s_n(x' \otimes y) = 0$ olur ve

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j\left(x'\otimes y\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\left(s_1\left(x'\otimes y\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|x'\otimes y\right\| = \left\|x'\right\|\|y\|$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $\|x'\otimes y\|_{p,E} = \|x'\|\,\|y\|$ olur.

$S,T \in L_{p,E}$ olmak üzere $(s_n(T))$ dizisinin azalanlığı ve $(S2)$ özelliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(S+T)\right)^p &\le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_{2j-1}(S+T) + \sum_{j\in E_n} s_{2j}(S+T)\right)^p \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\sum_{j\in E_n} s_{2j-1}(S+T)\right)^p \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\sum_{j\in E_n} s_j(S) + s_j(T)\right)^p
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte Minkowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{j\in E_n} s_j(S+T)\Big)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^p\Big(\sum_{j\in E_n} s_j(S)+s_j(T)\Big)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le 2\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{j\in E_n} s_j(S))^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{j\in E_n} s_j(T))^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\|S+T\|_{p,E} \leq 2\left(\|S\|_{p,E} + \|T\|_{p,E}\right)$$

olur. Son olarak $R \in L(Y,Y_0),\ S \in L_{p,E}(X,Y)$ ve $T \in L(X_0,X)$ için

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(RST)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} \|R\|\,\|T\|\, s_j(S)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|R\|\,\|T\|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(S)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlandığından

$$\|RST\|_{p,E} \leq \|R\|\,\|T\|\,\|S\|_{p,E}$$

dır. Sonuç olarak $\|\cdot\|_{p,E}$ fonksiyonunun $L_{p,E}$ operatör ideali üzerinde bir kuasi-norm olduğu gösterilmiş olur. □

Teorem 4.5. $1 \leq p < \infty$ için $\left[L_{p,E}(X,Y), \|T\|_{p,E}\right]$ bir kuasi-Banach operatör idealdir.

İspat. $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $T \in L_{p,E}(X,Y)$ için

$$\|T\|_{p,E} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \|T\| \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

(T_m), $L_{p,E}(X,Y)$ üzerinde bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, l \geq n_0$ için

$$\|T_m - T_l\|_{p,E} < \varepsilon \tag{4.2}$$

dır. (4.1) ve (4.2) eşitsizliklerinden

$$\|T_m - T_l\| \leq \|T_m - T_l\|_{p,E} < \varepsilon$$

olduğu görülür. Böylece (T_m) dizisinin $L(X,Y)$ üzerinde bir Cauchy dizisi olduğu görülür. Y bir Banach uzayı olduğundan $L(X,Y)$ de bir Banach uzayıdır. Bu yüzden $T \in L(X,Y)$ için $m \to \infty$ iken $\|T_m - T\| \to 0$ dır. Şimdi $T \in L_{p,E}(X,Y)$ için $m \to \infty$ iken $\|T_m - T\|_{p,E} \to 0$ olduğu gösterilecektir.

Her $m, l \in \mathbb{N}$ için $T_m,\ T_l,\ T \in L(X,Y)$ olduğundan $T_l - T_m$ ve $T - T_m$ operatörleri de $L(X,Y)$ sınıfındadır. Lemma 2.31 den her $m, l \in \mathbb{N}$ için

$$|s_n(T_l - T_m) - s_n(T - T_m)| \leq \|T_l - T_m - (T - T_m)\| = \|T_l - T\|$$

eşitsizliği sağlanır. $l \to \infty$ için $T_l \to T$ olduğundan her $l \geq n_0$ için $\|T_l - T\| < \varepsilon$ yazılabilir. Buradan $l \to \infty$ ve her $m \geq n_0$ için

$$s_n(T_l - T_m) \to s_n(T - T_m); \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.3}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.2) eşitsizliğinden her $m, l \geq n_0$ için

$$\|T_m - T_l\|_{p,E} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in E_n} s_j(T_m - T_l) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. (4.3) kullanılarak $l \to \infty$ ve $m \geq n_0$ için

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in E_n} s_j(T_m - T) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

dır. Dolayısıyla her $m \geq n_0$ için

$$\|T_m - T\|_{p,E} < \varepsilon$$

bulunur. Son olarak $T \in L_{p,E}(X,Y)$ olduğu gösterilmelidir. s-sayı dizisinin özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in E_n} s_j(T) \right)^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in E_n} s_{2j-1}(T) + \sum_{j \in E_n} s_{2j}(T) \right)^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \sum_{j \in E_n} s_{2j-1}(T - T_m + T_m) \right)^p
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\sum_{j\in E_n} s_j(T-T_m)+s_j(T_m)\right)^p$$

eşitsizliğine ulaşılır. Her m için $T_m \in L_{p,E}(X,Y)$ ve $m\to\infty$ için $\|T_m - T\|_{p,E}\to 0$ olduğundan, son bulunan eşitsizlikler üzerinde Minkowski eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(T-T_m)+s_j(T_m)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(T-T_m)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}+2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(T_m)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&< \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $T\in L_{p,E}(X,Y)$ olur. Böylece $\left(L_{p,E},\|T\|_{p,E}\right)$ nin bir kuasi-Banach operatör ideal olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Önerme 4.6. $1<p\leq q<\infty$ için $L_{p,E}\subseteq L_{q,E}$ kapsaması sağlanır.
İspat. $1<p\leq q<\infty$ için $l_p\subseteq l_q$ olduğu için bu kapsama açıktır. $\square$

Şimdi s-sayı dizilerinin diğer örnekleri ile oluşturulan sınıflar tanımlanacak ve bu sınıflar arasındaki bağıntılar incelenecektir.

Tanım 4.7. $\mu=(\mu_n(T))$ ile $a=(a_n(T))$, $c=(c_n(T))$, $d=(d_n(T))$, $x=(x_n(T))$, $y=(y_n(T))$ ve $h=(h_n(T))$ sayı dizileri yardımıyla oluşturulan sınıflar $L_{p,E}^{(\mu)}$ ile gösterilir ve

$$L_{p,E}^{(\mu)}(X,Y)=\left\{T\in L(X,Y):\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n}\mu_j(T)\right)^p<\infty\right\};\ \ 1\leq p<\infty$$

şeklinde tanımlanır. Her bir sınıfa ait $\|T\|_{p,E}^{(\mu)}$ kuasi-normu

$$\|T\|_{p,E}^{(\mu)}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n}\mu_j(T)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.8. $1<p<\infty$ olmak üzere eğer s-sayı dizisi birebir ise $\left[L_{p,E},\|T\|_{p,E}\right]$ kuasi-Banach operatör ideali de birebirdir.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Bir $I \in L(Y,Y_0)$ içine metriği ve her $T \in L(X,Y)$ için $IT \in L_{p,E}(X,Y_0)$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(IT)\right)^p < \infty$$

dır. $s = (s_n)$ birebir olduğundan her $T \in L(X,Y)$ ve $n = 1,2,\ldots$ için

$$s_n(T) = s_n(IT) \tag{4.4}$$

olur. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(IT)\right)^p < \infty$$

bulunur. Dolayısıyla $T \in L_{p,E}(X,Y)$ dır. Ayrıca (4.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\|IT\|_{p,E} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(IT)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|T\|_{p,E}\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\left[L_{p,E}, \|T\|_{p,E}\right]$ kuasi-Banach operator ideali birebirdir. □

Sonuç 4.9. Gelfand ve Weyl sayı dizileri birebirdir. Dolayısıyla $\left[L_{p,E}^{(c)}, \|T\|_{p,E}^{(c)}\right]$ ve $\left[L_{p,E}^{(x)}, \|T\|_{p,E}^{(x)}\right]$ kuasi-Banach operatör idealleri de birebirdir [24].

Teorem 4.10. $1 < p < \infty$ olmak üzere eğer s-sayı dizisi örten ise $\left[L_{p,E}, \|T\|_{p,E}\right]$ kuasi-Banach operatör ideali örtendir.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Bir $S \in L(X_0,X)$ üzerine metriği ve her $T \in L(X,Y)$ için $TS \in L_{p,E}(X_0,Y)$ olsun. O halde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(TS)\right)^p < \infty$$

dır. $s = (s_n)$ örten olduğundan her $T \in L(X,Y)$ ve $n = 1,2,\ldots$ için

$$s_n(T) = s_n(TS) \tag{4.5}$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(TS)\right)^p < \infty$$

dır. Böylece $T \in L_{p,E}(X,Y)$ elde edilir. Diğer taraftan (4.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \|TS\|_{p,E} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(TS)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|T\|_{p,E} \end{aligned}$$

bulunur. Bu durum $\left[L_{p,E}, \|T\|_{p,E}\right]$ kuasi-Banach operatör idealinin örten olduğunu gösterir. □

Sonuç 4.11. Kolmogorov ve Chang sayı dizileri örten olduğundan $\left[L^{(d)}_{p,E}, \|T\|^{(d)}_{p,E}\right]$ ve $\left[L^{(y)}_{p,E}, \|T\|^{(y)}_{p,E}\right]$ kuasi-Banach operatör idealleri de örtendir [24].

Teorem 4.12. $1 < p < \infty$ olmak üzere

i. $L^{(a)}_{p,E} \subseteq L^{(c)}_{p,E} \subseteq L^{(x)}_{p,E} \subseteq L^{(h)}_{p,E}$ ve
ii. $L^{(a)}_{p,E} \subseteq L^{(d)}_{p,E} \subseteq L^{(y)}_{p,E} \subseteq L^{(h)}_{p,E}$

kapsama bağıntıları sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$ ve $T \in L^{(a)}_{p,E}$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} a_j(T)\right)^p < \infty$$

dır. Dolayısıyla Önerme 2.33 dan

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} h_j(T)\right)^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} x_j(T)\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} c_j(T)\right)^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} a_j(T)\right)^p < \infty \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} h_j(T)\right)^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} y_j(T)\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} d_j(T)\right)^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} a_j(T)\right)^p < \infty
\end{aligned}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı görülür. Böylece kapsama bağıntıları sağlanır. □

Teorem 4.13. $1 < p < \infty$ için $L_{p,E}^{(a)}$ operatör ideali simetrik ve $L_{p,E}^{(h)}$ operatör ideali tam simetriktir.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Öncelikle $L_{p,E}^{(a)} \subseteq \left(L_{p,E}^{(a)}\right)'$ kapsama bağıntısının sağlandığı gösterilecektir. $T \in L_{p,E}^{(a)}$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} a_j(T)\right)^p < \infty$$

olur. Önerme 2.42 den $a_n(T') \leq a_n(T)$ olduğu bilinmektedir. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} a_j(T')\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} a_j(T)\right)^p < \infty$$

elde edilir. Buradan $T \in \left(L_{p,E}^{(a)}\right)'$ bulunur. Sonuç olarak $L_{p,E}^{(a)}$ simetriktir.

