T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARIN STARLIKE (YILDIZIL) VE KONVEKS OLMASI İÇİN YETERLİLİK ŞARTLARI ÜZERİNE

ALAATTİN AKYAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. İSMET YILDIZ

DÜZCE, 2021

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARIN STARLIKE (YILDIZIL) VE KONVEKS OLMASI İÇİN YETERLİLİK ŞARTLARI ÜZERİNE

Alaattin AKYAR tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
Biruni Üniversitesi

Doç. Dr. Fuat USTA
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Aydın SEÇER
Yıldız Teknik Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 15/06/2021

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

15 Haziran 2021

Alaattin AKYAR

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. İsmet Yıldız'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca katkılarını esirgemeyen çok değerli hocalarım Prof. Dr. Mustafa Bayram ve Doç. Dr. Fuat Usta'ya çok teşekkür ediyorum. Ayrıca, Düzce Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nün değerli hocalarına da her türlü destekleri için teşekkür ederim.

Son olarak sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma şükranlarımı sunarım.

15 Haziran 2021 **Alaattin AKYAR**

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SİMGELER

$\mathcal{A}$	$\mathbb{D}$ de normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı
$(a)_n$	Pochhammer sembolü
$Arg(z)$	Bir kompleks sayının esas argümenti
$\beta(x,y)$	Beta fonksiyonu
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_\infty = \tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi
$\mathcal{C}$	Konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(\alpha)$	α. dereceden konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{CC}$	Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
D	Basit bağlantılı bölge
$\mathbb{D}$	Açık birim disk yani $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \lvert z \rvert < 1\}$
$D(z_0,r)$	z_0 merkezli ve r yarıçaplı komşuluk
$\bar{D}(z_0,r)$	z_0 merkezli ve r yarıçaplı komşuluğun komplementi
$\partial D(z_0,r)$	z_0 merkezli ve r yarıçaplı komşuluğun sınırı
$F(a,b,;c;z) = {}_2F_1(a,b;c;z)$	Gauss hipergeometrik fonksiyonu
${}_1F_1(a;c;z)$	Konfluent hipergeometrik fonksiyonu
${}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z)$	Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu
$f^{(n)}$	Bir f fonksiyonunun n. dereceden türevi
f^{-1}	f fonksiyonunun tersi
$f \circ g$	f ile g fonksiyonlarının bileşkesi
$\Im f$	f fonksiyonunun sanal kısmı
$k(z)$	Koebe fonksiyonu
$k_\alpha(z)$	Koebe fonksiyonunun rotasyonu
$M(z)$	Möbius dönüşümü
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$	Doğal sayılar ve sıfır
$\Re f$	f fonksiyonunun reel kısmı
Δ	Birim disk $\mathbb{D}$ nin komplementi
$\Gamma(z)$	Gamma fonksiyonu
$\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$	Reel sayılar kümesi
$\mathcal{S}$	Birim disk $\mathbb{D}$ de normalize edilmiş analitik ve univalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	Orijine göre starlike(yıldızıl) fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	α. dereceden starlike fonksiyonların sınıfı
U	Basit bağlantılı bölge
γ	Kompleks düzlemde bir eğri
Ω	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
$\sum$	$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \lvert z \rvert > 1\}$ de tanımlı analitik ve univalent fonksiyonların sınıfı
$\sum_0$	$\sum$ de $w_0 = 0$ değerini almayan fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi

ÖZET

HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARIN STARLIKE (YILDIZIL) VE KONVEKS OLMASI İÇİN YETERLİLİK ŞARTLARI ÜZERİNE

Alaattin AKYAR
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Haziran 2021, 200 sayfa

Bu tezde, hipergeometrik ve ilgili fonksiyonların starlike ve konveks olması incelenmiştir. Özellikle $zF(a,b;c;z)$ Gauss hipergeometrik fonksiyonunun r bir pozitif tamsayı olmak üzere 2^{-r} dereceden starlike ve konveks fonksiyonlarının sınıflarında olması için a,b,c parametreleri üzerindeki koşulları verilmiştir. Tez yedi bölümden oluşmaktadır. Yapılan tezin bölüm bazında kısa bir açıklaması aşağıdaki gibidir: İlk bölüm, kısa bir literatür taramasıyla giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde, tek değişkenli kompleks fonksiyonlarla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölüm, analitik ve univalent fonksiyon teorisinin temel tanım ve teoremleri ile ilgili olup ayrıca bu bölümde univalent fonksiyonların temel özellikleri ve univalent fonksiyonların altsınıfları verilmiştir. Dördüncü bölümde, hipergeometrik fonksiyonlar ve ilgili tanımlar, teoremler ve ilgili fonksiyonlar verildi. Beşinci bölüm tezin ana kısmı olup, bu bölümde $zF(a,b;c;z)$ Gauss hipergeometrik fonksiyonunun r bir pozitif tamsayı olmak üzere 2^{-r} dereceden starlike ve konveks fonksiyonlarının sınıflarında olması için a,b,c parametreleri üzerindeki koşulları sağlayan teoremler ve ispatları verilmiştir. Son olarak altıncı bölüm, elde edilen sonuçlar ve tavsiyeler içindir.

