T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UNİVALENT FONKSİYONLAR İÇERİSİNDE KONVEKS VE YILDIZIL FONKSİYONLAR

PINAR KAHRAMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. İSMET YILDIZ

DÜZCE, 2019

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UNİVALENT FONKSİYONLAR İÇERİSİNDE KONVEKS VE YILDIZIL FONKSİYONLAR

Pınar Kahraman tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. İsmet YILDIZ

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Düzce Üniversitesi _______________________

Doç. Dr. Ali DEMİR
Kocaeli Üniversitesi _______________________

Dr. Öğr. Üyesi İzzettin DEMİR
Düzce Üniversitesi _______________________

Tez Savunma Tarihi: 22/08/2019

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

22 Ağustos 2019

Pınar KAHRAMAN

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans dönemimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. İsmet YILDIZ'a en içten dileklerimle teşekkür eder ve şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmam boyunca yardımlarını, desteklerini ve katkılarını esirgemeyen sevgili arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

22 Ağustos 2019 **Pınar KAHRAMAN**

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ viii
SİMGELER ix
ÖZET x
ABSTRACT xi
1. GİRİŞ 1
2. KURAMSAL TEMELLER 2
2.1. TOPOLOJİK KAVRAMLAR 2
2.1.1. Komşuluk 2
2.1.2. İç Nokta 2
2.1.3. Açık ve Kapalı Küme 2
2.1.4. Yakınsaklık 2
2.1.5. Düzgün Yakınsaklık 2
2.1.6. Mutlak Yakınsaklık 3
2.1.7. Bölge 3
2.1.8. Seri 3
2.1.9. Örtü 3
2.1.10. Kompaktlık 3
2.1.11. Dizisel Kompaktlık 4
2.1.12. Bağlantılı Küme 4
2.1.13. Basit Bağlantılı Küme 4
2.1.14. Eğri 4
2.1.15. Süreklilik 4
2.1.16. Parçalı Süreklilik 5
2.1.17. Lipschitz Süreklilik 5
2.1.18. Yığılma Noktası 5
2.1.19. Sınırlılık 5
2.1.20. Çift ve Tek Fonksiyonlar 5
2.1.21. Periyodik Fonksiyon 5
2.1.22. Modül 5
2.1.23. Rezidü 5
2.1.24. Meromorf Fonksiyon 6
2.1.24.1. *Kaldırılabilir Singüler Nokta* 7
2.1.24.2. *Kutup Noktası* 7
2.1.24.3. *Esas Singüler Nokta* 7
2.1.25. Kalan Sınıfı 8
2.1.26. Starlike Bölge 8
2.1.27. Starlike Fonksiyon 9
2.1.28. Taylor Açılımı 9

2.1.29. Laurent Teoremi 9
2.1.30. Laurent Serisi 11
2.2. ANALİTİK VE UNİVALENT FONKSİYON 12
2.2.1. Analitik Fonksiyon 12
2.2.2. Univalent Fonksiyon 12
2.2.3. Normalize Edilmiş Fonksiyon 13
2.2.4. S Sınıfı 13
2.2.5. P Sınıfı 13
2.2.6. Türevler için Cauchy Formülü 14
2.2.7. Binom Açılımı 15
2.3. CAUCHY - RIEMANN DENKLEMLERİ 16
2.3.1. Teorem 18

3. MATERYAL VE YÖNTEM 22

3.1. JORDAN EĞRİSİ VE CAUCHY İNTEGRAL FORMÜLÜ 22
3.1.1. Tanım 22
3.1.2. Cauchy İntegral Formülü 22
3.1.3. Cauchy Teoremi 23
3.2. ROUCHE'S TEOREMİ 23
3.2.1. Teorem 23
3.3. HURWITZ'S TEOREMİ 23
3.3.1. Teorem 23
3.3.2. Teorem 24
3.4. BÖLGESEL DÖNÜŞÜM ÖZELLİKLER 24
3.4.1. Tanım 24
3.4.2. Tanım 25
3.5. RIEMANN DÖNÜŞÜM TEOREMİ 25
3.6. CARATHEODORY GENİŞLEME TEOREMİ 25
3.7. UNİVALENT FONKSİYONLARIN TEMEL TEORİSİ 26
3.7.1. Tanım 26
3.8. ALAN TEORİSİ 27
3.8.1. Teorem 27
3.8.2. Bieberbach Teoremi 28
3.8.3. Koebe Bir-Çeyrek Teoremi 28
3.9. GENİŞLEME VE BÜKÜLME TEORİSİ 28
3.9.1. Teorem 28
3.9.2. Bükülme Teoremi 29
3.9.3. Genişleme Teoremi 30
3.9.4. Bieberbach Konjektürü 31
3.10. İÇ ALAN TEOREMİ 31
3.11. DIŞ ALAN TEOREMİ 34
3.12. GRONWALL - BİEBERBACH 36
3.12.1. Teorem 37
3.13. DİSTORTİON TEOREMLERİ VE BİEBERBACH EŞİTSİZLİĞİ 38
3.13.1. Teorem 38
3.13.2. Sonuç 40
3.13.3. Teorem 40
3.13.4. Sonuç 41
3.13.5. Teorem 42
3.13.6. Teorem 43

3.14. KONVEKS VE STARLIKE FONKSİYONLARIN BAĞINTILARI 46
3.14.1. Konveks Fonksiyonlar 46
3.14.1.1. *Konveks Eğri*...46
3.14.1.2. *Konveks Bölge*...46
3.14.1.3. *Teorem* 47
3.14.1.4. *Lemma*..49
3.14.1.5. *Sonuç*..49
3.14.1.6. *Lemma*..50
3.14.1.7. *Lemma*..53
3.14.1.8. *Lemma*..54
3.14.1.9. *Sonuç*..56
3.14.2. Yıldızıl Fonksiyonlar.. 56
3.14.2.1. *Yıldızıl Bölge*...56
3.14.2.2. *Teorem* 57
3.14.2.3. *Teorem* 58
3.15. RIEMANN'IN THETA FONKSİYONU... 61
3.16. DEDEKIND'IN η FONKSİYONU 62
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 63
4.1. TANIM.. 64
4.2. TEOREM... 65
4.3. TEOREM... 66
4.4. TEOREM... 68
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER... 70
6. KAYNAKLAR 71
ÖZGEÇMİŞ 74

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1. Yaklaşımlar oluşan limit. 19
Şekil 3.11.1. 35
Şekil 3.14.1.1. 46
Şekil 3.14.1.2. 47
Şekil 3.14.1.3. 52
Şekil 3.14.1.4. 53
Şekil 3.14.1.5. 55
Şekil 3.14.2.1. 57
Şekil 3.14.2.2. 59

SİMGELER

A	Bir Küme
a_n	Dizi
$arg\Theta$	Θ' nın argümenti
B	Bölge
C_p ,C_r	Kapalı bir eğri
D, E	Birim Disk
E	Komşuluk
F	Bir Fonksiyon
$F(z)$	z'ye bağlı fonksiyon
Imz	Kompleks sayının imajiner kısmı
Lim	Limit
P	Sabit sayı
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
Rez	Kompleks sayının reel kısmı
S	Normalize Edilmiş Univalent Fonksiyonlar
S^*	Starlike (Yıldızlı) Fonksiyon
w_1, w_2	Kompleks sayılar
z, z_0, y	Bir nokta
$\sum$	Toplam sembolü
Θ	Açı
Φ	Analitik Olan Fonksiyon
Δ	Diskriminant
$\mu(t)$	t'ye bağlı değişken
$\zeta(z)$	z'ye bağlı fonksiyon
$\varsigma(z)$	z'ye bağlı tek fonksiyon

ÖZET

UNİVALENT FONKSİYONLAR İÇERİSİNDE KONVEKS VE YILDIZIL FONKSİYONLAR

Pınar KAHRAMAN
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Ağustos 2019, 73 sayfa

Bu çalışmada, birim diskte ünivalent ve analitik fonksiyonlar ile delinmiş birim dairede analitik ve ünivalent fonksiyonların konvekslik ve yıldızıllık özellikleri ile bunların arasındaki bağıntılar incelenmiştir.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümü giriş kısmıdır. İkinci bölümde genel tanım ve teoremler yer almıştır. Üçüncü bölümde konveks ve yıldızıl fonksiyonların genel açıklamaları verilip aralarındaki bağıntılar incelenmiştir. Dördüncü bölümde elde ettiğimiz bulgular üzerinde durulmuştur. Son bölüm olan beşinci bölümde ise elde ettiğimiz sonuç yer almaktadır.

Anahtar sözcükler: Univalent fonksiyonlar, Analitik fonksiyonlar, Konveks fonksiyonlar, Yıldızıl fonksiyonlar.

ABSTRACT

CONVEX AND STAR FUNCTIONS IN UNIVALENT FUNCTIONS

Pınar KAHRAMAN
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematic
Master's Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
August 2019, 73 pages

In this study, the convexity and starlikeness properties of univalent and analytic functions in the unit disk and analytical and univalent functions in the perforated unit circle are investigated.

The thesis consists of five chapters. The first part is the introduction. In the second part, general starlike and theorems are given. In the third chapter, general explanations of convex and stellar functions are given and their relations are examined. In the fourth chapter, our findings are discussed. The last section, the fifth section, contains our results.

Keywords: Univalent functions, Analytic functions, Convex functions, Starlike functions.

1. GİRİŞ

Univalent fonksiyonlar teorisi 20.yy başlarında ortaya çıkmış eski bir konudur fakat günümüzde aktif bir şekilde araştırma konusu olmaya devam etmektedir.

Univalent veya Basit Fonksiyonlar ya da yalınkat analitik fonksiyon olarak isimlendirilen fonksiyonlar sınıfı analitik fonksiyonların bir alt sınıfıdır. Bu alanın başlıca problemlerinden bir tanesi geçmişi 1916 yılına dayanan Bieberbach tahminidir. Bu tahmin, S sınıfındaki her bir fonksiyonun Taylor katsayıları için | an |≤ n eşitsizliğinin sağladığını iddia eder. Bu meşhur Bierberbach tahmininin doğruluğunu göstermek için yapılan ispatların yeniden gözden geçirilmesi univalent fonksiyonlar teorisi üzerine çalışan matematikçilerin düşünce ufkunu önemli ölçüde genişletmiştir. 1984 yılına kadar sadece a1, a_1, a_2, a_3, a_4 katsayıları için yapılan ispat, aynı yıl Louis de Bronges tarafından a_n katsayıları için verilmiştir Bu tezde univalent fonksiyonların bazı temel özellikleri incelenmiştir. Bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tek değerli ve bire–bir olan univalent fonksiyonlar potansiyel teori ve elastisite teorisinde önemli uygulamalara sahiptir. Bilindiği gibi kompleks fonksiyonlar kompleks düzlemde genel olarak bölgeleri bölgelere dönüştüren fonksiyonlardır. Fonksiyonların analitik, tek değerli, univalent olmasına göre görüntüleri tipik şekillere sahiptir. Örneğin belli koşulların sağlanması durumunda görüntüler konveks veya yıldızıl bölgeler olur. Yine aynı şekilde fonksiyonlar kuvvet serisine açıldığında katsayıların sağladığı bazı koşullar altında univalent fonksiyonların dönüştürdüğü bölgeler bazı özelliklere sahiptir. Tezin içeriğinde bu durumlarla ilgili bilgilere yer verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. TOPOLOJİK KAVRAMLAR

Bu bölümde tezdeki boşlukları doldurmak için ihtiyaç duyduğumuz bazı topolojik kavramlar verilecektir.

2.1.1. Komşuluk

$z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. B(z_0, ε)=$\{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine z_0 noktasının ε komşuluğu denir.

2.1.2. İç Nokta

D⊂$\mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in D$ olsun z_0 noktasının bir ε komşuluğu tamamen D kümesine ait ise, z_0 noktasına iç nokta denir.

2.1.3. Açık ve Kapalı Küme

Her noktası iç nokta olan kümeye açık küme denir. Tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme denir.$\mathbb{C}$ kompleks düzlem ve E=$\{z \in \mathbb{C}: |\,z| < 1\}$ birim diski birer açık kümedir. Fakat $\bar{E}$=$\{z \in \mathbb{C}: |\,z| \leq 1\}$ kümesi kapalı kümedir.

2.1.4. Yakınsaklık

Kompleks sayıların bir (z_n) dizisi verilsin. Her ε>0 sayısı için n≥n_0 olduğunda $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa bu dizi z_0 kompleks sayısına yakınsıyor denir.(z_n) dizisinin z_0 noktasına yakınsaması z_n→z_0 biçiinde gösterilir.

2.1.5. Düzgün Yakınsaklık

$A \subset C$ ve $f_n: A \subset C$ fonksiyonlarının $\{f_n\}$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve tüm $z \in A$ değerleri için $n \geq n_0$ alındığında $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

2.1.6. Mutlak Yakınsaklık

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

Serisi yakınsak ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Serisine mutlak yakınsak denir.

2.1.7. Bölge

Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı kümelere bölge denir. Kapalı ve bağlantılı kümelere ise özel olarak kapalı bölge denir.

2.1.8. Seri

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ ifadesine seri denir. a_1, a_2…sayılarına da serinin terimleri adı verilir. Bir seriyi göstermek için

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} a_n \tag{2.1}$$

veya

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum a_n \tag{2.2}$$

kullanılır.

2.1.9. Örtü

X herhangi bir uzay olsun. Bileşimleri V kümesini kapsayan $\{G_1\}$ ailesine, V⊂X kümesinin örtüsü denir. Bileşimleri V⊂X kümesini kapsayan ve $\cup_i G_\mathrm{i} = X$ olan açık kümelerin $\{G_1\}$ ailesine V⊂X kümesinin açık örtüsü denir. Bileşimleri V⊂X kümesini kapsayan alt aile yalnız sonlu sayıda küme kapsıyorsa, bu aileye de sonlu alt örtü denir.

2.1.10. Kompaktlık

Eğer bir kümenin her açık örtüsünün sonlu alt örtüsü varsa, bu kümeye kompakttır denir.

2.1.11. Dizisel Kompaktlık

Eğer bir kümedeki her bir dizi bu kümede bir noktaya yakınsayan bir alt diziye sahip ise, bu kümeye dizisel kompakt küme denir.

2.1.12. Bağlantılı Küme

Eğer $B \dot{\subseteq} Y \cup Z$, $B \cap Z \neq \emptyset$ ve $B \cap Y \neq \emptyset$, $B \cap Y \cap Z = \emptyset$ olacak biçimde Y ve Z gibi boş olmayan iki açık küme bulunamaz ise $B \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılı küme denir. Bir başka ifade ile tümleyeni bağlantılı olmayan kümeye basit bağlantılı küme denir.

2.1.13. Basit Bağlantılı Küme

$A \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer bir A kümesi içindeki herhangi iki noktayı birleştiren bütün yollar yine küme içinde kalıyorsa bu A kümesine basit bağlantılı küme denir.

2.1.14. Eğri

$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyona $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktaların noktaları denir. a ve b ye sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları denir. Bir γ eğrisi için, $\gamma(a)$= $\gamma(b)$ ise γ eğrisine kapalı eğri denir. Kendi kendini kesmeyen eğrilere basit eğri hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordon eğrisi denir. Jordon eğrisi düzlemi Jordon eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordon eğrisinin içine Jordon bölgesi denir. γ eğrisi [a,b] kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer [a,b] aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t, a dan b ye artarken buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$'dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanmasını eğrinin yönünü belirtir.

2.1.15. Süreklilik

$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun.

(i) Her $\epsilon > 0$ sayısı ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(\epsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir, denir.

(ii) Her $\epsilon > 0$ sayısı $|z_1 - z_2| < \delta$ şartını sağlayan her $z_1, z_2 \in A$ için $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$ olacak şekilde sadece ϵ a bağlı bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu A kümesinde düzgün süreklidir denir.

2.1.16. Parçalı Süreklilik

$\mathrm{A} \subset \mathrm{C}$ ve $f\colon \mathrm{A} \subset \mathrm{C}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonun A'daki süreksizlik noktalarına sayısı sonlu ise f fonksiyonuna A üzerinde parçalı süreklidir denir.

2.1.17. Lipschitz Süreklilik

f : A ⊂ ℂ → ℂ bir fonksiyon ve z ∈ A olsun.
Eğer her w, z ∈ A için $|f(w) - f(z)| \leq K|w - z|$ şartını sağlayacak şekilde bir K>0 reel sayısı varsa f 'ye A kümesinde Lipschitz süreklidir, denir.

2.1.18. Yığılma Noktası

$a \epsilon C$ olsun a'nın her $\varepsilon > 0$ komşuluğunda A kümesine ait sonsuz eleman varsa a'ya A kümesinin yığılma noktası veya yığılma yeri denir.

2.1.19. Sınırlılık

f : A ⊆ ℂ → ℂ fonksiyonu verilsin. Her z∈ A için $|f(z)| \leq M$ olacak biçimde bir M > 0 sayısı varsa f ye sınırlı fonksiyon denir.

2.1.20. Çift ve Tek Fonksiyonlar

Kompleks $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $x \in A$ olduğunda $-x \in A$ oluyorsa A kümesine simetrik küme denir. A simetrik bir küme ve $f{:}A \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere her $x \in A$için $f(-x)=f(x)$ oluyor ise f fonksiyonuna çift fonksiyon, $f(-x)=-f(x)$ oluyor ise f fonksiyonuna tek fonksiyon denir.

2.1.21. Periyodik Fonksiyon

Kompleks düzlem üzerindeki her noktada tanımlı ve reel sayılar cisminde lineer bağımsız vektörler olan w_1 ve w_2 kompleks sayılar olmak üzere iki periyoda sahip olan fonksiyona çifte periyodik fonksiyon denir.

2.1.22. Modül

C kompleks sayılar kümesinin boş kümeden farklı ve toplama işlemine göre değişmeli her alt grubuna, Z tam sayılar halkası üzerinde bir modül denir.

2.1.23. Rezidü

Kompleks f fonksiyonu tek değerli olmak üzere C içindeki bir $z = z_0$ noktası hariç C ‘nin üzerinde ve içinde analitik olsun f fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki Laurent açılımı,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} \tag{2.3}$$

şeklindedir.

Bu açılımdaki negatif üslü $\frac{1}{(z-z_0)}$ terimlerinin ilk terimin katsayısına f fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki rezidüsü denir ve $Rez(f, z_0)$ ile gösterilir.

Denklem (2.3) ifadesinden

$$Rez(f, z_0) = b_1 \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. Bu rezidü ayrıca

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz \tag{2.5}$$

İntegrali ile hesaplanabilir. Bu nokta bir basit bir kutup ise

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \tag{2.6}$$

Açılımı var olup buradan

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)] \tag{2.7}$$

limiti ile rezidü hesaplanabilir.

2.1.24. Meromorf Fonksiyon

Bir f fonksiyonunun herhangi bir D bölgesinde kutup noktalarından başka bir singüler noktası yoksa f fonksiyonuna D bölgesinde meromorf fonksiyon denir.

Kompleks değişkenli bir *f(z)* fonksiyonu bir D bölgesinde *a* noktası hariç tanımlı ve analitik olsun. *f(z)* , *a* ‘ da monojen (regüler) veya süreksiz ise *a* noktasına ayrık singüler nokta denir.

Bir f fonksiyonunun z=z_0 noktası civarındaki Laurent serisini göz önüne alalım Bu durumda ;

(i) f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına f fonksiyonunun singüler noktası denir.
(ii) z_0, f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının $\dot{D}(z_{0,}\Gamma)$ delinmiş komşuluğunda analitik oluyorsa $z_{0,}$ noktasına f fonksiyonunun ayrık singüler noktası denir.
(iii) $z_{0,}$ f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu $z_{0,}$ noktasının $\dot{D}(z_{0,}\Gamma)$ her delinmiş komşuğunda en az bir singüler noktaya sahipse z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık olmayan singüler noktası denir. Ayrık singüler noktaların uygun bir delinmiş komşuluğunda fonksiyon analitik olup Laurent serisine açılabilir. Bu seri göz önüne alınarak ayrık singüler noktalar kaldırılabilir singüler nokta, kutup noktası ve esas singüler nokta diye sınıflandırılabilir.

