



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ**

EBRU PEHLİVAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. HÜSEYİN BUDAK**

DÜZCE, 2020

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ

Ebru PEHLİVAN tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 20/08/2020

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

20/08/2020

Ebru PEHLİVAN

TEŐEKKÜR

Beni yüksek lisans eğitimim boyunca çalıŐmalarına dahil edip desteğini esirgemeyen , bilgisinden esirgemeyip bana her tÜrlÜ yardımı gösteren ve kendisine daha nice övgÜleri sunabileceğim değerli hocam Doç. Dr. Hüseyin BUDAK'a en derinden saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalıŐmalarım boyunca ingilizce çevirmelerinde bana yardımcı olan ablam Elif PEHLİVAN, kendisi okuyamayıp benim okumamda yardımcı olan ve her zaman desteğini arkamda hissetiğim babam etin PEHLİVAN,yüksek lisansım boyunca yeri geldiğinde bilgisayarımı taşıyan kardeŐim Emel PEHLİVAN, her yanlış yaptığımda sen yaparsın kızım diyen annem Yasemin PEHLİVAN ve beni bu yola teşvik eden hayatıma girdiği andan itibaren desteğini hiç esirgemeyen Yiđitcan TUNA'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam boyunca her konuŐmamızda manevi desteklerini esirgemeyen ve her defasında beni teşvik eden arkadaşlarım Berrin SARKIN,Öznur ADAK ve Rabia KORKMAZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

20/08/2020

Ebru PEHLİVAN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SİMGELER	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KAVRAMLAR	5
2.1. TEMEL TANIMLAR.....	5
2.2. BAZI TEMEL EŞİTSİZLİKLER.....	7
2.3. KESİRLİ İNTEGRALLER	9
2.4. BAZI ÖNEMLİ TEOREM VE LEMMALAR.....	13
3. AĞIRLIKLİ KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ	19
3.1. AĞIRLIKLİ KESİRLİ YAMUK TIPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ.....	19
3.2. AĞIRLIKLİ KESİRLİ OSTROWSKİ VE ORTA NOKTA TIPLİ EŞİTSİZLİKLER.....	31
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLİ KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ	44
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	61
6. KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ	67

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1. Konveks fonksiyon şekli.....	3



SİMGELER

\mathbb{C}	Kompleks Sayı
f'	f fonksiyonunun 1. Dereceden Türevi
I	\mathbb{R} 'de Herhangi Bir Aralık
I°	I aralığının içi
$J_{a+}^\alpha f$	α . mertebeden Sol Kesirli İntegral
$J_{b-}^\alpha f$	α . mertebeden Sağ Kesirli İntegral
$L_1[a, b]$	1. Dereceden (a,b) Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
\mathbb{R}	Reel Sayılar
\mathbb{R}^n	n-boyutlu Öklid Uzayı
Γ	Gamma Fonksiyonu

ÖZET

KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Ebru PEHLİVAN

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin BUDAK

Ağustos 2020 , 66 sayfa

Bu tez çalışması konveks fonksiyonlar yardımıyla elde edilen kesirli Hermite-Hadamard-Fejer ve kesirli Ostrowski tipli eşitsizlikler üzerinedir. Beş bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın birinci bölümü giriş niteliğinde olup ikinci bölümde tezin hazırlanmasında kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca kesirli integrallerle ilgili tanımlar ve kesirli integraller için elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ikinci bölümde verilmiştir. Üçüncü bölümde Riemann-Liouville kesirli integralleri için sırasıyla ağırlıklı Yamuk tipli ve Ostrowski tipli integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise bir önceki bölümde verilen eşitsizlikleride genelleştiren bazı ağırlıklı kesirli integral eşitsizlikleri ispatlanmıştır. Tezin son kısmı olan beşinci bölümde ise bazı sonuçlar ve sonraki çalışmalar için öneriler verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Ostrowski eşitsizliği, Riemann-Liouville kesirli integrali.

ABSTRACT

FRACTIONAL INTEGRAL INEQUALITIES FOR CONVEX FUNCTIONS

Ebru PEHLIVAN

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Hüseyin BUDAK

August 2020, 66 pages

This thesis is on fractional Hermite-Hadamard-Fejer and fractional Ostrowski-type inequalities obtained by the help of convex functions. The first part of this work, which is prepared as five sections, is an introduction and in the second part some definitions and theorems used in the preparation of the thesis are given. In addition, the definitions related to fractional integrals and the Hermite-Hadamard type inequalities obtained for fractional integrals are given in the second section. The weighted trapezoid-type and Ostrowski-type integral inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals are obtained in the third section. In the fourth section, some weighted fractional integral inequalities are proven which generalize the inequalities given in the previous section. In the fifth section, the final part of the thesis, some conclusions and suggestions for subsequent studies are given.

Keywords: Hermite Hadamard inequality, Ostrowski inequality, Riemann-Liouville fractional integral.

1. GİRİŞ

Kesirli türev ve integralin tarihi dört yüzyıllık olup 17. yüzyıla dayanmaktadır. Kesirli türev ve integral 1695 yılında L'Hospital'in, Leibniz'e gönderdiği bir mektupta bu konudan söz etmesiyle ortaya atılmıştır. Fakat kesirli türev ve integral tanımları ilk olarak Liouville tarafından yorumlanmıştır. Bu konu yüz yıldan fazla süredir Riemann, Wely, Fourier, Laplace, Langrange, Euler, Abel, Grünwald ve Letnikov gibi ünlü bir çok matematikçinin de üzerinde çalıştığı bir konu olmuştur. Bu konunun bir avantajı ise başka bir çok alanda ve konuda kullanılıyor olmasıdır. Bu konulardan bazıları şöyle sıralanabilir: akışkanlar teorisi, sıvıların kimyasal analizleri, ısı transferi, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya, difüzyon, akışkanlar mekaniği, kuantum mekaniği gibi.

1923 yılında Abel, ilk kesirli integral operatörünü kullanmış ve bu operatörleri Tautochurone Problemi olarak adlandırılan integral denkleminin çözümünü hesaplamada kullanmıştır.

Abel'in tekil integral denklemleri ise sırasıyla

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt \quad (1.1)$$

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{(x-t)}} dt \quad (1.2)$$

şeklindedir. Abel integral denkleminde $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (1.3)$$

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (1.4)$$

şeklinde tanımların. Bu denklemler ise kesirli integral denklemi olarak kullanılır.

Eşitsizlik kavramı köklü bir tarihe sahip olup, 19. yüzyıldan beri bütün alanlarda kullanılmıştır. "Inequalities" adlı kitap bu alanda yapılan ilk çalışmadır. Eşitsizlik kavramı matematiğin yanında fizik, mühendislik gibi diğer alanlarda da kullanılmaktadır. Beckenbach ve Belman, Mitronovic, Pecaric ve arkadaşları gibi araştırmacılar bu alanda yeni kitaplar yazmıştır ([1], [2], [3], [4], [5]).

Aslında eşitsizlikler matematiğin bir çok dalında çeşitli problemleri incelemek için kullanılmıştır ve sürekli bir gelişme halindedir. Bu alandaki gelişim ve büyüme matematiksel analizin bağımsız bir alanı olarak ortaya çıkmasına sebep olmuştur.

Diğer yandan konveks fonksiyon kavramı, konveks kümenin önemli bir parçasıdır. Aynı zamanda konveks kümenin epigrafisidir. Konveks fonksiyon kavramı 19. yüzyıla dayanmaktadır. Konveks fonksiyonun tanımı aynı zamanda bir eşitsizlik anlamına da gelir. Eşitsizlik kavramından bahsedilince aslında matematiğin tüm alanlarına değinilmiş olunur. Bu yüzden eşitsizliklerin çoğu konveks fonksiyon yardımıyla elde edilmiştir. Hermite tarafından 1883 yılında elde edilen eşitsizlik 10 yıl sonra Hadamard tarafından yeniden ele alınan eşitsizlik ise bu eşitsizliklerden bir tanesidir. Bu eşitsizlik Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir.

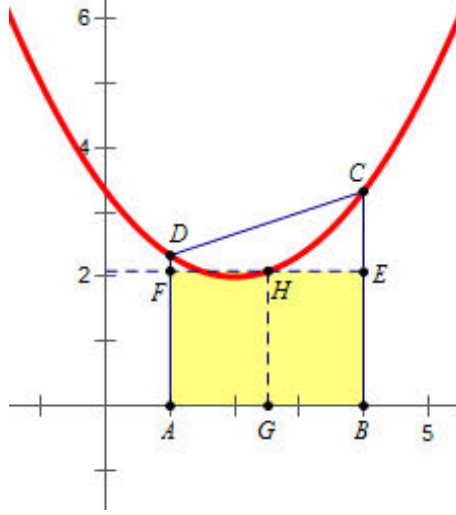
Hermite-Hadamard eşitsizliğinin literatürdeki ifadesine bakıldığında ise konveks fonksiyon olduğu görülebilir. Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genel olarak bilinen ifadesi ise aşağıdaki şekilde verilebilir.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (1.5)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı için bir geometrik yorum yapılabilir.

Alan eşitsizliği yorumu verebilmek için $f(x) \geq 0$ olacak biçimde fonksiyonun grafiği çizilsin. $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(b,f(b))$, $D(a,f(a))$ noktaları olsun. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon olduğundan $[CD]$ kirişi $y = f(x)$ eğrisinin üstünde kalır. Dolayısıyla $ABCD$ yamuğunun alanı, $[a,b]$ aralığındaki eğrinin altında kalan alandan daha büyüktür.



Şekil 1.1. Konveks fonksiyon şekli.

$|AD| = f(a)$, $|BC| = f(b)$, $|AB| = b - a$ olduğundan

$$\int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (1.6)$$

dir.

[6]'da Dragomir ve Agarwal Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı olan

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (1.7)$$

farkı için, [7]'de Kırmacı Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı olan

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (1.8)$$

farkı için (sırasıyla Yamuk tipli ve Orta-Nokta tipli) üst sınırlar elde etmişlerdir. Daha sonra bu eşitsizlikler üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları ([8], [9], [10], [11], [12], [6], [7], [4], [5], [13], [14], [15], [16], [17]) biçiminde verilebilir.

Eşitsizlik alanında yıllardır çalışılan ve dikkate değer bir gelişme gösteren eşitsizliklerden birisi ise Ostrowski Eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik adını ise eşitsizliği bulan A.M Ostrowski'den almaktadır. Ostrowski 1938 yılında integral ortalamasının ayırt edilebilir işlevinin

mutlak sapması ile ilgili eşitsizliği ispatlamıştır. Ostrowski eşitsizliğinin literatürde genel olarak bilinen ifadesi ise aşağıdaki gibidir:

$I \subset \mathbb{R}$ bir aralık I , I aralığının içi olmak üzere $a, b \in I^\circ$ (a, b) ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ I° da türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall t \in [a, b]$ için $|f'(t)| \leq M$ ise, bu durumda $\forall x \in [a, b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left[\frac{1}{4} - \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2} \right] (b-a)M \quad (1.9)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitsizliğin sağ tarafındaki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır. (1.9) eşitsizliği $x \in [a, b]$ noktasındaki $f(x)$ değeri ile

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \quad (1.10)$$

integral ortalaması arasındaki yaklaşım için bir üst sınır vermektedir.

Ostrowski eşitsizlikleri üzerine çok sayıda, sürekli ve ayrık durumlarda genellemeler yapılmıştır. Ayrıca vektör değerli fonksiyon, çok katlı integraller, n kez türevlenebilir fonksiyon ve zaman sıklasında daha genel versiyonları çalışılmıştır.

2. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılacak temel tanım ve teoremler sunulacaktır. Ayrıca teze ışık tutan literatürde var olan bazı eşitsizlikler ispatsız olarak verilecektir.

2.1. TEMEL TANIMLAR

Bu alt bölümde, temel tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1 (Gama Fonksiyonu). $n > 0$ için

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (2.1)$$

ile tanımlanan fonksiyona Gama Fonksiyonu denir. Bu integral $x > 0$ için yakınsaktır. Gama fonksiyonunun bazı özellikleri şu şekilde sıralanabilir.

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

iii. $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, 0 < p < 1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$

Tanım 2.2 (Gamma-k Fonksiyonu). $k > 0, m \in C$

$$\Gamma_k(m) = \int_0^{\infty} u^{m-1} e^{-\frac{u^k}{k}} du, \quad \operatorname{Re}(m) > 0 \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilen $\Gamma_k(m)$ gösterimine gamma-k fonksiyonu denir. Ayrıca burada

$$\Gamma_k(m) = (k)^{\frac{m}{k}-1} \Gamma\left(\frac{m}{k}\right) \quad (2.3)$$

olduğu açıktır.

Tanım 2.3 (Konvekslik). $f : I \subseteq \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad (2.4)$$

eşitliğini sağlıyorsa bu foksiyona konveks fonksiyon denir. Eşitsizlikte " \geq " olması halinde de f fonksiyonuna konkav denir.

Konveks Fonksiyonların Temel Özellikleri

i. k tane fonksiyon $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. Bu taktirde

$$f(x) = \sum_{j=1}^k a_j f_j(x), a_j > 0; j = 1, 2, 3, 4, \dots, k \quad (2.5)$$

fonksiyonuda konvekstir.

ii. $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konkav ve $S = \{x : g(x) > 0\}$ olsun. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ olmak üzere f, S' de konvekstir.

iii. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan ve konveks fonksiyon ve ayrıca $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks olsun. Bu taktirde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = (g \circ h)(x)$ olarak tanımlanan f bileşke konveksiyonuda konvekstir.

iv. $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ konveks ve $h, h(x) = Ax + B$ formunda $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks olmak üzere. (Burada A uygun matristir.)

$$f(x) = g(h(x)) \quad (2.6)$$

fonksiyonu konveks fonksiyondur.