Anahtar sözcükler: Analitik fonksiyon, Hipergeometrik fonksiyon, Konveks fonksiyon, Starlike fonksiyon, Univalent fonksiyon.

ABSTRACT

ON SUFFICIENT CONDITIONS FOR STARLIKENESS AND CONVEXITY OF HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

Alaattin AKYAR
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
June 2021, 200 pages

The present thesis which is devoted to a study of starlikeness and convexity of hypergeometric and related functions. In particular interested in finding conditions on the parameters a,b,c so that a Gauss hypergeometric function $zF(a,b;c;z)$ to be in various of starlike and convex fonctions of order 2^{-r} with r is a positive integer. This thesis consist of seven chapters. A brief chapter-wise description of the thesis done is as follows: The first chapter is devoted for introduction with a brief literature review. In the second chapter, basic definitions and theorems about complex functions of one variable are given. The third chapter concerned with basic definitions and theorems are given for analytic and univalent function theory, fundamental properties of univalent functions and their subclass. In the fourth chapter hypergeometric functions and related basic concept, definitions and theorems are given, and related functions are given.In the fifth chapter, performed in this work, is the main part of this thesis. We are fundamentally focused on obtaining conditions on the parameters a,b,c in order that the $zF(a,b;c;z)$ Gauss hypergeometric function to be in numerous subclasses of starlike and convex functions of order 2^{-r}, with r is a positive integer . Finally the sixth chapter is for the results and recommendations obtained.

Keywords: Analytic function, Convex function, Hypergeometric function, Starlike function, Univalent function.

EXTENDED ABSTRACT

ON SUFFICIENT CONDITIONS FOR STARLIKENESS AND CONVEXITY OF HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

Alaattin AKYAR
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
June 2021, 200 pages

1. INTRODUCTION

It is well known that the complex analysis provides powerful and easy-to-use mathematical tools for solving problems that are either very difficult or virtually impossible to solve in any other way. Many Mathematical concepts becomes more explicit when examined in the light of complex function theory, for instance the Bieberbach Conjecture [1]. Geometric function theory is that one of important branch of Complex function theory, which deals and studies the geometric properties of analytic functions. That is, Geometric function theory involves finding the relationship between the analytic properties of the function of complex variable $w = f(z)$, and the geometrical properties of the image domain in $U \subset \mathbb{C}$. Its origins date back to the 19th century and are evolved with new applications emerging continually.

The cornerstone of the Geometric function theory is the theory of univalent function which was studied by Koebe in 1907 [2]. He first studied the classical Riemann mapping theorem [3], one of most remarkable results in complex function theory is, states that any simply connected proper subset of $\mathbb{C}$ can be mapped conformally onto the unit disk $\mathbb{D}$. That is, if $U \subset \mathbb{C}$ is simly connected domain and $z_0 \in U$, then there exists a unique conformal transformation $f : U \to \mathbb{D}$ with $f(z_0) = 0$ and $f'(z_0) > 0$. Therefore, statements about univalent functions on the unit disk $\mathbb{D}$. For this reason, most of this field is concerned with the classes of functions analytic and univalent in the unit disk $\mathbb{D}$. The unit disk $\mathbb{D}$ consist all point $z \in \mathbb{D}$ of modulas $|z| < 1$. Intuitively the function $w = f(z)$ is said to be univalent (or one-to-one or schlicht) if it does not take the value twice in U. Without loss of generality we assume to be unit disk $\mathbb{D} = \{|z| < 1 : z \text{ is a complex number}\}$ is taken instead of the U region. The main reason of this mathematical manipulation is to avoid many complicated that may arise when the analytic functions defined in different simply connected regions due to the nature of the work are desired to be classified.

One of the most famous problems in this field was Bieberbach Conjecture [1]. In 1916, Bieberbac proved that for every $w = f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, which are analytic and univalent in the unit disk $\mathbb{D}$, $|a_2| \leq 2$ with equality only for the rotation of the Koebe function $k(z) = z(1-z)^{-2}$ [2]. In the most general sense, the Bieberbach Conjecture is that the n th coefficient of the power series of an Univalent function is not greater than n. The chronological order of the studies on this conjecture is such: The Bieberbach Conjecture for the third coefficient was verified by K. Löwner in 1923 [4]. In 1955, P.R Garabedian and M. Schiffer verified the Bieberbach Conjecture for the fourth coefficient [5]. The Bieberbach Conjecture for the sixth coefficient was verified in 1968 by R. N. Pederson and, independently, by M. Ozawa [6]. In 1972, Pederson and Schiffer verified the Bieberbach Conjecture for the fifth coefficient [7]. The general case was proved by French American mathematician Louis de Branges in 1984 [8]. That is, for each $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, we have $|a_n| \leq n$, for $n = 2, 3, \ldots$. Furthermore, equality occurs for anyone n only when f is a rotation of the Koebe function. In dealing with univalent function theory it is often helpful to guess that the Koebe function $k(z) = z(1-z)^{-2}$ may be a extremal function for whatever property we are investigating. Unfortunately, there are no such convenient possible extremals known in this field. This proof has triggered the studies in this area. More precisely, he suggested various directions and approaches about Univalent function theory. Recently, Univalent function theory found many applications in various fields of applied sciences such as nonliner integrable system theory, fluid dynamics, modern mathematical physics and theory of partial differential equations. Furthermore, there are also more interesting applications of Univalent function theory at neural networks. Finally, recall that the theory of univalent function owes its modern development the amazing Riemann mapping theorem.