2.1.24.1. *Kaldırılabilir Singüler Nokta*

f fonksiyonunun Laurent açılımında esas kısımda sonlu sayıda terim bulunduruyorsa z=z_0 noktasına fonksiyonun kaldırılabilir singüler noktası denir.
Örnek:
$z \neq 0$ için *f(z)* =z , *z=0* için *f(z)=1* olan *f(z)* fonksiyonu göz önüne alalım. *f(z)* fonksiyonun z=0 noktasında singülerliği vardır. Çünkü z=0 noktasında fonksiyon sürekli değildir. Bu fonksiyon z=0 ve $z \neq 0$ için *f(z)*=z şeklinde tanımlanırsa z=0'da ki singülerlik kalkar.

2.1.24.2. *Kutup Noktası*

z_0 , f fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası olsun. Bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğundaki Laurent serisini göz önüne alalım. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terim varsa z_0 noktasına f fonksiyonunun kutup noktası denir.
Örnek:

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)^2}$$

Fonksiyonu z=4 noktası kutuptur. Çünkü z=4 için $f(z) \to \infty$ olur ve fonksiyonu z=4 civarında holomorftur.

2.1.24.3. *Esas Singüler Nokta*

f fonksiyonunun Laurent açılımında esas kısım sonsuz terimden oluşuyorsa z=z_0 noktasına fonksiyonun esas singüler noktasıdır denir.

Örnek:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

fonksiyonunun reel eksen üzerindeki değişimini göz önüne alalım.

x negatif değerlerle artarak sıfıra giderse $e^{\frac{1}{x}} \to 0$

x pozitif değerlerle azalarak sıfıra giderse $e^{\frac{1}{x}} \to \infty$

olur. Bu durumda f(z), z=0 da sınırlı ve sürekli değildir.

Aynı şekilde

$$\frac{1}{f(z)} = e^{\frac{-1}{x}} \qquad\qquad z=0$$

aynı singülerliği gösterir. Buna göre *f(z)* için z=0 bir esas singüler noktadır.

f(z)' nin sonsuzdaki durumu ile $f(\frac{1}{z})$ 'nin sıfırdaki durumu aynıdır. Gerçekten z sonsuz büyürse $\frac{1}{z}$ sonsuz küçülür.

Eğer $f\left(\frac{1}{z}\right)$, z=0 civarında holomorf ise *f(z)* , $z = \infty$ holomorftur. Eğer $f\left(\frac{1}{z}\right)$'nin orjinde bir kutbu varsa *f(z)*'nin sonsuzda kutbu vardır.

İki tam fonksiyonun oranı meromorfttur o halde paydanın sıfır yerleri meromorf fonksiyonun kutuplarıdır. Analitik fonksiyonlar sınıfı, holomorf, meromorf, multiform ve esas singüler noktaları olan fonksiyonları içine alır. Sonlu bir bölgede ayrık singüler noktaların sayısı sonludur.

2.1.25. Kalan Sınıfı

u ϵ C olmak üzere;

$$u + \mathcal{L} = \{u + w : w \epsilon \mathcal{L}\} \tag{2.8}$$

cümlesine modL' ye göre bir kalan sınıfı denir.

2.1.26. Starlike Bölge

D⊂C bir bölge ve yϵ D olsun. Eğer y noktasını D'nin herhangi bir x noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D'nin içinde kalıyorsa D'ye y noktasına göre starlike bölge denir. Daha açık bir ifade ile D bölgesinin her bir noktası y noktasından görülebilir.

2.1.27. Starlike Fonksiyon

$f \epsilon$ S olsun. f(D) orjine göre starlike ise bu f(z) fonksiyonuna starlike fonksiyondur denir ve starlike fonksiyonların sınıfı genellikle S* ile gösterilir.

2.1.28. Taylor Açılımı

Eğer f , z_0 merkezli ve R yarıçaplı bir L çemberinin içinde analitik ise bu durumda çemberin içinde bulunan her z noktasında biçimindedir. Yani $|z - z_0| < R$ olduğunda kuvvet serisi f (z) ye yakınsar.

2.1.29. Laurent Teoremi

f(z) fonksiyonu $\overline{D} = \{z \epsilon \mathbb{C}: r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ halka bölgesinde tek değerli ve analitik olsun. Bu taktirde f(z) fonksiyonu $\overline{D}$ halkasında yakınsak , $(z - z_0)$ ın pozitif ve negatif kuvvetlerine göre,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2.9}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{2.10}$$

serisine açılabilir.

İspat:

D de bir z noktası alalım. Halkayı z_0'dan geçen fakat z den geçmeyen bir doğru boyunca keselim. Bu kesitin kenarlarını $a_2 a_1$, $a'_2 a'_1$ ile gösterelim. Neticede pozitif yönlü $a_1 a'_1 a'_2 a_2$, çevresi elde edilir. Bu çevrenin belirttiği bölge basit irtibatlıdır ve dolayısıyla bir f(z) fonksiyonu Cauchy formülü

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1^+} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{a'_1 a'_2} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2^-} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{a_2 a_1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \tag{2.11}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan f(z), D de tek değerli olduğu için doğru üzerinde alınan integraller birbirini görürler. O halde $\xi \in \Gamma_1$ ve $\xi \in \Gamma_2^-$ olmak üzere

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2^-} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \tag{2.12}$$

olur. Burada Γ_2^- negatif yönlüdür. Son olarak,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \tag{2.13}$$

dır. Yine

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0}\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \tag{2.14}$$

açılımı yazılır. Bu seri Γ_1 üzerinde mutlak ve üniform olarak yakınsaktır. Buradan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \tag{2.15}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \tag{2.16}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{2.17}$$

olur. Burada

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \quad n = 0,1,2,3 \ldots \tag{2.18}$$

dir. Şimdi Γ_2 eğrisinde

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0}\frac{1}{1 - \dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}} \tag{2.19}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \tag{2.20}$$

olur, seri Γ_2 üzerinde üniform yakınsaktır. Ayrıca,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}f(\xi)(\xi - z_0)^n d\xi \tag{2.21}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^{n+1}} \tag{2.22}$$

Burada,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} f(\xi)(\xi - z_0)^n d\xi \, , n = 0,1,2, \ldots \tag{2.23}$$

şeklindedir. Şayet,

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}}\, d\xi, n = 1,2, \ldots \tag{2.24}$$

farzedilirse,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$$

yazılır.

2.1.30. Laurent Serisi

Az önce bir z_0 noktası civarındaki dairenin tümünde analitik olan f fonksiyonunun, z_0 noktası civarında yakınsak bir seriye açılabileceğini göstermek için Taylor serisini kullandık. Fakat;

$$f(z) = \frac{1}{z}, \qquad f(z) = \frac{e^z}{z^2} \tag{2.25}$$

şeklindeki fonksiyonlar z=0 noktasında analitik olmadıklarından, bu tür durumlarda fonksiyonlara Taylor açılımı uygulanamaz. Bu tür fonksiyonları ifade etmede kullanılan ve 1840 yılları civarında Laurent tarafından formülleştirilen açılımlara Laurent açılımı veya Laurent serisi adı verilmektedir. Bu seriler kompleks sayılar teorisinde büyük rol oynamaktadır. Örneğin; bir fonksiyonun singüler noktalarının bulunup, ne tür bir singüllarittiye sahip olduğunun tespit edilmesinde, fonksiyona ait Laure nt açılımını kullanırız. Diğer bir temel işlevi ise bizi Cauchy Rezidü Teoremine götürüyor olmasıdır. Genel olarak bir f fonksiyonunun Laurent serisi

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{2.26}$$

şeklindedir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ serisine Laurent serisinin esas kısmı , $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ serisine de Laurent serisinin analitik kısmı denir.

2.2. ANALİTİK VE UNİVALENT FONKSİYONLAR

Bu kısımda analitik ve univalent fonksiyon kavramının yanı sıra, bunlarla ilgili bazı tanımlar verilecektir.

2.2.1. Analitik Fonksiyon

f kompleks değişkenli v kompleks değerli fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer;

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, bu fonksiyona z_0 noktasında diferensiyellenebilirdir denir. Eğer f(z) fonksiyonu z_0 noktasının bir komşuluğunda diferensiyellenebilirse, f(z) fonksiyonuna z_0 noktasında analitik fonksiyon denir. (Duren 1983)

Örneğin eğer f(z) $= z^2$ise bu halde *f* (*z*) fonksiyonu her yerde analitiktir. Fakat *f* (*z*) =$|z|$ fonksiyonu hiçbir yerde analitik değildir. Çünkü bu fonksiyon yalnız *z* = 0 noktasında türevi vardır. z_0 noktasının herhangi bir komşuluğunun tamamında türevi yoktur.

Eğer f (*z*) fonksiyonu $\mathbb{C}$ nın tüm noktalarında analitikse f (*z*) fonksiyonuna tam fonksiyon denir. e^z, sin *z*, cos *z* gibi fonksiyonlar örnek olarak verilebilir.

2.2.2. Univalent Fonksiyon

Bir *f*(z) fonksiyonu verilsin.z_1,z_2 ϵ D olmak üzere *f* (z_1) = *f* (z_2) olması sadece ve sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa *f* (*z*) fonksiyonuna *D* bölgesinde univalent ya da yalınkat fonksiyon denir (Nehari 1952).

Bu çalışmada univalent kelimesini tercih edeceğiz. Örneğin $g(z) = \frac{z}{2}$ *a*, *b*, *c*, *d* Î$\mathbb{C}$ ve *ad* -*bc* ¹ 0 olmak üzere $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü birer univalent fonksiyondur. Oysa f (*z*) = 0 ve f (*z*) = z^2 fonksiyonlari ünivalent degildir. *E* açık birim disk ve *g*(*z*) fonksiyonu da E de analitik ise $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ seklinde seri gösterimine sahip olsun. Burada $\frac{g(z)-b_0}{b_1} = f(z)$ denilirse $\frac{b_n}{b_1}$ =f(z) yazılırsa

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2.27}$$

elde edilmiş olur.

2.2.3. Normalize Edilmiş Fonksiyon

(2.27) formundaki bir fonksiyona, normalize edilmiştir denir. Eğer f (z) fonksiyonu univalent ve (2.27) formuna sahipse ona normalize edilmiş univalent fonksiyon denir.

2.2.4. S Sınıfı

E ={ $z \epsilon \mathbb{C}$: $|z| < 1$} birim diskinde analitik ve univalent olan ve f(0)=0, f'(0)=1 koşullarını sağlayan fonksiyon E diskinde $z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahiptir. Bu şekildeki fonksiyonların sınıfı *S* ile gösterilir.

2.2.5. P Sınıfı

$$F(z) = f\left(\frac{z \ + a}{1 + \bar{a} z}\right) \tag{2.28}$$

ifadesi uygun bir sabitle çarpılarak f'nin rezidüsü +1 yapılabilir. Böylece, sonuçta

$$F(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n + \cdots \tag{2.29}$$

biçiminde bir Laurent açılımına sahip olan bir F(z) fonksiyonunu buluruz. Buradan da

$$F_1(z) = F(z) - b_0 \tag{2.30}$$

yazılarak

$$F_1(z) = \frac{1}{z} + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n + \cdots \tag{2.31}$$

elde edilir. D diskinde Denklem (2.31) biçiminde açılıma sahip olan univalent meromorf fonksiyonların sınıfını P ile göstereceğiz ve F_1(0)=∞ olarak tanımlanır. Sigma sınıf

$$C * -\bar{D} = \{z: |z| > 1\} \tag{2.32}$$

de univalent ve meromorf olan

$$g(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_n}{z_n} + \cdots \tag{2.33}$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı da genelde Σ ile gösterilir.

2.2.6. Teorem (Türevler için Cauchy Formülü)

f(z) fonksiyonu basit kapalı bir çevrenin içinde ve üzerinde analitik ise γ nin içindeki herhangi bir z_0 noktası için,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

İspat:

γ, merkezi z_0 ve yarıçapı δ olsn küçük bir çemver olsun, öyle ki γ', γ nin içinde kalsın. Buna göre,

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}$$

γ ve γ 'nün üzerinde ve bunların belirttiği bölgede tek değeli ve analitiktir. O halde Cauchy teoreminden dolayı,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \int_{\gamma\prime} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

eşitliği yazılır. Yine Cauchy teoremlerinden dolayı γ'nün içindeki herhangi bir $z_0 + h$ noktasında,

$$f(z_0+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\prime} \frac{f(z)}{z-z_0-h}dz$$

yazılır. Buradan,

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{h}\int_{\gamma\prime}\left[\frac{f(z)}{z-z_0-h} - \frac{f(z)}{z-z_0}\right]dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\prime}\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}dz$$

Elde ederiz. Şimdi, $h \to 0$ için limit alınırsa istenilen bulunur. Fakat integral altında limit alınabileceğini ayrıca göstermek lazımdır. Gerçekten de,

$$\int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}dz - \int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = h\int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}dz \quad (2.34)$$

yazılabilir. Farzedelim ki, γ'nün üzeinde $|f(z)| \leq M$ ve $|h \leq \delta/2|$ olsun. Buna göre,

$$\left|\int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}dz\right| = \frac{M}{\delta^2 \frac{\delta}{2}} 2\pi\delta = \frac{4\pi M}{\delta^2}$$

İntegral sınırlıdır. O halde, (2.34) eşitliğinden,

$$\lim_{h\to 0}\left|\int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}dz - \int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right| = 0$$

ve $f'(z_0)$ bulunur. Dolayısıyla,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

olur. Bu formül tümevarım metodu ile,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

Şeklinde ifade edilir. Böylece varlık bölgesinde analitik bi fonksiyonun her mertebeden türevinin varlığı anlaşılır.

2.2.7. Binom Açılımı

$f(x) = (1+x)^a$, $a > 0$ keyfi gerçel sayı olmak üzere biçimsel olarak

$$(1+\mathrm{x})^{\mathrm{a}} = 1 + \mathrm{ax} + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n$$

şeklindedir. O halde verilen önermeden yararlanarak daha sonraki katsayı hesaplarında kullanacağız.

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{\left[f\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = \zeta + c_1\frac{1}{\zeta} + c_2\frac{1}{\zeta} + \cdots$$

eşitliğini verelim.

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

serisinde z yerine $\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)$ yazılarak

$$f\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) = \frac{1}{\zeta^2} + a_2\frac{1}{\zeta^4} + a_4\frac{1}{\zeta^6} + \cdots \quad (2.35)$$

elde edilir. (2.35) ün ifadesinde $\frac{1}{2}$ inci kuvvetleri alınıp düzenlenirse

$$\left[f\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\zeta} + \frac{a_2}{2}\frac{1}{\zeta^3} + \left(\frac{a_3}{2} - \frac{a_2^2}{8}\right)\frac{1}{\zeta^5} + \left(\frac{a_4}{2} - \frac{2a_2\ a_3}{8} + \frac{3a_2^3}{24}\right)\frac{1}{\zeta^7} + \cdots$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{1}{\frac{1}{\zeta} + \frac{a_2}{2}\frac{1}{\zeta^3} + \left(\frac{a_3}{2} - \frac{a_2^2}{8}\right)\frac{1}{\zeta^5} + \cdots} = \zeta - \frac{a_2}{2}\frac{1}{\zeta} + \left(\frac{3{a_2}^2}{8} - \frac{a_3}{2}\right)\frac{1}{\zeta^3} + \cdots \tag{2.36}$$

olur. Böylece,

$$\phi(\zeta) = \frac{1}{\left[f\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = \zeta + c_1\frac{1}{\zeta} + c_3\frac{1}{\zeta^3} + \cdots$$

ifadesi gelir. (2.36) eşitliğinden $c_1 = -\frac{a}{2}$, $c_3 = \frac{3a_2^2}{8} - \frac{a_3}{2}$ katsayıları bulunur.

2.3. CAUCHY - RIEMANN DENKLEMLERİ

D açık kümesi üzerinde bir f fonksiyonu alalım ve reel ile sanal kısımlarına göre

$$f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{2.37}$$

biçiminde yazalım. Şimdi aklımıza bu fonksiyonun hangi şartlar altında türevlenebilir olduğu sorusu gelebilir. Gerçi bu sorunun cevabı daha sonraki konularda ayrıntılı olarak verilecektir. Ancak burada da sırası gelmişken kısaca gerekli şartları araştıracağız. Sabit bir z∈D için

$$f'(z) = a + ib \tag{2.38}$$

olsun. h, k∈R için, w=h+ik alalım ve farz edelim ki f, z'de türevlenebilirdir. O zaman türevlenebilme tanımına göre

$$f(z + w) - f(z)w + \sigma(w)w \tag{2.39}$$

yazılır. Burada,

$$\lim_{w\to 0} \sigma(w) = 0 \tag{2.40}$$

$$f'(z).w = (a + ib)(h + ik) = ah - bk + i(bh + ak) \tag{2.41}$$

olur. Diğer taraftan

$$f(x,y) = \left(u(x,y), v(x,,y)\right) \tag{2.42}$$

şeklindeki f: D → R^2 fonksiyonu için,

$$f(x+h,y+k)-f(x,y) = (ah-bk, bh+ak) + \sigma_1(h,k)h + \sigma_2(h,k)k \tag{2.43}$$

yazılır. Burada σ_1 veσ_2, h ve k ile birlikte sıfıra giden fonksiyonlardır.

Eğer f'nin analitik olduğunu kabul edersek f'nin reel anlamda türevlenebileceğini söyleriz ve türevini,

$$J_r(x,y) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

Jacobien matrisi ile gösteririz.

$$f'(z) = a + ib \Rightarrow f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.45}$$

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.46}$$

$$a = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$b = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.47}$$

$$b = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Denklem (2.46) – (2.47) Denklemlerine Cauchy-Riemann denklemleri denir. Denklem (2.46 – 2.47) de ki kısmi türevin varlığı f' (z)'nin varlığı ile mümkündür. Karşıt olarak u(x,y) ve v(x,y) fonksiyonları Cauchy-Riemann denklemleri sağlayan ve reel anlamda sürekli türevlere sahip olan fonksiyon iseler,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{2.48}$$

Fonksiyonu kompleks türevlenebilen bir fonksiyondur. Bunu görmek için yukarıdaki işlemleri sondan başa doğru yaparız

$$\Delta f = a^2 + b^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{2.49}$$

yazılacağından $\Delta f \geq 0$ ve $\Delta f \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart $f\,'(z) \neq 0$ olmasıdır. Ayrıca,

$$\Delta f(x,y) = |f'(z)|^2 \tag{2.50}$$

olduğunu görmek zor değildir. Yukarıdaki ifadeleri toparlayarak tamamen aynı olan aşağıdaki teoremi ifade edelim.

2.3.1. Teorem

D açık kümesinde tanımlı,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{2.51}$$

fonksiyonunun $z = x + iy \in D$ noktasında türevli olabilmesi için gerek ve yeter şart bu noktada

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \ \frac{\partial u}{\partial y}, \ \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.52}$$

kısmi türevlerinin mevcut, sürekli ve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.53}$$

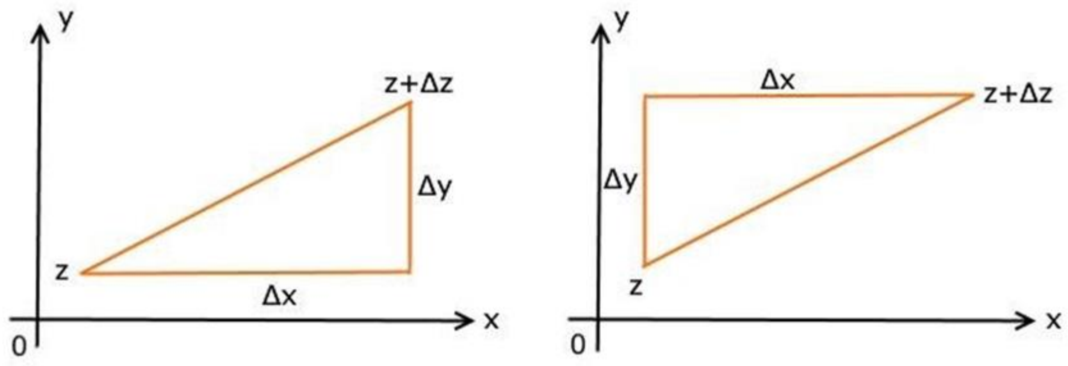
Denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat:

Şart gerektir: f(z)=u(x,y)+iv(x,y) fonksiyonu bir z noktasında türevli olsun. Yani,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{2.54}$$

limiti mevcut olsun.