Şimdi de $L_{p,E}^{(h)} = \left(L_{p,E}^{(h)}\right)'$ eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir. Önerme 2.45 den $h_n(T') = h_n(T)$ olduğu bilinmektedir. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} h_j(T')\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} h_j(T)\right)^p$$

elde edilir. Yani $L_{p,E}^{(h)}$ tam simetriktir. □

Teorem 4.14. $1 < p < \infty$ olmak üzere $L_{p,E}^{(c)} = \left(L_{p,E}^{(d)}\right)'$ eşitliği ve $L_{p,E}^{(d)} \subseteq \left(L_{p,E}^{(c)}\right)'$ kapsama bağıntısı sağlanır. Ayrıca kompakt operatörler için $L_{p,E}^{(d)} = \left(L_{p,E}^{(c)}\right)'$ eşitliği sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Önerme 2.43 den $c_n(T) = d_n(T')$ ve $c_n(T') \leq d_n(T)$ ifadelerinin sağlandığı bilinmektedir. Ayrıca T kompakt olduğunda $c_n(T') = d_n(T)$ eşitliği de sağlanır. Bu bilgiler kullanılarak istenilen elde edilir. □

Teorem 4.15. $1 < p < \infty$ olmak üzere $L^{(x)}_{p,E} = \left(L^{(y)}_{p,E}\right)'$ ve $L^{(y)}_{p,E} = \left(L^{(x)}_{p,E}\right)'$ bağıntıları sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$ olmak üzere Önerme 2.44 de verilen $x_n(T) = y_n(T')$ ve $y_n(T) = x_n(T')$ bağıntıları kullanılarak ispat tamamlanır. □

4.2. SİMETRİK NORM FONKSİYONU VE s- TİPİNDEKİ $l_p(E)$ OPERATÖRLERİ İLE ÜRETİLEN OPERATÖRLERİN SINIFI $L_{\phi_{(p)},E}$

Bu bölümde $L_{p,E}(X,Y)$ operatör ideali ve simetrik norm fonksiyonu $\phi_{(p)}$ kullanılarak yeni bir operatör sınıfı tanımlanacaktır. Bu sınıfın bir operatör ideal olduğu ve üzerinde tanımlı kuasi-norm ile bir kuasi-Banach operatör ideal olduğu ispatlanacaktır. Ayrıca s-sayı dizilerinin diğer örnekleri kullanılarak üretilen sınıfların birbirleri ile olan ilişkileri araştırılacaktır.

Tanım 4.16. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bir $T \in L(X,Y)$ operatörü

$$\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right\}\right) < \infty$$

şartını sağlıyorsa $L_{\phi_{(p)},E}$ sınıfına aittir denir.

Örnek 4.17. $E_n = \{3n-2, 3n-1, 3n\}$ için

$$\phi_{(p)}\left(\{s_{3n-2}(T) + s_{3n-1}(T) + s_{3n}(T)\}\right) < \infty$$

şartını sağlayan T operatörü $L_{\phi_{(p)},E}$ sınıfına aittir.

Teorem 4.18. $L_{\phi_{(p)},E}$ sınıfı $1 \leq p < \infty$ için bir operatör idealdir.

İspat. $x' \in X$ ve $y \in Y$ olsun. $x' \otimes y$ operatörünün rankı bir olduğundan her $n \geq 2$ için $s_n(x' \otimes y) = 0$ dır. Böylece ϕ fonksiyonunun özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(x'\otimes y)\right\}\right) &= \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_1} s_j(x'\otimes y), \sum_{j\in E_2} s_j(x'\otimes y), \ldots, \right\}\right) \\
&= \phi_{(p)}\left(\{s_1(x'\otimes y), 0, 0, \ldots, \}\right) \\
&= \left(s_1(x'\otimes y)\right)\phi_{(p)}\left(\{1, 0, 0, \ldots, \}\right)
\end{aligned}$$

$$= \; s_1\left(x'\otimes y\right)\cdot 1 = \left\|x'\otimes y\right\| = \left\|x'\right\|\|y\| < \infty$$

elde edilir. Buradan $x'\otimes y \in L_{\phi_{(p)},E}$ olduğu görülür.

$S,T \in L_{\phi_{(p)},E}$ olmak üzere $(\phi 5)$ özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j\left(S+T\right)\right\}\right) &\leq \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_{2j-1}\left(S+T\right)+\sum_{j\in E_n} s_{2j}\left(S+T\right)\right\}\right) \\
&\leq \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} 2s_{2j-1}\left(S+T\right)\right\}\right) \\
&\leq \phi_{(p)}\left(\left\{2\sum_{j\in E_n} s_j\left(S\right)+s_j\left(T\right)\right\}\right) \\
&\leq \phi_{(p)}\left(\left\{2\left(\sum_{j\in E_n} s_j\left(S\right)+\sum_{j\in E_n} s_j\left(T\right)\right)\right\}\right) \\
&\leq 2\left[\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j\left(S\right)\right\}\right)+\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j\left(T\right)\right\}\right)\right] \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $S+T \in L_{\phi_{(p)},E}$ olduğu görülür.

$R \in L\left(Y,Y_0\right)$, $S \in L_{\phi_{(p)},E}\left(X,Y\right)$ ve $T \in L\left(X_0,X\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j\left(RST\right)\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n}\|R\|\,\|T\|\,s_j\left(S\right)\right) \\
&\leq \|R\|\,\|T\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j\left(S\right)\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır ve ϕ fonksiyonunun özellikleri kullanılarak

$$\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j\left(RST\right)\right\}\right) \leq \|R\|\,\|T\|\,\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j\left(S\right)\right\}\right) < \infty$$

elde edilir. Böylece $RST \in L_{\phi_{(p)},E}\left(X,Y\right)$ olur.

Sonuç olarak $L_{\phi_{(p)},E}\left(X,Y\right)$ sınıfının operatör ideallerinin tüm özelliklerini sağladığı gösterilmiş olur. □

Teorem 4.19. $\|T\|_{\phi_{(p)},E} = \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right\}\right)$ şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_{\phi_{(p)},E}$ fonksiyonu $L_{\phi_{(p)},E}$ operatör ideali üzerinde bir kuasi-normdur.

İspat. $x' \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere Teorem 4.18 deki adımlar izlenerek

$$\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j\left(x'\otimes y\right)\right\}\right) = \|T\|_{\phi_{(p)},E} = \left\|x'\otimes y\right\| = \left\|x'\right\|\|y\|$$

eşitliği sağlanır.

$S,T \in L_{\phi_{(p)},E}$ olmak üzere Teorem 4.18 deki adımlar takip edilerek

$$\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(S+T)\right\}\right) \leq 2\left[\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(S)\right\}\right) + \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right\}\right)\right]$$

$$\|S+T\|_{\phi_{(p)},E} \leq 2\left(\|S\|_{\phi_{(p)},E} + \|T\|_{\phi_{(p)},E}\right)$$

sonucu elde edilir.

$R\in L(Y,Y_0)$, $S\in L_{\phi_{(p)},E}(X,Y)$ ve $T\in L(X_0,X)$ olmak üzere

$$\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(RST)\right\}\right) \leq \|R\|\,\|T\|\,\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(S)\right\}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla

$$\|RST\|_{\phi_{(p)},E} \leq \|R\|\,\|T\|\,\|S\|_{\phi_{(p)},E}$$

dır. Sonuç olarak $\|\cdot\|_{\phi_{(p)},E}$ fonksiyonunun $L_{\phi_{(p)},E}$ operatör ideali üzerinde bir kuasi-norm olduğu gösterilmiş olur. □

Teorem 4.20. $1\leq p<\infty$ için $\left[L_{\phi_{(p)},E}, \|T\|_{p,E}\right]$ bir kuasi-Banach operatör idealdir.

İspat. $1\leq p<\infty$ olsun. Bu durumda $T\in L_{\phi_{(p)},E}$ için

$$\|T\|_{\phi_{(p)},E} = \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right\}\right) \geq \|T\| \tag{4.6}$$

eşitsizliği sağlanır. (T_m), $L_{\phi_{(p)},E}(X,Y)$ üzerinde bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m,l \geq n_0$ için

$$\|T_m - T_l\|_{\phi_{(p)},E} < \varepsilon \tag{4.7}$$

dır. (4.6) ve (4.7) eşitsizlikleri birlikte kullanıldığında

$$\|T_m - T_l\| \leq \|T_m - T_l\|_{\phi_{(p)},E} < \varepsilon$$

olduğu görülür. Böylece (T_m) dizisinin $L(X,Y)$ üzerinde bir Cauchy dizisi olduğu görülür. Y bir Banach uzayı olduğundan $L(X,Y)$ de bir Banach uzayıdır. Bu yüzden $T \in L(X,Y)$ için $m \to \infty$ iken $\|T_m - T\| \to 0$ olur. Şimdi $T \in L_{\phi_{(p)},E}(X,Y)$ için $m \to \infty$ iken $\|T_m - T_l\|_{\phi_{(p)},E} \to 0$ olduğu gösterilecektir.

Her $m,l \in \mathbb{N}$ için $T_m,\ T_l,\ T \in L(X,Y)$ olduğundan $T_l - T_m$ ve $T - T_m$ operatörleri de $L(X,Y)$ sınıfındadır. Lemma 2.31 den her $m,l \in \mathbb{N}$ için

$$|s_n(T_l - T_m) - s_n(T - T_m)| \leq \|T_l - T_m - (T - T_m)\| = \|T_l - T\|$$

eşitsizliği sağlanır. $l \to \infty$ için $T_l \to T$ olduğundan her $l \geq n_0$ için $\|T_l - T\| < \varepsilon$ yazılabilir. Buradan $l \to \infty$ ve her $m \geq n_0$ için

$$s_n(T_l - T_m) \to s_n(T - T_m); \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.8}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.7) eşitsizliğinden dolayı her $m,l \geq n_0$ için

$$\|T_m - T_l\|_{\phi_{(p)},E} = \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j \in E_n} s_j(T_m - T_l)\right\}\right) < \varepsilon$$

dır. (4.8) den $l \to \infty$ ve $m \geq n_0$ için

$$\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j \in E_n} s_j(T_m - T)\right\}\right) < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla her $m \geq n_0$ için

$$\|T_m - T_l\|_{\phi_{(p)},E} < \varepsilon$$

bulunur. Son olarak $T \in L_{\phi_{(p)},E}(X,Y)$ olduğu gösterilmelidir. s-sayılarının özelliklerinin kullanılması, her m için $T_m \in L_{\phi_{(p)},E}(X,Y)$ ve $m \to \infty$ için $\|T_m - T_l\|_{\phi_{(p)},E} \to 0$ olması sonucunda

$$\begin{aligned}
\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right\}\right) &\leq \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_{2j-1}(T) + \sum_{j\in E_n} s_{2j}(T)\right\}\right)\\
&\leq \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} 2s_{2j-1}(T - T_m + T_m)\right\}\right)\\
&\leq \phi_{(p)}\left(\left\{2\sum_{j\in E_n} s_j(T - T_m) + s_j(T_m)\right\}\right)\\
&\leq \phi_{(p)}\left(\left\{2\left(\sum_{j\in E_n} s_j(T - T_m) + \sum_{j\in E_n} s_j(T_m)\right)\right\}\right)\\
&\leq 2\left[\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(T - T_m)\right\}\right) + \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(T_m)\right\}\right)\right]\\
&< \infty
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Dolayısıyla $T \in L_{\phi_{(p)},E}(X,Y)$ bulunur. Sonuç olarak $\left(L_{\phi_{(p)},E}, \|T\|_{p,E}\right)$ nin bir kuasi-Banach operatör ideal olduğu gösterilmiş olur. □

Önerme 4.21. $1 < p \leq q < \infty$ için $L_{\phi_{(p)},E} \subseteq L_{\phi_{(q)},E}$ kapsaması sağlanır.