Tanım 2.4 (Sınırlı Fonksiyon). $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ tanımlanmış olsun. Her $x \in [a, b]$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlıdır denir.

Tanım 2.5 (Mutlak Süreklilik). $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ verildiğinde $[a, b]$ aralığındaki sonlu sayıdaki her

$[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ ayrık alt aralıkları için

$$\sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon \quad (2.7)$$

olacak biçimde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa bu durumda f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.6 (İntegraller için Ortalama Değer Teoremi). $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (2.8)$$

olacak şekilde en az bir $c \in [a, b]$ vardır [18].

2.2. BAZI TEMEL EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde tezin ana kısmında kullanılacak bazı temel eşitsizlikler tanım olarak verilecektir.

Tanım 2.7 (Cauchy Schwartz Eşitsizliği). $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen fonksiyonları ve λ sabiti için

$$\int_a^t f(x) dx = \lambda \int_a^t g(x) dx, t \in [a, b] \quad (2.9)$$

ilişkisi mevcut ise

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 = \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx \right) \left(\int_a^b [g(x)]^2 dx \right) \quad (2.10)$$

eşitsizliği sağlanır ve bu eşitsizliğe **Cauchy Schwartz Eşitsizliği** denir ([19]).

Tanım 2.8 (Dirichlet Formülü). $f(x, y)$ fonksiyonu $-\infty < a < b < \infty, -\infty < c < d < \infty$ aralıkları üstünde ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x, y) dx \right) dy \quad (2.11)$$

eşitliğine **Dirichlet Formülü** denir [19].

Tanım 2.9 (Hölder Eşitsizliği). $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n -lisi olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (2.12)$$

olmak üzere,

a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.13)$$

b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.14)$$

eşitsizlikleri geçerlidir [2].

Tanım 2.10 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği). $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f \in L^p[a, b]$ ve $g \in L^q[a, b]$ olsun. $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\int_a^b |f(x)| |g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.15)$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir.

Tanım 2.11 (Üçgen Eşitsizliği). Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad (2.16)$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \quad (2.17)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Tanım 2.12 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu). $f, [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, \quad (a < b) \quad (2.18)$$

eşitsizliği geçerlidir.

2.3. KESİRLİ İNTEGRALLER

Bu alt bölümde ilk olarak Riemann-Liouville kesirli integral tanımının elde edilişi verilecek, daha sonra literatürdeki bazı kesirli integral tanımları sunulacaktır.

Riemann-Liouville kesirli integral operatörünü elde etmek için ilk olarak n-katlı

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 \quad (2.19)$$

integralini ele alalım. Bu integralde integrasyon sırasını ve buna bağlı sınırları değiştirelim. Bunun için

$$a < \sigma_1 < x \quad \sigma_2 < \sigma_1 < x \quad (2.20)$$

$$a < \sigma_1 < \sigma_2 \quad \sigma_2 < \sigma_1 < x$$

, ..., , ...

$$a < \sigma_{n-1} < \sigma_{n-2} \quad \sigma_n < \sigma_{n-1} < x$$

$$a < \sigma_n < \sigma_{n-1} \quad a < \sigma_n < x$$

sınırlı değişimleri altında (2.19) ifadesi

$$\begin{aligned} & \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &= \int_a^x f(\sigma_n) \left(\int_{\sigma_n}^x \left(\int_{\sigma_{n-1}}^x \dots \int_{\sigma_3}^x \left(\int_{\sigma_2}^x d\sigma_1 \right) d\sigma_2 \dots \right) d\sigma_{n-1} \right) d\sigma_n \end{aligned} \quad (2.21)$$

şeklinde yazılır (2.21) ifadesinin sağ tarafı terim terim hesaplanırsa,

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\sigma_n) (x - \sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \quad (2.22)$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ oluşu kullanılırsa,

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(\sigma_n) (x - \sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \quad (2.23)$$

yazılır. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki n pozitif bir tamsayıdır. Gamma fonksiyonu tam sayılar dışında da ifade edilebildiğinden, n nin tamsayı olmaması durumunda (2.23) eşitsizliğinin sağ yanı için aşağıdaki kesirli Riemann-Liouville integral operatörünün tanımı verilebilir

Tanım 2.13 (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali). $f(x) \in L_1 [a, b]$ olsun. Bu durumda

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, a < x \quad (2.24)$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, x < b \quad (2.25)$$

integrallerine $\alpha > 0$ için α . mertebeden **Riemann-Liouville kesirli integralleri** denir.

Burada $J_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x)$ ve $J_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x)$ dir [20].

Tanım 2.14 (ρ -Riemann-Liouville Kesirli İntegrali). $f \in L_1 [a, b]$ olmak üzere

$$I_{\rho}^{\alpha} f(x) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{\alpha-1} \tau^{\rho} f(\tau) d(\tau), x > a, \rho > -1 \quad (2.26)$$

$$I_{\rho}^{\alpha} f(x) = \frac{(\rho + 1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\tau^{\rho+1} - x^{\rho+1})^{\alpha-1} \tau^{\rho} f(\tau) d(\tau), b > x, \rho > -1 \quad (2.27)$$

şeklinde tanımlanan eşitliklere $\alpha > 0$ için α . mertebeden sırasıyla sağ ve sol taraflı genelleştirilmiş ρ -Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri denir [21].

Tanım 2.15 (h-Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri). $f \in L[a, b]$ $h(x)$ de $[a, \infty)$ aralığı üzerinde azalmayan pozitif monoton ve aynı zamanda $h'(x)$ de (a, ∞) aralığı üzerinde sürekli olsun. Bu durumda olmak üzere $h(x)$ fonksiyonuna göre bir $f(x)$ fonksiyonunun h sol ve sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri

$$(I_{a+;h}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)h'(t)}{(h(x) - h(t))^{1-\alpha}} dt, (x > a, \alpha > 0) \quad (2.28)$$

$$(I_{b-;h}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)h'(t)}{(h(t) - h(x))^{1-\alpha}} dt, (b > x, \alpha > 0) \quad (2.29)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$(I_{a+;h}^0 f)(x) = (I_{b-;h}^0 f)(x) = f(x) \quad (2.30)$$

eşitlikleri vardır [22]. Burada $h(x) = x$ seçilirse klasik Riemann-Liouville Kesirli İntegral formülleri ve $h(x) = \frac{x^{\rho+1}}{\rho+1}$ seçilirse de ρ -Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri elde edilir.

Tanım 2.16 (h, k-Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri). $f \in L[a, b]$ ve $h(x)$, $[a, \infty)$ aralığı üzerinde azalmayan pozitif monoton ve aynı zamanda $h'(x)$ de (a, ∞) aralığı üzerinde sürekli olsun. Bu durumda $k > 0$ olmak üzere $h(x)$ fonksiyonuna göre bir $f(x)$ fonksiyonunun h, k sol ve sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri

$$({}^k I_{a+;h}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)h'(t)}{(h(x) - h(t))^{1-\frac{\alpha}{k}}} dt, (x > a, \alpha > 0) \quad (2.31)$$

$$({}^k I_{b-;h}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)h'(t)}{(h(t) - h(x))^{1-\frac{\alpha}{k}}} dt, (b > x, \alpha > 0) \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$({}^k I_{a+;h}^0 f)(x) = ({}^k I_{b-;h}^0 f)(x) = f(x) \quad (2.33)$$

eşitlikleri vardır [23]. Burada $k = 1$ ve $h(x) = x$ seçilirse klasik kesirli integral formülleri, $k = 1$ ve $h(x) = \frac{x^{\rho+1}}{\rho+1}$ seçilirse de ρ -Rieman Liouville Kesirli İntegralleri ve $k = 1$ seçilirse **h**-Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri elde edilir.

Tanım 2.17 (Wely Kesirli İntegrali). Wely'in kesirli integral tanımları ileriye doğru integrasyon ve geriye doğru integrasyon olmak üzere sırasıyla

$$\begin{aligned} {}_xW_{\infty}^{\alpha} [f(x)] &= ({}_xI_{\infty}^{\alpha}) f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (\xi - x)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.34)$$

ve

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}W_x^{\alpha} [f(x)] &= ({}_{-\infty}I_x^{\alpha}) f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.35)$$

şeklinde tanımlanır [24].

Tanım 2.18 (Chen Kesirli İntegrali). Chen'in kesirli integral tanımı sol taraflı integral ve sağ taraflı integral olmak üzere sırasıyla

$$({}_cI^{\alpha}) f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (\xi - x)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \quad x > c \quad (2.36)$$

ve

$$({}_cI^{\alpha}) f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^c (x - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \quad x < c \quad (2.37)$$

şeklinde ifade edilmiştir [24].

Tanım 2.19 (Kober Kesirli İntegrali). Kober kesirli integrali tanımı ise sol taraflı kesirli inetegral

$$I_{1,\eta}^{\alpha} [f(x)] = \frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (\xi - x)^{\alpha-1} \xi^{\eta} f(\xi) d\xi \quad (2.38)$$

ve sağ taraflı kesirli integral

$$I_{1,\eta}^{\alpha} [f(x)] = \frac{x^{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (\xi - x)^{\alpha-1} \xi^{-\alpha-\eta} f(\xi) d\xi \quad (2.39)$$

olarak tanımlanır [24].

Tanım 2.20 (Erdelyi Kesirli İntegrali). Sırasıyla Erdelyi sol ve sağ kesirli integralleri

$$I_{\sigma,\eta}^{\alpha} [f(x)] = \frac{\sigma x^{\sigma(-\alpha-\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (\xi^{\sigma} - x^{\sigma})^{\alpha-1} \xi^{\sigma\eta+\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (2.40)$$

ve

$$I_{\sigma,\eta}^{\alpha} [f(x)] = \frac{\sigma x^{\sigma\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (\xi^{\sigma} - x^{\sigma})^{\alpha-1} \xi^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(\xi) d\xi \quad (2.41)$$

dir [24].

Tanım 2.21 (Hilfer k-kesirli İntegral). Hilfer k-kesirli integral ise

$$I_k^{\alpha} [f(x)] = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^x (x - \xi)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(\xi) d\xi \quad (2.42)$$

şeklindedir [24].

Kesirli integraller hakkında daha fazla bilgi için [20], [22], [25] nolu kitaplara bakılabilir.

2.4. BAZI ÖNEMLİ TEOREM VE LEMMALAR

Bu alt bölümde tezin yapılmasına ışık tutan bazı temel eşitlik ve eşitsizlikler sunulacaktır.

Teorem 2.22 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği). $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise $a, b \in I, (a \leq b)$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (2.43)$$

dir [26].

Teorem 2.23. $f : I^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde türevlenebilir, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(s) ds \right| \leq \frac{b-a}{8} \left[|f'(a)| + |f'(b)| \right] \quad (2.44)$$

eşitsizliği vardır [6].

Teorem 2.24 (Fejer Eşitsizliği). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir konveks fonksiyon ve $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu pozitif ve integrallenebilir olsun. Eğer g fonksiyonu $x = \frac{a+b}{2}$ için simetrik bir fonksiyon (yani $g(x) = g(a+b-x)$) ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b g(x) dx \quad (2.45)$$

eşitsizliği vardır [27].

Lemma 2.25. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ 'dir. $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ için simetrik olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) [J_{a+}^\alpha g(b) + J_{b-}^\alpha g(a)] - [J_{a+}^\alpha (fg)(b) + J_{b-}^\alpha (fg)(a)] \right| \quad (2.46) \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left[\int_a^t (b-s)^{\alpha-1} g(s) ds - \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s) ds \right] f'(t) dt \end{aligned}$$

$a > 0$ için kesirli integral eşitliği vardır.

Teorem 2.26 (Kesirli Hermite-Hadamard Eşitsizliği). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon $0 \leq a < b$ ve $f(x) \in L[a, b]$ olsun. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise $\alpha > 0$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.47)$$

eşitsizliği geçerlidir [28].

Teorem 2.27. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ 'dir. Burada $|f'|$ $[a, b]$ aralığında konveks ve $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ için simetrik olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{f(a)+f(b)}{2} [J_{a+}^{\alpha}g(b) + J_{b-}^{\alpha}g(a)] - [J_{a+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(a)] \quad (2.48) \\ &= \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{\infty}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha}}\right) [|f'(a)| + |f'(b)|] \end{aligned}$$

$a > 0$ için kesirli integral eşitliği mevcuttur [28].

Lemma 2.28. $f : I^{\circ} \subseteq \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, $a, b \in I^{\circ}$ için $a < b$ ve $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda eğer $f', g \in L[a, b]$ ise her $x \in [a, b]$ için

$$f(a) \int_a^x g(t)dt + f(b) \int_x^b g(t)dt - \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b \left(\int_x^t g(s)ds \right) f'(t)dt \quad (2.49)$$

eşitliği mevcuttur [29].