Şekil 2.1 Yaklaşımlar oluşan limit

Hangi yönde (doğrudan) yaklaşırsak yaklaşalım, bu limit mevcuttur. O halde, Δz=Δx+iΔy ifadesinde önce Δy'yi ve sonrada Δx'i sıfıra götürerek Δz'yi sıfıra götürebiliriz. Δy=0 için, Δz=Δx olacağından,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{2.55}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \tag{2.56}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.57}$$

bulunur. Şimdi Δx=0 için, Δz=iΔy ve,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{2.58}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \tag{2.59}$$

$$f'(z) = i\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.60}$$

bulunur. Türevlerin de birbirine eşit olması gerektiğinden

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.61}$$

sonucu elde edilir.

Şart yeterlidir: Yani u ve v'nin kısmi türevleri mevcut, sürekli ve Cauchy-Riemann denklemlerini sağlıyorsa,

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x,y) \tag{2.62}$$

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \mathcal{E}_1\Delta x + \mathcal{E}_2\Delta y \tag{2.63}$$

yazılır. Burada iki değişkenli fonksiyonlarda ortalama değer teoremi uygulandı. Aynı şekilde,

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \mathcal{E}_3\Delta x + \mathcal{E}_4\Delta y \tag{2.64}$$

yazılır. $\mathcal{E}_1$ $\mathcal{E}_2$ $\mathcal{E}_3$ $\mathcal{E}_4$ değerleri Δx ve Δy ile sıfıra yaklaşsınlar. Şimdi Δf'yi teşkil edelim.

$$\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) \tag{2.65}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \mathcal{E}_1\Delta x + \mathcal{E}_2\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \mathcal{E}_3\Delta x + \mathcal{E}_4\Delta y\right) \tag{2.66}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \delta_1\Delta x + \delta_2\Delta y \tag{2.67}$$

ifadesini Cauchy-Riemann denklemlerini kullanarak elde edilir. Burada δ1 ve δ2 fonksiyonları Δz ile birlikte sıfıra giderler.

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \delta_1\frac{\partial x}{\partial z} + \delta_2\frac{\partial y}{\partial z} \tag{2.68}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.69}$$

yani,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.70}$$

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \leq 1 \; ve \; \left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| \leq 1 \tag{2.71}$$

ise Δz=0 için sıfıra gider.

Örnek:

$f\colon z \to |z|^2$ fonksiyonunun analitik olup olmadığını araştırınız.

Çözüm:

$$f(z) = |z|^2 = \sqrt{(x^2+y^2)^2} = x^2 + y^2$$

olur. u(x,y)= $x^2 + y^2$ ve v(x,y)=0 bulunur.

$u_x = 2x,\ u_y = 2y$, $v_x = 0$, $v_y = 0$ yazılır. $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ denklemleri ancak (0,0) noktasında sağlanırlar. O halde bu fonksiyonun sadece (0,0) noktasında türevi vardır. ℂ'de analitik değildir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. JORDAN EĞRİSİ VE CAUCHY İNTEGRAL FORMÜLÜ

3.1.1. Tanım

Kompleks düzlemde yay görüntüsü sürekli doğru parçası oluşturur. C içerisinde a≤f≤b aralığında sürekli dönüşümü olan zφ(t) yayın görüntüsünü oluşturur. Düzeltilebilir yayın uzunluğu dönüşüm fonksiyonu φ için sınırlı değişkendir. Jordan yayı kendi arakesiti olmayan yaydır. Kapalı eğrilerin görüntüsü çember ya da yayın kesim noktasında çakışır. Basit kapalı eğriler ya da Jordan eğrisi arakesiti olmayan kapalı eğrilerdir. Bütün Jordan eğrileri düzlemi iki parçaya böler, eğrinin iç ve dış bölgesine böler, Jordan eğrisinin iç bölgesine Jordan alanı denir.

f karmaşık değerli bir fonksiyonun karmaşık dönüşümü $z_0 \in C$ noktasında türevlenebilir. Türevi

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

z_0 noktasında olur.

f fonksiyonu z_0 noktasında analitik ise z_0' ın bazı komşuluklarındaki bütün noktalarında türevlenebilir. Kompleks analizin mucizelerinden bir tanesi olan bu f z_0 da türevlidir ve f' nin Taylor açılımından

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ , \ \ a_{n=} \frac{f^n(z_0)}{n!}$$

açık diskin merkezindeki z_0' a yakınsaktır.

Cauchy integral formülünü kullanarak Taylor serisinin açınımını kolayca elde ederiz.

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \ d\zeta \ ,$$

burada C düzeltilebilir Jordan eğrisi, f C içinde ve üzerinde analitik, z C içerisindedir.

3.1.2. Teorem(Cauchy İntegral Formülü)

$$\int_c \mathrm{f}(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0$$

İntegral altında diferansiyel katsayının çözülmesinin standart işlemi (n≥1için) daha genel bir formüle sahiptir. C içerisindeki analitik fonksiyonlar için bu sonuçlar alınır ve kapamada süreklidir. Analitik fonksiyonların benzersizlik prensibi Taylor serisinin direk sonucunu temsil eder. Ardışık noktalar olan iki analitik fonksiyon bu küme içerisinde çözümleyicilik alanında bütün noktalarda sağlandığı görülür. Eş değer olarak z_0 noktasında f analitik ise $f(z_n) = 0$ ve belli z_n noktalarını z_0 noktasına yaklaşan ardışık $f(z_n) = 0$ olduğunda f(z)=0 olur.

3.1.3. Teorem(Cauchy Teoremi)

Eğer f basit D bölgesi içinde karmaşık değerli fonksiyon olursa o zaman

$$\int_c f(\zeta)d\zeta = 0$$

dır. Bundan dolayı, D içerisinde bütün düzeltilebilir Jordan eğrisi olan C uzatılabilir yani f, D içerisinde analitiktir.

3.2. ROUCHE'S TEOREMİ

3.2.1. Teorem

Düzeltilebilir Jordan Eğrisi C içinde ve üzerindeki f ve g analitik olsun, C' de |g(z)|<|f(z)|.
O zaman f ve (f+g) aynı sıfırların numarasına sahiptir, C içerisinde çoğunluğa bağlı hesaplanır.

İspat:

$$\Delta_C arg(f+g) = \Delta_c argf + \Delta_c arg\left(1+\frac{g}{f}\right) = \Delta_c argf$$

D alanı içerisindeki $\{f_n\}$ ardışık fonksiyonları analitikse D' nin sıkıştırılmış bütün alt kümeleri f fonksiyonunun eşit oranda yakınsaması olduğunda f, D içerisinde analitiktir denir. Bu da bize Cauchy integral formülü yardımıyla basit ispat yaptırır.

3.3. HURWİTZ'S TEOREMİ

3.3.1. Teorem

f_n , D alanında analitik ve $f_n(z) \to f(z)$ için n→∞, D'nin aynı şekilde düzenli altkümeleri olsun. O zaman ya D içerisinde f(z) ≡ 0 ya da f'nin bütün sıfırları f_n

fonksiyonlarının ardışık sıfırlarının limit noktasıdır.

İspat:

Varsayalım ki $f(z_0) = 0$ ama $f(z) \not\equiv 0$ olsun. Sıfırın bazı fonksiyonlarının z_0 komşuluğunu göstermek için yeterlidir. δ>0 seçersek D içerisinde disk |z-z_0|≤ δ ve f(z)≠0 C çemberi üzerinde |z-z_0|= δ olarak tanımlanmıştır. m |f(z)|' nin C üzerinde minimumu olsun. O zaman bütün n≥N,

$$|f_n(z) - f(z)| < m \leq |f(z)|$$

C üzerinde elde edilir. Rouche' s teoreminden, f_n f' nin aynı sıfır numaralarına C içerisinde sahiptir. C içerisinde n≥n olduğuda $f_n(z)$ kaybolur.

3.3.2. Teorem

D bölgesinde f_n univalent ve analitik olsun, f_n (z)→f(z) olarak n→∞ varsayarsak, D sıkıştırılmış alt kümeyi oluşturur. O zaman f D içerinde tek değerli ya da sabit olur.

İspat:

Varsayalım ki aksi durum var, $f(z_1) = f(z_2) = \alpha$ bazı ayrı ikili noktalarda D içerisinde z_1 ve z_2 noktaları olsun. O zaman eğer f(z)≠α olursa Hurwitz' s teoreminde ya da ispatına bakarak bu n ≥N için $f_n(z) - \alpha$ fonksiyonu z_1 ve z_2' nin ayrık komşuluğunda yok olur. Buda f_n' nin tek değerliliğini ihlal eder, yani f(z)= α' dir.

Alternatif olarak, Rouche teoreminden de direk olarak ispat edilir. Limit fonksiyonları sabittir. Örnek olarak f_n=z/n.

3.4. BÖLGESEL DÖNÜŞÜM ÖZELLİKLERİ

3.4.1. Tanım

Kompleks fonksiyon ω =f(z) geometrik dönüşümde z düzlemi içerisindeki bölgeden ω düzlemi içerisindeki bölgeye dönüştüğümde u=u(x,y), v=v(x,y) ve z=x+iy ve ω =u+iv olur. f analitik alırsak, gerçek ve görüntü kısımlarını Cauchy- Riemann denklemlerinden sağlarsak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$|f'(z)|^2$ Jacobian dönüşümünü takip ediyor. Ters dönüşüm teoreminden f'(z)≠0 olduğunda f bölgesel tek değerlidir. f'nin tek değerli bazı z_0 komşuluğunda f z_0'da analitiktir ve f'(z_0)≠0 olur. Aksine eğer f z_0'da bölgesel tek değerli ise o zaman f'(z_0)≠0 Rouche teoreminde oluşturulanların ikisi de ispatlanır. Analitik dönüşümler için, bu

nedenle, bölgesel tek değer için Jacobian'ın ortada olması gerekli ve yeterlidir. Daha kolay genel dönüşümler için bu koşul yeterlidir ama gerekli değildir. Alandaki analitik fonksiyonlar bölgesel univalenttir ama univalent değildir.
Örnek $f(z) = z^2$ bölgesel ünivalenttir olur alan içerisinde

$$\mathrm{D} = \{z: 1 < z < 2, 0 < arg\, z < 3\pi / 2\}$$

ama univalent değildir.

3.4.2. Tanım

D birim disk içerisinde S sınıfında analitik ve univalent olan f fonksiyonu univalent fonksiyonlar teorisini büyük ölçüde ilgilendirir ve f(0)=0 ve f'(0)=1 sağlamak zorundadır. Büyüme teorisinde

$$|f(z)| \leq z(1 - |z|)^{-2}, z \in D$$

bütün f∈S içindir. Özel olarak f∈S fonksiyonu D 'nin bütün altkümeleri için düzgün sınırlıdır. Montel teoreminin normal sınıfından dolayı S sınıfı bölgesel sınırlıdır. Üstelik f_n∈S ve f_n(z)→f(z) D' nin düzenli altkümelerinde eşit alırsak f D' de analitik olur ve birebir ya da sabittir. Ama sabit olamaz çünkü düzgün yakınsaklık cevaplarından, Cauchy İntegral formülü tarafından, f_n'(0)→f'(0), yani f'(0)=1≠0. Bu da bize f' nin D içerisinde univalent olduğunu gösterir. Sonuç olarak f∈S, çünkü f(0)=0 ve f'(0)=1 normalleştirilmesinde eşit yakınsaklık tarzında korunur. Genişleme teoreminden yararlanarak ispatı elde etmiş oluruz.

3.5. RİEMANN DÖNÜŞÜM TEOREMİ

ℂ kompleks düzlem, D'de ℂ düzleminde birden fazla sınır noktasına sahip bağlantılı bir bölge ve $z_0 \epsilon\ D$olsun. $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$, $f\ '\ (z_0)$>0 şartlarını sağlayan ve D'yi birim disk üzerine konform olarak dönüştüren bir tek f konform dönüşümü vardır.

3.6. CARATHÉODORY GENİŞLEME TEOREMİ

Jordan eğrisi C D alanında sınırlandırılmış olsun ve birim D diski üzerinde f' nin D konform dönüşümü olsun. Kapalı disk $\overline{D}$ üzerinde f'nin genişletilmiş homomorfizması $\overline{D} = D \cup C$olur.

İspat:

Kabul edelim ispatta $\overline{\Delta}$ üzerinde $\overline{D}$ genişletilmiş homomorfizması Δ Jordan alanında, D

Jordan alanı üzerindeki konform dönüşümü olur.

3.7. ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN TEMEL TEORİSİ

3.7.1. Tanım

Tek değerli f fonksiyonu eğer iki kere aynı değeri alamazsa D⊂C alanında univalent olur, bu da, D içinde $z_1 \neq z_2$ve bütün z_1, z_2 noktaları için f(z_1)≠f(z_2) olur. f fonksiyonu z_0∈D noktasında bölgesel univalent ise bazı z_0 noktasının komşuları ünivalenttir. Analitik f fonksiyonları için f'(z_0)≠0 şartı z_0 nokasında bölgesel ünivalente eşdeğerdir. Analitik ünivalent fonksiyonlar konform dönüşüm olarak gösterilir çünkü açı-koruma özelliği vardır. Öncelikle birim $D = \{z: |z| < 1\}$ diski içinde S sınıfının analitik ve univalent olan f fonksiyonu ile ilgilenerek f(0)=0 ve f'(0)=1 şartlarını sağlayarak normalleştirmeliyiz. f∈S Taylor serisi açılımı şeklinde

$$\mathrm{f(z)} = \mathrm{z} + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots, \quad |z| < 1$$

Riemann dönüşüm teorisinde, geometrik teoremleri ilgilendiren S sınıfının fonksiyonlarından univalent fonksiyonlar bir sınır noktasından daha çok rastgele seçilen basit bağlantılı alanlar olarak açıklanır.

Örnek:

S sınıfından Koebe fonksiyonu

$$k(z) = z(1-z)^2 = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$$

Negatif reel eksende -1 den eksi sonsuza negatif tam düzlemde D diskinin koebe fonksiyonu dönüştürür. Yazarak görürsek,

$$k(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

ve bu fonksiyona sahip oluruz

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

Sağ yarım düzlemde D konform dönüşümü olursa Re{w} > 0 olur.

Özellikler:

S içerisindeki diğer basit fonksiyon örnekleri,

i. f(z)=z birim dönüşüm

ii. $f(z) = z(1-z)^{-1}$ Re{w} > -$\frac{1}{2}$ yarım düzlemde D' de konform dönşüm olur.

iii. $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$, D düzlemi üzerinde tam negatif iki yarı doğru $\frac{1}{2} \leq$ x $\leq \infty$ ve $-\infty < x \leq -\frac{1}{2}$,

iv. $f(z) = \frac{1}{2}\log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$, yatay eksen üzerinde D dönüşümünde $-\frac{\pi}{4} < Im\{w\} < \frac{\pi}{4}$,

v. $f(z) = z - \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}[1-(1-z)^2]$, D dönüşümü üzerinde kardoidin içidir.

3.8. ALAN TEORİSİ

3.8.1. Teorem

Eğer g ∈Σ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1,$$

eşitliği ancak ve ancak g ∈ $\bar{\Sigma}$ olduğunda sağlanır.

İspat:

E g tarafından kurulsun. r>1 için, |z|=r çemberinin g görüntüsü altında |z|=r olsun. C_r basit kapalı eğrisi E_r ⊃ E alanını kapsamaktadır. E_r alanından

$$A_r = \frac{1}{2i}\int_{C_r} \bar{w}\, dw = \frac{1}{2i}\int_{|z|=r} \overline{g(z)}\, g'(z)dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{re^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty}\overline{b_n}r^{-n}e^{in\theta}\right\}$$

$$= x\left\{1 - \sum_{v=1}^{\infty} v b_v r^{-v-1}\, e^{-i(v+1)\theta}\right\} re^{i\theta}d\theta$$

$$= \pi\left\{r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}\right\}, \quad r > 1$$

r yi 1' e azaltırsak o zaman

$$m(E) = \pi\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right\}$$

buradan m(E) E' nin ölçümü dışındadır. O zaman m(E)≥0 teoremi ispatlar. Eşitsizlikte $|b_n| \leq b^{-\frac{1}{2}}$, n=1, 2, ... Bu eşitsizlikte n≥2 etkili değildir, fonksiyonda

$$g(z) = z + n^{-1/2}z^{-n}$$

univalent değildir. Sonuç olarak türevde

$$g'(z) = 1 - n^{1/2} z^{-n-1}$$

Δ içerisindeki bazı noktalar n≥2 için ortadan kaybolur. Eşitsizliğin keskin ve önemli sonucu $|b_1|$≤1' dir.

Sonuç:

Eğer g∈Σ ise $|b_1|$≤1 denklemden ancak ve ancak

$$\mathrm{g(z)} = \mathrm{z} + b_0 + b_1/\mathrm{z}, \quad |b_1| = 1$$

olduğunda bu Δ' nın konform dönüşümün tümleyeninin çizgi bölümündeki uzunluk 4 tür.

Son sonuca bakarsak Bieberbach teoremini hesaplarken, S sınıfındaki a_2 fonksiyonlarının katsayılarını hesaplarsak bu bize Bieberbach konjektürünün temelinden sağlanır.

3.8.2. Teorem (Bieberbach Teoremi)

Eğer f∈S ve $|a_2|$≤2, Koebe fonksiyonunun dönüşümü olan f ancak ve ancak bu şekilde eşit olur.

3.8.3. Teorem (Koebe Bir-Çeyrek Teoremi)

S sınıfındaki bütün fonksiyonların mesafesi diskte {w:|w|< $\frac{1}{4}$}.

3.9. GENİŞLEME VE BÜKÜLME TEORİSİ

Bieberbach eşitsizliğinde $|a_2|$≤2 konform dönüşümlerin geometrik teorisini ima eder. Koebe bükülme teoreminin bir önemli sonucuda keskin üst ve alt sınır için f sınıfına yayılan $|f'$(z)| olur.

f dönüşümü altında ark boyunun bölünemeyecek kadar küçük oran çarpanı $|f'$(z)| geometrik tanımından bükülme meydana gelir ya da alanın bölünemeyecek kadar küçük alan çarpanı Jacobian $|f'$(z)| den gelir. Devam eden teoremde verilen temel tahmin bükülme teoremi ile ilişkili sonuçlardır.

3.9.1. Teorem

Bütün f ∈S için,

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{4-r^2}{1-r^2} \qquad |z| = r < 1, \tag{3.1}$$

İspat:

Verilen f ∈S, saptanan ζ∈ D ve disk otomorfizmasının yapımında

$$F(z) = \frac{f\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z} - f(\zeta)\right)}{(1-|\zeta|^2)f'(\zeta)} = z + A_2(\zeta)z^2 + \ldots \tag{3.2}$$

O zaman F∈S ve hesaplamaları yaparsak

$$A_2(\zeta) = \frac{1}{2}\left\{(1-|\zeta|^2)\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - 2\bar{\zeta}\right\}$$

Ama Bieberbach teoreminde $|A_2(\zeta)| \leq 2$ dir. Bu eşitsizlikte ζ yerine z koyarsak, denklem (3.1) eşitsizliğine sahip oluruz. Bütün z∈D için Koebe fonksiyonlarının uygun dönüşümleri yapıldığında sonucu elde ederiz.

3.9.2. Teorem (Bükülme Teoremi)

Seçilen f ∈S için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}, |z| = r<1. \tag{3.3}$$

Bütün z∈D, z≠0 eşitliğin olması ancak ve ancak uygun Koebe fonksiyon dönüşümleri ile sağlanır.