İspat. $1 < p \leq q < \infty$ için $l_p \subseteq l_q$ olduğu için bu kapsama açıktır. □

Şimdi s-sayı dizilerinin örnekleri ile oluşturulan farklı sınıflar tanımlanarak, bu sınıflar arasındaki bağıntılar araştırılacaktır.

Tanım 4.22. $\mu = (\mu_n(T))$ ile $a = (a_n(T))$, $c = (c_n(T))$, $d = (d_n(T))$, $x = (x_n(T))$, $y = (y_n(T))$ ve $h = (h_n(T))$ sayı dizileri yardımıyla oluşturulan sınıflar $L^{(\eta)}_{\phi_{(p)},E}$ ile gösterilir ve

$$L^{(\eta)}_{\phi_{(p)},E}(X,Y) = \left\{T \in L(X,Y) : \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} \mu_j(T)\right\}\right) < \infty\right\}; \;\; 1 \leq p < \infty$$

şeklinde tanımlanır. Her bir sınıfa ait $\|T\|^{(\mu)}_{\phi_{(p)},E}$ kuasi-normu

$$\|T\|^{(\mu)}_{\phi_{(p)},E} = \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} \mu_j(T)\right\}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.23. $1 < p < \infty$ olmak üzere eğer s-sayı dizisi birebir ise $\left[L_{\phi_{(p)},E}, \|T\|_{\phi_{(p)},E}\right]$ kuasi-Banach operatör ideali de birebirdir.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Bir $I \in L(Y,Y_0)$ içine metriği ve her $T \in L(X,Y)$ için $IT \in L_{\phi_{(p)},E}(X,Y_0)$ olsun. Bu durumda

$$\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(IT)\right\}\right) < \infty$$

dır. $s = (s_n)$ birebir olduğundan her $T \in L(X,Y), n = 1,2,\dots$ için

$$s_n(T) = s_n(IT) \tag{4.9}$$

olur. Böylece

$$\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right\}\right) = \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(IT)\right\}\right) < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $T \in L_{\phi_{(p)},E}(X,Y)$ olur. Ayrıca (4.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\|IT\|_{\phi_{(p)},E} &= \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(IT)\right\}\right)\\ &= \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right\}\right) = \|T\|_{\phi_{(p)},E}\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\left[L_{\phi_{(p)},E}, \|T\|_{\phi_{(p)},E}\right]$ kuasi-Banach operatör ideali birebirdir. □

Sonuç 4.24. Gelfand ve Weyl sayı dizileri birebir olduğundan $\left[L^{(c)}_{\phi_{(p)},E}, \|T\|^{(c)}_{\phi_{(p)},E}\right]$ ve $\left[L^{(x)}_{\phi_{(p)},E}, \|T\|^{(x)}_{\phi_{(p)},E}\right]$ kuasi-Banach operatör idealleri de birebirdir [24].

Teorem 4.25. $1 < p < \infty$ olmak üzere eğer s-sayı dizisi örten ise $\left[L_{\phi_{(p)},E}, \|T\|_{\phi_{(p)},E}\right]$ kuasi-Banach operatör ideali örtendir.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Bir $S \in L(X_0, X)$ üzerine metriği ve her $T \in L(X,Y)$ için $TS \in L^{(s)}_{\phi_{(p)},E}(X_0, Y)$ olsun. O halde

$$\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j \in E_n} s_j(TS)\right\}\right) < \infty$$

dır. $s = (s_n)$ örten olduğundan her $T \in L(X,Y), n = 1, 2, \ldots$ için

$$s_n(T) = s_n(TS) \tag{4.10}$$

olup

$$\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j \in E_n} s_j(T)\right\}\right) = \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j \in E_n} s_j(TS)\right\}\right) < \infty$$

dır. Böylece $T \in L_{\phi_{(p)},E}(X,Y)$ olur. Diğer taraftan (4.10) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \|TS\|_{\phi_{(p)},E} &= \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j \in E_n} s_j(TS)\right\}\right) \\ &= \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j \in E_n} s_j(T)\right\}\right) = \|T\|_{\phi_{(p)},E} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum $\left[L_{\phi_{(p)},E}, \|T\|_{\phi_{(p)},E}\right]$ kuasi-Banach operatör idealinin örten olduğunu gösterir. □

Sonuç 4.26. Kolmogorov ve Chang sayı dizileri örten olduğundan, $\left[L^{(d)}_{\phi_{(p)},E}, \|T\|^{(d)}_{\phi_{(p)},E}\right]$ ve $\left[L^{(y)}_{\phi_{(p)},E}, \|T\|^{(y)}_{\phi_{(p)},E}\right]$ kuasi-Banach operatör idealleri de örtendir [24].

Teorem 4.27. $1 < p < \infty$ olmak üzere

i $L^{(a)}_{\phi_{(p)},E} \subseteq L^{(c)}_{\phi_{(p)},E} \subseteq L^{(x)}_{\phi_{(p)},E} \subseteq L^{(h)}_{\phi_{(p)},E}$ ve
ii $L^{(a)}_{\phi_{(p)},E} \subseteq L^{(d)}_{\phi_{(p)},E} \subseteq L^{(y)}_{\phi_{(p)},E} \subseteq L^{(h)}_{\phi_{(p)},E}$

kapsama bağıntıları sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$ ve $T \in L^{(a)}_{\phi_{(p)},E}$ olsun. Buradan

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} a_j(T)\right)^p\right) < \infty$$

dır. Dolayısıyla Önerme 2.33 dan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} h_j(T)\right)^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} x_j(T)\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} c_j(T)\right)^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} a_j(T)\right)^p < \infty \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} h_j(T)\right)^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} y_j(T)\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} d_j(T)\right)^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} a_j(T)\right)^p < \infty \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (4.11) ve (4.12) eşitsizliklerine $(\phi 5)$ özelliği uygulandığında sırasıyla

$$\begin{aligned}
\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} h_j(T)\right\}\right) &\leq \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} x_j(T)\right\}\right) \leq \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} c_j(T)\right\}\right) \\
&\leq \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} a_j(T)\right\}\right) < \infty
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} h_j(T)\right\}\right) &\leq \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} y_j(T)\right\}\right) \leq \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} d_j(T)\right\}\right) \\
&\leq \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} a_j(T)\right\}\right) < \infty
\end{aligned}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı görülür. Böylece istenilen kapsama bağıntılarının sağlandığı gösterilmiş olur. □

Teorem 4.28. $1<p<\infty$ için $L^{(a)}_{\phi_{(p)},E}$ operatör ideali simetrik ve $L^{(h)}_{\phi_{(p)},E}$ operatör ideali tam simetriktir.

İspat. $1<p<\infty$ olsun. Öncelikle $L^{(a)}_{\phi_{(p)},E} \subseteq \left(L^{(a)}_{\phi_{(p)},E}\right)'$ kapsama bağıntısının sağlandığı gösterilecektir. $T \in L^{(a)}_{p,E}$ olsun. Bu durumda

$$\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} a_j\left(T\right)\right\}\right)<\infty$$

olur. Önerme 2.42 den $a_n\left(T'\right) \leq a_n\left(T\right)$ olduğu bilinmektedir. Böylece

$$\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} a_j\left(T'\right)\right\}\right) \leq \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} a_j\left(T\right)\right\}\right)<\infty$$

elde edilir. Buradan $T \in \left(L^{(a)}_{\phi_{(p)},E}\right)'$ bulunur. Sonuç olarak $L^{(a)}_{\phi_{(p)},E}$ simetriktir. Şimdi de $L^{(h)}_{\phi_{(p)},E} = \left(L^{(h)}_{\phi_{(p)},E}\right)'$ eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir. Önerme 2.45 den $h_n\left(T'\right) = h_n\left(T\right)$ olduğu bilinmektedir. Buradan

$$\phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} h_j\left(T'\right)\right\}\right) = \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_n} h_j\left(T\right)\right\}\right)$$

elde edilir. Yani $L^{(h)}_{\phi_{(p)},E}$ tam simetriktir. □

Teorem 4.29. $1<p<\infty$ olmak üzere $L^{(c)}_{\phi_{(p)},E} = \left(L^{(d)}_{\phi_{(p)},E}\right)'$ eşitliği ve $L^{(d)}_{\phi_{(p)},E} \subseteq \left(L^{(c)}_{\phi_{(p)},E}\right)'$ kapsama bağıntısı sağlanır. Ayrıca kompakt operatörler için $L^{(d)}_{\phi_{(p)},E} = \left(L^{(c)}_{\phi_{(p)},E}\right)'$ eşitliği sağlanır.

İspat. $1<p<\infty$ olsun. Önerme 2.43 den $c_n\left(T\right) = d_n\left(T'\right)$ ve $c_n\left(T'\right) \leq d_n\left(T\right)$ dır. Ayrıca T kompakt olduğunda $c_n\left(T'\right) = d_n\left(T\right)$ eşitliği de sağlanır. Bu bilgiler kullanılarak ispat açıktır. □

Teorem 4.30. $1<p<\infty$ olmak üzere $L^{(x)}_{\phi_{(p)},E} = \left(L^{(y)}_{\phi_{(p)},E}\right)'$ ve $L^{(y)}_{\phi_{(p)},E} = \left(L^{(x)}_{\phi_{(p)},E}\right)'$ bağıntıları sağlanır.

İspat. $1<p<\infty$ olmak üzere, Önerme 2.43 deki $x_n\left(T\right) = y_n\left(T'\right)$ ve $y_n\left(T\right) = x_n\left(T'\right)$ bağıntıları kullanılarak ispat tamamlanır. □

4.3. s-TİPİNDEKİ $Z(u,v;l_p(E))$ OPERATÖRLERİNİN SINIFI $L_{z,p,E}$

Bu bölüm boyunca $u=(u_n)$ ve $v=(v_n)$ birer pozitif reel sayı dizisi olarak kabul edilecektir.

[15] nolu çalışmada tanımlanan $Z(u,v;l_p)$ dizi uzayında l_p dizi uzayı yerine $l_p(E)$ dizi uzayı kullanılarak $Z(u,v;l_p(E))$ dizi uzayı

$$Z(u,v;l_p(E))=\left\{x\in\omega:\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_jx_j\right|^p<\infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu bölümde $Z(u,v;l_p(E))$ dizi uzayı yardımıyla tanımlanan ve [28] nolu çalışmada yer alan $\varsigma_p^{(s)}$ sınıfının daha genel bir sınıfı olarak yeni bir operatör ideal tanımlanacaktır. Bu operatör idealin bir kuasi-Banach operatör ideal olduğu gösterilecektir. Ayrıca s-sayı dizisinin diğer örnekleri kullanılarak üretilen sınıfların sağladığı özellikler araştırılacaktır.