Teorem 2.29. f fonksiyonu Lemma (2.28)'deki gibi tanımlansın. Eğer $|f'|$ fonksiyonu konveks ve g fonksiyonu sürekli ise, bu durumda her $x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} & \left| f(a) \int_a^x g(t)dt + f(b) \int_x^b g(t)dt - \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \quad (2.50) \\ & \leq \left[(x-a)^2 \left(\frac{3b-2a-x}{6(b-a)} \|g\|_{[a,x],\infty} \right) + \frac{(b-x)^3}{6(b-a)} \|g\|_{[x,b],\infty} \right] |f'(a)| \\ & \quad + \left[\frac{(x-a)^3}{6(b-a)} \|g\|_{[a,x],\infty} + (b-x)^2 \left(\frac{2b-3a+x}{6(b-a)} \|g\|_{[x,b],\infty} \right) \right] |f'(b)| \\ & \leq \left[\left(\frac{(x-a)^2(3(b-x) + 2(x-a)) + (b-x)^3}{6(b-a)} \right) |f'(a)| \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{(x-a)^3 + (b-x)^2(2(b-x) + (x-a))}{6(b-a)} \right) |f'(b)| \right] \|g\|_{\infty} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [29].

Lemma 2.30. $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir ve $a < b$ için $(a+b)/2$ 'ye göre simetrik ise, bu durumda $\alpha > 0$ için

$$J_{a+}^{\alpha}g(b) = J_{b-}^{\alpha}g(a) = \frac{1}{2} [J_{a+}^{\alpha}g(b) + J_{b-}^{\alpha}g(a)] \quad (2.51)$$

eşitlikleri vardır [30].

Teorem 2.31 (Kesirli Fejer Eşitsizliği). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir konveks fonksiyon ve $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu pozitif ve integrallenebilir olsun. Eğer g fonksiyonu $x = \frac{a+b}{2}$ için simetrik bir fonksiyon (yani $g(x) = g(a+b-x)$) ise, bu durumda $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) [J_{a+}^{\alpha}g(b) + J_{b-}^{\alpha}g(a)] &\leq [J_{a+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(a)] \\ &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} [J_{a+}^{\alpha}g(b) + J_{b-}^{\alpha}g(a)] \end{aligned} \quad (2.52)$$

eşitsizliği vardır [30].

Kesirli Hermite-Hadamard ve Fejer tipli diğer çalışmalar için ([31], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [45], [46], [47]) nolu referanslara bakılabilir.

Teorem 2.32 (Ostrowski Eşitsizliği). $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° de diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in [a, b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ise

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| &\leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right] \\ &= M(b-a) \left[\frac{1}{4} - \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

eşitsizliği elde edilir [48]. Buradaki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez. Bu eşitsizlik literatürde $x \in [a, b]$ noktasında $f(x)$ değeri ile $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ integral ortalaması yaklaşımı için bir üst sınır veren Ostrowski integral eşitsizliği olarak bilinir.

Teorem 2.33. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ve $|f'(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$ ise, bu

durumda $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [J_{x+}^\alpha f(b) + J_{x-}^\alpha f(a)] \right| \quad (2.54) \\ & \leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right] \end{aligned}$$

kesirli integral eşitsizliği bulunur [49].

Birçok kesirli integral tipi için Ostrowski tipli eşitsizlik elde edilmiştir. Bunlardan bazıları için [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60]. nolu referanslara bakılabilir.

Lemma 2.34. $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, $a, b \in I^\circ$ için $a < b$ ve $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda eğer $f', g \in L[a, b]$ ise her $x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} & \int_a^b P_\lambda(x, t) f'(t) dt \quad (2.55) \\ & = (1-\lambda)f(x) \int_a^b g(s) ds + \lambda \left[f(a) \int_a^x g(s) ds + f(b) \int_x^b g(s) ds \right] - \int_a^b g(s) f(s) ds \end{aligned}$$

eşitliği vardır. Burada $\lambda \in [0, 1]$ için $P_\lambda(x, t)$ dönüşümü

$$P_\lambda(x, t) = \begin{cases} (1-\lambda) \int_a^t g(s) ds + \lambda \int_a^t g(s) ds & , a \leq t < x \\ (1-\lambda) \int_b^t g(s) ds + \lambda \int_x^t g(s) ds & , x \leq t \leq b \end{cases} \quad (2.56)$$

biçiminde tanımlıdır [61].

Teorem 2.35. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu takdirde her $x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)f(x) \int_a^b g(s) ds + \lambda \left[f(a) \int_a^x g(s) ds + f(b) \int_x^b g(s) ds \right] - \int_a^b g(s) f(s) ds \right| \\ & \leq \frac{\|g\|_{[a, x], \infty}}{6(b-a)} [(x-a)^2 [(1-\lambda)(3b-a-2x) + \lambda(3b-2a-x)] |f'(a)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (2 - \lambda)(x - a)^3 |f'(b)| + \frac{\|g\|_{[x,b],\infty}}{6(b-a)} [(2 - \lambda)(b - x)^3 |f'(a)| \\
& + (b - x)^2 [(1 - \lambda)(b - 3a + 2x) + \lambda(2b - 3a - x)] |f'(b)|] \\
\leq & \frac{\|g\|_{\infty}}{6(b-a)} \{ [(x - a)^2 [(1 - \lambda)(3b - a - 2x) + \lambda(3b - 2a - x)] \\
& + (2 - \lambda)(b - x)^3] |f'(a)| + [(b - x)^2 [(1 - \lambda)(b - 3a + 2x) + \lambda(2b - 3a - x)] \\
& + (2 - \lambda)(x - a)^3] |f'(b)| \}
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Burada $\lambda \in [0, 1]$ dir [61].

3. AĞIRLIKLIL KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde ağırlık fonksiyonu yardımıyla Riemann-Liouville kesirli integralleri için Yamuk, Ortanokta ve Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilecektir.

3.1. AĞIRLIKLIL KESİRLİ YAMUK TIPLI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu alt bölümde Riemann-Liouville kesirli integralleri için ağırlıklı Yamuk tipli eşitsizlikler ispatlanacaktır. Bunun için ilk olarak aşağıdaki lemmanın ispatına ihtiyaç vardır.

Lemma 3.1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) üzerinde türevlenebilir ve $a < b$ olsun. Eğer $f', g \in L[a, b]$, $x \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ için kesirli integralleri içeren

$$\begin{aligned} & f(a)J_{a+}^{\alpha}g(x) + f(b)J_{b-}^{\alpha}g(x) - [J_{a+}^{\alpha}(fg)(x) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(x)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^x \left(\int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_x^b \left(\int_x^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

eşitliği vardır.

İspat. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned} & \int_a^x \left(\int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \\ &= \left(\int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f(t) \Big|_a^x - \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) f(t) dt \\ &= \left(\int_a^x (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f(a) - \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) f(t) dt \\ &= \Gamma(\alpha) [f(a)J_{a+}^{\alpha}g(x) - J_{a+}^{\alpha}(fg)(x)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

eşiliği bulunur. Benzer şekilde

$$\int_x^b \left(\int_x^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt = \Gamma(\alpha) [f(b)J_{b-}^\alpha g(x) - J_{b-}^\alpha (fg)(x)] \quad (3.3)$$

elde edilir. (3.2) ve (3.3) eşitlikleri ile istenilen (3.1) eşitliğinin doğruluğu kolaylıkla görülür. \square

Sonuç 3.2. Eğer Lemma 3.1’de özel olarak $\alpha = 1$ alınırsa, (3.1) eşitliği (2.49) eşitliğine dönüşür.

Sonuç 3.3. Lemma 3.1’de g fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ ye simetrik ve $x = \frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa, (3.1) eşitliği

$$\begin{aligned} & \left[J_{a+}^\alpha g \left(\frac{a+b}{2} \right) + J_{b-}^\alpha g \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \frac{f(a)+f(b)}{2} \\ & - \left[J_{a+}^\alpha (fg) \left(\frac{a+b}{2} \right) + J_{b-}^\alpha (fg) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^t \left(\frac{a+b}{2} - s \right)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^t \left(s - \frac{a+b}{2} \right)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

eşitliğine dönüşür.

İspat. Lemma 3.1’de $x = \frac{a+b}{2}$ alınıp, g fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ için simetrikliği kullanılarak

$$\begin{aligned} J_{a+}^\alpha g \left(\frac{a+b}{2} \right) & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - s \right)^{\alpha-1} g(s) ds \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(u - \frac{a+b}{2} \right)^{\alpha-1} g(a+b-u) ds \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(u - \frac{a+b}{2} \right)^{\alpha-1} g(u) ds \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$= J_{b-}^{\alpha} g \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

eşitliği elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. \square

Sonuç 3.4. Lemma 3.1'in şartları altında

$$\begin{aligned} & f(a)J_{a+}^{\alpha} g(b) + f(b)J_{b-}^{\alpha} g(a) - [J_{a+}^{\alpha} (fg)(b) + J_{b-}^{\alpha} (fg)(a)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^b \left(\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_a^b \left(\int_b^t (b-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

eşitliği vardır.

İspat. (3.1) eşitliğinde sırasıyla $x = a$ ve $x = b$ yazılırsa

$$f(b)J_{b-}^{\alpha} g(a) - J_{b-}^{\alpha} (fg)(a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left(\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \quad (3.7)$$

ve

$$f(a)J_{a+}^{\alpha} g(b) - J_{a+}^{\alpha} (fg)(b) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left(\int_b^t (b-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \quad (3.8)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.7) ve (3.8) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa istenen eşitlik ispatlanmış olur. \square

Sonuç 3.5. Lemma 3.1'de her $t \in [a, b]$ için $g(t) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & (x-a)^{\alpha} f(a) + (b-x)^{\alpha} f(b) - \Gamma(\alpha+1) [J_{a+}^{\alpha} f(x) + J_{b-}^{\alpha} f(x)] \\ &= - \left[\int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t) dt + \int_x^b (t-x)^{\alpha} f'(t) dt \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi Lemma 3.1 yardımıyla aşağıdaki eşitsizlikler ispatlanacaktır.

Teorem 3.6. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise bu durumda her $x \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ için

$$|f(a)J_{a+}^{\alpha}g(x) + f(b)J_{b-}^{\alpha}g(x) - [J_{a+}^{\alpha}(fg)(x) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(x)]| \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{(b-a)\Gamma(\alpha+3)} \times \left\{ [(x-a)^{\alpha+1} [(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)] \|g\|_{[a,x],\infty} \right. \\ &\quad \left. + (b-x)^{\alpha+2} \|g\|_{[x,b],\infty}] |f'(a)| \right. \\ &\quad \left. + [(x-a)^{\alpha+2} \|g\|_{[a,x],\infty} \right. \\ &\quad \left. + (b-x)^{\alpha+1} [(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)] \|g\|_{[x,b],\infty}] |f'(b)| \right\} \\ &\leq \frac{\|g\|_{\infty}}{(b-a)\Gamma(\alpha+3)} \\ &\quad \times \left\{ \left[(x-a)^{\alpha+1} [(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)] + (b-x)^{\alpha+2} \right] |f'(a)| \right. \\ &\quad \left. + \left[(x-a)^{\alpha+2} + (b-x)^{\alpha+1} [(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)] \right] |f'(b)| \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

İspat. Lemma 3.1'de mutlak değer alınırsa

$$|f(a)J_{a+}^{\alpha}g(x) + f(b)J_{b-}^{\alpha}g(x) - [J_{a+}^{\alpha}(fg)(x) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(x)]| \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\left| \int_a^x \left(\int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_x^b \left(\int_x^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right| \right] \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^x \left| \int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \right. \\ &\quad \left. + \int_x^b \left| \int_x^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \right] \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\|g\|_{[a,x],\infty} \int_a^x \left| \int_x^t (x-s)^{\alpha-1} ds \right| |f'(t)| dt \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|g\|_{[x,b],\infty} \int_x^b \left| \int_x^t (s-x)^{\alpha-1} ds \right| |f'(t)| dt \Big] \\
= & \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\|g\|_{[a,x],\infty} \int_a^x (x-t)^\alpha |f'(t)| dt \right. \\
& \left. + \|g\|_{[x,b],\infty} \int_x^b (t-x)^\alpha |f'(t)| dt \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$|f'(t)| = \left| f' \left(\frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b \right) \right| \leq \frac{b-t}{b-a} |f'(a)| + \frac{t-a}{b-a} |f'(b)| \quad (3.12)$$

dir. (3.12) eşitliği (3.11) eşitsiliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& |f(a)J_{a+}^\alpha g(x) + f(b)J_{b-}^\alpha g(x) - [J_{a+}^\alpha (fg)(x) + J_{b-}^\alpha (fg)(x)]| \quad (3.13) \\
\leq & \frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{(b-a)\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^\alpha [(b-t)|f'(a)| + (t-a)|f'(b)|] dt \\
& + \frac{\|g\|_{[x,b],\infty}}{(b-a)\Gamma(\alpha+1)} \int_x^b (t-x)^\alpha [(b-t)|f'(a)| + (t-a)|f'(b)|] dt
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Basit hesaplamalar yaparak

$$\int_a^x (x-t)^\alpha (b-t) dt = \frac{(x-a)^{\alpha+1} [(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)]}{(\alpha+1)(\alpha+2)}, \quad (3.14)$$

$$\int_a^x (x-t)^\alpha (t-a) dt = \frac{(x-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}, \quad (3.15)$$

$$\int_x^b (t-x)^\alpha (b-t) dt = \frac{(b-x)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \quad (3.16)$$

ve

$$\int_x^b (t-x)^\alpha (t-a) dt = \frac{(b-x)^{\alpha+1} [(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)]}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \quad (3.17)$$

eşitliği olduğu görülür. (3.14)-(3.17) eşitlikleri (3.13) eşitsizliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
& \left| f(a)J_{a+}^{\alpha}g(x) + f(b)J_{b-}^{\alpha}g(x) - [J_{a+}^{\alpha}(fg)(x) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(x)] \right| \quad (3.18) \\
& \leq \frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{(b-a)\Gamma(\alpha+3)} \left[(x-a)^{\alpha+1} [(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)] |f'(a)| \right. \\
& \quad \left. + (x-a)^{\alpha+2} |f'(b)| \right] + \frac{\|g\|_{[x,b],\infty}}{(b-a)\Gamma(\alpha+3)} \left[(b-x)^{\alpha+2} |f'(a)| \right. \\
& \quad \left. + (b-x)^{\alpha+1} [(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)] |f'(b)| \right] \\
& = \frac{1}{(b-a)\Gamma(\alpha+3)} \left\{ [(x-a)^{\alpha+1} [(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)] \|g\|_{[a,x],\infty} \right. \\
& \quad \left. + (b-x)^{\alpha+2} \|g\|_{[x,b],\infty}] |f'(a)| \right. \\
& \quad \left. + [(x-a)^{\alpha+2} \|g\|_{[a,x],\infty} \right. \\
& \quad \left. + (b-x)^{\alpha+1} [(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)] \|g\|_{[x,b],\infty}] |f'(b)| \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu da (3.10) eşitsizliğindeki ilk eşitsizliğin ispatını tamamlar.