İspat:

Eşitsizlikte $|\alpha| \leq \mathrm{c}$ ima edilen $-\mathrm{c} \leq \mathrm{Re}\{\alpha\} \leq \mathrm{c}$, bu da (3.3)’ten.

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq \mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

Çünkü f'(z)≠0 ve f'(0)=1, tek değerli logf'(z) dalı seçersek orijinden kaybolur. Şimdi bunu elde edersek:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} = r\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\mathrm{Re}\{\log f'(\mathrm{z})\}, \qquad z = re^{i\theta}.$$

Buradan

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} log\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}. \tag{3.4}$$

θsabit tutarsak, 0'dan R'ye olan r'nin integralini alırız. Hesapladığımız eşitsizlikte

$$\log\frac{1-R}{(1+R)^3} \leq \log\left|f'\left(Re^{i\theta}\right)\right| \leq \log\frac{1+R}{(1-R)^3},$$

ve üst alma tarafından bükülme teorisi devam eder. Koebe fonksiyonunun uygun dönmesinde

$$k'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

gösterir ki $|f'(z)|$'nin sonucu en iyi ihtimaldir. z = $Re^{i\theta}$ eşitliği için en üst yada en alt sonuç (3.3) eşitliğinde bütün sayılar r'ler için uyan denklem (3.4) kısmında $0 \leq r \leq R$ olur.

Özel olarak,

$$\text{Re}\left\{e^{i\theta}\frac{f''(0)}{f'(0)}\right\} = \pm 4$$

Buradan $|a_2| = 2$. Bieberbach teoreminden f Koebe fonksiyonunun dönüşümü olmalıdır.

Bükülme teoremi $|f(z)|$ için alt ve üst sınırlar gösterir. Bu sonuçlar görülür.

3.9.3. Teorem (Genişleme Teoremi)

Bütün $f \in S$ için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad |z| = r<1. \tag{3.5}$$

$z \in D, z\neq 0$ eşitliği olması için gerek ve yeter şart Koebe fonksiyonunda uygun dönme yapmaktır.

İspat:

$f \in S$ ve sabit z ∈ $re^{i\theta}$ ile 0<r<1. Elde edeceğimiz

$$f(z) = \int_0^r f'(pe^{i\theta})\, e^{i\theta} dp$$

f (0)=0 olduğunda elde edilir. Genişleme teorisinde

$$|f(z)| \leq \int_0^r \left|f'\left(pe^{i\theta}\right)\right| dp \leq \int_0^r \frac{1+p}{(1+p)^3} dp = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Alt sonuç daha ustacadır. Eğer $|f(\mathrm{z})| \geq \frac{1}{4}$, olursa $r(1+r)^{-2} \leq \frac{1}{4}$ için 0<r<1. Eğer $|f(\mathrm{z})| < \frac{1}{4}$ ise Koebe bir-çeyrek teoreminde elde edilen f menzilinde 0'dan $f(z)'$ye dairesel dilim bütünlüğünü verir. C 0'dan z'ye yayın bütünlüğüdür ve

$$f(z) = \int_c f'(\zeta) d\zeta .$$

Ama $f'(\zeta)d\zeta$ C sabit işareti boyunca, yapım aşamasında, bükülme teorisinden

$$|f(\mathrm{z})| = \int_c |f'(\zeta)|\ |d\zeta| \geq \int_c^r \frac{1-p}{(1+p)^3} dp = \frac{r}{(1+r)^2}$$

elde edilir.

Denklem (3.5) eşitliğindeki bazı kısımlar denklem (3.3) eşitsizliğinden elde edildiğinden f' nin Koebe fonksiyonu dönüşümü olduğu gösterilmiş olur.

3.9.4. Tanım (Bieberbach Konjektürü)

f fonksiyonunun bütün katsayıları için $f \in$ S de n=2,3,4… f Koebe fonksiyonu ya da dönüşümlerinden bir tanesi olduğu durumda bütün n'ler için eşitsizlikler kurulabilir.

3.10. İÇ ALAN TEOREMİ

$f \in S$ olsun 0 < r < 1 için, $A_r = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}$ sayılarının sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu halde f (*D*) nin alanı,

$$A = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2$$

ile verilir.

İspat:

$|z| < 1$ için geçerli

$$W = f(\mathrm{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \; ; \; a_1 = 1$$

toplamını yazalım:

$$C_r = \{z : z = re^{i\theta}, 0 < \mathrm{r} < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

çemberini göz önüne alalım.

$\Gamma_r = f(\mathrm{C}_r)$, D , = int(C_r), Δ_r = int(Γ_r), A_r = Alan Δ_r

olsun.

$$A_r = \iint\limits_{\Delta_r} du\, dv \; = \iint\limits_{D_r} \left|\frac{a(u\,,v\,)}{a(x\,,\,y\,)}\right| \text{ dx dy}$$

$$= \iint\limits_{D_r} |f'(z)|^2\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0 \left|f'(re^{i\theta})\right|^2 r\, dr\, d\theta \tag{3.6}$$

biçiminde yazılır. Ayrıca

$$f'(re^{i\theta}) = a_1 + 2a_2re^{i\theta} + \ldots + \mathrm{n}a_n r^{n-1}e^{i(n-1)\theta} + \ldots$$

olup,

$$\overline{f'(re^{i\theta})} = \overline{a_1} + 2\overline{a_2}re^{-i\theta} + \ldots + n\overline{a_n}\, r^{n-1}e^{-i(n-1)\theta} + \ldots$$

yazılabileceğinden

$$\left|f'(re^{i\theta})\,\right|^2 = f'(re^{i\theta})\,\overline{f'(re^{i\theta})}$$

İfadesi (3.6) de kullanır ve terim terim integral alınırsa,

$$\mathrm{Ar} \;= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 r^{2n}$$

elde edilir. Çünkü k≠0 için

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\, \mathrm{d}\theta \;= 0$$

dır. Eğer 0<r<1 için A_r sınırlanır ve M üst sınır olarak alınırsa,

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 < \; M$$

yazılır. Burada N keyfi sabit pozitif bir tamsayıdır. Sol taraftaki toplam r ye göre monoton olarak artan ve sınırlıdır. Dolayısıyla $r \to 1^-$ giderken bir limite sahip olup,

$$\pi \sum_{n=1}^{N} n\,|a_n|^2 \leq \mathrm{M}$$

eşitsizliği elde edilir. Çünkü,

$$\pi \sum_{n=1}^{N} n\,|a_n|^2$$

kısmi toplamları sınırlıdır. $N \to \infty$ giderken $\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2$ serisi yakınsak olduğundan,

$$A = \lim_{r\to 1^-} A_r = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 \tag{3.7}$$

İfadesi elde edilir. (3.7)de tanımlanan A sayısına Δ=f(D)'nin iç alanı denir. Daima,

$$\mathrm{A} = \pi(1 + 2|a_2|^2 + \ldots +) \geq \pi$$

eşitsizliği vardır. F(z) =z olması durumunda f(D) alanı ile D'nin alanı eşittir. F(z) =z durumu hariç diğer durumlarda f(D)'nin alanı D'nin alanından fazladır.

Örnek:

$$\mathrm{w} = \frac{z}{1-z} = \mathrm{z} + z^2 + z^3 + \ldots$$

Fonksiyonu D_r = { z: |z| <r, 0<r<1 } diskini, $r \to 1^-$ giderken $A_r \to \infty$ olacak şekilde,

$$\mathrm{Ar} = \frac{\pi r^2}{(1-r^2)2} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n r^{2n}$$

alanına sahip olan,

$$\Delta\mathrm{r} = \{\mathrm{w}: |\, \mathrm{w} - \frac{r^2}{1-r^2}\,| < \frac{r}{1-r^2}\}$$

diskine dönüştürür.

Çözüm:

$$\mathrm{w} = \frac{z}{1-z} \Rightarrow \mathrm{z} = \frac{w}{1+w}$$

olur. Buradan ,

$$|\mathrm{z}| = |\frac{w}{1+w}| < r$$

İfadesinde w= u+iv yazılıp, gerekli işlemler yapılırsa,

$$u^2 - 2\mathrm{u}\frac{r^2}{1-r^2} + v^2 < \frac{r^2}{1-r^2}$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki yanına

$$(\frac{r^2}{1-r^2})^2$$

terimi ilave edilirse, bir önceki ilave

$$u^2 - 2\mathrm{u}\frac{r^2}{1-r^2} + v^2 + (\frac{r^2}{1-r^2})^2 < \frac{r^2}{1-r^2} + (\frac{r^2}{1-r^2})^2$$

biçimini alır. Bu da

$$\Delta\mathrm{r} = \{\mathrm{w}: \left|\mathrm{w} - \frac{r^2}{1-r^2}\right| < \frac{r^2}{1-r^2}\}$$

İfadesinin açık şeklinden başka bir şey değildir. W= $z(1-z)^{-1}$ altında D'nin görüntüleri olan Δ_r diskleri

$$\mathrm{Rew} > -\frac{1}{2}$$

Yarı düzlemini örter.

3.11. DIŞ ALAN TEOREMİ

f ϵ P olsun. Bu halde $\overline{\mathrm{f(D)}'}$ kapalı bölgesinin alanı,

$$\mathrm{B} = \pi\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_n|^2\right]$$

eşitliği ile verilir. Burada f(D)´ =C\f(D)'dir.

İspat :

f ϵ P için $0 \leq |z| < 1$ için geçerli olan

$$\mathrm{W} = \mathrm{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, z_n$$

İfadesini yazmak kolaydır. f altında D'nin görüntüsünün alanı ∞ noktasını ihtiva edeceğinden f(D) sonlu olamaz. Bu yüzden bu teorem $\Delta = \overline{\mathrm{f(D)}'}$ alanından söz eder.

$$\mathrm{Cr} = \{\ \mathrm{z}: \mathrm{r}e^{\theta}\ , 0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$\mathrm{Dr} = \mathrm{int(Cr)}, \mathrm{Er} = \mathrm{Ext(Cr)}, \Gamma\mathrm{r} = \mathrm{f(Cr)}$$

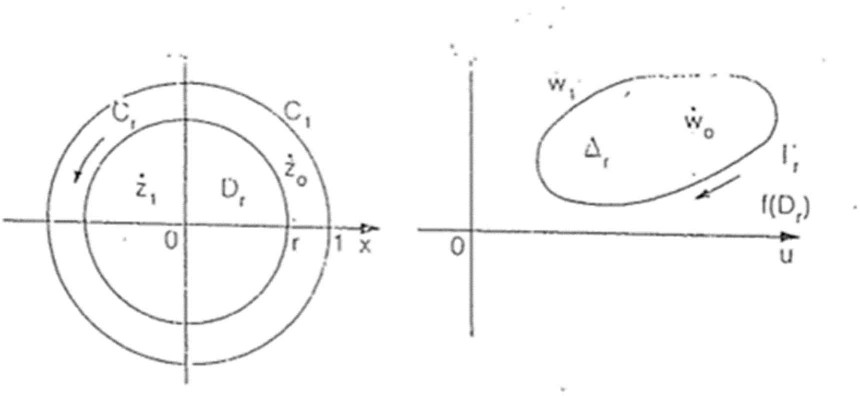
olsun. İlk olarak $f(D_r)$ =$Ext(\Gamma_r)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $w_0 = f(z_0)$olmak üzere

r <$|z_0|$< 1 olacak biçimde z_0 ϵ E_r seçelim.f univalent olduğundan

$w - w_0 = f(z) - f(z_0)$ fonksiyonunun |z| $\leq$ r de sıfırı yoktur. Bununla birlikte bu fonksiyon |z| =r çemberinin içinde z=0 noktasında basit kutba sahiptir. Dolayısıyla argüman teoreminden,

$$-1 = \mathrm{N} - \mathrm{P} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f'(z)dz}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{r_r} \frac{dw}{w - w_0}$$

yazılır. Bu gösterir ki Ωr_r (w_0)=-1 olup w_0 ϵ int (Γ_r) ve Γ_r negatif yöndedir. (C_r pozitif yönde yönlendirilmiş) Üstelik eğer z_1 ϵ D_r ise N-P =0 olacağından Ωr_r (w_1)=0 olur. Bu da w_1 ϵ Ext (Γ_r) olduğunu gösterir.



Şekil 3.11.1

Δ_r = int (Γ_r) ve B_r de Δ_r 'nin alanı olsun. Bu durumda,

$$\mathrm{Br} = \frac{1}{2i}\int_{-r_r} \overline{w}\, dw$$

$$= \frac{i}{2}\int_{C_r} \overline{f(z)} \qquad f'(z)\, dz \tag{3.8}$$

dir.

$$\mathrm{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m z^m$$

olduğundan

$$\mathrm{f'(z)} = -\mathrm{z} - 2\sum_{m=1}^{\infty} m b_m z^{m-1}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade (3.8)' de yerine konulursa

$$\mathrm{Br} = -\frac{i}{2}\int_{C_r} [\, (\,\overline{z}) - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n}\; z^{-n}\,]\,[\,\mathrm{z} - 2 - \sum_{m=1}^{\infty} m b_m\; z^{m-1}\,]\,\mathrm{dz}$$

eşitliği bulunur. Yine

$$\int_{C_r} z^{-n}\; z^{m-1} dz = i r^{n+m}\int_0^{2\pi} e^{(m-n)i\theta}\,\mathrm{d\theta} = \begin{cases} 0, & m \neq n \; ise \\ 2\pi i r^{2n}, & m = n \; ise \end{cases}$$

İfadesinden

$$Br = \pi\left[\frac{1}{r^2} - \sum_{n=1}^{\infty} n\; |b_n|^2 r^{2n}\right] \tag{3.9}$$

elde edilir. $B_r \geq 0$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\mathrm{b_n}|^2 r^{2n} \leq \frac{1}{r^2}$$

Yazılır ve r→1⁻ için limit alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\mathrm{b_n}|^2 \leq 1$$

bulunur. Böylece,

$$\mathrm{B} = \lim_{r\to 1^-} B_r = \pi\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|\mathrm{b_n}|^2\right]$$

sonucu elde edilir.

3.12. GRONWALL – BİEBERBACH

Eğer $f \in$ P ise, $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_n|^2 \leq 1$ dir. Bu sonuç 1914'de Gronwall tarafından, 1916'da Bieberbach tarafından ayrı ayrı elde edilmiştir. Gronwall-Bieberbach eşitsizliğinin bir sonucu oloarak $|b_1|^2 \leq 1$ yazılır. $|b_1| = 1$ eşitliği sadece $b_2 = b_3 = \ldots = 0$ olduğundan ortaya çıkar. Bu durumda $b_1 = e^{2\mathrm{i}\alpha}$ olmak üzere f fonksiyonu

$$f(z) = \frac{1}{z} + e^{2\mathrm{i}\alpha} z$$

biçimindedir. $z = e^{\mathrm{i}\theta}$ için $f\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right) = e^{-i\theta} + e^{2i\alpha}e^{i\theta}$

$$= e^{i\alpha}\left(e^{-i\theta}e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}e^{i\theta}\right)$$

$$= e^{i\alpha}\left(e^{-i(\alpha+\theta)} + e^{i(\alpha+\theta)}\right)$$

$$= e^{i\alpha}(\cos(\alpha+\theta) - i\sin(\alpha+\theta) + \cos(\alpha+\theta) + i\ \sin(\alpha+\theta))$$

$$= 2e^{i\alpha}\cos(\alpha+\theta)$$

yazılır. $w=u+iv$ denirse

$$2e^{i\alpha}\cos(\alpha+\theta) = u + iv$$

Eşitliğinden

$$u = 2\cos\alpha\cos(\alpha+\theta)$$

$$v = 2\sin\alpha\cos(\alpha+\theta)$$

ve bu iki eşitlikten de

$$\frac{v}{u} = \tan\alpha \Rightarrow v = (\tan\alpha).u$$

Şeklinde bir doğru denklemi elde edilir. Böylece, z, c_1 birim diskini bir kez tararken w, orta noktası orijin olan ve α eğim açısına sahip olan 4 birim uzunluğundaki L doğrusunu iki kez ileri ve geri tarar. Bu f fonksiyonu açık birim diski, L doğrusu çıkarılmış w düzleminin tamamına dönüşür. Bu durumda, B=0'dır.

3.12.1. Teorem

$f \in \sum$ için $|z|$ >1 için

$$f(\mathrm{z}) = \mathrm{z} + c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_n z^{-n} + \ldots$$

yazılır. $H(\mathrm{z}) = \frac{1}{2}$ ters fonksiyonu ünivalent olduğundan

$$\mathrm{g(z)} = (foHz)(\mathrm{z}) - c_0 = \frac{1}{2} + c_1\mathrm{z} + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

ifadesi de univalent ve P sınıfından olup bölüm (3.12)'ye göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\ |c_n|^2 \leq 1$$

ve

$$|c_1| \leq 1$$

dir.

Not:

$$f(\mathrm{z}) = \mathrm{z} + c_0 + e^{2i\alpha}\frac{1}{z}$$

fonksiyonu için n>1 olduğumda $|c_n| = 0$'dır. Bu fonksiyon $\overline{D}$ yi $\left[-2e^{i\alpha} + c_0, 2e^{i\alpha} + c_0\right]$

doğru parçası ile delinmiş w- düzleminin tamamına dönüştürür. Gerçekten $z = re^{i\theta}$ için

$$f(\mathrm{z}) = re^{i\theta} + c_0 + e^{2i\alpha}\frac{1}{r}e^{-i\theta} = e^{i\alpha}\left[re^{i(\theta-\alpha)} + \frac{1}{r}e^{i(\alpha-\theta)}\right] + c_0$$

$$= e^{i\alpha}\left[r\cos(\theta-\alpha) + ir\sin(\theta-\alpha) + \frac{1}{r}\cos(\alpha-\theta) + \frac{i}{r}\sin(\alpha-\theta)\right] + c_0$$

olur.

$$u + iv = \left(r + \frac{1}{r}\right)e^{i\alpha}\cos(\theta-\alpha) + i\left(r - \frac{1}{r}\right)e^{i\alpha}\sin(\theta-\alpha) + c_0$$

denirse

$$u = \left(r + \frac{1}{r}\right)e^{i\alpha}\cos(\theta-\alpha) + c_0\,, \qquad v\left(r - \frac{1}{r}\right)e^{i\alpha}\sin(\theta-\alpha)$$

yazılır.

$$u - c_0 = \left(r + \frac{1}{r}\right)e^{i\alpha}\cos(\theta-\alpha)\,, v = \left(r - \frac{1}{r}\right)e^{i\alpha}\sin(\theta-\alpha)$$

eşitliklerinden

$$|u - c_0| = \left|2e^{i\alpha}\cos(\theta-\alpha)\right| \leq 2\,,$$

$$|u-c_0| = 2|\cos(\theta-\alpha)| \leq 2$$
$$|u-c_0| \leq 2$$

dır. Yani

$$f(\mathrm{z}) = \mathrm{z} + c_0 + e^{2i\alpha}\frac{1}{z}$$

fonksiyonu, $\overline{D}$' yi

$$\left[-2e^{i\alpha} + c_0\ ,\ 2e^{i\alpha}\ c_0\right]$$

doğru parçası ile delinmiş tüm w düzlemine dönüştürür.

3.13. DİSTORTİON TEOREMLERİ VE BİEBERBACH EŞİTSİZLİĞİ

Burada bazı distortion teoremleri ve Bieberbach eşitsizliği verilecektir.

3.13.1. Teorem

Eğer $f \in S$ $|a_2| \leq 2$ dir. Eşitlik sadece $f(\mathrm{z}) = \mathrm{z}(1+\ e^{i\beta}z)^{-2}$ şeklindeki Koebe fonksiyonları sağlanır.

İspat:

$$f(\mathrm{z}) = \mathrm{z}{+}a_2z^2 + a_3z^3{+}\ldots \in S$$

İken bu fonksiyonun tersi

$$\frac{1}{f(\mathrm{z})} = \frac{1}{z(1+a_2z+a_3z^2+\ldots)} = \frac{1}{z}\ [1-(a_2z+a_3z^2+\ldots)+(a_2z+a_3z^2+\cdots)^2-\ldots]$$
$$= \frac{1}{z} - a_2 + (a_2^2 - a_3)z + \ldots$$

şeklinde olup ilave bir sabit hariç P sınıfındadır. Böylece bölüm (3.12)'den dolayı

$$|a_2^2 - a_3| \leq 1 \tag{3.10}$$

eşitliği elde edilir.