Tanım 4.31. Bir $T\in L(X,Y)$ operatörü $1<p<\infty$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_js_j(T)\right)^p<\infty$$

şartını sağlıyorsa s-tipindeki $Z(u,v;l_p(E))$ sınıfındadır denir. Tüm s-tipindeki $Z(u,v;l_p(E))$ operatörlerinin sınıfı $L_{z,p,E}(X,Y)$ ile gösterilir.

Örnek 4.32. E_n in farklı durumları için elde edilen bazı örnekler verilecektir.

a) $n=1,2,\ldots$ için $E_n=\{n\}$ alınırsa $L_{z,p,E}(X,Y)$ sınıfı $\varsigma_p^{(s)}$ sınıfına indirgenir. $L_{z,p,E}(X,Y)$ sınıfı $\varsigma_p^{(s)}$ sınıfının bir genelleştirmesidir.

b) $E_n=\{2n-1,2n\}$ seçildiğinde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}v_{2k-1}s_{2k-1}(T)+v_{2k}s_{2k}(T)\right)^p<\infty$$

şartını sağlayan T operatörleri $L_{z,p,E}(X,Y)$ sınıfının içinde kalır.

Teorem 4.33. $1 < p < \infty$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n)^p < \infty$ olsun. Bu durumda $L_{z,p,E}(X,Y)$ sınıfı

$$v_{2k-1} + v_{2k} \leq M v_k \tag{4.13}$$

şartı altında bir operatör idealdir.

İspat. $x' \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere $x' \otimes y$ operatörünün rankı birdir. Dolayısıyla $n \geq 2$ için $s_n(x' \otimes y) = 0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} v_j s_j \left(x' \otimes y \right) \right)^p &= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n)^p \left(v_1 s_1 \left(x' \otimes y \right) \right)^p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n)^p (v_1)^p \left\| x' \otimes y \right\|^p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n)^p (v_1)^p \left\| x' \right\|^p \|y\|^p \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x' \otimes y \in L_{z,p,E}(X,Y)$ olur.

$S, T \in L_{z,p,E}(X,Y)$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} v_j s_j (S) \right)^p < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} v_j s_j (T) \right)^p < \infty$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler, s-sayı dizisinin azalan olması ve (4.13) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} v_j s_j (S+T) &\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j \in E_k} v_{2j-1} s_{2j-1} (S+T) + \sum_{j \in E_k} v_{2j} s_{2j} (S+T) \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} \left(v_{2j-1} + v_{2j} \right) s_{2j-1} (S+T) \\
&\leq M \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} v_j \left(s_j (S) + s_j (T) \right) \\
&\leq M \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j \in E_k} v_j s_j (S) + \sum_{j \in E_k} v_j s_j (T) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ile birlikte Minkowski eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j\in E_k}v_js_j\left(S+T\right)\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
\leq\ & M\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j\in E_k}v_js_j\left(S\right)+\sum_{j\in E_k}v_js_j\left(T\right)\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
\leq\ & M\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_js_j\left(S\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_js_j\left(T\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]<\infty
\end{aligned}$$

olur. Böylece $S+T\in L_{z,p,E}(X,Y)$ elde edilir.

$R\in L(Y,Y_0)$, $S\in L_{z,p,E}(X,Y)$ ve $T\in L(X_0,X)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_js_j\left(RST\right)\right)^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}\|R\|\,\|T\|\,v_js_j\left(S\right)\right)^p\\
&\leq \|R\|^p\,\|T\|^p\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_js_j\left(S\right)\right)^p\right)<\infty
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $RST\in L_{z,p,E}(X_0,Y_0)$ olduğu görülür.

Sonuç olarak $L_{z,p,E}(X,Y)$ bir operatör idealdir. □

Teorem 4.34. $\|T\|_{z,p,E}=\dfrac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j\in E_k}v_js_j\left(T\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}v_1}$ şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_{z,p,E}$ fonksiyonu $L_{z,p,E}(X,Y)$ operatör ideali üzerinde bir kuasi-normdur.

İspat. $x'\in X$ ve $y\in Y$ olsun. $x'\otimes y$ operatörünün rankı bir olduğundan, $n\geq 2$ için $s_n\left(x'\otimes y\right)=0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j\in E_k}v_js_j\left(x'\otimes y\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}v_1} &= \frac{\left(\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n\right)^p\right)v_1^p\left\|x'\otimes y\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}v_1}\\
&= \left\|x'\otimes y\right\|=\left\|x'\right\|\left\|y\right\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|x' \otimes y\|_{z,p,E} = \|x'\| \, \|y\|$ eşitliği sağlanır.

$S,T \in L_{z,p,E}(X,Y)$ olmak üzere (4.13) eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sum_{j\in E_k} v_j s_j(S+T) &\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j\in E_k} v_{2j-1} s_{2j-1}(S+T) + \sum_{j\in E_n} v_{2j} s_{2j}(S+T) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j\in E_k} \left(v_{2j-1} + v_{2j}\right) s_{2j-1}(S+T) \\
&\leq M \sum_{k=1}^{n} \sum_{j\in E_k} v_j \left(s_j(S) + s_j(T)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ile birlikte Minkowski eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k} v_j s_j(S+T)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(M u_n \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k} v_j \left(s_j(S)+s_j(T)\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq M \left[\begin{array}{c} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k} v_j s_j(S)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k} v_j s_j(T)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}\right]
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\|S+T\|_{z,p,E} \leq M\left(\|S\|_{z,p,E} + \|T\|_{z,p,E}\right)$$

olduğu gösterilir.

$R \in L(Y,Y_0)$, $S \in L_{z,p,E}(X,Y)$ ve $T \in L(X_0,X)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k} v_j s_j(RST)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k} \|R\| \, \|T\| \, v_j s_j(S)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|R\| \, \|T\| \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k} v_j s_j(S)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\|RST\|_{z,p,E} \leq \|R\| \, \|T\| \, \|S\|_{z,p,E}$$

özelliği sağlanır. Sonuç olarak tüm gerekli özellikler sağlandığından $\|\cdot\|_{z,p,E}$ fonksiyonu $L_{z,p,E}(X,Y)$ operatör ideali üzerinde bir kuasi-normdur. $\square$

Teorem 4.35. $1 < p < \infty$ olduğunda $\left[L_{z,p,E}(X,Y), \|T\|_{z,p,E}\right]$ bir kuasi-Banach operatör idealdir.

İspat. $1 \leq p < \infty$ olsun. $T \in L_{z,p,E}(X,Y)$ için

$$\|T\|_{z,p,E} = \frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j\in E_k} v_j s_j(T)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n)^p\right)^{\frac{1}{p}} v_1} \geq \|T\| \tag{4.14}$$

elde edilir.

(T_m), $L_{z,p,E}(X,Y)$ üzerinde bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m,l \geq n_0$ için

$$\|T_m - T_l\|_{z,p,E} < \varepsilon \tag{4.15}$$

dır. (4.14) ve (4.15) eşitsizlikleri birlikte düşünüldüğünde

$$\|T_m - T_l\| \leq \|T_m - T_l\|_{z,p,E} < \varepsilon$$

olduğu görülür. Böylece (T_m) dizisinin $L(X,Y)$ üzerinde bir Cauchy dizisi olduğu görülür. Y bir Banach uzayı olduğundan $L(X,Y)$ de bir Banach uzayıdır. Buradan $T \in L(X,Y)$ ve $m \to \infty$ için $\|T_m - T\| \to 0$ olur. Şimdi $T \in L_{z,p,E}(X,Y)$ ve $m \to \infty$ için $\|T_m - T\|_{z,p,E} \to 0$ olduğu gösterilmelidir.

Her $m,l \in \mathbb{N}$ için $T_m, T_l, T \in L(X,Y)$ olduğundan $T_l - T_m$ ve $T - T_m$ operatörleri de $L(X,Y)$ sınıfındadır. Lemma 2.31 den her $m,l \in \mathbb{N}$ için

$$|s_n(T_l - T_m) - s_n(T - T_m)| \leq \|T_l - T_m - (T - T_m)\| = \|T_l - T\|$$

eşitsizliği sağlanır. $l \to \infty$ için $T_l \to T$ olduğundan her $l \geq n_0$ için $\|T_l - T\| < \varepsilon$ yazılabilir buradan $l \to \infty$ ve her $m \geq n_0$ için

$$s_n (T_l - T_m) \to s_n (T - T_m) ; \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.16}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.15) eşitsizliğinden her $m, l \geq n_0$ için

$$\|T_m - T_l\|_{z,p,E} = \frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(u_n \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j \in E_k} v_j s_j (T_m - T_l) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n)^p \right)^{\frac{1}{p}} v_1} < \varepsilon$$

dır. (4.16) den $l \to \infty$ ve $m, l \geq n_0$ için

$$\frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(u_n \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j \in E_k} v_j s_j (T_m - T) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n)^p \right)^{\frac{1}{p}} v_1} < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla her $m \geq n_0$ için

$$\|T_m - T\|_{z,p,E} < \varepsilon$$

elde edilir. Son olarak $T \in L_{z,p,E} (X, Y)$ olduğu gösterilmelidir. s-sayı dizisinin özellikleri ve (4.13) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} v_j s_j (T) \right)^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} v_{2j-1} s_{2j-1} (T) + u_n \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} v_{2j} s_{2j} (T) \right)^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} (v_{2j-1} + v_{2j}) s_{2j-1} (T - T_m + T_m) \right)^p \\
&\leq M \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} v_j \left(s_j (T - T_m) + s_j (T_m) \right) \right)^p
\end{aligned}$$

bulunur. Her m için $T_m \in L_{z,p,E} (X, Y)$ ve $m \to \infty$ için $\|T_m - T\|_{z,p,E} \to 0$ olduğundan

Minkowski eşitsizliği yardımıyla

$$
\begin{aligned}
& M\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_j\left(s_j\left(T-T_m\right)+s_j\left(T_m\right)\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq\ & M\left[\begin{array}{c}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j\in E_k}v_js_j\left(T-T_m\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ +\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j\in E_k}v_js_j\left(T_m\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{array}\right]<\infty
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $T\in L_{z,p,E}\left(X,Y\right)$ olduğu gösterilir. Sonuç olarak $\left[L_{z,p,E},\|T\|_{z,p,E}\right]$ nin bir kuasi-Banach operatör ideal olduğu gösterilmiş olur. □

Önerme 4.36. $1<p\leq q<\infty$ için $L_{z,p,E}\subseteq L_{z,q,E}$ kapsaması sağlanır.
İspat. $1<p\leq q<\infty$ için $l_p\subseteq l_q$ olduğundan bu kapsama açıktır. □

Şimdi s-sayı dizisinin diğer örnekleri kullanılarak üretilen sınıfların sağladığı özellikler incelenecektir.