Her $x \in [a, b]$ için

$$\|g\|_{[a,x],\infty} \leq \|g\|_{[a,b],\infty} = \|g\|_{\infty} \text{ ve } \|g\|_{[x,b],\infty} \leq \|g\|_{[a,b],\infty} = \|g\|_{\infty} \quad (3.19)$$

eşitsizlikleri yardımıyla (3.10)'deki ikinci eşitsizliğin ispatı açıktır. \square

Sonuç 3.7. Theorem 3.6'da özel olarak $\alpha = 1$ alınırsa, (3.10) eşitsizliği Tseng ve ark. ([29]) tarafından ispatlanan (2.50) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.8. Theorem 3.6'da g fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ ye simetrik ve $x = \frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$\left[J_{a+}^{\alpha}g\left(\frac{a+b}{2}\right) + J_{b-}^{\alpha}g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
& - \left[J_{a+}^{\alpha} (fg) \left(\frac{a+b}{2} \right) + J_{b-}^{\alpha} (fg) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \Big| \\
& \leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+2} \Gamma(\alpha+3)} \times \left[\left((2\alpha+3) \|g\|_{[a,x],\infty} + \|g\|_{[x,b],\infty} \right) |f'(a)| \right. \\
& \quad \left. + \left(\|g\|_{[a,x],\infty} + (2\alpha+3) \|g\|_{[x,b],\infty} \right) |f'(b)| \right] \\
& \leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha} \Gamma(\alpha+2)} |f'(a)| + |f'(b)|_2
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

Sonuç 3.9. Theorem 3.6'nın şartları altında

$$\begin{aligned}
& |f(a)J_{a+}^{\alpha} g(b) + f(b)J_{b-}^{\alpha} g(a) - [J_{a+}^{\alpha} (fg)(b) + J_{b-}^{\alpha} (fg)(a)]| \quad (3.21) \\
& \leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha} \Gamma(\alpha+2)} [|f'(a)| + |f'(b)|]
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. (3.10) eşitsizliğinde sırasıyla $x = a$ ve $x = b$ yazılırsa

$$|f(b)J_{b-}^{\alpha} g(a) - J_{b-}^{\alpha} (fg)(a)| \leq \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+3)} [|f'(a)| + (\alpha+1)|f'(b)|] \quad (3.22)$$

ve

$$|f(a)J_{a+}^{\alpha} g(b) - J_{a+}^{\alpha} (fg)(b)| \leq \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+3)} [(\alpha+1)|f'(a)| + |f'(b)|] \quad (3.23)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.22) ve (3.23) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanır ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& |f(a)J_{a+}^{\alpha} g(b) + f(b)J_{b-}^{\alpha} g(a) - [J_{a+}^{\alpha} (fg)(b) + J_{b-}^{\alpha} (fg)(a)]| \quad (3.24) \\
& \leq \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+3)} [|f'(a)| + (\alpha+1)|f'(b)|]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+3)} [(\alpha+1)|f'(a)| + |f'(b)|] \\
& = \frac{\|g\|_{\infty} (b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha} \Gamma(\alpha+2)} [|f'(a)| + |f'(b)|]
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur ve ispat tamamlanmış olur. \square

Sonuç 3.10. Sonuç 3.9'de $\alpha = 1$ alınırsa Tseng ve ark. [29] verdiği

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq \frac{|f'(a)| + |f'(b)|}{8} \|g\|_{\infty} \quad (3.25)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.11. Teorem 3.6'de $t \in [a, b]$ için $g(t) = 1$ alınırsa, (3.10) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& |(x-a)^{\alpha} f(a) + (b-x)^{\alpha} f(b) - \Gamma(\alpha+1) [J_{a+}^{\alpha} f(x) + J_{b-}^{\alpha} f(x)]| \quad (3.26) \\
& \leq \frac{1}{(b-a)(\alpha+1)(\alpha+2)} \\
& \quad \times \left[\left((x-a)^{\alpha+1} [(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)] + (b-x)^{\alpha+2} \right) |f'(a)| \right. \\
& \quad \left. + \left((x-a)^{\alpha+2} + (b-x)^{\alpha+1} [(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)] \right) |f'(b)| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.12. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $|f'|, q > 1$ için $[a, b]$ aralığında konveks ise bu durumda $x \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& |f(a)J_{a+}^{\alpha} g(x) + f(b)J_{b-}^{\alpha} g(x) - [J_{a+}^{\alpha} (fg)(x) + J_{b-}^{\alpha} (fg)(x)]| \quad (3.27) \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\|g\|_{[a,x],\infty} (x-a)^{\alpha+\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \left. \times \left(\left(\frac{x-a}{b-a} \right) \left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|g\|_{[x,b],\infty} (b-x)^{\alpha+\frac{1}{p}} \\
& \times \left[\left(\frac{(b-x)^2}{2(b-a)} |f'(a)|^q + \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
\leq & \frac{\|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left[(x-a)^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{x-a}{b-a} \right) \left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + (b-x)^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\frac{(b-x)^2}{2(b-a)} |f'(a)|^q + \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat. Yukarıdaki (3.11) eşitsizliğinde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& |f(a)J_{a+}^{\alpha}g(x) + f(b)J_{b-}^{\alpha}g(x) - [J_{a+}^{\alpha}(fg)(x) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(x)]| \quad (3.28) \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\|g\|_{[a,x],\infty} \int_a^x (x-t)^{\alpha} |f'(t)| dt \right. \\
& \left. + \|g\|_{[x,b],\infty} \int_x^b (t-x)^{\alpha} |f'(t)| dt \right] \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\|g\|_{[a,x],\infty} \left(\int_a^x (x-t)^{p\alpha} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \|g\|_{[x,b],\infty} \left(\int_x^b (t-x)^{p\alpha} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
= & \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\|g\|_{[a,x],\infty} \frac{(x-a)^{\alpha+\frac{1}{p}}}{(p\alpha+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \|g\|_{[x,b],\infty} \frac{(b-x)^{\alpha+\frac{1}{p}}}{(p\alpha+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_x^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Burada $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks olduğundan

$$|f'(t)|^q = \left| f' \left(\frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b \right) \right|^q \leq \frac{b-t}{b-a} |f'(a)|^q + \frac{t-a}{b-a} |f'(b)|^q \quad (3.29)$$

eşitsizliği vardır. Buradan

$$\begin{aligned} & \left| f(a)J_{a+}^\alpha g(x) + f(b)J_{b-}^\alpha g(x) - [J_{a+}^\alpha (fg)(x) + J_{b-}^\alpha (fg)(x)] \right| \quad (3.30) \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left[\|g\|_{[a,x],\infty} (x-a)^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\int_a^x \left(\frac{(b-t)|f'(a)|^q + (t-a)|f'(b)|^q}{b-a} \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \|g\|_{[x,b],\infty} (b-x)^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\int_x^b \left(\frac{(b-t)|f'(a)|^q + (t-a)|f'(b)|^q}{b-a} \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left[\|g\|_{[a,x],\infty} (x-a)^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{x-a}{b-a} \right) \left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \|g\|_{[x,b],\infty} (b-x)^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\frac{(b-x)^2}{2(b-a)} |f'(a)|^q + \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve (3.27)'deki ilk eşitsizliğin ispatı tamamlanır. (3.27)'deki ikinci eşitsizliğin ispatı açıktır. \square

Sonuç 3.13. Teorem 3.12'de $\alpha = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| f(a) \int_a^x g(t) dt + f(b) \int_x^b g(t) dt - \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \quad (3.31) \\ & \leq \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\|g\|_{[a,x],\infty} (x-a)^{1+\frac{1}{p}} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\left(\frac{x-a}{b-a} \right) \left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|g\|_{[x,b],\infty} (b-x)^{1+\frac{1}{p}} \left[\frac{(b-x)^2}{2(b-a)} |f'(a)|^q + \frac{(b-x)}{(b-a)} \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \\
\leq & \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[(x-a)^{1+\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{x-a}{b-a} \right) \left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + (b-x)^{1+\frac{1}{p}} \left(\frac{(b-x)^2}{2(b-a)} |f'(a)|^q + \frac{(b-x)}{(b-a)} \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \|g\|_{\infty}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

Sonuç 3.14. Theorem 3.12'de g fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ ye simetrik ve $x = \frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \left[J_{a+}^{\alpha} g \left(\frac{a+b}{2} \right) + J_{b-}^{\alpha} g \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \frac{f(a)+f(b)}{2} \right. \\
& \quad \left. - \left[J_{a+}^{\alpha} (fg) \left(\frac{a+b}{2} \right) + J_{b-}^{\alpha} (fg) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \right| \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{\alpha+1} \\
& \times \left[\|g\|_{[a,\frac{a+b}{2}],\infty} \left(\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \|g\|_{[x,b],\infty} \left(\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
\leq & \frac{\|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{\alpha+1} \\
& \times \left[\left(\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4} dt \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
\leq & \frac{\|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{4}{p\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{\alpha+1} [|f'(a)| + |f'(b)|]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat. (3.32)'deki birinci ve ikinci eşitsizliklerin ispatı açıktır. Üçüncü eşitsizliğin ispatı için, $a_1 = 3|f'(a)|^q$, $b_1 = |f'(b)|^q$, $a_2 = |f'(a)|^q$ ve $b_2 = 3|f'(b)|^q$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^s \leq \sum_{k=1}^n a_k^s + \sum_{k=1}^n b_k^s, \quad 0 \leq s < 1 \quad (3.33)$$

□

eşitsizliği ve $3^{\frac{1}{q}} + 1 \leq 4$ olduğu kullanılırsa istenen sonuç doğrudan elde edilir.

Sonuç 3.15. Teorem 3.12'nin koşulları altında

$$\begin{aligned} & |f(a)J_{a+}^{\alpha}g(b) + f(b)J_{b-}^{\alpha}g(a) - [J_{a+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(a)]| \quad (3.34) \\ & \leq \frac{2\|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\alpha+1} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. (3.27) eşitsizliğinde sırasıyla $x = a$ ve $x = b$ alınırsa

$$\begin{aligned} & |f(b)J_{b-}^{\alpha}g(a) - J_{b-}^{\alpha}(fg)(a)| \quad (3.35) \\ & \leq \frac{\|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\alpha+1} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & |f(a)J_{a+}^{\alpha}g(b) - J_{a+}^{\alpha}(fg)(b)| \quad (3.36) \\ & \leq \frac{\|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\alpha+1} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.35) ve (3.36) eşitsizlikleri taraf tarafa toplam üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$|J_{a+}^{\alpha}g(b)f(a) + J_{b-}^{\alpha}g(a)f(b) - [J_{a+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(a)]| \quad (3.37)$$

$$\leq \frac{2 \|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\alpha+1} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. \square

Sonuç 3.16. Sonuç 3.15’de $\alpha = 1$ alınır

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \quad (3.38)$$

$$\leq \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^2 \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \|g\|_{\infty}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.17. Teorem 3.12’de her $t \in [a, b]$ için $g(t) = 1$ alınır

$$\left| (x-a)^{\alpha} f(a) + (b-x)^{\alpha} f(b) - \Gamma(\alpha+1) [J_{a+}^{\alpha} f(x) + J_{b-}^{\alpha} f(x)] \right| \quad (3.39)$$

$$\leq \left(\frac{1}{p\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left[(x-a)^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{x-a}{b-a} \right) \left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} |f'(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + (b-x)^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\frac{(b-x)^2}{2(b-a)} |f'(a)|^q + \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

eşitsizliği bulunur.

3.2. AĞIRLIKLI KESİRLİ OSTROWSKI VE ORTA NOKTA TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde Riemann-Liouville kesirli integralleri için ağırlıklı Ostrowski ve Orta nokta tipli eşitsizlikler ispatlanacaktır. İlk olarak aşağıdaki lemma ispatlanacaktır.

Lemma 3.18. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) üzerinde türevlenebilir ve $a < b$ olsun. Eğer $f', g \in L[a, b]$ ise her $x \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} & [J_{a+}^{\alpha} g(x) + J_{b-}^{\alpha} g(x)] f(x) - [J_{a+}^{\alpha} (fg)(x) + J_{b-}^{\alpha} (fg)(x)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^x \left(\int_a^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_x^b \left(\int_b^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

eşitliği vardır.