Bu eşitsizlikten sadece a_2'yi içeren başka bir eşitsizliği şöyle çıkarabiliriz. Bunun için de D'de univalent ve analitik alan

$$h(z) = [f(z^2)]^{1/2} = z(1+a_2z^2+a_3z^4+\ldots)^{1/2} = z + \frac{1}{2}a_2z^3 + \ldots \tag{3.11}$$

fonksiyonunu göz önüne almak yeterlidir. Bu fonksiyon S sınıfındadır. D de h(z) fonksiyonunun univalent olduğunu görmek için $|z_1|< 1$, $|z_2|< 1$ olmak üzere $h(z_1) = h(z_2)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $f(z_1^2) = f(z_2^2)$ şeklinde olup f ünivalent olduğundan $z_1^2 = z_2^2$ yazabiliriz. Bu halde $z_1 = z_2$ veya $z_1 = -z_2$'dir. Fakat $z_1 = -z_2$ olması $h(z_1) = h(-z_1)$ olmasını gerektirir ki bu $z_1 \neq 0$ için h sıfırdan farklı ve tek fonksiyon olduğundan mümkün değildir.

Denklem (3.10) ifadesine göre h(z)'nin açılımındaki ikinci ve üçüncü katsayılar

$$a_2' = 0 \text{ ve } a_3' = \frac{1}{2}a_2$$

dir. Böylece bunu $|a_2^2 - a_3| \leq 1$ de kullanırsak

$$\left|0 - \frac{1}{2}a_2\right| \leq 1$$

$$\left|-\frac{1}{2}a_2\right| \leq 1$$

$$\frac{1}{2}|a_2| \leq 1$$

$$|a_2| \leq 2$$

eşitsizliğini buluruz. Alternatif olarak $\sum$ sınıfına ait olan

$$F(z) = \left[h\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1} = z - \frac{1}{2}a_2\frac{1}{z} + \ldots$$

fonksiyonunu göz önüne alabiliriz. Buna göre Gronwall – Bieberbach eşitsizliğinden

$$\left|-\frac{1}{2}a_2\right| \leq 1 \text{veya } |a_2| \leq 2$$

yazılır. Eşitlik durumunun olması için gerek ve yeter şart $2\alpha \neq \beta$ olmak üzere

$$F(z) = z + e^{i\beta}\frac{1}{z}$$

biçiminde olmasıdır. Böylece,

$$F(z) = \left[h\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1}$$

İfadesinden

$$h(\text{z}) = \frac{z}{(1 + \ e^{i\beta}z^2)}$$

fonksiyonu ve $h(\text{z}) = \sqrt{f(z^2)}$ eşitliğinden

$$w = f(z) = \frac{z}{(1 + \ e^{i\beta}z)^2} = z - 2e^{i\beta}z^2 + 3e^{2i\beta}z^3 - \ldots + (-1)^{n-1}.n.e^{(n-1)i\beta}z^n + \ldots \quad (3.12)$$

bulunur. Bu fonksiyon Koebe fonksiyonu olarak adlandırılır ve bu Koebe fonksiyonu bütün n'ler için$|a_n| = n$ özelliğine sahiptir.

Denklem (3.11) eşitliğinin yani $w = \frac{z}{(1+ e^{i\beta}\text{z})^2}$ eşitliğinin her iki yanını $e^{i\beta}$ ile çarpıp

$\frac{1}{e^{i\beta}w}$'yı hesaplarsak

$$\frac{1}{e^{i\beta}w} = \frac{1}{\frac{e^{i\beta}z}{(1+e^{i\beta}z)^2}} = \frac{\left(1+e^{i\beta}z\right)^2}{e^{i\beta}z} = \frac{1}{e^{i\beta}z} + e^{i\beta}z + 2 \tag{3.13}$$

buluruz. Denklem (3.12) in sağ tarafı $|z| = r < 1$ için $[0,4]$ reel aralığındaki değerleri alır. Böylece Koebe fonksiyon D birim diskini $t \geq \frac{1}{4}$ olmak üzere $w = te^{-i\beta}$ ışını ile delinmiş w- düzlemi içine dönüştürür [14].

3.13.2. Sonuç

Eğer,

$$w = \mathrm{g}(z) = \mathrm{z} + c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots$$

fonksiyonu $\sum$ sınıfındansa, $|z| > 1$ in g fonksiyonu altında görüntüsünün sınırı $|w - c_0| \leq 2$ diskinde ihtiva eder.

İspat:

Kabul edelim ki λ , $|z| > 1$' nın g fonksiyonu altındaki görüntüsüne ait olmasın.

Böylece,

$$f(\mathrm{z}) = \frac{1}{\mathrm{g}\left(\frac{1}{z}\right) - \lambda} = z + (\lambda - c_0)z^2 + \ldots$$

Fonksiyonu S sınıfından olup, Teorem (3.13.1) den $|\lambda - c_0| \leq 2$ yazılır.

Not: 1907 yılında Koebe, herhangi bir $f \in S$ fonksiyonu için $\mathrm{w} = 0$' ın f(D)'nin sınırına olan uzaklığı c olacak şekilde pozitif bir c sayısının varlığını gösterdi. 1916 yılında, Bieberbach, Koebe sabitinin değerinin tam olarak $\frac{1}{4}$ olduğunu gösterdi. Daha sonra bağımsız kısa bir ispat da Faber tarafından verildi.

3.13.3. Teorem

Bir $f \in S$ dönüşümü altında birim diskin görüntüsü $|w| < \frac{1}{4}$ diskinin tüm noktalarını ihtiva eder. (Koebe-Bieberbach Teoremi)

İspat:

b f(D)nin bir sınır noktası olsun ve

$$\psi(\mathrm{z}) = \frac{bf(z)}{b - f(z)} = z + (a_2 + b^{-1})z^2 + \ldots$$

Fonksiyonunu göz önüne alalım. $\psi = Tof$ olduğundan ψ de S sınıfındandır. Burada T,

$T(w) = \frac{bw}{b-w}$ şeklinde lineer olmayan bir dönüşümdür.

Teorem (3.13.1)'den

$$|a_2 + b^{-1}| \leq 2$$

olup

$$|b^{-1}| \leq 2 + |a_2| \leq 4$$

yazılır. Bundan dolayı $|b| \geq \frac{1}{4}$ olur. Bir sınır noktasının tam olarak başlangıç noktasından $\frac{1}{4}$ birim uzağında olabilmesi, bu fonksiyonun Koebe fonksiyonu olası durumunda gösterilir. Böylece $\frac{1}{4}$, herhangi daha büyük bir sabit ile değiştirilmez.

Not: $\overline{D}$ de analitik $f(\mathrm{z}) = \mathrm{z} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\ z^n$ biçimindeki fonksiyonların aileis için ($\overline{D}$ de ünivalent olması gerekmeyen) $f(D)$' nin L yarıçaplı bazı diskleri ihtiva edecek şekilde L>0 pozifit sabiti vardır.

Landau, L'nin mümkün olan en iyi değerinin en az $\frac{1}{16}$ olduğunu gösterir.

3.13.4. Sonuç

$f \in S$ olsun. Kabul edelim ki α ve β , $Arg\beta - Arg\alpha = \pm\pi$ özelliğine sahip f tarafından alınmayan iki değerdir. Bu taktirde hem α hem de β' nın orijine olan uzaklığı $\frac{1}{2}$ ' ye eşittir.

İspat:

Teorem (3.13.3.)' ün ispatında olduğu gibi S sınıfına ait olan

$$\psi(\mathrm{z}) = \frac{\alpha f(z)}{\alpha - f(z)}$$

biçimindeki fonksiyonu göz önüne alalım. Bu halde β sayısı, f' nin görüntü bölgesinde olmadığından $\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}$ sayısı da ψ 'nin görüntü bölgesinde değildir.

Teorem 3.13.3.'den

$$\left|\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}\right| \geq \frac{1}{4}$$

veya

$$\alpha = |\alpha| e^{i\lambda}, \qquad \beta = -|\beta| e^{i\lambda}$$

olduğundan

$$\left|\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{1}{|\alpha|} + \frac{1}{|\beta|} \leq 4$$

eşitsizliği bulunur. Örneğin, $|\beta| \leq |\alpha|$ kabul edildiğinde

$$\frac{2}{|\alpha|} \leq \frac{1}{|\alpha|} + \frac{1}{|\beta|} \leq 4$$

veya

$$|\alpha| \geq \frac{1}{2}$$

elde edilir. Eğer $|\alpha| = \frac{1}{2}$ ise $\frac{1}{|\beta|} \leq 2$ veya $|\beta| \geq \frac{1}{2}$ olur. $|\beta| \leq |\alpha|$ olduğu kabul edildiğinden dolayı $|\beta| = \frac{1}{2}$ gelir.

Not: Eğer f altındaki birim diskin görüntü konveks bir bölge ise teorem 3.13.3'ün sonucu aşağıdaki teoremde olduğu gibidir.

3.13.5. Teorem

$f \in S$ olsun. Eğer $f(D) = \Delta$ konveks bir bölge ise, bu bölge $|w|<\frac{1}{2}$ diskinin tüm noktalarını ihtiva eder.

İspat:

$z \in D$ için, b , $f(z)$ tarafından alınmayan bir değer olsun ve

$$\psi(z) = [f(z) - b]^2 = (-b + z + a_2 z^2 + \ldots)^2$$
$$= b^2 - 2bz + \ldots$$

ve

$$g(z) = \frac{b^2 - \psi(z)}{2b} = z + \ldots$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım. $\psi(z)$ fonksiyonunun D diskinde sıfırı olmadığı açıktır. $\psi(z)$'nin D de ünivalent olduğunu göstermek için, D' de z_1 ve z_2 gibi farklı iki nokta alalım. Bu halde

$$\psi(z_1) - \psi(z_2) = [f(z_1) - b]^2 - [f(z_2) - b]^2$$
$$= [f(z_1) - f(z_2)][f(z_1) + f(z_2) - 2b]$$
$$\neq 0$$

dır. Çünkü, f ünivalent olduğundan $f(z_1) \neq f(z_2), \Delta$ konveks olduğundan

$$\frac{1}{2}[f(z_1) + f(z_2)] \in \Delta \text{ ve } b \notin \Delta,$$

olup

$$\frac{1}{2}[f(z_1) + f(z_2)] \neq b$$

yani

$$[f(z_1) + f(z_2) - 2b] \neq 0$$

şeklindedir.

Böylece ψ, D' de univalent olduğundan g' de D bölgesinde univalent ve normalleştirilmiştir. Üstelik g(z), $\frac{1}{2}b$ değerini alamaz. Koebe – Bieberbach teoreminde,

$$\frac{1}{2}|b| \geq \frac{1}{4} \text{ veya } |b| \geq \frac{1}{2}$$

yazılır.

$$w = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + \ldots$$

fonksiyonu D diskini konveks bir bölge olan $\mathrm{Re}(w) > -\frac{1}{2}$ yarı düzlemi üzerinde dönüştürdüğünden yukarıdaki sonuç kesindir.

Aşağıda verilen teorem; r<1 olmak üzere orijin merkezli r yarıçaplı kapalı diskindeki z ler için $f \in S$ fonksiyonunun$|f'(z)|$ ve $|f(z)|$ modüllerinin alt ve üst sınırları ile ilgilidir. Bu eşitsizlikler Koebe' ye ait Distortion teoremleri olarak bilinirler. Koebe

$$m_1(r) \leq |f(z)| \leq M_1(r) \text{ ve } m_2(r) \leq |f'(z)| \leq M_2(r)$$

olacak biçimde $m_1(r)$, $M_1(r)$, $m_2(r)$, $M_2(r)$ pozitif tamsayılarının varlığını gösterdi. Teorem 3.13.6'nın tam bir ifadesi 1916 Gronwall ve Bieberbach tarafından verildi.

3.13.6. Teorem

Eğer $f \in S$ ve $0 \leq r \leq 1$ ise $|z| \leq$ r özelliğindeki her z için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{3.14}$$

ve

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \tag{3.15}$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat:

$0 \leq |\alpha| \leq 1$ olmak üzere

$$\psi(z) = f\left(\frac{z+a}{1+az}\right)$$

fonksiyonu D de univalenttir. Böylece,

$$g(z) = \frac{\psi(z) - f(a)}{f'(a)(1-|a|^2)}$$

fonksiyonu da yine D' de univalent olup g(0)=0 ve g′(0)=1 şartlarını sağlar. Dolayısıyla, g ∈ S' dir. Eğer a_2 sayısı g(z) fonksiyonuun Taylor açılımındaki ikinci katsayı ise

$$a_2 = \frac{g''(a)}{2!} = \frac{1}{2}\left[\frac{f''(a)(1-|a|^2)}{f'(a)} - 2\bar{a}\right]$$

dir. Bieberbach eşitsizliğine göre $|a_2| \leq 2$ olacağından

$$\left[\frac{f''(a)(1-|a|^2)}{f'(a)} - 2\bar{a}\right] \leq 4$$

yazılır. Burada a yerine z yazılır ve her iki taraf $\frac{|z|}{1-|z|^2}$ ile çarpılırsa son eşitsizlik

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2} \tag{3.16}$$

haline dönüşür. |Rez| ≤ $|z|$ ve $|z| = r$<1 olduğu düşünülürse

$$\left|\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

olur ki buradan da

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2} \tag{3.17}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, $z = re^{i\theta}$ denirse,

$$f'(z) = e^{i\theta}(u_r + iv_r), f''(z) = e^{-2i\theta}(u_{rr} + iv_{rr})$$

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{r(u_{rr} + iv_{rr})}{u_r + iv_r} = \frac{r(u_{rr} + iv_{rr})(u_r - iv_r)}{u_r^2 + v_r^2}$$

yazılır. Buradan,

$$\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{r(u_r u_{rr} + v_r v_{rr})}{u_r^2 + v_r^2}$$

$$= r\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{In}(u_r^2 + v_r^2)^{1/2}$$

$$= r\frac{\partial}{\partial r}ln|f'(z)| \tag{3.18}$$

bulunur. Denklem (3.17) ifadesi (3.16)' da yerine yazılır ve $r \neq 0$ ile bölünürse

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} ln|f'(z)| \leq \frac{2r+4r}{1-r^2} \tag{3.19}$$

eşitsizliği elde edilir. Denklem (3.18) ifadesinin her bir yanının 0' dan r ye integrali alınırsa

$$\ln(1-r) - 3\ln(1+r) \leq \ln|f'(z)| \leq \ln(1+r) - 3\ln(1-r)$$

ya da

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği elde edilir ki, bu da denklem 3.13 ifadesidir. $r = 0$ için eşitsizlikler açıktır. Şimdi de denklem (3.14)'ü ispatlayalım.

İlk olarak $0 \leq t \leq r$ olmak üzere yukarıdaki eşitsizliğin ikinci kısmını kullanarak $\zeta = te^{i\theta}$ eğrisi boyunca $\zeta = 0$'dan $\zeta = z = re^{i\theta}$ ' ya kadar integrali alınırsa,

$$|f(z)| = \left|\int_0^z f'(\zeta)d\zeta\right| \leq \int_0^r |f'(\zeta)|\, dt$$

$$\leq \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3} dt$$

$$= \frac{r}{(1-r)^2} \tag{3.20}$$

bulunur. $\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)|$ olduğunu göstermek için $0 \leq r \leq 1$ iken $\frac{r}{(1+r)^2} < \frac{1}{4}$ olduğunu göz önüne alalım. $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ olursa eşitsizlik doğrudur. Şimdi kabul edelim ki $|f(z)| < \frac{1}{4}$ olsun. Koebe – Bieberbach teoreminden dolayı $w = f(z)$noktasını orijine birleştiren $\gamma_1$doğru parçası $f(D)$ de ihtiva edilir. Eğer $\gamma = f^{-1}(\gamma_1)$ ise, yani γ, f altında görüntüsü $\gamma_1$olan 0 noktasının z noktasına birleştiren eğri ise

$$|w| = (\gamma_1) \int_0^{|w|} |dw| = L(\gamma_1)$$

ve denklem (3.13)'deki ilk eşitsizlikten

$$|f(z)| = (\gamma) \int_0^{|z|} |f'(z)||dz| \geq \int_0^r \frac{1-r}{(1+r)^3} dr = \frac{r}{(1+r)^2} \tag{3.21}$$

yazılır. Burada $|dz| = (dr^2 + r^2 d\theta^2)^{1/2} \geq$ dr dir. Denklem (3.20) ve denklem (3.21) eşitsizlikleri birleştirilerek denklem (3.15) sonucu elde edilir. Denklem (3.15)'ün eşitlik hali Koebe fonksiyonu ile elde edilir.

3.14. KONVEKS VE STARLIKE FONKSİYONLARIN BAĞINTILARI

3.14.1. Konveks Fonksiyonlar

3.14.1.1. *Konveks Eğri*

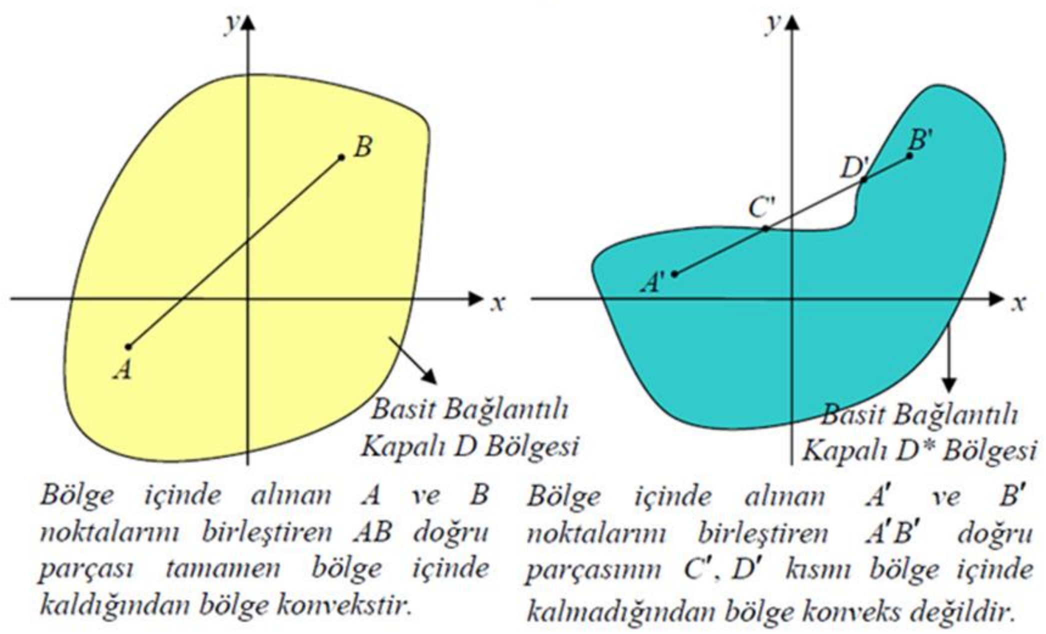
C eğrisi z-düzleminde basit bağlantılı pozitif yönlendirilmiş (yani saat ibresinin dönme yönünün tersi yönde olan dönme yönünde yönlendirilmiş) bir eğri olsun. C eğrisinin w = f(z) analitik fonksiyonu altındaki resim C_1 olsun $a \leq t \leq b$ olmak üzere C_1 eğrisinin bir w = f(z) noktasındaki teğetinin argümanı t'nin azalmayan bir fonksiyonu ise C_1 eğrisi "Konveks" tir denir.

3.14.1.2. *Konveks Bölge*

Genel olarak konveks bir bölge aşağıdaki şekilde tanımlanır. Bölge içinde alınan iki noktayı birleştiren doğru tamamen bölge içinde kalıyorsa bölgeye "Konveks Bölge" denir.

Bu tanım göz önüne alındığında bir konveks bölge için aşağıdaki özellikler sıralanabilir.