Tanım 4.37. $\mu=\left(\mu_n\left(T\right)\right)$ ile $a=\left(a_n\left(T\right)\right)$, $c=\left(c_n\left(T\right)\right)$, $d=\left(d_n\left(T\right)\right)$, $x=\left(x_n\left(T\right)\right)$, $y=\left(y_n\left(T\right)\right)$ ve $h=\left(h_n\left(T\right)\right)$ sayı dizileri yardımıyla oluşturulan sınıflar $L_{z,p,E}^{(\mu)}$ ile gösterilir ve

$$L_{z,p,E}^{(\mu)}(X,Y)=\left\{T\in L\left(X,Y\right):\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_j\mu_j\left(T\right)\right)^p<\infty\right\};\ \ 1<p<\infty$$

şeklinde tanımlanır. Her bir sınıfa ait $\|T\|_{z,p,E}^{(\mu)}$ kuasi-normu

$$\|T\|_{z,p,E}^{(\mu)}=\frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j\in E_k}v_j\mu_j\left(T\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}v_1}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.38. $1<p<\infty$ olmak üzere eğer s-sayı dizisi birebir ise $\left[L_{z,p,E}^{(s)},\|T\|_{z,p,E}^{(s)}\right]$ kuasi-Banach operatör ideali de birebirdir.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Bir $I \in L(Y,Y_0)$ içine metriği ve her $T \in L(X,Y)$ için $IT \in L_{z,p,E}(X,Y_0)$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k} v_j s_j(IT)\right)^p < \infty$$

dır. $s = (s_n)$ birebir olduğundan her $T \in L(X,Y), n = 1,2,\ldots$ için

$$s_n(T) = s_n(IT) \tag{4.17}$$

olur. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k} v_j s_j(T)\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k} v_j s_j(IT)\right)^p < \infty$$

bulunur. Dolayısıyla $T \in L_{z,p,E}(X,Y)$ elde edilir. Ayrıca (4.17) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\|IT\|_{z,p,E} &= \frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j\in E_k} v_j s_j(IT)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n)^p\right)^{\frac{1}{p}} v_1} \\
&= \frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j\in E_k} v_j s_j(T)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n)^p\right)^{\frac{1}{p}} v_1} = \|T\|_{z,p,E}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\left[L_{z,p,E}(X,Y), \|T\|_{z,p,E}\right]$ kuasi-Banach operatör idealinin birebir olduğunu gösterir. □

Sonuç 4.39. Gelfand ve Weyl sayı dizileri birebir olduğundan $\left[L^{(c)}_{z,p,E}, \|T\|^{(c)}_{z,p,E}\right]$ ve $\left[L^{(x)}_{z,p,E}, \|T\|^{(x)}_{z,p,E}\right]$ kuasi-Banach operatör idealleri de birebirdir [24].

Teorem 4.40. $1 < p < \infty$ olmak üzere eğer s-sayı dizisi örten ise $\left[L_{z,p,E}, \|T\|_{z,p,E}\right]$ kuasi-Banach operatör ideali örtendir.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Bir $S \in L(X_0,X)$ üzerine metriği ve her $T \in L(X,Y)$ için

$TS \in L_{z,p,E}(X_0, Y)$ olsun. O halde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k} v_j s_j(TS)\right)^p < \infty$$

olur. $s = (s_n)$ örten olduğundan her $T \in L(X,Y)$, $n = 1, 2, \ldots$ için

$$s_n(T) = s_n(TS) \tag{4.18}$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k} v_j s_j(T)\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k} v_j s_j(TS)\right)^p < \infty$$

elde edilir. Böylece $T \in L_{z,p,E}(X,Y)$ olur. Diğer taraftan (4.18) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\|TS\|_{z,p,E} &= \frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j\in E_k} v_j s_j(TS)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n)^p\right)^{\frac{1}{p}} v_1} \\ &= \frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j\in E_k} v_j s_j(T)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n)^p\right)^{\frac{1}{p}} v_1} = \|T\|_{z,p,E}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\left[L_{z,p,E}^{(s)}, \|T\|_{z,p,E}^{(s)}\right]$ kuasi-Banach operatör idealinin örten olduğu ispatlanır. □

Sonuç 4.41. Kolmogorov ve Chang sayı dizileri örten olduğundan, $\left[L_{z,p,E}^{(d)}, \|T\|_{z,p,E}^{(d)}\right]$ ve $\left[L_{z,p,E}^{(y)}, \|T\|_{z,p,E}^{(y)}\right]$ kuasi-Banach operatör idealleri de örtendir [24].

Teorem 4.42. $1 < p < \infty$ olmak üzere

i) $L_{z,p,E}^{(a)} \subseteq L_{z,p,E}^{(c)} \subseteq L_{z,p,E}^{(x)} \subseteq L_{z,p,E}^{(h)}$ ve
ii) $L_{z,p,E}^{(a)} \subseteq L_{z,p,E}^{(d)} \subseteq L_{z,p,E}^{(y)} \subseteq L_{z,p,E}^{(h)}$

kapsama bağıntıları sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$ ve $T \in L^{(a)}_{z,p,E}$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_j a_j(T)\right)^p < \infty$$

dır. Dolayısıyla Önerme 2.33 dan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_j h_j(T)\right)^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_j x_j(T)\right)^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_j c_j(T)\right)^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_j a_j(T)\right)^p \\
&< \infty
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_j h_j(T)\right)^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_j y_j(T)\right)^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_j d_j(T)\right)^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_j a_j(T)\right)^p \\
&< \infty
\end{aligned}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı görülür. Böylece kapsama bağıntıları sağlanmış olur. □

Teorem 4.43. $L^{(a)}_{z,p,E}$ operatör ideali simetrik ve $L^{(h)}_{z,p,E}$ operatör ideali $1 < p < \infty$ için tam simetriktir.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Öncelikle $L^{(a)}_{z,p,E} \subseteq \left(L^{(a)}_{z,p,E}\right)'$ kapsama bağıntısının sağlandığı gösterilecektir. $T \in L^{(a)}_{z,p,E}$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in E_k}v_j a_j(T)\right)^p < \infty$$

olur. Önerme 2.42 den $a_n(T') \leq a_n(T)$ olduğu bilinmektedir. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} v_j a_j(T')\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} v_j a_j(T)\right)^p < \infty$$

elde edilir. Buradan $T \in \left(L_{z,p,E}^{(a)}\right)'$ bulunur. Sonuç olarak $L_{z,p,E}^{(a)}$ simetriktir.

Şimdi de $L_{z,p,E}^{(h)} = \left(L_{z,p,E}^{(h)}\right)'$ eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir. Önerme 2.45 den $h_n(T') = h_n(T)$ olduğu bilinmektedir. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} v_j h_j(T')\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in E_k} v_j h_j(T)\right)^p$$

elde edilir. Yani $L_{z,p,E}^{(h)}$ tam simetriktir. □

Teorem 4.44. $1 < p < \infty$ olmak üzere $L_{z,p,E}^{(c)} = \left(L_{z,p,E}^{(d)}\right)'$ eşitliği ve $L_{z,p,E}^{(d)} \subseteq \left(L_{z,p,E}^{(c)}\right)'$ kapsama bağıntısı sağlanır. Ayrıca kompakt operatörler için $L_{z,p,E}^{(d)} = \left(L_{z,p,E}^{(c)}\right)'$ eşitliği sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Önerme 2.43 den $c_n(T) = d_n(T')$ ve $c_n(T') \leq d_n(T)$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca T kompakt olduğunda $c_n(T') = d_n(T)$ eşitliği de sağlanır. Bu bilgiler kullanılarak ispat açıktır. □

Teorem 4.45. $1 < p < \infty$ olmak üzere $L_{z,p,E}^{(x)} = \left(L_{z,p,E}^{(y)}\right)'$ ve $L_{z,p,E}^{(y)} = \left(L_{z,p,E}^{(x)}\right)'$ bağıntıları sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$ olmak üzere, Önerme 2.44 den yer alan $x_n(T) = y_n(T')$ ve $y_n(T) = x_n(T')$ bağıntıları kullanılarak ispat tamamlanır. □

4.4. $L_{\phi,E}$ OPERATÖR İDEALİ ÜZERİNDEKİ BAZI DENK KUASİ-NORMLAR

Bu bölümde $L_{\phi,E}(X,Y)$ operatör ideali üzerindeki bazı denk kuasi-normlar çalışılmıştır. Öncelikle $L_{\phi,E}(X,Y)$ nin bir operatör ideal olduğu ve bu operatör ideali üzerindeki kuasi-norm gösterilecektir.

Tanım 4.46. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bir $T \in L(X,Y)$ operatörü

$$\phi\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right\}\right) < \infty$$

şartnı sağlıyorsa $L_{\phi,E}(X,Y)$ sınıfına aittir denir.

Örnek 4.47. Her $n = 1,2,\ldots$ için $E_n = \{n\}$ seçilirse $L_{\phi,E}(X,Y) = L_{\phi}(X,Y)$ olduğu görülür. Ayrıca her n için $E_n = \{2n-1, 2n\}$ alınırsa $\phi(\{s_{2n-1}(T) + s_{2n}(T)\}) < \infty$ elde edilir.

Teorem 4.48. $\|T\|_{\phi,E} = \phi\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right\}\right)$ şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_{\phi,E}$ fonksiyonu $L_{\phi,E}(X,Y)$ operatör ideali üzerinde bir kuasi-normdur.

İspat. $x' \in X$ ve $y \in Y$ olsun. $x' \otimes y$ operatörünün rankı bir olduğundan her $n \geq 2$ için $s_n(x' \otimes y) = 0$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\phi\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(x'\otimes y)\right\}\right) &= \phi_{(p)}\left(\left\{\sum_{j\in E_1} s_j(x'\otimes y), \sum_{j\in E_2} s_j(x'\otimes y), \ldots,\right\}\right) \\
&= \phi_{(p)}\left(\left\{s_1(x'\otimes y), 0, 0, \ldots,\right\}\right) \\
&= \left(s_1(x'\otimes y)\right)\phi_{(p)}\left(\{1,0,0,\ldots,\}\right) \\
&= s_1(x'\otimes y)\cdot 1 = \|x'\otimes y\| = \|x'\|\,\|y\| < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x' \otimes y \in L_{\phi,E}$ olur ve ayrıca

$$\|x'\otimes y\|_{\phi,E} = \|x'\|\,\|y\|$$

dır.

$S,T \in L_{\phi,E}$ olmak üzere $(\phi 5)$ özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\phi\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(S+T)\right\}\right) &\leq \phi\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_{2j-1}(S+T) + \sum_{j\in E_n} s_{2j}(S+T)\right\}\right) \\
&\leq \phi\left(\left\{\sum_{j\in E_n} 2s_{2j-1}(S+T)\right\}\right) \\
&\leq \phi\left(\left\{2\sum_{j\in E_n} s_j(S) + s_j(T)\right\}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \phi\left(\left\{2\left(\sum_{j\in E_n} s_j(S)+\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right)\right\}\right)\\
&\leq 2\left[\phi\left(\left\{\left(\sum_{j\in E_n} s_j(S)\right)\right\}\right)+\phi\left(\left\{\left(\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right)\right\}\right)\right]\\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $S+T\in L_{\phi,E}$ olduğu gösterilir. Ayrıca

$$\|S+T\|_{\phi,E}\leq 2\left(\|S\|_{\phi,E}+\|T\|_{\phi,E}\right)$$

olur.