İspat. Kısmi integrasyon kullanılarak

$$\begin{aligned} & \int_a^x \left(\int_a^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \\ &= \left(\int_a^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f(t) \Big|_a^x - \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) f(t) dt \\ &= \left(\int_a^x (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f(x) - \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) f(t) dt \\ &= \Gamma(\alpha) [f(x) J_{a+}^{\alpha} g(x) - J_{a+}^{\alpha} (fg)(x)] \end{aligned} \quad (3.41)$$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde

$$\int_x^b \left(\int_b^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt = \Gamma(\alpha) [f(x) J_{b-}^{\alpha} g(x) - J_{b-}^{\alpha} (fg)(x)] \quad (3.42)$$

dir. (3.41) ve (3.42) eşitlikleri yardımıyla istenilen (3.40) eşitliği elde edilir. \square

Sonuç 3.19. Eğer Lemma 3.18'de $\alpha = 1$ olarak alınırsa

$$f(x) \int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) g(t) dt \quad (3.43)$$

$$= \int_a^x \left(\int_a^t g(s) ds \right) f'(t) dt + \int_x^b \left(\int_b^t g(s) ds \right) f'(t) dt.$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.20. Lemma 3.18'de her $t \in [a, b]$ için $g(t) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [J_{a+}^\alpha f(x) + J_{b-}^\alpha f(x)] \quad (3.44) \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\int_a^x ((x-a)^\alpha - (x-t)^\alpha) f'(t) dt + \int_x^b ((b-x)^\alpha - (t-x)^\alpha) f'(t) dt \right] \end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

Sonuç 3.21. Lemma 3.18'nin koşulları altında g fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} & \frac{f(a) + f(b)}{2} [J_{a+}^\alpha g(b) + J_{b-}^\alpha g(a)] - [J_{a+}^\alpha (fg)(b) + J_{b-}^\alpha (fg)(a)] \quad (3.45) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^b \left(\int_a^t (b-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_a^b \left(\int_b^t (s-a)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right] \end{aligned}$$

eşitliği sağlar.

İspat. (3.40) eşitliğinde sırasıyla $x = a$ ve $x = b$ alınırsa

$$f(a)J_{b-}^\alpha g(a) - J_{b-}^\alpha (fg)(a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left(\int_b^t (s-a)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \quad (3.46)$$

ve

$$f(b)J_{a+}^\alpha g(b) - J_{a+}^\alpha (fg)(b) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left(\int_a^t (b-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \quad (3.47)$$

Burada sırasıyla (3.46) ve (3.47) eşitlikleri taraf tarafa toplanıp Lemma 2.30 kullanılırsa (3.45) eşitliği elde edilir. \square

Teorem 3.22. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu durumda her $x \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \left| [J_{a+}^{\alpha} g(x) + J_{b-}^{\alpha} g(x)] f(x) - [J_{a+}^{\alpha} (fg)(x) + J_{b-}^{\alpha} (fg)(x)] \right| \quad (3.48) \\
& \leq \frac{\|g\|_{\infty}}{(b-a)\Gamma(\alpha+1)} \\
& \quad \times \left[(x-a)^{\alpha+1} \left(\left(b - \frac{a+x}{2} \right) - \frac{(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \right. \\
& \quad \left. + (b-x)^{\alpha+2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \right] |f'(a)| \\
& \quad + \left[(b-x)^{\alpha+1} \left(\left(\frac{x+b}{2} - a \right) - \frac{(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \right. \\
& \quad \left. + (x-a)^{\alpha+2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \right] |f'(b)|
\end{aligned}$$

ağırlıklı kesirli Ostrowski eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.18'yi kullanarak mutlak değer alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| [J_{a+}^{\alpha} g(x) + J_{b-}^{\alpha} g(x)] f(x) - [J_{a+}^{\alpha} (fg)(x) + J_{b-}^{\alpha} (fg)(x)] \right| \quad (3.49) \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\left| \int_a^x \left(\int_a^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right| \right. \\
& \quad \left. + \left| \int_x^b \left(\int_b^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right| \right] \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^x \left| \int_a^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_x^b \left| \int_b^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\|g\|_{[a,x],\infty} \int_a^x ((x-a)^\alpha - (x-t)^\alpha) |f'(t)| dt \right. \\
&\quad \left. + \|g\|_{[x,b],\infty} \int_x^b ((b-x)^\alpha - (t-x)^\alpha) |f'(t)| dt \right] \\
&\leq \frac{\|g\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\int_a^x ((x-a)^\alpha - (x-t)^\alpha) |f'(t)| dt \right. \\
&\quad \left. + \int_x^b ((b-x)^\alpha - (t-x)^\alpha) |f'(t)| dt \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
&\int_a^x ((x-a)^\alpha - (x-t)^\alpha) |f'(t)| dt \tag{3.50} \\
&\leq \frac{1}{b-a} \int_a^x ((x-a)^\alpha - (x-t)^\alpha) [(b-t)|f'(a)| + (t-a)|f'(b)|] dt \\
&= \frac{|f'(a)|}{b-a} \int_a^x ((x-a)^\alpha - (x-t)^\alpha) (b-t) dt \\
&\quad + \frac{|f'(b)|}{b-a} \int_a^x ((x-a)^\alpha - (x-t)^\alpha) (t-a) dt \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) - \frac{(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right] |f'(a)| \\
&\quad + \frac{(x-a)^{\alpha+2}}{b-a} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right] |f'(b)|
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\int_x^b ((b-x)^\alpha - (t-x)^\alpha) |f'(t)| dt \tag{3.51} \\
&\leq \frac{1}{b-a} \int_a^x ((b-x)^\alpha - (t-x)^\alpha) [(b-t)|f'(a)| + (t-a)|f'(b)|] dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(b-x)^{\alpha+2}}{b-a} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right] |f'(a)| \\
&\quad + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \left[\left(\frac{x+b}{2} - a \right) - \frac{(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right] |f'(b)|.
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (3.51) ve (3.50) eşitsizlikleri (3.49) eşitsizliğinde yerine yazılırsa (3.48) eşitsizliği ispatlanmış olur. \square

Sonuç 3.23. Theorem 3.22’de $\alpha = 1$ alındığında

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) \int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \tag{3.52} \\
&\leq \frac{\|g\|_\infty}{(b-a)\Gamma(\alpha+1)} \left[\frac{(x-a)^2}{2} \left(b - \frac{a+2x}{3} \right) + \frac{(b-x)^3}{3} \right] |f'(a)| \\
&\quad + \left[\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{2} \left(\frac{2x+b}{3} - a \right) + \frac{(x-a)^{\alpha+2}}{3} \right] |f'(b)|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.24. Teorem 3.22’de $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left[J_{a+g}^\alpha \left(\frac{a+b}{2} \right) + J_{b-g}^\alpha \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] f \left(\frac{a+b}{2} \right) \tag{3.53} \\
&\quad - \left[J_{a+}^\alpha (fg) \left(\frac{a+b}{2} \right) + J_{b-}^\alpha (fg) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \\
&\leq \frac{\|g\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{\alpha+1} [|f'(a)| + |f'(b)|]
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

Sonuç 3.25. $t \in [a, b]$ için Teorem 3.22’de $g(t) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [J_{a+}^\alpha f(x) + J_{b-}^\alpha f(x)] \right| \tag{3.54} \\
&\leq \frac{1}{(b-a)^2 \Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad \times \left[(x-a)^{\alpha+1} \left(\left(b - \frac{a+x}{2} \right) - \frac{(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (b-x)^{\alpha+2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) |f'(a)| \\
& + \left[(b-x)^{\alpha+1} \left(\left(\frac{x+b}{2} - a \right) - \frac{(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \right. \\
& \left. + (x-a)^{\alpha+2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \right] |f'(b)|
\end{aligned}$$

kesirli Ostrowski integral eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.26. Theorem 3.22'de g fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} [J_{a+}^{\alpha} g(b) + J_{b-}^{\alpha} g(a)] - [J_{a+}^{\alpha} (fg)(b) + J_{b-}^{\alpha} (fg)(a)] \right| \quad (3.55) \\
& \leq \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{\alpha+1} \right) [|f'(a)| + |f'(b)|]
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

İspat. (3.48) eşitsizliğinde sırasıyla $x = a$ ve $x = b$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
& |f(a)J_{b-}^{\alpha} g(a) - J_{b-}^{\alpha} (fg)(a)| \quad (3.56) \\
& \leq \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) |f'(a)| + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+2} \right) |f'(b)| \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& |f(b)J_{a+}^{\alpha} g(b) - J_{a+}^{\alpha} (fg)(b)| \quad (3.57) \\
& \leq \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+2} \right) |f'(a)| + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) |f'(b)| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada (3.56) ve (3.57) eşitsizliklerini taraf tarafa toplayıp üçgen eşitsizliği ve Lemma 2.30 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} [J_{a+}^{\alpha} g(b) + J_{b-}^{\alpha} g(a)] - [J_{a+}^{\alpha} (fg)(b) + J_{b-}^{\alpha} (fg)(a)] \right| \quad (3.58) \\
& \leq \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) |f'(a)| + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+2} \right) |f'(b)| \right] \\
& \quad + \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+2} \right) |f'(a)| + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) |f'(b)| \right] \\
& = \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{\alpha+1} \right) [|f'(a)| + |f'(b)|]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. \square

Teorem 3.27. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $|f'|$ fonksiyonu $q > 1$ için $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu durumda her $x \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \left| [J_{a+}^{\alpha} g(x) + J_{b-}^{\alpha} g(x)] f(x) - [J_{a+}^{\alpha} (fg)(x) + J_{b-}^{\alpha} (fg)(x)] \right| \quad (3.59) \\
& \leq \frac{\|g\|_{\infty}}{(b-a)^{\frac{1}{q}} \Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{p\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[(x-a)^{\alpha+1} \left(\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{x-a}{2} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (b-x)^{\alpha+1} \left(\frac{b-x}{2} |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat. (3.48) eşitsizliğine Hölder eşitsizliği uygulanıp, $A > B \geq 0$ ve $p \geq 1$ için

$$(A - B)^p \leq A^p - B^p \quad (3.60)$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| [J_{a+}^\alpha g(x) + J_{b-}^\alpha g(x)] f(x) - [J_{a+}^\alpha (fg)(x) + J_{b-}^\alpha (fg)(x)] \right| \quad (3.61) \\ & \leq \frac{\|g\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[\left(\int_a^x ((x-a)^\alpha - (x-t)^\alpha)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_x^b ((b-x)^\alpha - (t-x)^\alpha)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq \frac{\|g\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[\left(\int_a^x ((x-a)^{p\alpha} - (x-t)^{p\alpha}) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_x^b ((b-x)^{p\alpha} - (t-x)^{p\alpha}) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte basit hesaplamalar yapılarak

$$\int_a^x ((x-a)^{p\alpha} - (x-t)^{p\alpha}) dt = (x-a)^{p\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{p\alpha+1} \right) \quad (3.62)$$

ve

$$\int_x^b ((b-x)^{p\alpha} - (t-x)^{p\alpha}) dt = (b-x)^{p\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{p\alpha+1} \right). \quad (3.63)$$

eşitlikleri bulunur. $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\begin{aligned} \int_a^x |f'(t)|^q dt & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^x ((b-t) |f'(a)|^q + (t-a) |f'(b)|^q) dt \quad (3.64) \\ & \leq \frac{x-a}{b-a} \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{x-a}{2} |f'(b)|^q \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. Benzer şekilde

$$\int_x^b |f'(t)|^q dt \leq \frac{b-x}{b-a} \left[\frac{b-x}{2} |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right] \quad (3.65)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (3.62)-(3.64) eşitsizlikleri (3.61) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left| [J_{a+}^\alpha g(x) + J_{b-}^\alpha g(x)] f(x) - [J_{a+}^\alpha (fg)(x) + J_{b-}^\alpha (fg)(x)] \right| \quad (3.66) \\ & \leq \frac{\|g\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \\ & \quad \times \left[\left((x-a)^{p\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{p\alpha+1} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ & \quad \times \left(\frac{x-a}{b-a} \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{x-a}{2} |f'(b)|^q \right] \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \left((b-x)^{p\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{p\alpha+1} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left. \left(\frac{b-x}{b-a} \left[\frac{b-x}{2} |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right] \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & = \frac{\|g\|_\infty}{(b-a)^{\frac{1}{q}} \Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{p\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left[(x-a)^{\alpha+1} \left(\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{x-a}{2} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + (b-x)^{\alpha+1} \left(\frac{b-x}{2} |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur ve ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.28. Teorem 3.27'te özel olarak $\alpha = 1$ alınırsa

$$\left| f(x) \int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\|g\|_\infty}{(b-a)^{\frac{1}{q}}} \left(1 - \frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left[(x-a)^2 \left(\left(b - \frac{a+x}{2}\right) |f'(a)|^q + \frac{x-a}{2} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + (b-x)^2 \left(\frac{b-x}{2} |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a\right) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

Sonuç 3.29. Teorem 3.27’te $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \left[J_{a+}^\alpha g \left(\frac{a+b}{2} \right) + J_{b-}^\alpha g \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left[J_{a+}^\alpha (fg) \left(\frac{a+b}{2} \right) + J_{b-}^\alpha (fg) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \right| \\
&\leq \frac{\|g\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha+1} \\
&\quad \times \left[\left(\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq \frac{\|g\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \left(4 - \frac{4}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha+1} [|f'(a)| + |f'(b)|]
\end{aligned} \tag{3.68}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. (3.68) eşitsizliğindeki birinci ve ikinci eşitsizliklerinin ispatı açıktır. Üçüncü eşitsizliğin ispatı için, $a_1 = 3|f'(a)|^q$, $b_1 = |f'(b)|^q$, $a_2 = |f'(a)|^q$ ve $b_2 = 3|f'(b)|^q$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^s \leq \sum_{k=1}^n a_k^s + \sum_{k=1}^n b_k^s, \quad 0 \leq s < 1 \tag{3.69}$$

□

eşitsizliği ve $3^{\frac{1}{q}} + 1 \leq 4$ kullanılırsa istenen sonuç doğrudan elde edilir.