(i) Konveks bölge genel olarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir.



Şekil 3.14.1.1

(ii) Yıldızlı bölge tanımı göz önüne alındığında, her noktasına göre yıldızlı olan bölge konveks bölgedir.

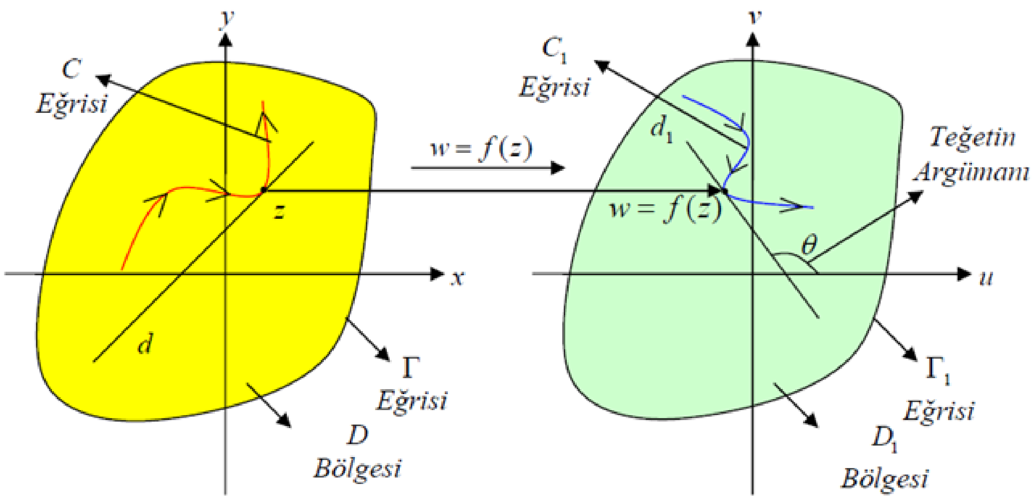
3.14.1.3. *Teorem*

Yukarıda belirtilen C_1 resim eğrisinin konveks olma koşulu

$$Im\left(\frac{z''(t)}{z'(t)}+z'(t)\frac{f''(t)}{f'(t)}\right)\geq\ 0, a\ \leq\ t\ \leq\ b \tag{3.22}$$

dir.

İspat:



Şekil 3.14.1.2

Şekil 3.14.1.2 de gösterildiği gibi tasvir bölgeleri ve tasvir eğrileri göz önüne alınsın. Yani, basit bağlantılı kapalı Γ eğrisi ve kapattığı D bölgesinin resimleri w $= f$(z) fonksiyonu altında Γ_1 ve D_1 olsun. Benzer şekilde D bölgesinde tanımlı basit bağlantılı C eğrisinin bu fonksiyon altındaki resmi C_1ise bu durumda verilen konveks olma tanımını kullanarak

$$\frac{d}{dt}(\theta(t))\geq 0 \tag{3.23}$$

Eşitsizliği yazılabilir. Burada θ açısı resim eğrisi C_1'e teğet olan d_1 doğrusunun argümanıdır ve t'nin $a\leq t\leq b$ aralığında tanımlanmış fonksiyonudur.
Öte yandan C eğrisi z-düzleminde

$$z(t) = x(t) + iy(t), (a \leq t \leq b) \quad (3.24)$$

şeklinde parametrelenebilir. Diğer yandan C eğrisi yönlendirilmiş eğri olduğundan, C eğrisinin teğetinin doğrultusu

$$arg\, z'(t) = teğet\ doğrultusu \quad (3.25)$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla w = f(z) fonksiyonu bu teğet vektörünü

$$arg\, f'(z) = arg(f(z(t)))' = arg(z'(t)\, f'(z(t))) \quad (3.26)$$

açısı üzerinden döndürür. Tanımdan dolayı C_1 eğrisinin konveks olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}(\, arg(z'(t)\, f'(z(t)))) \geq 0, (a \leq t \leq b) \quad (3.27)$$

Eşitsizliğinin gerçeklenmesidir. (3.27) ifadesi argüman özelliklerinin kullanılması ile

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}(arg(z'(t)\, f'(z(t)))) = \frac{d}{dt}(arg\, z'(t) + arg\, f'(z(t))) \geq 0 \quad (3.28)$$

Şeklinde ifade edilebilir. Diğer yanda resim bölgesindeki herhangi bir w = f(z) noktası için

$$f(z) = \left| f\,(z) \right| e^{i\theta}, (Argf(z) = \theta) \quad (3.29)$$

İfadesi yazılabilir. (3.29) eşitliğinden

$$log\, f\,(z) = log(|f(z)|e^{i\theta}) = log\,|f(z)| + log\, e^{i\theta} = log\,|f(z)| + i\theta \Rightarrow$$

$$log\, f\,(z) = log|f(z)| + i\theta \quad (3.30)$$

bulunur. (3.29) ve (3.30) ifadelerinden

$$arg\, f\,(z) = Im(log\, f\,(z)) \quad (3.31)$$

eşitliğini elde ederiz. (3.31) yazılışını (3.28) ifadesinde kullanırsak

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(arg\, z'\,(t) + arg\, f'\,(z(t))) = \frac{d}{dt}[Im((log\, z'(t)) + (log\, f'\,(z(t))))] \Rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Im\left[\frac{d\theta}{dt}((log\, z'(t)) + (log\, f'(z(t))))\right] = Im\left[\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(t)}{f'(t)} z'(t)\right] \geq 0$$

Bulunur ki buda teoremin ispatını verir.

3.14.1.4. *Lemma*

f(z) fonksiyonu bir *D* bölgesinde tanımlanmış, analitik ve yalınkat olsun. $|\zeta| <1$, $|z| < 1$, $z \neq \zeta$ olmak üzere

$$F(z,\zeta) = \frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta}$$

Şeklinde tanımlanan *F*(z,ζ) fonksiyonu $|\zeta| < 1$, $|z| < 1$ de analitiktir.

İspat:

f(z) fonksiyonu bir *D* bölgesinde tanımlanmış ve analitik olduğundan *D* de kutbu yoktur. Ayrıca yalınkat olmasında ötürü

$$z \neq \zeta \text{ } için \text{ } f(z) \neq f(\zeta) \tag{3.32}$$

bağıntısı gerçeklenir. Ayrıca

$$z \neq \zeta \text{ } olduğundan \text{ } z-\zeta \neq 0 \tag{3.33}$$

dır. (3.32) ve (3.33) bağıntıları göz önüne alınırsa *F*(z,ζ) fonksiyonunun $|\zeta| < 1$, $|z| < 1$ de analitik olduğu görülür. Diğer yandan

$$\lim_{\zeta \to z} F(z,\zeta) = \lim_{\zeta \to z}\left[\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{\zeta \to z} F(z,\zeta) = \lim_{\zeta \to z}\left[\frac{(z-\zeta)2zf'(z) - (f(z)-f(\zeta))(z+\zeta)}{(f(z)-f(\zeta))(z-\zeta)}\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{\zeta \to z} F(z,\zeta) = \lim_{\zeta \to z}\left[\frac{f'(z)+zf''(z)}{f'(z)}\right] = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

eşitliği bulunur ki bu da iddianın doğru olduğunu gösterir.

3.14.1.5. *Sonuç*

Eğer Re *F*(z,ζ) > 0 koşulu her $|\zeta| < 1$ için gerçeklenirse

$$\mathrm{Re}\, z\frac{f'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}$$

dir.

İspat:

$$Re\ F\ (z,\zeta)\ =\ Re\ \left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-\ f(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right)>0 \tag{3.34}$$

eşitsizliğini sonucun hipotez koşulundan yazabiliriz. Bu eşitsizlik her $|\zeta| < 1$ için gerçekleştiğinden ζ= 0 için de doğrudur. Dolayısıyla

$$\mathrm{Re}\ F\ (\mathrm{z},0)\ =\ \mathrm{Re}\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-\ f(0)}-\frac{z+0}{\mathrm{z}-0}\right)=\ \mathrm{Re}\ \left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-\ f(0)}-1\right)\Rightarrow$$

$$Re\ F\ (z,0)\ =\ Re\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-\ f(0)}-1\right) \tag{3.35}$$

eşitliği yazılabilir. Diğer yandan f(z) = z+ a_2z^2 + … açılımına sahip olduğundan f(0) = 0 dır. Dolayısıyla (3.35) yazılışı aynı zamanda

$$\mathrm{Re}\ F\ (\mathrm{z},0)\ =\ \mathrm{Re}\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-\ 0}-1\right)\ =\ \mathrm{Re}\left(2z\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right)>0\Rightarrow$$

$$\mathrm{Re}\ \mathrm{z}\frac{f'(z)}{f(z)}>\frac{1}{2}$$

olduğu bulunur.

3.14.1.6. *Lemma*

w = f(z) = log(1+z) fonksiyonu konvekstir.

İspat:

İspatı iki ayrı yoldan yapabiliriz.

I.Yol.

$$f(\mathrm{z})=\log(1+\mathrm{z})\ \Rightarrow f'(\mathrm{z})=\ \frac{1}{1+z}\Rightarrow$$

$$\log f'\ (\mathrm{z})\ =\ \log\ \frac{1}{1+z}\ =\ \log 1 - \log(1+\mathrm{z})\Rightarrow$$

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}\ =\ \frac{1}{1+z}\Rightarrow \mathrm{z}\ \frac{f''(z)}{f'(z)}\ =\ -\ \frac{z}{1+z}\ \Rightarrow 1+\mathrm{z}\ \frac{f''(z)}{f'(z)}\ =\ 1-\ \frac{z}{1+z}\ =\ \frac{1}{1+z}\ \Rightarrow$$

$$1+z\ \frac{f''(z)}{f'(z)}=\ \frac{1}{1+z} \tag{3.36}$$

eşitliğinden hareketle

$$\mathrm{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+z}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1+z}\right)+\overline{\left(\frac{1}{1+z}\right)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1+\overline{z}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1+\overline{z}+1+z}{|1+z|^2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{2(1+Rez)}{|1+z|^2}\right]=\frac{1+Rez}{|1+z|^2}\Rightarrow$$

$$Re\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)=\frac{1+Rez}{|1+z|^2} \tag{3.37}$$

yazılabilir. Diğer yandan z $\in D$ olduğundan

$$|z|<1 \Leftrightarrow -|z|>-1 \tag{3.38}$$

dir. Bir kompleks sayı için

$$-|z| \leq Re\, z \leq |z| \tag{3.39}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu biliyoruz. (3.38) ve (3.39) birlikte düşünülürse

$$-1<-|z| \leq Re\, z \leq |z|<1 \Rightarrow -1< Re\, z<1 \tag{3.40}$$

ifadesi bulunur. (3.40) eşitsizliğinden

$$1-1<1+Re\, z<1+1 \Rightarrow 0<Re\, z<2 \Rightarrow$$

$$1+Re\, z>0 \tag{3.41}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bir kompleks sayının modülü daima pozitif olacağından

$$|1+z|^2>0 \tag{3.42}$$

dır. Şimdi (3.37), (3.41) ve (3.42) birlikte düşünülürse

$$Re\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)>0 \tag{3.43}$$

olduğunu elde ederiz. Bu bize $w=f(z)=\log(1+z)$ fonksiyonunun konveks olduğunu gösterir.

II. Yol.

Bir diğer ispat, $w = f(z) = \log(1+z)$ fonksiyonu altında $D = \{z \| z| < 1\}$ bölgesinin resim bölgesi olan $f(D)$'nin konveks olduğu gösterilerek yapılır. Şimdi $w_1 = 1 + z$ fonksiyonu

$$w_1 = u + iv = 1 + x + iy \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x,y) = 1 + x \\ v_1 = v_1(x,y) = y \end{cases} \tag{3.44}$$

şeklinde yazılırsa bu transformasyonu altında D' nin resmini bulalım.

$$D = \{z \| z| < 1\} = \{(x^2 + y^2) | x^2 + y^2 < 1\} \tag{3.45}$$

olduğunu düşünerek

$$u_1 = u_1(x,y) = 1 + x \Rightarrow x = u_1 - 1 \Rightarrow x^2 = (u_1 - 1)^2$$

$$v_1 = v_1(x,y) = y \Rightarrow y^2 = v_1^2$$

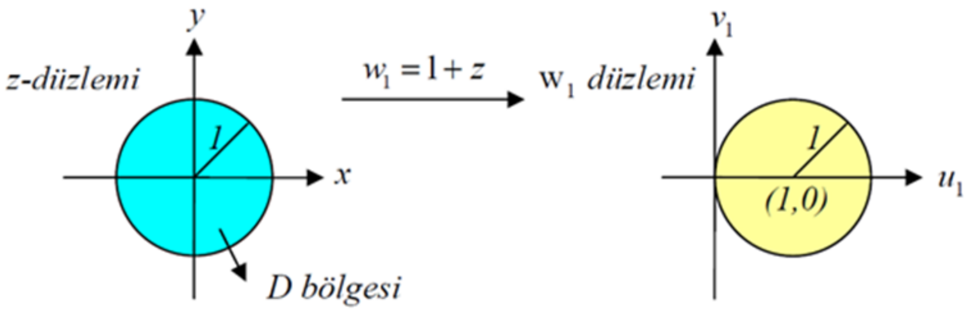
$$x^2 + y^2 = (u_1 - 1)^2 + v_1^2 \tag{3.46}$$

yazabiliriz. (3.45) ve (3.46) eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$(u_1 - 1)^2 + v_1^2 < 1 \tag{3.47}$$

bulunur. (3.47) eşitsizliği merkezi (1,0) da, yarıçapı 1 olan çember denklemidir. Dolayısıyla (3.46) transformasyonu (yada $w_1 = 1 + z$ fonksiyonu) altında D bölgesinin resmi merkezi (1,0) da, yarıçapı 1 olan çemberin iç bölgesidir.

Transformasyonun şekli aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.14.1.3

Şimdide $f(D) = \{(u_1, v_1) | (u_1 - 1)^2 + v_1^2 < 1\}$ bölgesinin $w = \log w_1$ tasviri altındaki resim bölgesini bulalım. $f(D)$ bölgesinde bulunan noktaların primitif argümanları (-π/2) ile $(\pi/2)$arasındadır. Dolayısıyla

$$W \ = logw_1 \Leftrightarrow w_1 = \ e^W \Rightarrow u_1 + iv_1 = e^{u+iv} \Rightarrow$$

$$u_1 + iv_1 = e^u e^{iv} yada\ Re^{i\varphi} = e^u e^{iv} \Rightarrow$$

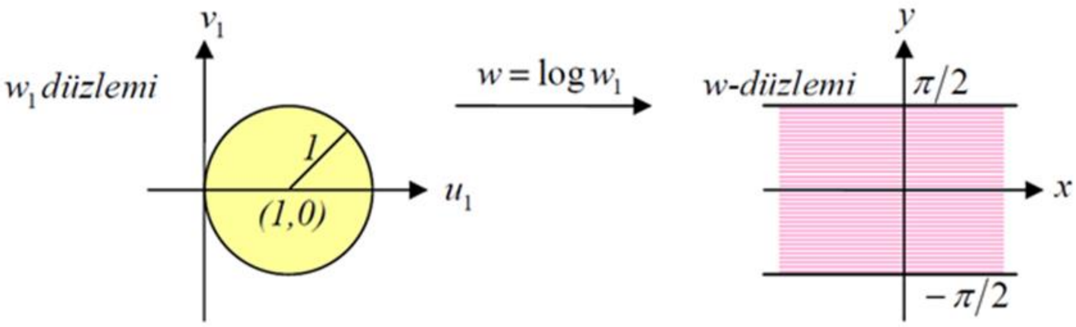
$$R = e^u, \varphi = v \tag{3.48}$$

eşitlikleri bulunur. Öte yandan yukarıda belirttiğimiz üzere

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \tag{3.49}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq v \ \leq \frac{\pi}{2} \tag{3.50}$$

haline gelir. Bu da bize $f(D)$ resim bölgesinin w=logw_1 fonksiyonu altında $v=-\frac{\pi}{2}$, $v=\frac{\pi}{2}$ şeritsel bölgesi üzerine resmettiğini gösterir. Transformasyonun şekli aşağındaki gibidir.



Şekil 3.14.1.4

Dolayısıyla w-düzlemindeki $-\frac{\pi}{2} \leq v \ \leq \frac{\pi}{2}$ şeritsel bölgesi konveks olduğundan $w= f(z)$ = log(1+z) fonksiyonu D'de konvekstir.

3.14.1.7. *Lemma*

$w= f(z) = \frac{1}{1+z}$ fonksiyonu Re $f(z) > \ \frac{1}{2}$ eşitsizliğini gerçekler.

İspat:

$z=x+iy$ olarak alınırsa,

$$Ref(z) = Re\left(\frac{1}{1+z}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1+z}\right) + \overline{\left(\frac{1}{1+z}\right)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+\overline{z}}\right] \Rightarrow$$

$$Ref(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\overline{z}+1+z}{|1+z|^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2(1+Rez)}{|1+z|^2}\right] = \frac{1+Rez}{|1+z|^2} \Rightarrow$$

$$Ref(z) = \frac{1+x}{|1+x+iy|^2} = \frac{1+x}{(1+x)^2+y^2} \Rightarrow$$

$$Ref(z) = \frac{1+x}{1+2x+(x^2+y^2)} \tag{3.51}$$

Eşitsizliğini elde ederiz. Diğer taraftan x^2+y^2 < 1 olduğundan (3.51) ifadesi

$$Ref(z) = \frac{1+x}{1+2x+(x^2+y^2)} > \frac{1+x}{1+2x+1} = \frac{1+x}{2(1+x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$Ref(z) > \frac{1}{2}$$

bulunur.

3.14.1.8. *Lemma*

Rew_1 > $\frac{1}{2}$ ve Rew_2 > $\frac{1}{2}$ ise Re$\sqrt{w_1 w_2}$ > $\frac{1}{2}$ dir.

İspat:

Lemma 3.14.1.6 ve Lemma3.14.1.7'de

$$f_1(z) = log(1+z)\ fonksiyonunun\ konveks \tag{3.52}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{1+z} \Rightarrow Ref_2(z) > \frac{1}{2} \tag{3.53}$$

Olduğunu gösterdik. Şimdi

$$w_1 = \frac{1}{1+z_1}, w_2 = \frac{1}{1+z_2} \tag{3.54}$$

Fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu fonksiyonlardan hareketle

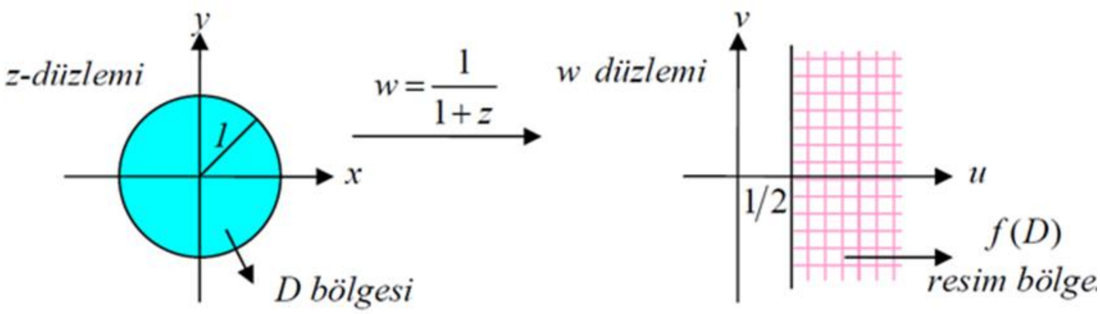
$$\sqrt{w_1 w_2} = \sqrt{\frac{1}{1+z_1}\frac{1}{1+z_2}} \Rightarrow log\sqrt{w_1 w_2} = log\sqrt{\frac{1}{1+z_1}\frac{1}{1+z_2}} \Rightarrow$$

$$log\sqrt{w_1 w_2} = \; log\left(\frac{1}{1+z_1}\,\frac{1}{1+z_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(log\,\frac{1}{1+z_1} + log\,\frac{1}{1+z_2}\right) \Rightarrow$$

$$log\sqrt{w_1 w_2} = \frac{1}{2}\,log\,\frac{1}{1+z_1} + \frac{1}{2}\,log\,\frac{1}{1+z_2} \qquad (3.55)$$

eşitliğini yazabiliriz. Diğer taraftan (3.55) ifadesi bize $f_2(\mathrm{z}) = \frac{1}{1+z}$ fonksiyonunun konveks olduğunu gösterir. Zira resim bölgesi Ref_2(z) > $\frac{1}{2}$ sağ yarım düzlemidir.