One of the most important areas of complex function theory is Geometric function theory. As stated above, the geometric function theory aims to relate the analytical properties of conformal transformations to the geometric properties of their images. Bernard Riemann was the first scientist to introduce conformal transformations in the theory of complex functions. The Riemann mapping theorem ensures that any region in the complex plane (preferably simply connected) can be conformally mapped to any other region. Put differently, Riemann always showed that there is an analytic function that pairs a simply connected region with another. This claim of Riemann could not fully demonstrate the power it had until the birth of the univalent functions theory. With the magic touch of the Koebe, this power has begun to be fully displayed. Koebe proved to be an analytical and univalent single function that maps a simple connected region to a unit disk to satisfy certain conditions. This accelerated the development of geometric function theory, which is the interaction of geometry and analysis. Images of analytical and univalent functions defined in a simply connected region describe various geometries and characterizations. This has led scientists to classify functions that have the same geometry and characterizations. Obviously, classifying different functions with different domains will be very difficult and even impossible. In order to eliminate this difficulty, as stated before, the functions defined on the unit disk are taken into account. This enabled the classification of analytical and univalent functions on the unit disk. These functions can be included in classes such as starlike, convex, close-to-starlike, and close-to-convex, depending on the characterization of their images. If a function is graphed, it will be quite easy to express which class it belongs to. However, most of the time we may not have such a chance. Even plotting the function can be very difficult. There are a number of requirements and sufficient conditions that we can use in these situations. Especially those well-known and commonly used are as follows; Let denote the class of functions normalized by $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, which are analytic in the unit disk $\mathbb{D}$. Thus, a function $f \in A$ is called starlike with respect to the origin 0, denoted by $f \in S^*$, if and only if $\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$. Similarly, a function $f \in A$ is called convex, denoted by $f \in C$, if and only if $\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0$ [9]. More generally, for a given parameter $\alpha\,(0 \leq \alpha < 1)$, a function $f \in A$ is called in the unit disk $\mathbb{D}$;

(i) A starlike function of order α , denoted by $f \in S^*(\alpha)$, if and only if

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

(ii) A convex function of order α , denoted by $f \in C(\alpha)$, if and only if

$$\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha.$$

It is well known that $S^*(0) = S^*$ and $C(0) = C$.

The hypergeometric functions were introduce by Euler when $|z| < 1$ as power series expansion of the form

$${}_2F_1(a,b;c;z) = 1+\frac{ab}{c1!}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}z^2+\cdots$$

where a,b and c are rational parameters, and the closely related Gamma function are among the most important in the class of special function in mathematical analysis, and also are frequently in applications. Recently this particular hypergeometric function has played an important role in the development of univalent function theory. Hypergeometric functions are a generalization of exponential functions. They are explicit, computable functions that can also be manipulated analytically to desired function. By specialization of the parameters, Euler obtained the various classical functions that were around at that time [10]. For example, $b = c = 1$ gives Newton's binomial series ${}_2F_1(a,1;1;z) = (1-z)^{-a}$ and $a = c = 1$ and $b = 2$ then $z{}_2F_1(1,2;1;z) = z(1-z)^{-2}$ gives Koebe function. Euler also found the hypergeometric equation, which is the second order-linear differential equation

$$z(z-1)\,{}_2F_1''(a,b;c;z)+((a+b+1)z-c)\,{}_2F_1'(a,b;c;z)+ab\,{}_2F_1(a,b;c;z) = 0$$

that is satisfied by hypergeometric functions. Years later, Gauss studied hypergeometric functions not only as rational values of Euler's hypergeometric functions but also as solutions of the hypergeometric equation throughout the complex plane, an approach that was entirely new at the time. He published only part of his work in 1812. The vast field of these functions contains many formulas and identities used by mathematicians, engineers and physicists. Functions which are important enough to be given their own name are known as 'special functions'. These include the well-known logarithmic, exponential, trigonometric functions, and extend to cover the Gamma, Beta and Zeta functions, among many others. Special functions have extensive applications in mathematics, as well as in applied areas such as acoustics, electrical current, fluid dynamics, heat conduction and solutions of wave equations [11]. On the other hand, if the hypergeometric function is at the heart of special function theory, also the Gamma function is central to the theory of hypergeometric functions. In the words of Andrews at all., ‘the Gamma function and Beta integrals… are essential to understanding hypergeometric functions’ [10].

The main objective of this study is to give some conditions for the convexity and starlikeness of a (Gaussian) hypergeometric functions. The pioneering studies in the literature on this subject can be found in the texts such as [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18].