Sonuç 3.30. Teorem 3.27’te $t \in [a, b]$ için $g(t) = 1$ alınırsa

$$\left| \left(\frac{(x-s)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [J_{a+}^\alpha f(x) + J_{b-}^\alpha f(x)] \right| \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\left(1 - \frac{1}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}}}{(b-a)^{1+\frac{1}{q}}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad \times \left[(x-a)^{\alpha+1} \left(\left(b - \frac{a+x}{2}\right) |f'(a)|^q + \frac{x-a}{2} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + (b-x)^{\alpha+1} \left(\frac{b-x}{2} |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a\right) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

kesirli Ostrowski integral eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.31. Teorem 3.27’teki koşullar altında g fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ için simetrik olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} [J_{a+}^{\alpha}g(b) + J_{b-}^{\alpha}g(a)] - [J_{a+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(a)] \right| \quad (3.71) \\
&\leq \frac{2(b-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \|g\|_{\infty}
\end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur.

İspat. (3.59) eşitsizliğinde sırasıyla $x = a$ ve $x = b$ alınırsa

$$|f(a)J_{b-}^{\alpha}g(a) - J_{b-}^{\alpha}(fg)(a)| \quad (3.72)$$

$$\leq \frac{\|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\alpha+1} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$|f(b)J_{a+}^{\alpha}g(a) - J_{a+}^{\alpha}(fg)(b)| \quad (3.73)$$

$$\leq \frac{\|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\alpha+1} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri bulunur. Burada (3.72) ve (3.73) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanıp üçgen eşitsizliği ve Lemma 2.30 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} [J_{a+}^{\alpha} g(b) + J_{b-}^{\alpha} g(a)] - [J_{a+}^{\alpha} (fg)(b) + J_{b-}^{\alpha} (fg)(a)] \right| \quad (3.74) \\
& \leq \frac{\|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\alpha+1} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{\|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\alpha+1} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{2(b-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \|g\|_{\infty}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. □

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLI KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, 3. Bölümde elde edilen eşitsizlikleri de genelleştiren ağırlıklı kesirli integral eşitsizlikleri elde edilecektir.

Bu bölüm boyunca kısalık olması için aşağıdaki gösterim kullanılacaktır:

$\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Lambda_\lambda(f, g) & \hspace{20em} (4.1) \\ &= \lambda [f(a)J_{a+}^\alpha g(x) + f(b)J_{b-}^\alpha g(x)] + (1 - \lambda) [J_{a+}^\alpha g(x) + J_{b-}^\alpha g(x)] f(x) \\ &\quad - [J_{a+}^\alpha (fg)(x) + J_{b-}^\alpha (fg)(x)] \end{aligned}$$

olsun.

Lemma 4.1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve $a < b$ olsun. $f', g \in L[a, b]$ ise bu durumda her $x \in (a, b)$ ve $\alpha > 0$ için.

$$\Lambda_\lambda(f, g) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b K_\lambda(x, t) f'(t) dt$$

kesirli integral eşitsizliği vardır. Burada $K_\lambda(x, t) : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$K_\lambda(x, t) = \begin{cases} \lambda \int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds + (1-\lambda) \int_a^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds, & a \leq t < x \\ \lambda \int_x^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds + (1-\lambda) \int_b^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds, & x \leq t \leq b \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. $K_\lambda(t, x)$ in tanımından

$$\begin{aligned}
\int_a^b K_\lambda(x, t) f'(t) dt &= \lambda \int_a^x \left(\int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \\
&+ (1-\lambda) \int_a^x \left(\int_a^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \\
&+ \lambda \int_x^b \left(\int_x^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \\
&+ (1-\lambda) \int_x^b \left(\int_b^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt
\end{aligned} \tag{4.2}$$

eşitliği vardır. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned}
\int_a^t \left(\int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt &= \left(\int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f(t) \Big|_a^x \\
&- \int_a^x f(t) \left(\int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) \\
&= \left(\int_x^a (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f(a) \\
&- \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) f(t) dt \\
&= \Gamma(\alpha) [f(a) J_{a+}^\alpha g(x) - J_{a+}^\alpha (fg)(x)]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\int_a^x \left(\int_a^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt &= \left(\int_a^x (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f(x) \\
&- \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) f(t) dt \\
&= \Gamma(\alpha) [f(x) J_{a+}^\alpha g(x) - J_{a+}^\alpha (fg)(x)],
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\int_x^b \left(\int_x^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt &= \left(\int_x^b (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f(b) \\
&\quad - \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} g(t) f(t) dt \\
&= \Gamma(\alpha) [f(b)J_{b-}^{\alpha} g(x) - J_{b-}^{\alpha}(fg)(x)]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_x^b \left(\int_b^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt &= \left(\int_b^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f(x) \\
&\quad - \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} g(t) f(t) dt \\
&= \Gamma(\alpha) [f(x)J_{b-}^{\alpha} g(x) - J_{b-}^{\alpha}(fg)(x)]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada (4.3)-(4.6) eşitlikleri (4.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_a^b K_{\lambda}(x,t) f'(t) dt \\
&= \lambda \Gamma(\alpha) [f(a)J_{a+}^{\alpha} g(x) - J_{a+}^{\alpha}(fg)(x)] \\
&\quad - (1-\lambda) \Gamma(\alpha) [f(x)J_{a+}^{\alpha} g(x) - J_{a+}^{\alpha}(fg)(x)] \\
&\quad + \lambda \Gamma(\alpha) [f(b)J_{b-}^{\alpha} g(x) - J_{b-}^{\alpha}(fg)(x)] \\
&\quad + (1-\lambda) \Gamma(\alpha) [f(x)J_{b-}^{\alpha} g(x) - J_{b-}^{\alpha}(fg)(x)] \\
&= \lambda \Gamma(\alpha) [f(a)J_{a+}^{\alpha} g(x) - f(b)J_{b-}^{\alpha} g(x)] \\
&\quad + (1-\lambda) \Gamma(\alpha) f(x) [J_{a+}^{\alpha} g(x) - J_{b-}^{\alpha} g(x)]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$-\Gamma(\alpha) [J_{a+}^{\alpha}(fg)(x) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(x)]$$

eşitliği elde edilir. Son olarak (4.7) eşitliğinin her iki tarafı $\Gamma(\alpha)$ ile bölünürse istenilen eşitlik bulunur. \square

Sonuç 4.2. Lemma 4.1’de $\alpha = 1$ alınırsa Lemma 4.1, Erden ve Sarikaya ([61]) tarafından ispatlanan Lemma 2.34’ya dönüşür.

Sonuç 4.3. Lemma 4.1’de $\lambda = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \Gamma(\alpha) [f(a)J_{a+}^{\alpha}g(x) + J_{a+}^{\alpha}(fg)(x)] - \Gamma(\alpha) [f(b)J_{b-}^{\alpha}g(x) - J_{b-}^{\alpha}(fg)(x)] \quad (4.8) \\ &= \int_a^x \left(\int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt + \int_x^b \left(\int_x^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \end{aligned}$$

kesirli integral eşitliği bulunur.

Sonuç 4.4. Sonuçta 4.3’de $\alpha = 1$ alınırsa, Sonuç 4.3 Lemma 2.28’e dönüşür.

Sonuç 4.5. Lemma 4.1’de $\lambda = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} & [J_{a+}^{\alpha}g(x) + J_{b-}^{\alpha}g(x)] f(x) - [J_{a+}^{\alpha}(fg)(x) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(x)] \quad (4.9) \\ &= \int_a^x \left(\int_a^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt + \int_x^b \left(\int_b^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 4.6. Lemma 4.1’de her $t \in [a, b]$ için $g(t) = 1$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} & \lambda [(x-a)^{\alpha} f(a) + (b-x)^{\alpha} f(b)] \quad (4.10) \\ & + (1-\lambda) [(x-a)^{\alpha} + (b-x)^{\alpha}] f(x) - \Gamma(\alpha+1) [J_{a+}^{\alpha}f(x) + J_{b-}^{\alpha}f(x)] \\ &= \alpha \int_a^b P_{\lambda}(x, t) f'(t) dt \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $P_\lambda(x, t)$ fonksiyonu

$$P_\lambda(x, t) = \begin{cases} \lambda \int_x^t (x-s)^{\alpha-1} ds + (1-\lambda) \int_a^t (x-s)^{\alpha-1} ds, & a \leq t < x \\ \lambda \int_x^t (s-x)^{\alpha-1} ds + (1-\lambda) \int_b^t (s-x)^{\alpha-1} ds, & x \leq t \leq b \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.7. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu takdirde her $x \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} & |\Lambda_\lambda(f, g)| \tag{4.11} \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+3)(b-a)} \left\{ (x-a)^{\alpha+1} \|g\|_{[a,x],\infty} \right. \\ & \quad \times [(2\lambda-1)[(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)] \\ & \quad \left. + (1-\lambda)(\alpha+1)(\alpha+2) \left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)| \right\} \\ & \quad + (b-x)^{\alpha+2} \|g\|_{[x,b],\infty} \left[\lambda + (1-\lambda) \left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} - 1 \right) \right] |f'(a)| \\ & \quad + (x-a)^{\alpha+2} \|g\|_{[a,x],\infty} \left[\lambda + (1-\lambda) \left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} - 1 \right) \right] |f'(b)| \\ & \quad + (b-x)^{\alpha+1} \|g\|_{[x,b],\infty} \times [(2\lambda-1)[(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)] \\ & \quad \left. + (1-\lambda)(\alpha+1)(\alpha+2) \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)| \right] \\ & \leq \frac{\|g\|_\infty}{\Gamma(\alpha+3)(b-a)} \\ & \quad \{ (x-a)^{\alpha+1} [(2\lambda-1)[(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(1-\lambda)(\alpha+1)(\alpha+2) \left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)| \\
& +(b-x)^{\alpha+2} \left[\lambda + (1-\lambda) \left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} - 1 \right) \right] |f'(a)| \\
& +(x-a)^{\alpha+2} \left[\lambda + (1-\lambda) \left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} - 1 \right) \right] |f'(b)| \\
& +(b-x)^{\alpha+1} [(2\lambda-1)[(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)] \\
& +(1-\lambda)(\alpha+1)(\alpha+2) \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)| \}
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Lemma 4.1'de mutlak değer alınırsa,

$$\begin{aligned}
& |\Lambda_\lambda(f, g)| \tag{4.12} \\
& = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_a^b K_\lambda(x, t) f'(t) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \lambda \int_a^t \left(\int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right. \\
& \quad \left. + (1-\lambda) \int_a^x \left(\int_a^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right| \\
& \quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \lambda \int_x^b \left(\int_x^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right. \\
& \quad \left. + (1-\lambda) \int_x^b \left(\int_b^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right) f'(t) dt \right| \\
& \leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left| \int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \\
& \quad + \frac{(1-\lambda)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left| \int_a^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda \int_x^b \left| \int_x^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (1-\lambda) \int_x^b \left| \int_b^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. g fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \int_a^t \left| \int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \tag{4.13} \\
& \leq \|g\|_{[a,x],\infty} \int_a^t \left| \int_x^t (x-s)^{\alpha-1} ds \right| |f'(t)| dt \\
& = \frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{\alpha} \int_a^x (x-t)^\alpha |f'(t)| dt \\
& \leq \frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{\alpha(b-a)} \int_a^x (x-t)^\alpha [(b-t)|f'(a)| + (t-a)|f'(b)|] dt \\
& = \frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{\alpha(b-a)} \left[|f'(a)| \int_a^x (x-t)^\alpha (b-t) dt + |f'(b)| \int_a^x (x-t)^\alpha (t-a) dt \right] \\
& = \frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{\alpha(b-a)} \left[|f'(a)| \frac{(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} (x-a)^{\alpha+1} \right. \\
& \quad \left. + |f'(b)| \frac{(x-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right] \\
& = \frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(b-a)} \\
& \quad \times [(x-a)^{\alpha+1} [(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)] |f'(a)| + (x-a) |f'(b)|]
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \int_a^x \left| \left(\int_a^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right) \right| |f'(t)| dt \tag{4.14} \\
& \leq \|g\|_{[a,x],\infty} \int_a^x \left| \left(\int_a^t (x-s)^{\alpha-1} ds \right) \right| |f'(t)| dt \\
& \leq \frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{\alpha(b-a)} \left\{ \left[(x-a)^{\alpha+1} \left(b - \frac{a+x}{2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} (x-a)^{\alpha+1} \right] |f'(a)| \right. \\
& \quad \left. + \left[(x-a)^{\alpha+2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) |f'(b)| \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_x^b \left| \int_x^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \tag{4.15} \\
& \leq \|g\|_{[x,b],\infty} \int_x^b \left| \int_x^t (s-x)^{\alpha-1} ds \right| |f'(t)| dt \\
& \leq \frac{\|g\|_{[x,b],\infty}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(b-a)} \\
& \quad \times \left[|f'(a)| (b-x) + |f'(b)| [(b-x)(\alpha+1) + (x-a)(\alpha+2)] \right],
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_x^b \left| \int_b^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \tag{4.16} \\
& \leq \|g\|_{[x,b],\infty} \int_x^b \left| \int_b^t (s-x)^{\alpha-1} ds \right| |f'(t)| dt \\
& \leq \frac{\|g\|_{[x,b],\infty}}{\alpha(b-a)} \left\{ \left[(b-x)^{\alpha+2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) |f'(a)| \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$+ (b-x)^{\alpha+1} \left[\left(\frac{b+x}{2} - a \right) - \frac{(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right] |f'(b)| \Big\}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.13)-(4.16) eşitsizlikleri (4.12) eşitsizliğinde yerine yazılırsa (4.11)'deki ilk eşitsizliğin ispatı tamamlanır. (4.11)'deki ikinci eşitsizlik, $x \in [a, b]$ için

$$\|g\|_{[a,x],\infty} \leq \|g\|_{[a,b],\infty} = \|g\|_{\infty} \text{ and } \|g\|_{[x,b],\infty} \leq \|g\|_{[a,b],\infty} = \|g\|_{\infty} \quad (4.17)$$

eşitsizliklerinden açıktır. □

Sonuç 4.8. Teorem 4.7'de $\alpha = 1$ seçilirse, bu durumda Teorem 4.7 Erden ve Sarikaya ([61]) tarafından elde edilen Teorem 2.35'ye dönüşür.