$R\in L(Y,Y_0)$, $S\in L_{\phi,E}(X,Y)$ ve $T\in L(X_0,X)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(RST)\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n}\|R\|\,\|T\|\,s_j(S)\right)\\
&\leq \|R\|\,\|T\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(S)\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır ve ϕ fonksiyonunun özellikleri kullanılarak

$$\phi\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(RST)\right\}\right)\leq \|R\|\,\|T\|\,\phi\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_j(S)\right\}\right)<\infty$$

elde edilir. Böylece $RST\in L_{\phi,E}(X,Y)$ bulunur. Ayrıca

$$\|RST\|_{\phi,E}\leq \|R\|\,\|T\|\,\|S\|_{\phi,E}$$

elde edilir. Sonuç olarak $L_{\phi,E}(X,Y)$ sınıfının operatör ideal şartlarının tamamını sağladığı, ayrıca $\|\cdot\|_{\phi,E}$ fonksiyonunun $L_{\phi,E}(X,Y)$ operatör ideali üzerinde bir kuasi-norm olduğu gösterilmiş olur. □

Şimdi $L_{\phi,E}(X,Y)$ sınıfının üzerindeki bazı denk kuasi-normlar tanımlanacaktır.

Önerme 4.49. $\|T\|^{+}_{\phi,E}=\phi\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_{2j-1}(T)\right\}\right)$ kuasi-normu $\|T\|_{\phi,E}$ kuasi-normu ile denktir.

İspat. Denklik

$$\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in E_n} s_{2j-1}(T) \leq \sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in E_n} s_j(T) \leq 2\sum_{n=1}^{k}\sum_{j\in E_n} s_{2j-1}(T)$$

eşitsizliği ile kolayca gösterilir. □

Not 4.50. Özel olarak burada $n = 1,2,\ldots$ için $E_n = \{n\}$ alınırsa [51] nolu çalışmadaki Önerme 1.1 elde edilir.

Önerme 4.51. $1 < p < \infty$ ve her n için $E_n = \{nN-N+1, nN-N+2, \ldots, nN\}$ olsun. Bu durumda $\|T\|_{\phi_{(p)},E}$ kuasi-normu

$$\|T\|^{\nabla}_{\phi_{(p)},E} = \phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i} s_j(T)\right\}\right)$$

kuasi-normuna denktir.

İspat. İspatı Hardy eşitsizliğinin bir sonucudur.

$$\sum_{n=1}^{k}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right)^p \leq \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i} s_j(T)\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{k}\left(\sum_{j\in E_n} s_j(T)\right)^p$$

□

Not 4.52. Özel olarak burada $N = 1$ alınırsa [51] nolu çalışmadaki Önerme 1.2 elde edilir.

Şimdi yukarıdaki sonuçların bir genelleştirmesi verilecektir.

Önerme 4.53. Her bir $k \geq 2$ için

$$\|T\|^{*}_{\phi,E} = \phi\left(\left\{\sum_{j\in E_n} s_{jk-(k-1)}(T)\right\}\right)$$

kuasi-normu ile $\|T\|_{\phi,E}$ kuasi-normu denktir.

İspat. $k = 2$ için Önerme 4.49 elde edilir. $k \geq 3$ ve $r = 1,2,\ldots$ için

$$\sum_{n=1}^{r}\sum_{j\in E_n} s_{jk-(k-1)}(T) \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{r}\sum_{j\in E_n} s_j(T) \leq \sum_{n=1}^{rk}\sum_{j\in E_n} s_j(T)$$

$$= \sum_{n=1}^{r} \sum_{i=(n-1)k+1}^{nk} \sum_{j\in E_i} s_j(T) \leq k \sum_{n=1}^{r} \sum_{j\in E_n} s_{jk-(k-1)}(T)$$

□

Not 4.54. Özel olarak burada $n = 1,2,\ldots,$ için $E_n = \{n\}$ alınırsa [51] nolu çalışmadaki Önerme 1.3 elde edilir.

Örnek 4.55. Şimdi bazı özel seçimler ile bir örnek verilecektir.
$k = 3$ ve $E_n = \{2n-1, 2n\}$ için

$$\sum_{n=1}^{r} \sum_{j\in E_n} s_{jk-(k-1)}(T) \leq \sum_{n=1}^{r} \sum_{j\in E_n} s_j(T)$$

eşitsizliği

$$\sum_{n=1}^{r} s_{6n-5}(T) + s_{6n-2}(T) \leq \sum_{n=1}^{r} s_{2n-1}(T) + s_{2n}(T)$$

ifadesine dönüşür ve (s_n) dizisi azalan olduğundan eşitsizlik sağlanır.
İspatta geçen

$$\sum_{n=1}^{r} \sum_{j\in E_n} s_j(T) \leq \sum_{n=1}^{rk} \sum_{j\in E_n} s_j(T)$$

eşitsizliğinin sağlandığı açıkça görülmektedir.
İspatta kullanılan

$$\sum_{n=1}^{rk} \sum_{j\in E_n} s_j(T) = \sum_{n=1}^{r} \sum_{i=(n-1)k+1}^{nk} \sum_{j\in E_i} s_j(T)$$

eşitliğinde $k = 3$ ve $E_n = \{2n-1, 2n\}$ kullanıldığında, eşitliğin sol tarafından

$$\sum_{n=1}^{3r} s_{2n-1}(T) + s_{2n}(T) = s_1(T) + s_2(T) + s_3(T) + s_4(T) + \ldots + s_{6r-1}(T) + s_{6r}(T) \tag{4.19}$$

elde edilir ve eşitliğin sağ tarafından

$$\sum_{n=1}^{r} \sum_{i=3n-2}^{3n} s_{2i-1}(T) + s_{2i}(T)$$

$$= \sum_{n=1}^{r} \left(s_{6n-5}(T) + s_{6n-4}(T) + s_{6n-3}(T) + s_{6n-2}(T) + s_{6n-1}(T) + s_{6n}(T)\right)$$

$$= \quad s_1(T)+s_2(T)+s_3(T)+s_4(T)+\ldots+s_{6r-1}(T)+s_{6r}(T) \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.19) ve (4.20) denklemlerinin eşit oldukları görülür.

İspatta kullanılan

$$\sum_{n=1}^{r}\sum_{i=(n-1)k+1}^{nk}\sum_{j\in E_i} s_j(T) \leq k\sum_{n=1}^{r}\sum_{j\in E_n} s_{jk-(k-1)}(T)$$

eşitsizliği $k=3$ ve $E_n=\{2n-1,2n\}$ için

$$\sum_{n=1}^{r}\sum_{i=3n-2}^{3n}\sum_{j\in E_i} s_j(T) \leq 3\sum_{n=1}^{r}\sum_{j\in E_n} s_{3j-2}(T)$$

şeklini alır ve

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{r}\left(s_{6n-5}(T)+\ldots+s_{6n-1}(T)+s_{6n}(T)\right) &\leq 3\sum_{n=1}^{r} s_{6n-5}(T)+s_{6n-2}(T)\\ s_1(T)+\ldots+s_{6r}(T) &\leq 3\left(s_1(T)+s_4(T)+s_7(T)+\ldots+s_{6r-5}(T)+s_{6r-2}(T)\right)\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak eşitsizliğin sağlandığı gösterilmiş olur.

Teorem 4.56. (α_n) artmayan pozitif bir dizi ve $\lim \alpha_{Nn} \neq 0$ olsun. $1<p<\infty$ ve her n için $E_n=\{nN-N+1, nN-N+2,\ldots,nN\}$ olmak üzere $\|T\|_{\phi_{(p)},E}$ kuasi-normu $\|T\|^{\circ}_{\phi_{(p)},E} = \phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i} s_j(T)\right\}\right)$ kuasi-normuna denktir.

İspat. (α_n) ve $(s_n(T))$ dizileri azalan olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{1}{n\alpha_1} n\alpha_{Nn}\sum_{j\in E_i} s_j(T) &= \frac{\alpha_{Nn}}{\alpha_1}\sum_{j\in E_i} s_j(T)\\ &\leq \frac{1}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i}\alpha_j s_j(T)\\ &\leq \frac{1}{n\alpha_{Nn}}\alpha_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i} s_j(T)\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Eğer $\lim \alpha_{Nn}=\alpha\neq 0$ alınırsa

$$\frac{\alpha}{\alpha_1}\sum_{j\in E_i} s_j(T) \leq \frac{1}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i}\alpha_j s_j(T) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i} s_j(T)\right)$$

elde edilir. $1 < p < \infty$ için Hardy eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\sum_{j\in E_i}s_j(T)\right)^p &\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i}\alpha_j s_j(T)\right)^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)^p\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i}s_j(T)\right)^p \\
&\leq \left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)^p\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i}\left(s_j(T)\right)^p
\end{aligned}$$

bulunur. $(\phi 5)$ özelliği kullanılarak

$$\frac{\alpha_1}{\alpha}\|T\|_{\phi_{(p)},E} \leq \|T\|^{\circ}_{\phi_{(p)},E} \leq \frac{\alpha_1}{\alpha}\frac{p}{p-1}\|T\|_{\phi_{(p)},E}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\|T\|_{\phi_{(p)},E}$ ile $\|T\|^{\circ}_{\phi_{(p)},E}$ kuasi-normlarının denkliği ispatlanmış olur. □

Not 4.57. Özel olarak burada $N = 1$ alınırsa [51] nolu çalışmadaki Teorem 1.4 elde edilir.

Teorem 4.58. (u_{nN}) ve (w_n) dizileri $u_1 \geq u_2 \geq ... \geq u_{nN} \geq \dots$, $w_1 \leq w_2 \leq ... \leq w_n \leq ...$ ve $w_n \leq n \leq \dfrac{w_n}{u_{nN}}$ şartlarını sağlayan negatif olmayan reel sayı dizileri ve $\lim_{n\to\infty} u_{nN} \neq 0$ olsun. Bu durumda$\|T\|_{\phi_{(p)},E}$ kuasi-normu $1 < p < \infty$ ve her n için $E_n = \{nN-N+1, nN-N+2, \dots, nN\}$

$$\|T\|^{\gamma}_{\phi_{(p)},E} = \phi_{(p)}\left(\left\{\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i}u_j s_j(T)\right\}\right)$$

kuasi-normuna denktir.