1. GİRİŞ

Kompleks analizin, çok zor veya başka bir şekilde çözülmesi neredeyse imkansız olan problemleri çözmek için güçlü ve kullanımı kolay matematiksel araçlar sağladığı iyi bilinmektedir. Bir çok matematiksel kavram, kompleks fonksiyon teorisi ışığında incelendiğinde daha belirgin hale gelir, örneğin Bieberbach varsayımı [1]. Geometrik fonksiyon teorisi analitik fonksiyonların geometrik özelliklerini ele alan ve inceleyen, kompleks fonksiyon teorisinin önemli dallarından biridir.Yani, Geometrik fonksiyon teorisi, kompleks değişkenli $w = f(z)$ fonksiyonunun analitik özellikleri ile bir $U \subset \mathbb{C}$ içerisindeki görüntü kümesinin geometrik özellikleri arasındaki ilişkiyi bulmayı içerir. Kökenleri 19. Yüzyıla kadar dayanmakta olup, sürekli olarak ortaya çıkan yeni uygulamalar ile gelişmektedir.

Geometrik fonksiyon teorisinin temel taşı, 1907 yılında Koebe tarafından çalışılan univalent (yalınkat) fonksiyon teorisidir [2]. Koebe, ilk olarak kompleks düzlem $\mathbb{C}$ nin uygun herhangi bir alt kümesinin birim disk $\mathbb{D}$ ye konformal olarak eşlenebileceğini ifade eden klasik Riemann dönüşüm teoremini inceledi [3]. Yani, eğer $U \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in U$ ise, bu durumda $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ olmak üzere bir tek $f : U \to \mathbb{D}$ konformal dönüşümü vardır. Bu nedenle univalent (yalınkat) fonksiyonlarla ilgili açıklamalar birim disk üzerindedir. Dolayısıyla, bu alanın çoğu, birim diskte analitik ve univalent olan fonksiyonların sınıfları ile ilgilidir. Birim disk $\mathbb{D}$, modülü 1 den küçük (yani $|z| < 1$) olan bütün $z \in \mathbb{C}$ noktalarından oluşur. Sezgisel olarak, bir $w = f(z)$ fonksiyonuna univalent (veya bire-bir veya schlicht) dir denir eğer $U \subset \mathbb{C}$ de aynı değeri iki kez almıyorsa. Genelliği bozmadan U yu birim disk $\mathbb{D} = \{|z| < 1 : z \text{ bir kompleks sayı}\}$ olarak kabul edebiliriz. Bu matematiksel manipülasyonun esas nedeni, işin doğası gereği farklı basit bağlantılı bölgelerde tanımlı olan analitik fonksiyonlar sınıflandırılmak istendiğinde ortaya çıkabilecek birçok komplike durumun önüne geçebilmektir.

Bu alandaki en ünlü problemlerden biri Bieberbach Varsayımıdır [1]. 1916 yılında, Bieberbach eşitsizlikteki eşitliğin sadece $k(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonunun rotasyonları için geçerli olmak üzere, birim disk $\mathbb{D}$ de analitik ve univalent olan her bir $w = f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ olduğunu ispatladı. En genel anlamda, Bieberbach varsayımı bir univalent fonksiyonunun kuvvet serisinin n. teriminin katsayısının n den büyük olmadığı yöndedir. Bu varsayım üzerine yapılan çalışmaların kronolojik sırası şöyledir: Üçüncü katsayı için Bieberbach varsayımı, 1923'te K. Löwner tarafından doğrulandı [4]. 1955'te P.R Garabedian ve M. Schiffer , dördüncü katsayısı için Bieberbac varsayımını doğruladı [5]. Altıncı katsayı için Bieberbach varsayımı, 1968'de R. N. Pederson ve bağımsız olarak M. Ozawa tarafından doğrulandı [6]. 1972'de Pederson ve Schiffer , beşinci katsayısı için Bieberbach varsayımını doğruladı [7]. Genel durum 1984 yılında Fransız kökenli Amerikalı matematikçi Luis de Branges tarafından kanıtlandı [8]. Yani, $n = 2, 3, \ldots$ olmak üzere her bir $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ için $|a_n| \leq n$ dir. Ayrıca, herhangi bir n için eşitlik yalnızca, f fonksiyonu $k(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olduğunda meydana gelir. Univalent fonksiyon teorisi ile ilgili olarak, $k(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonunun araştırdığımız her özellik için ekstramal bir fonksiyon olabileceğini tahmin etmek çok yararlıdır [2]. Ne yazık ki, bu alanda bilinen böyle, bir başka olası ekstremal fonksiyon yoktur. Bu kanıt, bu alandaki çalışmaları tetikledi. Daha doğrusu, Univalent fonksiyon teorisi hakkında çeşitli yönler ve yaklaşımlar önerdi. Son zamanlarda, Univalent fonksiyon teorisi, doğrusal olmayan integrallenebilen sistem teorisi, akışkan dinamiği, modern matematiksel fizik ve kısmi diferansiyel denklemler teorisi gibi uygulamalı bilimlerin çeşitli alanlarında birçok uygulama bulmuştur. Ayrıca, Univalent fonksiyon teorisinin sinir ağlarında daha ilginç uygulamaları vardır. Son olarak, Univalent fonksiyon teorisinin modern gelişimini şaşırtıcı Riemann dönüşüm teoremine borçlu olduğunu hatırlamak gerekir.