Sonuç 4.9. Teorem 4.7'de $\lambda = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| [f(a)J_{a+}^{\alpha}g(x) + f(b)J_{b-}^{\alpha}g(x)] - [J_{a+}^{\alpha}(fg)(x) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(x)] \right| \quad (4.18) \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+3)(b-a)} \left\{ (x-a)^{\alpha+1} \left[[(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)] \|g\|_{[a,x],\infty} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (b-x)^{\alpha+2} \|g\|_{[x,b],\infty} \right] |f'(a)| + (x-a)^{\alpha+2} \|g\|_{[a,x],\infty} \right. \\ & \quad \left. + (b-x)^{\alpha+1} \left[(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a) \|g\|_{[x,b],\infty} \right] |f'(b)| \right\} \\ & \leq \frac{\|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+3)(b-a)} \\ & \quad \times \left\{ [(x-a)^{\alpha+1} [(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)] + (b-x)^{\alpha+2}] |f'(a)| \right. \\ & \quad \left. + (x-a)^{\alpha+2} + (b-x)^{\alpha+1} [(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)] |f'(b)| \right\} \end{aligned}$$

aşağıdaki ağırlıklı kesirli yamuk tipli eşitsizliğine ulaşılır.

Sonuç 4.10. Teorem 4.7'de $\lambda = 0$ olarak alınırsa

$$\left| [J_{a+}^{\alpha}g(x) + J_{b-}^{\alpha}g(x)] f(x) - [J_{a+}^{\alpha}(fg)(x) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(x)] \right| \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+3)(b-a)} \left\{ \left[(b-x)^{\alpha+2} \|g\|_{[x,b],\infty} \left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} - 1 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (x-a)^{\alpha+1} \|g\|_{[a,x],\infty} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left[(\alpha+1)(\alpha+2) \left(b - \frac{a+x}{2} \right) - [(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)] \right] \right] |f'(a)| \right. \\
&\quad \left. + \left[(x-a)^{\alpha+2} \|g\|_{[a,x],\infty} \left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} - 1 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (b-x)^{\alpha+1} \|g\|_{[x,b],\infty} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left[(\alpha+1)(\alpha+2) \left(\frac{x+b}{2} - a \right) - [(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)] \right] \right] |f'(b)| \right\} \\
&\leq \frac{\|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+3)(b-a)} \left\{ \left[(b-x)^{\alpha+2} \left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} - 1 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[(x-a)^{\alpha+1} (\alpha+1)(\alpha+2) \left(b - \frac{a+x}{2} \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - [(\alpha+2)(b-x) + (\alpha+1)(x-a)] \right] |f'(a)| \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[(x-a)^{\alpha+2} \left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} - 1 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[(b-x)^{\alpha+1} \left[(\alpha+1)(\alpha+2) \left(\frac{x+b}{2} - a \right) \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - [(\alpha+1)(b-x) + (\alpha+2)(x-a)] \right] |f'(b)| \right] \right\}
\end{aligned}$$

ağırlıklı kesirli Ostrowski tipli eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.11. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $|f'|^q, q > 1$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu

takdirde her $x \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}
& |\Lambda_\lambda(f, g)| \tag{4.20} \\
& \leq \frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\frac{1}{q}}(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} \\
& \quad \times \left[\lambda \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)}{2} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (1-\lambda)(\alpha p)^{\frac{1}{p}} \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)}{2} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad + \frac{\|g\|_{[x,b],\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\frac{1}{q}}(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} \\
& \quad \times \left[\lambda \left[\frac{(b-x)}{2} |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (1-\lambda)(\alpha p)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{b-x}{2} \right) |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{\|g\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)^{\frac{1}{q}}(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} \\
& \quad \left\{ (x-a)^{\alpha+1} \left[\lambda \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)}{2} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (1-\lambda)(\alpha p)^{\frac{1}{p}} \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)}{2} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\
& \quad \left. + (b-x)^{\alpha+1} \left[\lambda \left[\frac{(b-x)}{2} |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (1-\lambda)(\alpha p)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{b-x}{2} \right) |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

kesirli integral eşitsizliğine ulaşılır.

İspat. Lemma 4.1'den,

$$\begin{aligned}
& |\Lambda_\lambda(f, g)| \tag{4.21} \\
& \leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left| \int_x^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \\
& \quad + \frac{(1-\lambda)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left| \int_a^t (x-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \\
& \quad + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left| \int_x^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \\
& \quad + \frac{(1-\lambda)}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left| \int_b^t (s-x)^{\alpha-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \\
& \leq \frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \\
& \quad \times \left[\lambda \int_a^t (x-t)^\alpha |f'(t)| dt + (1-\lambda) \int_a^x [(x-a)^\alpha - (x-t)^\alpha] |f'(t)| dt \right] \\
& \quad + \frac{\|g\|_{[x,b],\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \\
& \quad \times \left[\lambda \int_x^b (t-x)^\alpha |f'(t)| dt + (1-\lambda) \int_x^b [(b-x)^\alpha - (t-x)^\alpha] |f'(t)| dt \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada bilinen Hölder eşitsizliği, (4.21) eşitsizliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& |\Lambda_\lambda(f, g)| \tag{4.22} \\
& \leq \frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\lambda \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (1-\lambda) \left(\int_a^x [(x-a)^\alpha - (x-t)^\alpha]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\|g\|_{[x,b],\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\lambda \left(\int_x^b (t-x)^{\alpha p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + (1-\lambda) \left(\int_x^b [(b-x)^\alpha - (t-x)^\alpha]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Benzer şekilde $|f'|^q$ fonksiyonu konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.23} \\
& = \left(\frac{(x-a)^{\alpha p+1}}{\alpha p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \left(\frac{(x-a)^{\alpha p+1}}{\alpha p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x \left[\frac{b-t}{b-a} |f'(a)|^q + \frac{t-a}{b-a} |f'(b)|^q \right] dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\frac{1}{q}}} \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)}{2} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \left(\int_a^x [(x-a)^\alpha - (x-t)^\alpha]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.24} \\
& \leq \left(\int_a^x [(x-a)^{\alpha p} - (x-t)^{\alpha p}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \left[(x-a)^{\alpha p+1} \left(1 - \frac{1}{\alpha p+1} \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}} \left(\int_a^x \left[(b-t) |f'(a)|^q + (t-a) |f'(b)|^q \right] dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \left(1 - \frac{1}{\alpha p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)}{2} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}}, \\
& \left(\int_x^b (t-x)^{\alpha p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \left(\frac{(b-x)^{\alpha p+1}}{\alpha p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}} \\
& \quad \times \left(\int_x^b \left[(b-t) |f'(a)|^q + (t-a) |f'(b)|^q \right] dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\frac{1}{q}}} \left[\frac{(b-x)}{2} |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left(\int_x^b [(b-x)^\alpha - (t-x)^\alpha]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \left(\int_x^b [(b-x)^{\alpha p} - (t-x)^{\alpha p}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \left[(b-x)^{\alpha p+1} \left(1 - \frac{1}{\alpha p+1} \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}} \left(\int_a^x \left[(b-t) |f'(a)|^q + (t-a) |f'(b)|^q \right] dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \left(1 - \frac{1}{\alpha p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\frac{1}{q}}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{b-x}{2} \right) |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$(A-B)^p \leq A^p - B^p \tag{4.27}$$

var olan eşitsizlik kullanılır. Her hangi $A > B \geq 0$ ve $p \geq 1$ alındığında (4.23)-(4.26) eşitsizliklerini (4.22), eşitsizliğinde yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned}
& |\Lambda_\lambda(f, g)| \tag{4.28} \\
& \leq \frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\frac{1}{q}}(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} \\
& \quad \times \left[\lambda \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)}{2} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (1-\lambda)(\alpha p)^{\frac{1}{p}} \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)}{2} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad + \frac{\|g\|_{[x,b],\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\frac{1}{q}}(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} \\
& \quad \times \left[\lambda \left[\frac{(b-x)}{2} |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (1-\lambda)(\alpha p)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{(b-x)}{2} |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilip (4.20) eşitsizliğine ulaşılmış olur.

İkinci eşitsizliğin ispatı ise (4.20) ve(4.17) eşitsizliklerinde açıktır. □

Sonuç 4.12. Teorem 4.11’da $\lambda = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \lambda \left[f(a) \int_a^x g(t) dt + f(b) \int_x^b g(t) dt \right] \right. \tag{4.29} \\
& \quad \left. + (1-\lambda) f(x) \int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \\
& \leq \frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{(b-a)^{\frac{1}{q}}(p+1)^{\frac{1}{p}}} \frac{(x-a)^2}{(b-a)^{\frac{1}{q}}(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\lambda \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)}{2} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (1-\lambda)(p)^{\frac{1}{p}} \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)}{2} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\|g\|_{[x,b],\infty} (b-x)^2}{(b-a)^{\frac{1}{q}} (p+1)^{\frac{1}{p}}} \\
& \times \left[\lambda \left[\frac{(b-x)}{2} |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + (1-\lambda) (p)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{b-x}{2} \right) |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right] \\
\leq & \frac{\|g\|_{\infty}}{(b-a)^{\frac{1}{q}} (p+1)^{\frac{1}{p}}} \\
& \times \left\{ \left[\lambda \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)}{2} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \left. \left. + (1-\lambda) (p)^{\frac{1}{p}} \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)}{2} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} (x-a)^2 \right] \right. \\
& \times \left[\lambda \left[\frac{(b-x)}{2} |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. \left. + (1-\lambda) (p)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{b-x}{2} \right) |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right] (b-x)^2 \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Sonuç 4.13. Theorem 4.11’da $\lambda = 0$ seçilirse

$$\begin{aligned}
& \left| [J_{a+}^{\alpha} g(x) + J_{b-}^{\alpha} g(x)] f(x) - [J_{a+}^{\alpha} (fg)(x) + J_{b-}^{\alpha} (fg)(x)] \right| \quad (4.30) \\
\leq & \frac{\|g\|_{[a,x],\infty} (x-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1) (b-a)^{\frac{1}{q}} (\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} (\alpha p)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)}{2} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{\|g\|_{[x,b],\infty} (b-x)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1) (b-a)^{\frac{1}{q}} (\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} (\alpha p)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left[\left(\frac{b-x}{2} \right) |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)^{\frac{1}{q}}(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\left\{ (1-\lambda)(\alpha p)^{\frac{1}{p}} \left[\left(b - \frac{a+x}{2} \right) |f'(a)|^q + \frac{(x-a)}{2} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + (1-\lambda)(\alpha p)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{b-x}{2} \right) |f'(a)|^q + \left(\frac{x+b}{2} - a \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

Ostrowski tipli integral eşitsizliği bulunur.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezin genel yapısı giriş bölümünde dahil olmak üzere beş temel başlık altında oluşturulmuştur. Bunlar giriş, genel kavramlar , Ağırlıklı Kesirli İntegral Eşitlikleri ve Genelleştirilmiş Ağırlıklı Kesirli İntegrallerdir. Giriş bölümünde tezin konusu ve tezin içeriğinde bulunan tanımlar ile ilgili kronolojik incelemesi yapılmıştır.

Genel kavramlar bölümü dört başlık altında incelenmiştir. İlk olarak temel kavramlar bölümü vardır. Bu bölümde tez içerisinde bulunan kavramların tanımları verilmiştir. İkinci olarak tez içerisinde kullanılan bazı eşitsizliklerin literatürde bulunan tanımları bulunmaktadır. Üçüncü bölümde ise tezin içerisinde kullanılan Rieman-Lioville kesirli integral kavramı ve tezin içerisinde kullanılmayan fakat literatürde bulunan farklı kesirli integral tanımları verilmiştir. Son bölümünde tezin yazılmasına yardımcı olan bazı lemma ve teoremler bulunmaktadır.

Üçüncü bölümde Rieman-Lioville kesirli integrallerini içeren yeni eşitsizlikler oluşturulmuştur. Daha sonra Tropezoid (Yamuk) ve Ostrowski tipi eşitsizliklerin bazı yeni ağırlıklı versiyonları elde ediliyor. Ayrıca bu bölümdeki lemma ve teoremler ispatlanırken, üçgen eşitsizliği ve hölder eşitsizliğinden yardım alınmıştır. Daha sonra bu eşitsizliklerin bazı yeni ağırlıklı versiyonları elde ediliyor ve bazı orta nokta tipi eşitsizlikleri özel durum olarak verilmiştir.

Son bölümde ise 3. Bölümden farklı olarak Tropezoid (yamuk) tipi eşitsizliğin yerine Hermite Hadamard ve Ostrowski tipi eşitsizliklerin bazı yeni ağırlıklı versiyonları elde ediliyor. Daha sonra bu eşitsizliklerin bazı yeni ağırlıklı versiyonları elde ediliyor ve bazı orta nokta tipi eşitsizlikleri özel durum olarak verilmiştir.