İspat. (u_n) ve $(a_n(T))$ dizileri azalan olduğundan

$$\frac{1}{n}nu_{Nn}\sum_{j\in E_i}s_j(T) \leq \frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i}u_j s_j(T) \leq \frac{1}{nu_{Nn}}u_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i}s_j(T)$$

dır. Bu eşitsizlikte $n = 1$ den k ya kadar toplam alındığında

$$\sum_{n=1}^{k}\left(u_{Nn}\sum_{j\in E_i}s_j(T)\right)^p \leq \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{w_n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i}u_j s_j(T)\right)^p \leq \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{u_1}{nu_{Nn}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in E_i}s_j(T)\right)^p$$

bulunur. $\lim_{n\to\infty} u_{Nn} = u \neq 0$ olduğunda her $k \in \mathbb{N}$ için

$$u^p \sum_{n=1}^{k} \left(\sum_{j\in E_i} s_j(T) \right)^p \leq \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{w_n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in E_i} u_j s_j(T) \right)^p \leq \left(\frac{u_1}{u}\right)^p \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in E_i} s_j(T) \right)^p$$

dır. Her $k \in \mathbb{N}$ için Hardy eşitsizliği kullanılarak

$$u^p \sum_{n=1}^{k} \left(\sum_{j\in E_i} s_j(T) \right)^p \leq \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{w_n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in E_i} u_j s_j(T) \right)^p \leq \left(\frac{u_1}{u}\right)^p \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j\in E_i} s_j(T) \right)^p$$

bulunur. ϕ fonksiyonunun özellikleri kullanılarak

$$u \|T\|_{\phi_{(p)},E} \leq \|T\|^{\gamma}_{\phi_{(p)},E} \leq \left(\frac{u_1}{u}\right) \left(\frac{p}{p-1}\right) \|T\|_{\phi_{(p)},E}$$

elde edilir. Sonuç olarak istenilen denklik sağlanmış olur. □

Not 4.59. Özel olarak burada $N = 1$ alınırsa Teorem 3.5 elde edilir. Ayrıca $N = 1$ için Teorem 4.58 de $u_i = \alpha_i$ ve $w_n = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, $\alpha_1 \leq 1$ alınırsa, [51] nolu çalışmadaki Teorem 1.4 elde edilir. Eğer Teorem 4.58 de $u_i = 1$ ve $w_n = n$ alınırsa [51] nolu çalışmadaki Önerme 1.2 elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

1. [27] nolu çalışmada Iseki tarafından tanımlanan Stolz dönüşümleri sınıfının genelleştirmesi yapılarak, Genelleştirilmiş Stolz dönüşümlerinin sınıfı $L_{GSTOL,p}$ tanımlanmıştır. Bu sınıfın bir operatör ideal olduğu gösterilmiştir. $\|\cdot\|_{\beta}$ kuasi-normu tanımlanarak $\left[L_{GSTOL,p}, \|\cdot\|_{\beta}\right]$ nin bir kuasi-Banach operatör ideal olduğu gösterilmiştir. Ayrıca l_p tipindeki dönüşümlerin genelleştirilmiş Stolz dönüşümleri sınıfının içinde kaldığı ispatlanmıştır. Bu sınıftaki $\|\cdot\|_{\phi_{(p)}}$ kuasi-normu ile $\|\cdot\|^{\gamma}_{\phi_{(p)}}$ kuasi-normunun denk oldukları gösterilmiştir. Sonrasında s-sayı dizisinin diğer örnekleri kullanılarak oluşturulan $\left[L^{(\mu)}_{GSTOL,p}, \|T\|_{\beta,(\mu)}\right]$ kuasi-Banach operatör ideallerinin sağladığı birebirlik, örtenlik, simetrik olma özellikleri ve bu sınıflar arasındaki kapsama bağıntıları elde edilmiştir.

2. [49] nolu çalışmada Tita tarafından tanımlanan genelleştirilmiş yaklaşım sayıları kullanılarak üretilen, genelleştirilmiş Stolz dönüşümlerinin sınıfı $L^{\alpha}_{GSTOL,p}$ tanımlanmıştır ve l^{α}_{p} tipindeki dönüşümlerin bu sınıfın içinde kaldığı ispatlanmıştır. Ayrıca simetrik norm fonksiyonu kullanılarak operatör ideallerin yeni bir sınıfı olan $\mathfrak{I}^{\alpha}_{\phi_{(p)}}$ tanımlanmış ve bu sınıfın üzerinde tanımlanan $\|\cdot\|^{\alpha,\gamma}_{\phi_{(p)}}$ kuasi-normu ile bir kuasi-normlu operatör ideal olduğu gösterilmiştir.

3. [16] nolu çalışmada Foroutannia tarafından tanımlanan $l_p(E)$ dizi uzayında l_p tipindeki operatörler sınıfının genelleştirmesi yapılarak s-tipindeki $l_p(E)$ operatörlerinin sınıfı olan $L_{p,E}$ sınıfı tanımlanmıştır. Bu sınıfın bir operatör ideal olduğu gösterilmiştir. $\|\cdot\|_{p,E}$ kuasi-normu tanımlanarak $[L_{p,E}, \|\cdot\|_{p,E}]$ nin bir kuasi-Banach operatör ideal olduğu ispatlanmıştır. Sonrasında s-sayı dizisinin diğer örnekleri kullanılarak oluşturulan $\left[L^{(\mu)}_{p,E}, \|T\|^{(\mu)}_{p,E}\right]$ kuasi-Banach operatör ideallerinin sağladığı birebirlik, örtenlik, simetrik olma gibi özellikleri ve bu sınıflar arasındaki kapsama bağıntıları elde edilmiştir.

4. $L_{p,E}$ operatör ideali ve simetrik norm fonksiyonu kullanılarak [49] ve [50] nolu çalışmalarda yer alan L_{ϕ} sınıfının genelleştirmesi olarak $L_{\phi_{(p)},E}$ sınıfı tanımlanmıştır. Bu sınıfın bir operatör ideal olduğu gösterilmiştir. Daha sonra $\|\cdot\|_{\phi_{(p)},E}$ kuasi-normu tanımlanarak $\left[L_{\phi_{(p)},E}, \|\cdot\|_{\phi_{(p)},E}\right]$ nin bir kuasi-Banach operatör ideal olduğu ispatlanmıştır. Sonrasında s-sayı dizisinin diğer örnekleri kullanılarak oluşturulan $\left[L^{(\mu)}_{\phi_p,E}, \|T\|^{(\mu)}_{\phi_p,E}\right]$ kuasi-Banach operatör ideallerinin sağladığı birebirlik, örtenlik, simetrik olma gibi özellikleri ve bu sınıflar arasındaki kapsama bağıntıları elde edilmiştir.

5. [28] nolu çalışmada tanımlanan $\varsigma^{(s)}_{p}$ sınıfının blok dizi uzaylarında genelleştirmesi olarak $L_{z,p,E}$ sınıfı tanımlanmıştır. Bu sınıfın bir operatör ideal olduğu gösterilmiştir. Daha sonra $\|\cdot\|_{z,p,E}$ kuasi-normu tanımlanarak $[L_{z,p,E}, \|\cdot\|_{z,p,E}]$ nin bir kuasi-Banach operatör ideal olduğu ispatlanmıştır. Sonrasında s-sayı dizisinin diğer örnekleri kullanılarak oluşturulan $\left[L^{(\mu)}_{z,p,E}, \|T\|^{(\mu)}_{z,p,E}\right]$ kuasi-Banach operatör ideallerinin sağladığı birebirlik, örtenlik, simetrik olma gibi özellikleri ve bu sınıflar arasındaki kapsama bağıntıları elde edilmiştir.

6. Blok dizi uzayları ve simetrik norm fonksiyonu kullanılarak $L_{\phi,E}$ sınıfı tanımlanmıştır. Bu sınıfın bir operatör ideal olduğu ve $\|\cdot\|_{\phi,E}$ nin bu operatör ideal üzerinde bir kuasi-norm olduğu gösterilmiştir. Sonrasında bu operatör ideal üzerinde tanımlanan $\|\cdot\|^{+}_{\phi,E}$ ile $\|\cdot\|_{\phi,E}$, $\|\cdot\|_{\phi_{(p)},E}$ ile $\|\cdot\|^{\nabla}_{\phi_{(p)},E}$, $\|\cdot\|_{\phi,E}$ ile $\|\cdot\|^{*}_{\phi,E}$, $\|\cdot\|_{\phi_{(p)},E}$ ile $\|\cdot\|^{\circ}_{\phi_{(p)},E}$ kuasi-normlarının denklikleri elde edilmiştir. Bu kuasi-normların [51] nolu çalışmada verilen kuasi-normların genelleştirmesi olduğu gösterilmiştir.

7. Sonraki çalışmalarda, dördüncü bölümde elde edilen sınıflar için genelleştirilmiş yaklaşım sayıları kullanılarak daha genel sınıflar elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

[1] B. Altay and F. Başar, “The fine spectrum and the matrix domain of the difference operator δ on the sequence space l_p, (0< p< 1).” *Communications in Mathematical Analysis*, vol. 2, no. 2, 2007.

[2] F. Başar and B. Altay, “On the space of sequences of p-bounded variation and related matrix mappings,” *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 55, no. 1, pp. 136–147, 2003.

[3] B. Altay and F. Başar, “On the paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type,” *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, vol. 26, no. 5, pp. 701–715, 2002.

[4] B. Altay and F. Başar, “Some paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type,” *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, vol. 30, no. 4, 2006.

[5] B. Altay, F. Başar, and E. Malkowsky, “Matrix transformations on some sequence spaces related to strong Cesàro summability and boundedness,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 211, no. 2, pp. 255–264, 2009.

[6] P. N. Ng and P. Y. Lee, “Cesaro sequence spaces of non-absolute type,” *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria 1, Commentationes Mathematicae, Prace Matematyczne*, vol. 20, no. 2, pp. 429–433, 1978.

[7] M. Sengönül and F. Basar, “Some new Cesaro sequence spaces of non-absolute type which include spaces c_0 and c,” *Soochow Journal of Mathematics*, vol. 31, no. 1, pp. 107–119, 2005.

[8] F. Basar, *Summability Theory and Its Applications*. Bentham Science Publishers, 2012.

[9] Y. Liu, B. Wu, and Y. Lee, “Method of sequence spaces,” *Guangdong of Science and Technology Press*, 1996.

[10] Y. Cui *et al.*, “Some geometric properties related to fixed point theory in Cesàro spaces,” *Collectanea Mathematica*, vol. 50, no. 3, pp. 277–288, 1999.

[11] W. Sanhan and S. Suantai, “Some geometric properties of Cesaro sequence space,” *Kyungpook Mathematical Journal*, vol. 43, no. 2, pp. 191–197, 2003.

[12] S. Suantai, “On some convexity properties of generalized cesáro sequence spaces,” *Georgian Mathematical Journal*, vol. 10, no. 1, pp. 193–200, 2003.

[13] S. Saejung, “Another look at Cesaro sequence spaces,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 366, no. 2, pp. 530–537, 2010.

[14] A. Maji and P. Srivastava, “On operator ideals using weighted Cesaro sequence space,” *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, vol. 22, no. 3, pp. 446–452, 2014.

[15] E. Malkowsky and E. Savas, “Matrix transformations between sequence spaces of generalized weighted means,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 147, no. 2, pp. 333–345, 2004.