Kompleks fonksiyon teorisinin en önemli alanlarından birisi Geometrik fonksiyon teorisidir. Yukarıda da ifade edildiği gibi Geometrik fonksiyon teorisi konformal dönüşümlerin analitik özelliklerini görüntülerinin geometrik özelliklerine ilişkilendirmeyi amaçlar. Kompleks fonksiyonlar teorisinde konformal dönüşümleri tanıtan ilk bilim adamı Bernard Riemann'dır. Riemann dönüşüm teoremi kompleks düzlemdeki herhangi bir bölgeyi (tercihen basit bağlantılı) herhangi bir diğer bölgeye konformal olarak eşlenebileceğini garanti eder. Farklı bir ifadeyle, Riemann her zaman basit bağlantılı bir bölgeyi başka bir bölge ile eşleştiren analitik bir fonksiyon olduğunu gösterdi. Riemann'ın bu iddiası, univalent fonksiyonlar teorisinin doğuşuna kadar sahip olduğu gücü tam olarak sergileyememiştir. Bir başka Alman matematikçi Paul Koebe'nin sihirli dokunuşuyla bu güç tam olarak sergilenmeye başlamıştır. Koebe bazı şartları sağlamak üzere, basit bağlantılı bir bölgeyi birim diske eşleyen analitik ve univalent bir tek fonksiyon olduğunun ispatlamıştır. Bu ise geometri ve analizin etkileşimi olan geometrik fonksiyon teorisinin gelişimini hızlandırmıştır. Basit bağlantılı bir bölgede tanımlı olan analitik ve univalent olan fonksiyonların görüntüleri çeşitli geometrileri ve karakterizasyonları tanımlamaktadır. Bu ise bilim adamlarını aynı geometri ve karakterizasyonlara sahip olan fonksiyonları sınıflandırmaya yöneltmiştir. Açıktır ki farklı tanım kümlerine sahip olan farklı fonksiyonların sınıflandırması oldukça zor ve hatta imkansız olacaktır. Bu zorluğu ortadan kaldırmak için daha öncede ifade edildiği gibi birim disk üzerinde tanımlı fonksiyonlar dikkate alınmaktadır. Bu da birim disk üzerinde analitik ve univalent fonksiyonların sınıflandırılmasını sağlamıştır. Bu fonksiyonlar, görüntülerinin sahip olduğu karakterizasyonlara göre yıldızıl, konveks, yıldıza yakın, konvekse yakın gibi sınıflara dahil edilebilmektedir. Eğer bir fonksiyonun grafiği çizilmiş ise hangi sınıfa dahil olduğunu ifade etmek oldukça kolay olacaktır. Ancak çoğu zaman böyle bir şansa sahip olamaya biliriz. Hatta fonksiyonun grafiğini çizmek oldukça zor olabilir. Bu durumlarda kullanabileceğimiz çok sayıda gerek ve yeter şart vardır. Özellikle iyi bilinen ve yaygın olarak kullanılanlar aşağıdaki gibidir; Birim disk $\mathbb{D}$ de analitik olup $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartları ile normalize edilmiş fonksiyonları sınıfına A diyelim. Bu durumda bir $f \in A$ fonksiyonuna orijine göre starlike (yıldızıl) denir ve $f \in S^*$ olarak gösterilir, ancak ve ancak $\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$ ise. Benzer olarak, bir $f \in A$ fonksiyonuna konveks denir ve $f \in C$ olarak gösterilir, ancak ve ancak $\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0$ ise [9]. Daha genel olarak, verilen bir $\alpha\,(0 \leq \alpha < 1)$ parametresi için, bir $f \in A$ fonksiyonuna birim disk $\mathbb{D}$ de

(i) α derceden starlike denir ve $f \in S^*(\alpha)$ olarak gösterilir ancak ve ancak

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

(ii) α derceden conveks denir ve $f \in C(\alpha)$ olarak gösterilir ancak ve ancak

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha$$

ise. İyi bilinir ki $S^*(0) = S^*$ ve $C(0) = C$ dir.

Hipergeometrik fonksiyonlar ilk olarak, a,b,c ler rasyonel parametreler ve $|z| < 1$ olmak üzere

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = 1 + \frac{ab}{c1!}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}z^2 + \cdots $$

şeklinde bir kuvvet serisi açılımı olarak Euler tarafından tanıtıldı. Gamma fonksiyonuyla yakından ilgili olan bu fonksiyon matematiksel analizde özel fonksiyon sınıfında en önemliler arasındadır ve aynı zamanda uygulamalarda da sıkça kullanılmaktadır. Son zamanlarda bu özel hipergeometrik fonksiyon, univalent fonksiyon teorisinin gelişiminde önemli bir rol oynamıştır. Hipergeometrik fonksiyonlar, üstel fonksiyonların bir genellemesidir. Bunlar, keza istenen fonksiyona analitik olarak da manipüle edilebilen açık, hesaplanabilir fonksiyonlardır. Euler, parametreleri özelleştirme yoluyla, o zamanlarda çeşitli klasik fonksiyonları elde etti [10] . Örneğin, $b = c = 1$ alarak Newton'un ${}_2F_1(a,1;1;z) = (1-z)^{-a}$ binom serisini ve $a = c = 1$ ve $b = 2$ alarak $z {}_2F_1(1,2;1;z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonunu. Keza Euler hipergeometrik fonksiyonlar tarafından sağlanan ikinci dereceden

$$ z(z-1){}_2F_1''(a,b;c;z) + ((a+b+1)z-c){}_2F_1'(a,b;c;z) + ab{}_2F_1(a,b;c;z) = 0 $$