Bu ise şekil 3.14.1.5 gibi ifade edilebilir.



Şekil 3.14.1.5

Konveks bölge olmanın analitiklik tanımından z_1, $z_2 \in f(D)$ için $z_3 \in f(D)$ vardır ki $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\lambda f_2(z_1) + (1-\lambda)\, f_2(z_2) = \; f_2(z_3) \qquad (3.56)$$

dir. (3.56) ifadesinde λ= $\frac{1}{2}$ alınması halinde

$$log\sqrt{w_1 w_2} = \frac{1}{2}log\frac{1}{1+z_1} + \frac{1}{2}log\frac{1}{1+z_2} = \; log\frac{1}{1+z_3}$$

bulunur. Yani,

$$\sqrt{w_1 w_2} = \frac{1}{1+z_3} \qquad (3.57)$$

eşitliği geçerlidir. (3.57) eşitliğinden

$$Re\sqrt{w_1 w_2} = Re\left(\frac{1}{1+z_3}\right) \geq \frac{1}{2}$$

olduğu bulunur.

3.14.1.9. *Sonuç*

f(z) = z+a_2z^2+ … fonksiyonu D = {z||z|< 1}' de konveks olsun.

Bu durumda Re$\sqrt{f'(z)} > \frac{1}{2}$ dir.

İspat:

f(z) = z+a_2z^2+ … fonksiyonu D = {z||z|< 1}'de konveks ise

$$Re\, z\frac{f'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}\, ve\ Re\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$$

dir. Lemma 3.14.1.8 den dolayı

$$w_1 = z\frac{f'(z)}{f(z)}, w_2 = \frac{f(z)}{z}$$

Alınarak

$$Re\sqrt{w_1 w_2} = Re\sqrt{z\frac{f'(z)}{f(z)} \cdot \frac{f(z)}{z}} = Re\sqrt{f'(z)} > \frac{1}{2}$$

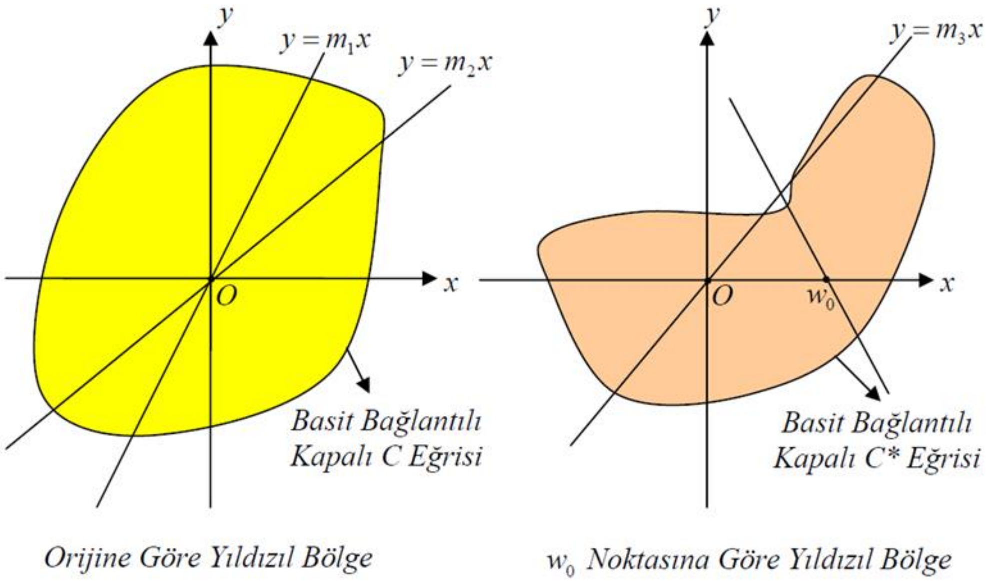
3.14.2. Yıldızıl Fonksiyonlar

3.14.2.1. *Yıldızıl Bölge*

Basit bağlantılı bir C eğrisinin sınırladığı basit bağlantılı bir D bölgesini göz önüne alım. Orijinden geçen bir doğru C eğrisinin sınırını tek bir noktada kesiyorsa, bu durumda bölgeye "Orijine Göre Yıldızıl Bölge" denir.

D bölgesi bir "w_0 Noktasına Göre Yıldızıl Bölge" ise, w_0 noktasından geçen bir doğru bölgenin sınırını bir noktadan kesiyor demektir.

Bu özellikler göz önüne alındığında yıldızıl bölge Şekil 3.14.2.1 de gösterilmiştir.



Şekil: 3.14.2.1

3.14.2.2. *Teorem*

$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonunun $D = \{z||z| < 1\}$de yıldızıl olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = a_1 exp\left[2\int_0^{2\pi} log\frac{1}{1 - e^{-it}z} d\gamma(t)\right], (|z| < 1)$$

eşitliğinin gerçeklenmesidir. Burada γ (t) fonksiyonu monoton artan ve $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 1$olan bir fonksiyondur.

İspat:

f(z) fonksiyonu D de yıldızıl olsun. Yıldızıl fonksiyonun tanımından, p(z) pozitif reel kısma haiz fonksiyonlar sınıfından bir fonksiyon olmak üzere

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = p(z) \tag{3.58}$$

eşitliği yazılabilir. P(z) fonksiyonu pozitif reel kısma haiz bir fonksiyon olduğundan

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-it}z}{1 - e^{-it}z} d\gamma(t)\,,\;\; \gamma(2\pi) - \gamma(0) = 1 \tag{3.59}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada γ (t) fonksiyonu 0 ≤ t ≤2 π de monoton artan bir fonksiyondur. (3.58) ve (3.59) yazılışları göz önüne alınarak

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) \tag{3.60}$$

eşitliği yazılabilir. (3.60) ifadesinden hareketle

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1 = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) - 1 = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) - \underbrace{[\gamma(2\pi) - \gamma(0)]}_{I=\int_0^{2\pi} d\gamma(t)} \Leftrightarrow$$

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1 = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) - \int_0^{2\pi} d\gamma(t) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} - 1\right] d\gamma(t) \Leftrightarrow$$

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1 = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z-1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} = 2\int_0^{2\pi} \frac{e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\gamma(t) \Leftrightarrow \quad (integal\ alınırsa)$$

$$\log f(z) - \log z = -2\int_0^{2\pi} \log(1-e^{it}z) d\gamma(t) \Leftrightarrow$$

$$\log\frac{f(z)}{z} = 2\int_0^{2\pi} \log(1-e^{it}z) d\gamma(t) \Leftrightarrow \quad (f'(0) = a_1 \Rightarrow \log f'(0) = \log a_1)$$

$$\log\frac{f(z)}{z} - \log f'(0) = -2\int_0^{2\pi} \log(1-e^{it}z) d\gamma(t) \Leftrightarrow$$

$$\log\frac{f(z)}{zf'(0)} = -2\int_0^{2\pi} \log(1-e^{it}z) d\gamma(t) \Leftrightarrow$$

$$\log\frac{f(z)}{za_1} = 2\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{1-e^{-it}z}\, d\gamma(t)$$

$$\frac{f(z)}{za_1} = exp\left[2\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{1-e^{-it}z} d\gamma(t)\right] \Leftrightarrow$$

$$f(z) = a_1 z\, exp\left[2\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{1-e^{-it}z} d\gamma(t)\right], (|z| < 1)$$

bulunur ki bu da iddianın ispatını verir.

3.14.2.3. *Teorem*

C eğrisi, z -düzleminde basit bağlantılı ve pozitif yönde yönlendirilmiş bir eğri olsun. C eğrisinin w=f(z) analitik fonksiyonu altındaki resmi C_1 olsun. w_0 noktası C_1 resim eğrisi üzerinde olmayan bir nokta olmak üzere C_1 eğrisinin w_0 noktasına göre yıldızıl olma koşulu

$$Im\left(\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}z'(t)\right)\geq 0 \quad , \quad a\leq t\leq b$$

ifadesi ile verilir.

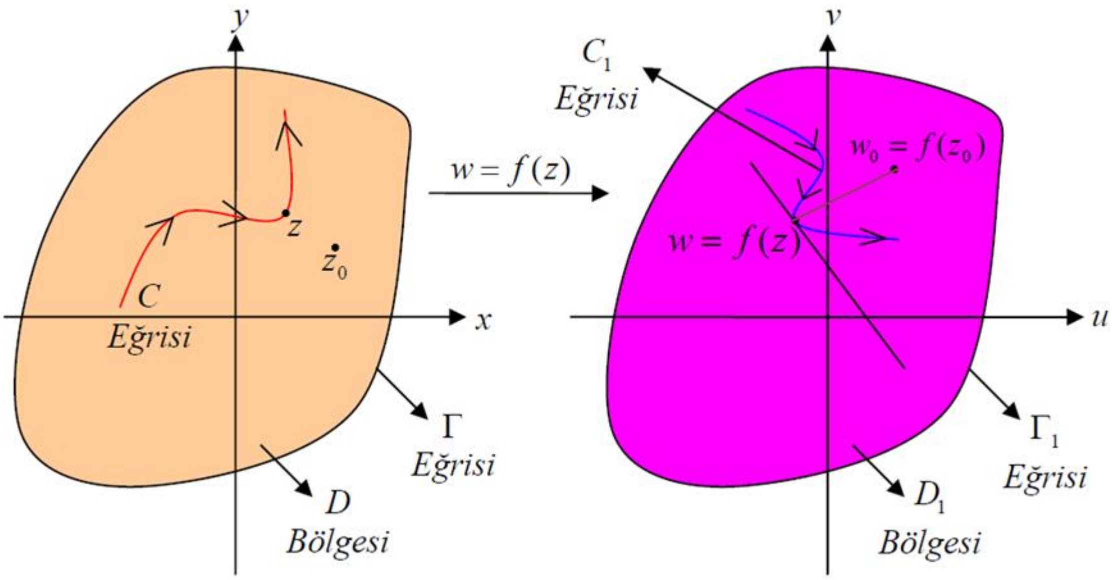
İspat:

Şekil 3.14.2.2. de gösterildiği gibi basit bağlantılı kapalı Γ eğrisi ve onun kapattığı D bölgesinde tanımlanmış w=f(z) fonksiyonunu göz önüne alalım. Γ eğrisi ve D bölgesinin

w=f(z) fonksiyonu altındaki resimleri Γ1 ve D1 olsun. Benzer şekilde D bölgesinde tanımlı basit bağlantılı C eğrisinin bu fonksiyon altındaki resmi C1 olarak tanımlansın. C eğrisinin denklemi

$$z(t)=x(t)+iy(t)\ , \qquad (a\leq t\leq b) \tag{3.61}$$

eşitliği ile tanımlanır.



Şekil 3.14.2.2.

Öte yandan, $w_0=f(z_0)$ noktası C_1 resim eğrisi üzerinde olmayan bir nokta olmak üzere

$$arg(w-w_0)=arg\ (f(z)-f(z_0))$$

ifadesi t 'nin $a\leq t\leq b$ aralığındaki değerleri için azalmıyorsa C_1 eğrisine "Yıldızıl Eğri" adı verilir. Bu tanım aynı zamanda

$$\frac{d}{dt}[arg\,(w - w_0)] = \frac{d}{dt}[arg\,(f(z) - f(z_0))] \geq 0 \quad , \quad (a \leq t \leq b) \tag{3.62}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca herhangi bir z kompleks sayısı için

$$z = |z|e^{i\phi} \Rightarrow \log z = \log(|z|\, e^{i\phi}) = log|z| + \log e^{i\phi} = \log|z| + i\phi \Rightarrow$$

$$z = log|z| + i\phi \tag{3.63}$$

yazılışından dolayı

$$\theta = argz = Im(log\, z) \tag{3.64}$$

eşitliğini elde ederiz. (3.63) ve (3.64) eşitliklerinin birlikte düşünülmesi ile

$$\arg(w - w_0) = \arg\big(f(z) - f(z_0)\big) = Im(\log\big(f(z) - f(z_0)\big) \tag{3.65}$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan

$$0 \leq \frac{d}{dt}[arg(w - w_0)] = \frac{d}{dt}arg\big(f(z) - f(z_0)\big) = \frac{d}{dt}[Im(\log(f(z) - f(z_0))]$$

$$0 \leq Im\left[\frac{d}{dt}\log(f\big(z(t)\big) - f\big(z(t_0)\big)\right] = Im\left[z'(t)\frac{f'(z(t))}{f(z(t) - f(z(t_0))}\right]$$

$$0 \leq Im\left[z'(t)\frac{f'(t)}{f(z) - f(z_0)}\right]$$

eşitliği elde edilir ki buda ispatı istenen ifadedir.

Örnek:

C eğrisinin $|z|$=R çemberi olarak verilmesi durumunda yıldızıllık ve konvekslik koşulunu aşağıdaki şekilde elde ederiz.

Konvekslik koşulunu elde etmek için, çember denklemini yazalım

$$|z| = R \Rightarrow z = Re^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \Rightarrow z(t) = Rcost + isint \Rightarrow$$

$$z'(t) = iRe^{it}dt \Rightarrow z'(t) = iz \Rightarrow z''(t) = i^2 z \Rightarrow z'(t) = -z$$

Yani neticede

$$\begin{Bmatrix} z'(t) = iz \\ z''(t) = -z \end{Bmatrix} \tag{3.66}$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi (3.66) eşitlikleri kullanılarak

$$0 \leq Im\left[\frac{z''(t)}{z'(t)} + z'(t)\frac{f''(t)}{f'(t)}\right] = Im\left[\frac{-z}{iz} + iz\frac{f''(t)}{f'(t)}\right] \Longrightarrow$$

$$0 \leq \ Im\left[i + iz\frac{f''(t)}{f'(t)}\right] = Im\left[i\left(1 + iz\frac{f''(t)}{f'(t)}\right)\right] \Rightarrow$$

$$0 \leq Im\left[i\left(1 + iz\frac{f''(t)}{f'(t)}\right)\right]$$

ifadesini elde ederiz.

Herhangi bir z kompleks sayısı için

$$Im(\ iz) = Im\big(i\ (\ x + iy)\big) = \ Im(ix + i^2 y\ ) = Im(\ ix - y) = x = \ Re\ z \qquad (3.67)$$

yazabiliriz. (3.66) eşitliğini (3.67) ifadesinde kullanırsak

$$0 \leq Im\left[\left(1 + iz\frac{f''(t)}{f'(t)}\right)\right] = Re\left(1 + iz\frac{f''(t)}{f'(t)}\right) \Rightarrow$$

$$Re\left(1 + iz\frac{f''(t)}{f'(t)}\right) \geq 0$$

bulunur. Bu ifade $|z| = R$ çemberinin konvekslik koşuludur.

Benzer tarzda hareket ederek yıldızıllık koşulunu aşağıdaki şekilde buluruz.

$$0 \leq \frac{d}{dt}[arg(w - w_0)] = Im\left(\frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)}z'(t)\right) = \dot{I}m\left[i\left(\frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)}z'(t)\right)\right]$$

$$Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)}\right) \geq 0 \qquad (3.68)$$

(3.68) ifadesinde $f(z_0) = f(0) = 0$ eşitliği kullanılırsa

$$Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geq 0$$

elde edilir. Bu da bize yıldızıllık koşulunu verir.

3.15. RIEMANN'IN THETA FONKSİYONU

Riemann Theta Fonksiyonu, matematiksel fizikteki çeşitli denklemlerin yarı periyodik çözümlerinin yapımında ortaya çıkan g karmaşık değişkenlerin karmaşık bir fonksiyonudur. Abelian fonksiyonu, Riemann Theta Fonksiyonunun homojen polinomlarının bir oranı olarak ifade edilebilir. Bir g × g matrisinin sanal kısmının pozitif kesin olmasını ve m = $(m_1, \dots, m_g)$ Z katsayılarıyla bir satır vektörü olmasını sağlayın. Daha sonra Riemann Theta Fonksiyonu

$$\vartheta(u|F) = \sum_{m} \exp\left[2\pi i\left(m^T u + \frac{1}{2} m F^T m\right)\right].$$

3.16. DEDEKIND'IN η FONKSİYONU

Eliptik teoriye ulaşmak için birçok eliptik modüler fonksiyon uygulamasında eta fonksiyonu merkezi bir rol oynamaktadır. Dedekınd tarafından 1877'de tanıtıldı ve yarım düzlemde

$$H = \{\tau: Im(\tau) > 0\}$$

denklemi ile tanımlandı.

$$\eta(\tau) = e^{\pi i \tau/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau})$$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Sonsuz serilerde hızlı bir şekilde yakınsak genleşmeye sahip olan ve Weierstrass'ın sigma işlevi ile doğrudan bağlantılı olan θ (u, τ) ile tanımlanan işlevi tanıtmak avantajlıdır.

$\tau = \frac{w_2}{w_1}$ ≠gerçek, Imτ> 0 ve $w = m\ w_1 + nw_2$ (m, n) $\neq$ (0,0), m, n tamsayıdır ve u karmaşık bir değişkendir. θ(u, τ) fonksiyonunu seri ile tanımlarız,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) = \sum_n exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i\tau + 2\pi i(n+\frac{\varepsilon}{2})(u+\frac{\varepsilon'}{2})\right\} \tag{4.1}$$

$(\varepsilon,\varepsilon')$ $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ (mod 2), ε ve ε 'tam sayıdır ve n tüm tam sayılara göre değişir (-∞, ∞). [1] 'deki seri u-kompleksi düzlemin kompakt kümelerinde kesinlikle ve düzgün bir şekilde birleşir ve bu nedenle u [2]' nin tam bir fonksiyonunu temsil eder. Aşağıdaki alternatif teta fonksiyonlarını görebiliriz.

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{2^r}+\frac{\tau}{2^r},\tau\right) = \mu\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+\frac{1}{2^{r-1}}\\ \varepsilon'+\frac{1}{2^{r-1}}\end{bmatrix}$$

$$\mu = exp\left\{-\frac{1}{4^r}(\tau+2)\pi i - \frac{1}{2^r}(2u+\varepsilon')\pi i\right\}$$

$\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ (mod. 2) ve ε’ [2] deki tamsayılardır.

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) = \sum_n exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i\tau + 2\pi i(n+\frac{\varepsilon}{2})(u+\frac{\varepsilon'}{2})\right\}$$

Burada $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ (mod2) , ε ve ε ', [2]' deki tüm tamsayılar (-∞,∞) aralıklarıyla n arasındadır.

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) = \sum_n exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i\tau + 2\pi i(n+\frac{\varepsilon}{2})(u+\frac{\varepsilon'}{2})\right\}$$

$\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ (mod 2) ε ve ε ', [4]' deki tüm tamsayılar (-∞,∞) arasındaki aralıklardır. $\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau) = -i\sum_n(-1)^n exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi i\tau + (2n+1)\pi iu\right\}$ Bu fonksiyon $\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau)$ bir alternatif formüldür.Eğer $\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ (mod 2) ve u = 0 işlevinden sonra $\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau)$,[4] 'deki alternatif bir formüldür.