Sonraki çalışmalarda bu tezde kullanılan yöntemler izlenerek diğer kesirli integraller için ağırlıklı Yamuk ve ağırlıklı Ostrowski tipli eşitsizlikler ispatlanabilir

6. KAYNAKLAR

- [1] D. S. Mitrinovic, J. Pecaric, and A. M. Fink, *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives*. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 1991, vol. 53.
- [2] D. S. Mitrinovic and P. M. Vasic, *Analytic inequalities*. New York, USA: Springer, 1970, vol. 61.
- [3] D. S. Mitrinovic, J. Pecaric, and A. M. Fink, *Classical and new inequalities in analysis*. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2013, vol. 61.
- [4] J. E. Pecaric and Y. L. Tong, *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*. San Diego, USA: Academic Press, 1992.
- [5] B. G. Pachpatte, *Analytic inequalities: recent advances*. Amsterdam, Paris: Atlantis press, 2012, vol. 3.
- [6] S. Dragomir and R. Agarwal, “Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 11, no. 5, pp. 91–95, 1998.
- [7] U. S. Kirmaci, “Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 147, no. 1, pp. 137–146, 2004.
- [8] M. Alomari, M. Darus, and U. S. Kirmaci, “Refinements of hadamard-type inequalities for quasi-convex functions with applications to trapezoidal formula and to special means,” *Computers & mathematics with applications*, vol. 59, no. 1, pp. 225–232, 2010.
- [9] A. G. Azpeitia, “Convex functions and the hadamard inequality,” *Revista Colombiana de Matematicas*, vol. 28, no. 1, pp. 7–12, 1994.
- [10] M. Bessenyei, “The hermite–hadamard inequality in beckenbach’s setting,” *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 364, no. 2, pp. 366–383, 2010.
- [11] J. de la Cal, J. Cárcamo, and L. Escauriza, “A general multidimensional hermite–hadamard type inequality,” *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 356, no. 2, pp. 659–663, 2009.
- [12] S. S. Dragomir and C. Pearce, “Selected topics on hermite-hadamard inequalities and applications,” *Mathematics Preprint Archive*, vol. 2003, no. 3, pp. 463–817, 2003.
- [13] M. E. Özdemir, M. Avcı, and E. Set, “On some inequalities of hermite–hadamard type via m-convexity,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 23, no. 9, pp. 1065–1070, 2010.

- [14] M. E. Özdemir, M. Avci, and H. Kavurmaci, “Hermite–hadamard-type inequalities via (α, m) -convexity,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 61, no. 9, pp. 2614–2620, 2011.
- [15] S. Qaisar and S. Hussain, “On hermite-hadamard type inequalities for functions whose first derivative absolute values are convex and concave,” *Fasciculi Mathematici*, vol. 58, no. 1, pp. 155–166, 2017.
- [16] A. Saglam, M. Z. Sarikaya, and H. Yildirim, “Some new inequalities of hermite-hadamard’s type,” *Kyungpook Mathematical Journal*, vol. 50, pp. 399–410, 2010.
- [17] E. Set, M. E. Ozdemir, and M. Z. Sarikaya, “New inequalities of ostrowski’s type for s -convex functions in the second sense with applications,” *Facta Universitatis: Series Mathematics and Informatics*, vol. 27, no. 1, p. 67–82, 2012.
- [18] G. B. Thomas and R. L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry: Part I*. Addison-Wesley, 1992.
- [19] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev *et al.*, *Fractional integrals and derivatives*. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993, vol. 1.
- [20] A. Kilbas, *Theory and applications of fractional differential equations*.
- [21] U. N. Katugampola, “A new fractional derivative with classical properties,” *arXiv preprint arXiv:1410.6535*, 2014.
- [22] I. Podlubny, “Fractional differential equations, vol. 198 of mathematics in science and engineering,” 1999.
- [23] A. Akkurt, M. E. Yildirim, and H. Yildirim, “On some integral inequalities for (k, h) -riemann-liouville fractional integral,” *New Trends in Mathematical Sciences*, vol. 4, no. 2, p. 138, 2016.
- [24] E. C. De Oliveira and J. A. Tenreiro Machado, “A review of definitions for fractional derivatives and integral,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, 2014.
- [25] K. S. Miller and B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. New York, USA: Wiley, 1993.
- [26] S. S. Dragomir and C. Pearce, “Selected topics on hermite-hadamard inequalities and applications,” *Mathematics Preprint Archive*, vol. 2003, no. 3, pp. 463–817, 2003.
- [27] L. Fejér, “Über die fourierreihen, ii, math,” *Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.*, vol. 24, pp. 369–390, 1906.
- [28] M. Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz, and N. Başak, “Hermite–hadamard \mathcal{E}^{TM} s inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities,” *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 57, no. 9-10, pp. 2403–2407, 2013.
- [29] K.-L. Tseng, G.-S. Yang, K.-C. Hsu *et al.*, “Some inequalities for differentiable mappings and applications to fejér inequality and weighted trapezoidal formula,” *Taiwanese journal of Mathematics*, vol. 15, no. 4, pp. 1737–1747, 2011.

- [30] I. İşcan, “Hermite-hadamard-fejer type inequalities for convex functions via fractional integrals,” *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, vol. 60, no. 3, p. 355–366, 2015.
- [31] G. Anastassiou, “General fractional hermite–hadamard inequalities using m -convexity and (s, m) -convexity,” *Frontiers in Time Scales and Inequalities*, vol. 237, p. 255, 2016.
- [32] H. Chen and U. N. Katugampola, “Hermite–hadamard and hermite–hadamard–fejér type inequalities for generalized fractional integrals,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 446, no. 2, pp. 1274–1291, 2017.
- [33] G. Farid, A. U. Rehman, and M. Zahra, “On hadamard-type inequalities for k -fractional integrals,” *Konuralp Journal of Mathematics*, vol. 4, no. 2, pp. 79–86, 2016.
- [34] M. Iqbal, S. Qaisar, and M. Muddassar, “A short note on integral inequality of type hermite–hadamard through convexity,” *Journal of Computational Analysis and Applications*, vol. 21, no. 5, pp. 946–953, 2016.
- [35] H. F. Gidergelmez, A. Akkurt, and H. Yıldırım, “Hermite-hadamard type inequalities for generalized fractional integrals via strongly convex functions,” *Konuralp Journal of Mathematics*, vol. 7, no. 2, pp. 268–273.
- [36] İ. İşcan, “Generalization of different type integral inequalities for s -convex functions via fractional integrals,” *Applicable Analysis*, vol. 93, no. 9, pp. 1846–1862, 2014.
- [37] M. Jleli and B. Samet, “On hermite-hadamard type inequalities via fractional integrals of a function with respect to another function,” *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, vol. 9, no. 3, pp. 1252–1260, 2016.
- [38] M. A. Noor and M. U. Awan, “Some integral inequalities for two kinds of convexities via fractional integrals,” *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics*, vol. 5, no. 2, pp. 129–136, 2013.
- [39] M. E. Ozdemir, M. Avci, and H. Kavurmaci, “Hermite-hadamard type inequalities for s -convex and s -concave functions via fractional integrals,” *Turkish Journal of Science*, vol. 1, no. 1, pp. 28–40, 2016.
- [40] M. Z. Sarikaya and H. Yildirim, “On hermite-hadamard type inequalities for riemann-liouville fractional integrals,” *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 17, no. 2, pp. 1049–1059, 2016.
- [41] M. Z. Sarikaya and H. Budak, “Generalized hermite-hadamard type integral inequalities for fractional integrals,” *Filomat*, vol. 30, no. 5, pp. 1315–1326, 2016.
- [42] M. Z. Sarikaya, A. Akkurt, H. Budak, M. E. Yıldırım, and H. Yıldırım, “Hermite-hadamard’s inequalities for conformable fractional integrals,” *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, vol. 9, no. 1, pp. 49–59, 2019.

- [43] E. Set, M. Z. Sarikaya, M. E. Özdemir, and H. Yıldırım, “The hermite-hadamard’s inequality for some convex functions via fractional integrals and related results,” *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, vol. 10, no. 2, pp. 69–83, 2014.
- [44] E. Set, İ. İşcan, M. Z. Sarikaya, and M. E. Özdemir, “On new inequalities of hermite–hadamard–fejér type for convex functions via fractional integrals,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 259, pp. 875–881, 2015.
- [45] J. Wang, J. Deng, and M. Fečkan, “Hermite-hadamard-type inequalities for r -convex functions based on the use of riemann-liouville fractional integrals,” *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 65, no. 2, 2013.
- [46] J. Wang, X. Li, C. Zhu *et al.*, “Refinements of hermite-hadamard type inequalities involving fractional integrals,” *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, vol. 20, no. 4, pp. 655–666, 2013.
- [47] Y. Zhang and J. Wang, “On some new hermite-hadamard inequalities involving riemann-liouville fractional integrals,” *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2013, no. 1, p. 220, 2013.
- [48] A. Ostrowski, “Über die absolutabweichung einer differentiierebaren funktion von ihrem integralmittelwert.” *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 10, pp. 226–227, 1937.
- [49] E. Set, “New inequalities of ostrowski type for mappings whose derivatives are s -convex in the second sense via fractional integrals,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 63, no. 7, pp. 1147–1154, 2012.
- [50] R. P. Agarwal, M.-J. Luo, and R. K. Raina, “On ostrowski type inequalities,” *Fasciculi Mathematici*, vol. 56, no. 1, pp. 5–27, 2016.
- [51] H. Budak, M. Z. Sarikaya, and E. Set, “Generalized ostrowski type inequalities for functions whose local fractional derivatives are generalized s -convex in the second sense,” *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, vol. 15, no. 4, pp. 11–21, 2016.
- [52] I. A. Baloch and İ. İşcan, “Some ostrowski type inequalities for harmonically-convex functions in second sense,” *International Journal of Analysis*, vol. 2015, 2015.
- [53] S. S. Dragomir, “Ostrowski type inequalities for riemann-liouville fractional integrals of bounded variation, hölder and lipschitzian functions,” *Preprint Research Group in Mathematical Inequalities and Applications*, vol. 20, 2017.
- [54] A. Guezane-Lakoud and F. Aissaoui, “New fractional inequalities of ostrowski type,” *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics*, vol. 5, no. 2, pp. 103–106, 2013.
- [55] M. A. Noor, K. I. Noor, and M. U. Awan, “Fractional ostrowski inequalities for (s, m) -godunova-levin functions,” *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, vol. 30, no. 4, pp. 489–499, 2015.

- [56] M. Sarikaya and H. Budak, “Generalized ostrowski type inequalities for local fractional integrals,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 145, no. 4, pp. 1527–1538, 2017.
- [57] M. Z. Sarikaya and H. Filiz, “Note on the ostrowski type inequalities for fractional integrals,” *Vietnam Journal of Mathematics*, vol. 42, no. 2, pp. 187–190, 2014.
- [58] E. Set, A. Akdemir, and I. Mumcu, “Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are convex via conformable fractional integrals,” *Journal of Advanced Mathematical Studies*, vol. 10, no. 3, pp. 386–395, 2017.
- [59] H. Yildirim and Z. Kirtay, “Ostrowski inequality for generalized fractional integral and related inequalities,” *Malaya Journal of Matematik*, vol. 2, no. 3, pp. 322–329, 2014.
- [60] C. Yildiz, M. E. Özdemir, and M. Z. Sarikaya, “New generalizations of ostrowski-like type inequalities for fractional integrals,” *Kyungpook Mathematical Journal*, vol. 56, pp. 161–172, 2016.
- [61] S. Erden and M. Z. Sarikaya, “On generalized some inequalities for convex functions,” *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, p. 455, 2017.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : EBRU PEHLİVAN
Doğum Tarihi ve Yeri : DÜZCE 1995
Yabancı Dili : İngilizce
Eposta : ebrpehlivan.1453@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Anabilimdalı	Düzce Üniversitesi	2020
Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2018
Lise		Düzce Anadolu İmam Hatip Lisesi	2013

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

- A1. H. Budak, F. Ertuğral and E. Pehlivan, “Hermite-Hadamard type inequalities for twice differentiable functions via generalized fractional integrals,” *Filomat*, vol. 33, no. 15, pp. 4967-4979, 2019.
- A2. H. Budak, E. Pehlivan and M. Z. Sarikaya, “On the generalized weighted fractional inequalities,” *Turkish Journal of Inequalities*, vol. 3, no.2, pp. 34–52, 2019.
- A3. H. Budak and E. Pehlivan, “Weighted Ostrowski, trapezoid and midpoint type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals,” *AIMS Mathematics*, vol. 5, no. 3, pp. 1960–1984, 2020.

- A4. H. Budak and E. Pehlivan,, “Some inequalities for weighted area balance via functions of bounded variation,” *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, vol.50, no. 2, pp. 455–466, 2020.
- A5. Hüseyin Budak, Ebru Pehlivan and Pınar Kösem, “On extensions of generalized fractional Hermite-Hadamard inequalities,” *Bulletin of the Allahabad Mathematical Society*, in press.
- A6. Hüseyin Budak, Ebru Pehlivan and Pınar Kösem, “On new extensions of Hermite-Hadamard inequalities for generalized fractional integrals,” *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, in press.
- A7. Hüseyin Budak, Ebru Pehlivan, Muhammad Aamir Ali and Artion Kashuri, “New inequalities of Hermite-Hadamard type for twice differentiable functions via generalized fractional integrals,” *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, in press.