lineer diferansiyel denklemini de bulmuştur. Yıllar sonra Gauss, hipergeometrik fonksiyonları sadece Euler'in rasyonel değerleri için değil, o zamanlar tamamen yeni bir yaklaşım olarak hipergeometrik denklemlerin çözümlerini kompleks düzlem boyunca çalıştı. 1812'de çalışmalarının sadece bir bölümünü yayınladı. Bu fonksiyonların geniş alanı matematikçiler, mühendisler ve fizikçiler tarafından kullanılan birçok formül ve denklem içerir. Kendilerine ad verilecek kadar önemli olan fonksiyonlar 'özel fonksiyonlar' olarak bilinir. Bunlar iyi bilinen logaritmik, üstel, trigonometrik fonksiyonları içerir ve diğerleri arasında Gamma, Beta ve Zeta fonksiyonlarını kapsayacak şekilde genişletilir. Özel fonksiyonlar matematikte olduğu gibi akustik, elektrik akımı, akışkanlar dinamiği, ısı iletimi ve dalga denklemlerinin çözümleri gibi uygulamalı alanlarda da geniş uygulamalara sahiptir [11]. Öte yandan, hipergeometrik fonksiyon özel fonksiyon teorisinin merkezinde ise, Gamma fonksiyonu da hipergeometrik fonksiyon teorisinin merkezindedir. Adrews ve arkadaşlarının ifadesiyle,' Gama fonksiyonu ve Beta integralleri... hipergeometrik fonksiyonları anlamak için şarttır ' [10].

Bu çalışmanın temel amacı, bir (Gaussian) hipergeometrik fonksiyonun starlike ve konveks olması için bazı şartlar vermektir. Bu konuda literatürdeki öncü çalışmalar [12],[13],[14],[15],[16],[17],[18] gibi metinlerde bulunabilir.

2. KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

Hedeflenen amaçlara ulaşabilmek ve konuları belirli bir derinlikte tartışabilmek için öncelikle Kompels analize genel bir bakışla bakmak oldukça önemli olacaktır. Bu anlamda ikinci bölümde kısa bir literatür taramasından sonra, kompleks değişkenki fonksiyonlarla ilgili temel tanımlar ve teoremler verildi.

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

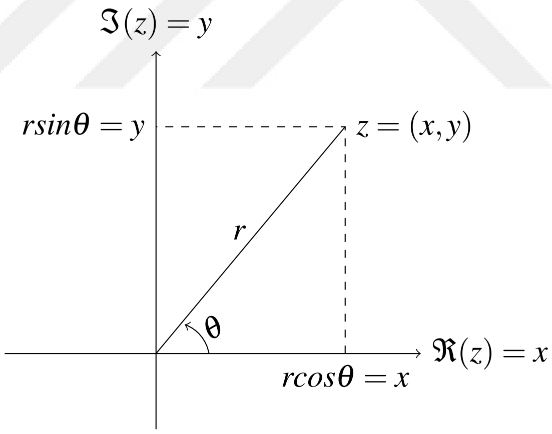
Tarihsel olarak, kompleks sayılar $x^2+1=0$ gibi denklemlerin çözüm arayışlarında ortaya çıkmıştır. Belirli bir dönem, karesi -1 olan reel bir sayı olmadığından hareketle, bilim adamları bu denklemin hiçbir çözümünün olmadığını düşünmüşlerdir. Ancak, 16. yüzyılın ortalarında, İtalyan matematikçi Gerolamo Cardano ve arkadaşları negatif sayıların kareköklerini içeren denklemlerin çözümleri ile ilgili çalışmalar yapıyorlardı. 1777 yılında İsveçli matematikçi Leonhard Euler (1707-1783) $\sqrt{-1}=i$ sembolünü (sanal sayı birimini) tanıttı ve ünlü $e^{xi}=-1$ eşitliğini veya $e^{xi}+1=0$ denklemini ifade etti [19], [20]. Bu denklem kullanılarak elde edilen sayılar ilginç bir doğal yapıya sahip olup matematiğin diğer dört temel sayısını ihtiva eder. Euler denklemi bazen Euler özdeşliği olarak da adlandırılır. $x=\pi$ alınırsa $e, \pi, 1, i$ ve 0 gibi beş temel sayılar arasında ilişki kuran mükemmel bir eşitlik kurulmuş olur. Daha da önemlisi, Euler bu eşitlik ile üstel fonksiyonlarla trigonometrik fonksiyonlar arasında bir ilişki kurmayı da başarmıştır. Dolayısıyla da kompleks sayılarla ilgili çeşitli konular arasında bir köprü görevi görür. Gauss bu formülü görüp hemen çok açık olduğunu yorumlayamayan matematikçilerin birinci sınıf bir matematikçi olamayacağını rapor etmiştir. Bazı matematikçileri Euler tarafından tanıtılan bu yeni sayıyı kabul etmeye ikna etmek birkaç yüzyıl sürdü. Ancak 1804 yılında Fransız matematikçi Abbe Buee (1748-1826)'in sanal sayıların grafiğini çizme fikri, 1806 yılında Robert Argand (1768-1815)'ın bir sanal sayının bir düzlemde nasıl çizileceğini göstermesi, 1831 yılında Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Fransız matematikçi Rene Descartes'ın $a+bi$ gösterimini kompleks sayı olarak adlandırması ve nihayetinde 1833 yılında ise İrlandalı matematikçi William Rowan

Hamilton (1805-1865)'un bir kompleks sayıyı bir çift sıralı reel sayı olarak ele alma fikri, kompleks sayıları daha anlaşılır ve kullanılabilir hale getirmiştir.