Eğer $\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ (mod 2) ve u = 0 iken $\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(0,\tau) = \sum_n \exp\,(n^2\pi i\tau)$, $\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(0,\tau)$ için alternatif bir formüldür.[4]

4.1. TANIM

$\begin{Bmatrix}a\\b\end{Bmatrix}$,olarak belirtilen periyot $b + a\tau$ 'dir. Eğer r = 3 alınırsa $\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}a\\b\end{Bmatrix} = \frac{b}{8} + \frac{a\tau}{8}$. Küçültülmüş çeyrek period, a, b'nin 0 veya 1'e eşit olduğu bir çeyrek periottur. [4]. [2] deki bu alternatif formülünün yardımı ile yukarıda, çeyrek periyotlara göre aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz. Eğer $\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ (mod 2) ise

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right) = \sum_n exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi i\tau + 2\pi i(n+\frac{1}{2})(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{4}\right\}$$

$$= ie^{\frac{\pi i\tau}{4}}\sum_n(-1)^n \exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi i\tau + (2n+1)\pi iu + \frac{n\pi i}{2} + \frac{n\pi i\tau}{2} + \frac{\pi i\tau}{4} + \frac{\pi i}{4}\right\}$$

Eğer $\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ (mod 2)' den

$$\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right) = \sum_n exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i\tau + 2\pi i(n+\frac{1}{2})(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix})\right\}$$

$$= e^{-\frac{\pi i\tau}{4}}\sum_n exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi i\tau + (2n+1)\pi iu + \frac{n\pi i}{4} + \frac{n\pi i\tau}{4} + \frac{\pi i\tau}{8} + \frac{\pi i}{8}\right\}$$

Denklemleri kullanarak alabiliriz

$$\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}.\tau)}{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}.\tau)}$$

$$= \frac{ie^{-\frac{\pi i\tau}{8}}\sum_n(-1)^n exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi i\tau + (2n+1)\pi iu + \frac{n\pi i}{4} + \frac{n\pi i\tau}{4} + \frac{\pi i\tau}{8} + \frac{\pi i}{8}\right\}}{e^{-\frac{\pi i\tau}{8}}\sum_n(-1)^n exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi i\tau + (2n+1)\pi iu + \frac{n\pi i}{4} + \frac{n\pi i\tau}{4} + \frac{\pi i\tau}{8} + \frac{\pi i}{8}\right\}}$$

(i) n, 0 veya hatta tamsayı ise $\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}.\tau\right) = i\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)$

(ii) n tek tamsayıysa $\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}.\tau\right)=-i\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)$

$\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ (mod 2) ‘den

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+2n\pi i(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{4}\right\}$$

$$=\sum_n(-1)^n \exp\left\{n^2\pi i\tau+2n\pi i+\frac{n\pi i}{4}+\frac{n\pi i\tau}{4}\right\}$$

$\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ (mod 2)’den

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+2n\pi i(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+2n\pi iu+\frac{n\pi i}{4}+\frac{n\pi i\tau}{4}\right\}$$

Yukarıdaki denklemlerden elde ettiğimiz

$$\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)}{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)}=\frac{\sum_n(-1)^n \exp\left\{n^2\pi i\tau+2n\pi iu+\frac{n\pi i}{4}+\frac{n\pi i\tau}{4}\right\}}{\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+2n\pi iu+\frac{n\pi i}{4}+\frac{n\pi i\tau}{4}\right\}}$$

(iii) n, 0 veya çift tamsayı ise

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)=\ \theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right).$$

(iv) n, tek tamsayı ise

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)=\ \theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right).$$

4.2. TEOREM

[3] 'te tanımlanan θ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ (u,τ) fonksiyonu, u'nun tek fonksiyonudur ve sonsuz çarpım olarak ifade edilir.

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau)=ce^{\frac{\pi i\tau}{4}}2\sin\pi u\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-e^{2(n\tau+u)\pi i}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-e^{2(n\tau-u)\pi i}\right\}$$

$\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2n\pi i\tau}, Imt > 0$ [2] φ (u, τ) fonksiyonunu çarpım olarak ifade edersek,

$$\varphi(u,\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1 - e^{[[(2\mathrm{n}-1)\tau+2\mathrm{u}]\pi\mathrm{i}]}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1 - e^{[(2\mathrm{n}-1)\tau-2\mathrm{u}]\pi\mathrm{i}}\right\}$$

4.3. TEOREM

$\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau)}{\varphi(u,\tau)}$ fonksiyonu, 1 ve τ noktalarına sahip eliptik birfonksiyondur.

İspat:

$\psi(\mathrm{u},\tau) = \frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau)}{\varphi(u,\tau)}$ olsun, sonra yazalım

$$\psi(\mathrm{u}+1,\tau) = \frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u+1,\tau)}{\varphi(u+1,\tau)} = \frac{-\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau)}{\varphi(u,\tau)} = \frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(-u,\tau)}{\varphi(u,\tau)}$$

burada $\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau) = -\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(-u,\tau)$ 4.3.Teorem'den

$\psi(\mathrm{u}+\tau,\tau) = \frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u+\tau,\tau)}{\varphi(u+\tau,\tau)} = \frac{-e^{-(2\mathrm{u}+\tau)\pi\mathrm{i}}\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau)}{e^{-(2\mathrm{u}+\tau)\pi\mathrm{i}}\varphi(u,\tau)} = \frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau)}{\varphi(u,\tau)}$ ‘ dan beri

$$\varphi(\mathrm{u}+\tau,\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1 - e^{(2\mathrm{n}-1)\tau\pi\mathrm{i}+2\pi\mathrm{i}(\mathrm{u}+\tau)}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1 - e^{(2\mathrm{n}-1)\tau\pi\mathrm{i}-2\pi\mathrm{i}(\mathrm{u}+\tau)}\right\}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1 - e^{(2\mathrm{n}+1)\tau\pi\mathrm{i}+2\pi\mathrm{iu}}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1 - e^{(2\mathrm{n}-3)\tau\pi\mathrm{i}-2\pi\mathrm{iu}}\right\}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1 - e^{[2(\mathrm{n}+1)-1]\tau\pi\mathrm{i}+2\pi\mathrm{iu}}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1 - e^{[2(\mathrm{n}-1)-1]\tau\pi\mathrm{i}-2\pi\mathrm{iu}}\right\}$$

$$= \prod_{m=2}^{\infty}\left\{1 - e^{(2\mathrm{n}+1)\tau\pi\mathrm{i}+2\pi\mathrm{iu}}\right\}\prod_{n=0}^{\infty}\left\{1 - e^{\left(\frac{1}{2\mathrm{n}}-3\right)\tau\tau\mathrm{i}-2\tau\mathrm{ui}}\right\}$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty}\left\{1 - e^{(2\mathrm{n}+1)\tau\pi\mathrm{i}+2\pi\mathrm{iu}}\right\}\prod_{m=1}^{\infty}\left\{1 - e^{(2\mathrm{m}-1)\tau\pi\mathrm{i}-2\pi\mathrm{iu}}\right\}\{1 - e^{-(\pi\mathrm{i}\tau+2\pi\mathrm{iu}}\}\{1 - e^{(\pi\mathrm{i}\tau+2\pi\mathrm{iu})}\}^{-1}$$

$$= -e^{-(2\mathrm{u}+\tau)\pi\mathrm{i}}\varphi(\mathrm{u},\tau)$$

Bu nedenle $\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau)$, φ (u,τ) periyotları ile aynı periyodiklik faktörlerine sahip olduğu gerçeğinden ötürü 1 ve τ sıfırlarına sahip olmayan iki kat periyodiktir. Dolayısıyla

ψ (u, τ) fonksiyonu eliptik bir fonksiyondur, çünkü tüm meromorfik fonksiyonların kümesi bir alan oluşturur ve ψ (u, τ) meromorfik ve periyodik olarak 1 ve τ periyotlarına sahiptir. [2], [4].

İlk önce Riemann'ın θ fonksiyonunu seri ile tanımladık.

$$\theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(u,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} exp\{(\mathrm{n}+\mathrm{a})^2\pi\mathrm{i}\tau + 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{n}+\mathrm{a})(\mathrm{u}+\mathrm{b})\}$$

verilen u karmaşık sayısı ve τ karmaşık sayı ile $Im\left(\tau = \frac{w_1}{w_2} \neq real\right) > 0$ sağlayan ve karakteristik $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ burada a, b rasyonel sayılardır.

Bu çalışmada , θ- fonksiyonunun özel değerini karakteristik $\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}$ile ele alıyoruz

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} exp\left\{(n+\frac{\varepsilon}{2})^2\pi i\tau + 2\pi i(n+\frac{\varepsilon}{2})(u+\frac{\varepsilon'}{2})\right\}$$

$\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ (mod2) ve ε, ε' tamsayılar [6]. Dolayısıyla aşağıdaki ilişkilerimiz var

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{\mathrm{n}} \exp(\mathrm{n}^2\pi i\tau + 2n\pi iu).$$

Şimdi, bunu inceleyelim

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u,\tau) = \sum_{n} \exp(\mathrm{n}^2\pi i\tau + 2n\pi iu).$$

O zaman görürüz ki

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{n}^2\pi i\tau + 2n\pi iu).$$

[1] 'de seri ile tanımlanan $\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(0,\tau)$ fonksiyonu bir $\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)$'nun alternatif bir formülüdür. Bu makalede, $\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u,\tau)$. ve $\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u,\tau)$ formülleri kullanılmıştır. İlk başta sonsuz çarpımları görüyoruz.

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u,\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{2n\pi i\tau}).\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mathrm{e}^{(2n-1)\pi i\tau+2\pi iu}).\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mathrm{e}^{(2n-1)\pi i\tau-2\pi iu}).$$

Mutlak yakınsaktır.[2].

4.4. TEOREM

(i) $\eta(u)=e^{\frac{\pi iu}{12}}.\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\frac{u+6}{4},\tau)$.

(ii) $\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{u+6}{4},\tau\right)=e^{-\frac{\pi iu}{12}}\eta(u).\prod_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{(2n-1)\pi iu})$, $\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u,\tau),\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u,\tau)$ ve sonsuz çarpım tarafından tanımlanan Dedekind'ın η fonksiyonu kullanılarak elde edilir.

$$\eta(u)=e^{\frac{\pi iu}{12}}.\prod_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{2n\pi iu})$$

burada Imτ> 0 ve k bir tamsayıdır [6].

İspat:

i) $\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u,\tau)$=$\prod_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{2n\pi i\tau}).\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mathrm{e}^{(2n-1)\pi i\tau+2\pi iu}).\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mathrm{e}^{(2n-1)\pi i\tau-2\pi iu})$

formülünü kullanırsak eğer k tamsayı ise ;

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(3u+2k,\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{2n\pi i(3u+3k)}).\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mathrm{e}^{(2n-1)\pi i(3u+2k)+2\pi i\tau}).\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mathrm{e}^{(2n-1)\pi i-(3u+2k)-2\pi i\tau})$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{6n\pi iu}).\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mathrm{e}^{6n\pi iu-2\pi iu-(2k-1)\pi i}).\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mathrm{e}^{6n\pi iu-4\pi iu-(2k+1)\pi i})$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{6n\pi iu}).\prod_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{6n\pi iu-2\pi iu}).\prod_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{6n\pi iu-4\pi iu}).$$

Eğer G=e$^{2\pi iu}$ ile tanımlanırsa ,

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(3u+2k,\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-G^{3n}).\prod_{n=1}^{\infty}(1-G^{3n-1}).\prod_{n=1}^{\infty}(1-G^{3n-2}).$$

Öte yandan, n=m + 1 için

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(3u+2k,\tau)=\prod_{n'=1}^{\infty}(1-G^{3m+3}).\prod_{n'=1}^{\infty}(1-G^{3m+2}).\prod_{n'=1}^{\infty}(1-G^{3m+1}).$$

$$=(1-G)(1-G^2)(1-G^3)(1-G^4)=...$$

$$=\prod_{m=1}^{\infty}(1-G^m)=\prod_{m=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{2m\pi iu}).$$

Yukarıdaki denklemlere göre

$\eta(u) = e^{\frac{\pi i u}{12}}.\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(3u + 2k, \tau)$ elde edilir.

Dedekind'in sonsuz çarpım tarafından tanımlanan $\eta -$ fonksiyonu kullanılır.

$$\eta(u) = e^{\frac{\pi i u}{12}}.\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2n\pi i u})$$

(ii) Denkleme göre

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}\exp\,(n^2\pi i\tau + 2n\pi i u).$$

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{u+6}{4}, \tau\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}\exp\left[\frac{1}{2}n(3n+1)\pi i u\right]$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left\{\exp\left[\frac{1}{2}n(3n-1)\pi i u\right] + \exp\left[\frac{1}{2}n(3n+1)\pi i u\right]\right\}$$

$\frac{1}{2}n(3n+1)$ ise pentagonal sayılardır ve n negatif tam sayılardır [4]. Bu sonuçlar, θ fonksiyonu ve Dedekind'in η-fonksiyonu arasındaki ilişki ile ilgili ilerideki çalışmalarda kilit bir taş rolü oynar. 4.4.Teorem'den (i) ve (ii) eşitlikleri Dedekind'ın η fonksiyonu ve pentagonal sayılar ile ilgili olan L-Euler teoremi arasındaki bir ilişki olarak bilinir.

$$\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{u+6}{4}, \tau\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{(2n-1)\pi i u})} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}\exp\frac{1}{2}n(3n+1)\pi i u}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{(2n-1)\pi i u})}$$

$$= \frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{n\pi i u})}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{(2n-1)\pi i u})} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2n\pi i u}) = e^{-\frac{\pi i u}{12}}\,\eta(u).$$

Sonuç olarak, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ karakteristiği ve $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ karakteristiği ile $\frac{u+6}{4}$ değişkeni ve [u] tarafından daha önce kullanılmış olan $\frac{u+4}{4}$ değişkeni ile θ ve Dedekınd'ın $\eta(u)$ fonksiyonları arasındaki ilişki elde edildi.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Theta ve Dedekind Eta fonksiyonları arasında 1/8 kez periyod ve değişkenin uygun bir değeri kullanılarak yeni bir korelasyon kurulmuştur.

6. KAYNAKLAR

[1] Gregory L. Wilson, A family of modular functions Arising from the theta function London Math. Soc. c.3, ss.55, 1987, London.

[2] Harry E.Rauch, Elliptic Functions, Theta Functions, and Riemann surfaces, The Library of Congress catalog card number 74- 88141, SBN 683-07187-4, 1973, Baltimore, USA.

[3] Komaravolu, C., Elliptic functions, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, ISBN 0-387-15295-4,1985, Germany.

[4] Yıldız.˙I., Uyanık. N., "*On The Elliptic Function Arising From the Theta Functions and Dedekind's -function*" Journal of Math. and Stat.c.1, sayı 2, ss.153-159(2005).

[5] Yildiz, I., On extension of the modular transformations over the modular group by reflection" journal of applied mathematics and computation. c.153, ss. 111-116, 2004.

[6] Tom M. Apostol, Modular functions and dirichled series in number theory, California institute of technology, January, 1976.

[7] S. Owa, and J. Nishiwaki, "*Coefficient estimates for certain classes of analytic functions,*" Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, c. 29, sayı 5, ss. 285-290, 2002.

[8] Ö. Sarıoğlu, "*Univalent fonksiyonlar,*" Yüksek lisans tezi, Matematik Anabilim Dalı, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye, 2001.

[9] S. D. Bernard, "*Convexand starlike univalent functions,*" Transactions of the American Mathematical Society, c. 135, ss. 429-446, 1969.

[10] M. Sat, "*Ters univalent fonksiyonların katsayıları,*" Yüksek lisans tezi, Matematik Anabilim Dalı, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye, 2007.

[11] Brand. (2018, March 24). Tek ve çift fonksiyonlar, Yüksek Matematik, (M. Can, Çev.), 2018, ss. 191. [Online]. Erişim:http://www.ozelgeometri.com/FileUpload/ks120250/File/teorem_ispatlari.pdf

[12] L. Branges, "*A proof of the Bieberbach conjecture*," Acta Mathematica, c. 154, no. 1-2, ss. 137-152, 1985.

[13] P. Zengin, "*Weierstrass Pe-Eliptik fonksiyonun n. mertebeden türevleri ile Zeta-yarı Eliptik Fonksiyonu arasındaki bağıntılar*," Yüksek lisans tezi, Matematik Anabilim Dalı, Düzce Üniversitesi, Düzce, Türkiye, 2012.

[14] A. Dönmez, Karmaşık fonksiyonlar kuramı, 1. basım, İstanbul, Türkiye: Beta Basım Yayın Dağıtım, 1999.

[15] M. Kamalı ve E. Kadıoğlu, Genel Matematik, 3. baskı, Erzurum, Türkiye: Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, 1998, ss. 400–420.

[16] Duren, L.,P., 1983, Univalent Functions., Siipringer-Verlag, New York.

[17] M. Cihangiroğlu,'*Univalent Fonksiyonlar*',Yüksek lisans tezi, Matematik Anabilim dalı, Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale, Türkiye, 2010.

[18] R. N. Pederson, "*On unitary properties of Grunsky's matrix*," Archive for Rational Mechanics and Analysis, c. 29, ss. 370-377, 1968.

[19] R. Pederson and M. Schiffer, "*A Proof of the Bieberbach Conjecture for the Fifth Coefficient*," Archive Rational mechanical analysis, c. 45, ss. 161-193, 1972.

[20] J. Korevaar, "*Ludwig Bieberbach's conjecture and its proof by Louis de Branges*," The American Mathematical Monthly, c. 93, ss. 505-514, 1986.

[21] L. Branges, "*A proof of the Bieberbach conjecture*," Acta Mathematica, c. 154, sayı 1-2, ss. 137-152, 1985.

[22] J. M. F. O'Farrill. (2018, March 24). Complex analysis. [Online]. Available:http://www.maths.ed.ac.uk/~jmf/Teaching/MT3/ComplexAnalysis.Pdf

[23] S. D. Bernard, "*Convexand starlike univalent functions*," Transactions of the American Mathematical Society, c. 135, ss. 429-446, 1969.

[24] T. Başkan, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, 7. baskı, Bursa, Türkiye: Dora Basım Yayın, 2012.

[25] L. Brand. (2018, March 24). Tek ve çift fonksiyonlar, Yüksek Matematik, (M. Can, Çev.), 2018, ss. 191.

[26] A. Dönmez, Karmaşık fonksiyonlar kuramı, 1. basım, İstanbul, Türkiye: Beta Basım Yayın Dağıtım,1999.

[27] M. Ozawa, "*On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient*," Kodai mathematical Seminer Reports, Japan, Rap. 21, 1969.

[28] R. Garabedian and M. Schiffer, "*A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*," Journal Rational mechanical analysis, c. 4, ss. 427-465, 1955

[29] L. Bieberbach, Über die Koeffizienten Derjenigen Potenzreihen, Welcheeineschlichte Abbildungdes Einheitskreises vermitteln, 1.st, Berlin, Germany: Sitzungsber, Preuss Akademia der Wissenschaften, 1916.

[30] P. L. Duren, "*Coefficients of univalent functions*," American Mathematıcal Society, c. 83, sayı 5, ss. 891-906, 1977.

[31] H. E. Özkan, Kompleks Analiz 1 İstanbul Kültür Üniversitesi Uzaktan Öğretim Desteği UDES, Ders Notları, İstanbul.

[32] M. Obradović and S. Owa, "*On certain properties for some classes of Starlike functions*," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 145, no. 2, pp. 357-364, 1990. M. Obradović and S. Owa, *"On certain properties for some classes of Starlike functions*," Journal of Mathematical Analysis and Applications, c. 145, sayı 2, ss. 357-364, 1990.

[33] Z. Nehari, Conformal Mapping, 1.st, New York, USA: McGraw HillBook Co, 1952.

[34] J. W. Brown and R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, 8th ed., Michigan, USA: Tata McGraw – Hill Education, 2009, ss. 63-69, 190-199.

[35] R. Ocak, Kompleks Analiz, Erzurum, Türkiye: Atatürk Üniversitesi Yayınları, 1993, ss. 43-99.

[36] P. L. Duren, Univalent Functions, 2.nd ed., New York, USA: Sipringer-Verlag, 1983.

[37] H.Şahin, "*Univalent fonksiyonların Elementer Teorisi*" Yüksek lisans tezi, Matematik Anabilim Dalı, Düzce Üniversitesi, Düzce, Türkiye, 2018.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Pınar KAHRAMAN
Doğum Tarihi ve Yeri	: 01.01.1991 Eminönü
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: pinarkahraman4490@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2019
Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2014
Lise	Sayısal	Mehmet Niyazi Altuğ Anadolu Lisesi	2009