[16] D. Foroutannia, “On the block sequence space $l_p(E)$ and related matrix transformations,” *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 39, no. 6, pp. 830–841, 2015.

[17] A. Grothendieck, *Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires*. American Mathematical Society, 1955, no. 16.

[18] R. Schatten, *A Theory of Cross-spaces*. Princeton University Press, 1985, no. 26.

[19] R. Schatten, *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*. Springer-Verlag, 2013, vol. 27.

[20] E. Schmidt, “Zur theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen,” *Mathematische Annalen*, vol. 63, no. 4, pp. 433–476, 1907.

[21] I. Gohberg and Kreĭ, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert spaces, Translations of Mathematical Monographs*.

[22] A. Pietsch, “s-numbers of operators in Banach spaces,” *Studia Mathematica*, vol. 51, no. 3, pp. 201–223, 1974.

[23] A. Pietsch, *Operator Ideals*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978, vol. 16.

[24] A. Pietsch, *Eigenvalues and s-numbers*. Cambridge University Press, 1986.

[25] A. Pietsch, “Einige neue klassen von kompakten linearen abbildungen,” *Revue de mathématiques pures et appliquées*, vol. 8, pp. 427–447, 1963.

[26] C. G, “Operators of ces-p-type,” *Atti Della Accademia Nazionale Dei Lincei Rendiconti-classe di Scienze Fisiche-Matematiche&Natuarli*, vol. 52, no. 6, pp. 875–878, 1973.

[27] K. Iseki, “A new class of mappings, Stolz mappings,” *Mathematica Japonica*, vol. 3, no. 1, 1974.

[28] E. E. Kara and M. İlkhan, “On a new class of s-type operators,” *Konuralp Journal of Mathematics*, vol. 3, no. 1, pp. 1–11, 2015.

[29] A. Wilansky, *Summability through functional analysis*. Elsevier, 2000, vol. 85.

[30] H. Polat, V. Karakaya, and N. Şimşek, “Difference sequence spaces derived by using a generalized weighted mean,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 24, no. 5, pp. 608–614, 2011.

[31] F. Başar, B. Altay, and M. Mursaleen, “Some generalizations of the space bvp of p-bounded variation sequences,” *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 68, no. 2, pp. 273–287, 2008.

[32] M. Mursaleen and A. K. Noman, “On some new difference sequence spaces of non-absolute type,” *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 52, no. 3-4, pp. 603–617, 2010.

[33] J. Shiue, “Cesaro sequence spaces,” *Tamkang Journal of Mathematics*, vol. 1, no. 1, pp. 19–25, 1970.

[34] B. Rhoades, “Operators of A_p-type,” *Atti Della Accademia Nazionale Dei Lincei Rendiconti-classe di Scienze Fisiche-Matematiche&Natuarli*, vol. 59, no. 8, pp. 238–241, 1976.

[35] H. Roopaei and D. Foroutannia, “The norm of certain matrix operators on new difference sequence spaces,” *Jordan Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 8, no. 3, pp. 223–237, 2015.

[36] H. Roopaei and D. Foroutannia, “A new sequence space and norm of certain matrix operators on this space,” *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, vol. 3, no. 1, pp. 1–12, 2016.

[37] S. Erfanmanesh and D. Foroutannia, “Some new semi-normed sequence spaces of nonabsolute type and matrix transformations,” *Proceedings of IAM*, vol. 4, no. 2, pp. 96–108, 2015.

[38] A. Kolmogoroff, “Uber die beste annaherung von funktionen einer gegebenen funktionenklasse,” *Annals of Mathematics*, pp. 107–110, 1936.

[39] I. Gelfand, “Abstrakte funktionen und lineare operatoren,” *Sbornik. Mathematics*, vol. 4, no. 2, pp. 235–286, 1938.

[40] H. König, “Some inequalities for the eigenvalues of compact operators,” in *General Inequalities 4*. Springer, 1984, pp. 213–219.

[41] H. König, *Eigenvalue distribution of compact operators*. Birkhäuser, 2013, vol. 16.

[42] A. Pietsch and W. H. Ruckle, “Nuclear locally convex spaces,” 1972.

[43] B. Carl and A. Pietsch, “Some contributions to the theory of s-numbers,” *Comment. Math. Prace Mat*, vol. 21, pp. 65–76, 1978.

[44] C. Hutton, “On the approximation numbers of an operator and its adjoint,” *Mathematische Annalen*, vol. 210, no. 4, pp. 277–280, 1974.

[45] P. Srivastava and A. Maji, “Some class of operator ideals,” *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 83, no. 5, pp. 731–740, 2013.

[46] A. Maji and P. Srivastava, “Some results of operator ideals on s-type $|A, p|$ operators,” *Tamkang Journal of Mathematics*, vol. 45, no. 2, pp. 119–136, 2014.

[47] N. Tita, "On Stolz mappings," *Mathematica Japonica*, vol. 26, no. 4, pp. 495–496, 1981.

[48] N. Tita, "Some interpolation properties and tensor product stability of Stolz mappings," in *International Conf. EITM (European Integration Tradition and Modernity*, Petru Maior University, Targu Mures, Romania, 2007, pp. 666–669.

[49] N. Tiţa, *Ideale de Operatori Generate de s-numere: Aspecte Axiomatice*. Editura Universităţii" Transilvania", 1998.

[50] N. Tita, "Operatori de clasa σ_p," *Studii si Cercet de Matematicá*, vol. 23, pp. 467–487, 1971.

[51] N. Tita, "Some equivalent quasinorms on operator ideals," in *Spectral and Evolution problems: Proceedings of the Thirteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 13./Group of authors. Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University, Black Sea Branch of Moscow State University, Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS, Crimean Academy of Sciences, Crimean Mathematical Foundation, 2003. 232 pp. in English and Russian.*, p. 94.

[52] T. Terzioglu, *Fonksiyonel Analizin Yöntemleri*. Matematik Vakfı, 1998, vol. 9.

[53] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley New York, 1978, vol. 1.

[54] I. J. Maddox, *Elements of functional analysis*. Cambridge University Press, 1970.

[55] Y. Soykan, *Fonksiyonel Analiz*. Nobel Yayın Dağıtım, 2008.

[56] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*. Atatürk Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, 2006.

[57] H. Kızmaz, *Fonksiyonel Analize Giriş*. Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 1993.

[58] J. Boos and F. P. Cass, *Classical and Modern Methods in Summability*. Clarendon Press, 2000.

[59] Y. Soykan, *Metrik Uzaylar ve Topolojisi*. Nobel Akademik Yayıncılık, 2012.

[60] B. Carl and A. Hinrichs, "On s-numbers and Weyl inequalities of operators in Banach spaces," *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 41, no. 2, pp. 332–340, 2009.

[61] B. Carl, "On s-numbers, quasi s-numbers, s-moduli and Weyl inequalities of operators in Banach spaces," *Revista Matemática Complutense*, vol. 23, no. 2, pp. 467–487, 2010.

[62] J. Burgoyne, "Denseness of the generalized eigenvectors of a discrete operator in a Banach space," *Journal of Operator Theory*, vol. 33, pp. 279–297, 1995.

[63] A. Pietsch, “Weyl numbers and eigenvalues of operators in Banach spaces,” *Mathematische Annalen*, vol. 247, no. 2, pp. 149–168, 1980.

[64] N. Tita, “Cvasinorme echivalente pe spatii de aproximare,” *Univ." Transilvania", Brasov*, 2001.

[65] N. Salinas, “Symmetric norm ideals and relative conjugate ideals,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 188, pp. 213–240, 1974.

[66] N. Tita, “Generalized s-numbers operator ideals,” in *The Annual Conference of the Romanian Society of Mathematical Sciences*, Bucharest, Romania, May 29-1, 1997.

[67] N. Tita, “On a class of $\ell(\phi,\varphi)$ operators,” *Collectanea Mathematica*, vol. 32, no. 3, pp. 275–280, 1981.

[68] R. Schatten, *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*. Springer-Verlag, 2013, vol. 27.

[69] N. Ţiţa, “A general view on approximation ideals,” in *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier, 2004, vol. 197, pp. 295–300.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Pınar ZENGİN ALP
Doğum Tarihi ve Yeri	: Fatih/İstanbul 1985
Yabancı Dili	: İngilizce
Eposta	: pinarzengin13@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Doktora	Matematik	Düzce Üniversitesi	2018
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2012
Lisans	Matematik	Orta Doğu Teknik Üniversitesi	2008
Lise		Düzce Arsal Anadolu Lisesi	2003

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A1. P. Zengin Alp, M. İlkhan and E. E. Kara, Generalized Stolz Mappings *Konuralp Journal of Mathematics*; vol. 5, no. 2, pp.12-18, 2017.

A2. M. İlkhan, P. Zengin Alp, E. E. Kara, On The Spaces of Linear Operators Acting Between Asymmetric Cone Normed Spaces, *Mediterranean Journal of Mathematics*; vol. 15, no. 138, pp. , 2018.

A3. P. Zengin Alp and E. E. Kara, A New Class of Operator Ideals and Approximation

Numbers, *New Trends in Mathematical Sciences*, Kabul edildi (2018).

A4. P. Zengin Alp and E. E. Kara, A New Class of Operator Ideals on the Block Squence Space $l_p(E)$, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, (Hakem sürecinde) (2018)

B. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında (Proceedings) basılan bildiriler :

B1. İ. Yıldız, E. Burdurlu, P. Zengin, N. Ş. Erkoç, N. Sakallı, On characteristic function of first order theta function, International Conference on Applied Analysis and Algebra, (ICAAA 2011) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B2. N. Sakallı, İ. Yıldız, P. Zengin, (2013) On elliptic functions obtained by Dedekind eta function, Geometric Function Theory and Applications, (GFTA 2013) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B3. M. İlkhan, P. Zengin Alp, E. E. Kara (2016) Cofinally quasi Cauchy continuity. 5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, (IECMSA-2016) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B4. M. İlkhan, P. Zengin Alp, E. E. Kara, (2017) On Boundedness and Continuity of Linear Operators Between Asymmetric Cone Normed Spaces. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM2017) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B5. P. Zengin Alp, M. İlkhan, E. E. Kara (2017) A New Version of Stolz Mappings. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2017) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B6. P. Zengin Alp, E. E. Kara (2017) On operator ideals via generalized approximation numbers. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2017) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B7. P. Zengin Alp, E. E. Kara (2018), A note on equivalent quasinorms, International

Conference on Mathematical Advances and Application, (ICOMAA-2018) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B8. P. Zengin Alp, E. E. Kara (2018), Operator ideals defined by using block sequence spaces, International Conference on Mathematical Advances and Application, (ICOMAA-2018) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B9. P. Zengin Alp, E. E. Kara (2018), A New Class of Operator Ideals , $L_{u,v,E}$, International Conference on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians, (ICOM-2018) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

B10. P. Zengin Alp, E. E. Kara (2018), Properties of Operator Ideals $L_{p,E}$ and $L_{\phi(p),E}$, International Conference on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians, (ICOM-2018) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)