Tanım 2.1.1. $\sqrt{-1} = i$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x + iy$ şeklindeki sayılara kompleks sayılar denir. Bu sayılardan oluşan küme kompleks sayılar kümesi ve düzlem de kompleks düzlem olarak adlandırılır. Kompleks sayılar genellikle z ve kompleks sayılar kümesi de $\mathbb{C}$ sembolü ile gösterilir. Bu durumda $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}$ ve $\sqrt{-1} = i\}$ dir.

Tanım 2.1.2. $z = x + iy$ kompleks sayısında x'e bu sayının reel kısmı, y'ye de kompleks sayının imajener kısmı denir. Sırasıyla $\Re(z) = x$ ve $\Im(z) = y$ şeklinde gösterilir.Negatif olmayan $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ reel sayısına da z kompleks sayısının modülü denir. Geometrik olarak bir kompleks sayının modülü başlangıç noktasına yani orijine olan uzaklığıdır.

Bir $z = x + iy$ kompleks sayısı verildiğinde onun reel ve sanal kısımları $\mathbb{R}^2$ nin bir (x, y) elemanını tanımlar. Dolayısıyla bir kompleks sayı Euclid düzleminde yani dik koordinat sisteminde geometrik olarak gösterilebilir.



Şekil 2.1. Kompleks sayının Euclid düzleminde gösterimi.

Genel olarak $xy-$düzlemi kompleks düzlem olarak da adlandırılır. Şekil (2.1) den

$$r^2 = |z|^2 = x^2 + y^2$$
$$cos\theta = \frac{x}{|z|} \Leftrightarrow x = |z|cos\theta$$

ve

$$sin\theta = \frac{y}{|z|} \Leftrightarrow y = |z|sin\theta$$

olduğu kolayca görülebilir. Buradan da $cos\theta + isin\theta = e^{i\theta}$ Euler formülü yardımıyla

$$
\begin{aligned}
z = x + iy = |z|\left(cos\theta + isin\theta\right) = |z|e^{i\theta}, |z| = r \\
= r\left(cos\theta + isin\theta\right) = re^{i\theta}
\end{aligned}
$$

yazılır. Sırasıyla, $x+iy, |z|\left(cos\theta + sin\theta\right), |z|e^{i\theta}$ gösterimleri ile z kompleks sayısının dikdörtgensel (veya kartezyen), kutupsal ve üstel gösterimleri ifade edilmektedir. Görüldüğü gibi Euler formülü trigonometrik fonksiyonlar ile kompleks sayılar arasında geçişi sağlayan oldukça önemli bir formüldür. Öte yandan $tan\theta = \frac{y}{x}$ eşitliğini sağlayan sonsuz sayıda θ reel sayısı vardır. Bu θ reel sayılarına $z = x + iy \neq 0$ kompleks sayısının argümentleri denir ve $\arg(z) = \theta + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ şeklinde gösterilir. Görüldüğü gibi sıfırdan farklı bir kompleks sayının argümenti çok değerlidir. Ancak bunlar arasında $-\pi < \theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \leq \pi$ eşitsizliğinin sağlayan θ reel sayısına $z = x + iy$ kompleks sayısının esas argümenti denir ve $Arg(z) = \theta$ şeklinde gösterilir. Burada θ reel sayısı sezgisel olarak $\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif reel sayıdır. Bir $x - iy$ kompleks sayısına da $x + iy$ sayısının kompleks eşleniği denir ve $\bar{z} = x - iy$ şeklinde gösterilir. $\bar{z}$ sayısı kısaca eşlenik olarak adlandırılır. Kompleks sayılarla ilgili bazı temel gerçekler şöyledir;

(1) $\overline{(\bar{z})} = z$

(2) $2\Re(z) = z + \bar{z}$

(3) $2i\Im(z) = z - \bar{z}$

(4) $z\bar{z} = |z|^2$

(5) $\overline{z_1 \mp z_2} = \bar{z}_1 \mp \bar{z}_2$

(6) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$

(8) $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$

(9) $\Re(z) \leq |\Re(z)| \leq |z|$

(10) $\Im(z) \leq |\Im(z)| \leq |z|$

(11) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(12) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

(13) $log(z) = \ln|z| + i\arg(z), z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

(14) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

(15) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

(16) $(cos\theta + isin\theta)^n = cosn\theta + isinn\theta, n \in \mathbb{Z}$

(17) $z = r(cos\theta + isin\theta) \neq 0$ kompleks sayısının n. dereceden kökleri $k = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ olmak üzere $w_k = r^{1/n}\left[cos\left(\frac{\theta + k.2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\theta + k.2\pi}{n}\right)\right]$ dir.

Sezgisel olarak bir kompleks fonksiyon, bir w kompleks değişkeninin aldığı değerler bir z kompleks seğişkenini aldığı değerlere bağlı olarak değişiyorsa, w (bağımlı değişken) ya z

(bağımsız değişken) nin bir fonksiyonu denir ve $w = f(z)$ şeklinde gösterilir. Bu anlamda formal bir tanım aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.1.3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleks fonksiyonu

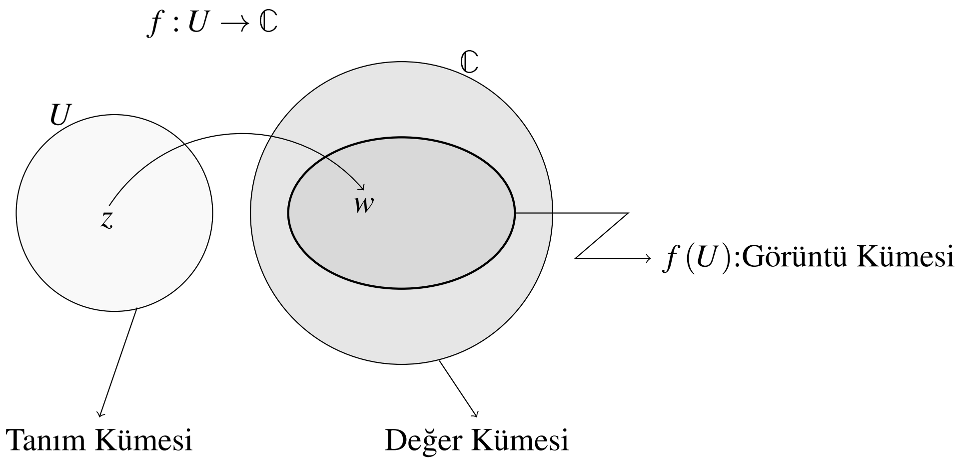
$$z = x + iy \longmapsto w = u(x,y) + iv(x,y)$$

şeklinde olup, öyleki bu fonksiyon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y)), u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

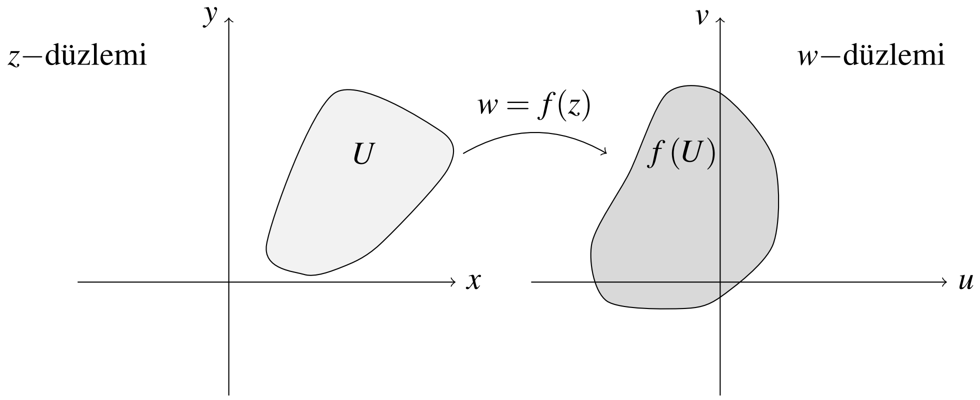
şeklinde de verilebilir. Buna göre bir kompleks fonksiyonu belirtmek için reel $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonlarını belirtmek yeterlidir.

Kompleks sayıların boş olmayan bir U alt kümesini alalım. U üzerinde tanımlanan bir kompleks değişkenli ve kompleks değerli (kısaca kompleks) fonksiyonu U daki her bir $z = x + iy$ sayısını bir $w = u + iv$ sayısına eşleyen bir kuraldır. Burada w sayısına f kompleks fonksiyonunun z deki değeri denir ve $w = f(z) = u + iv$ şeklinde gösterilir. Bir kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyon aşağıda şekilde olduğu gibi Venn şeması ile verebilir.



Şekil 2.2. Kompleks fonksiyon

Bilindiği üzere burada z bağımsız değiken, w ise bağımlı değişken olarak adlandırılır. $f(U)$ kümesine ise $f = w(z)$ tek değişkenli kompleks fonksiyonunun görüntü kümesi denir. Geometrik olarak bir kompleks fonksiyonu göstermek için kompleks fonksiyonun doğası gereği dik koordinat sistemleri ile birlikte iki ayrı düzlem düşünmek uygun olur. Aşağıdaki Şekil (2.3) de görüldüğü gibi sırasıyla bu düzlemler $z-$düzlemi ve $w-$düzlemi olarak adlandırılırlar.



Şekil 2.3. Kompleks fonksiyon grafiği

$z = x + iy$ alınırsa;

$$w = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{2.1}$$

olarak elde edilir. Bu durumda $\Re(f) = u(x,y) : U \to \mathbb{R}$ ve $\Im(f) = v(x,y) : U \to \mathbb{R}$ dir.Öte yandan

$$\Re(f) = u(x,y)$$

$$\Im(f) = v(x,y)$$

denklem sistemi $z-$düzleminden $w-$düzlemine bir dönüşüm tanımladığından, onların bir lineer kombinasyonu olan (2.1) fonksiyonu da $z-$düzleminden $w-$düzlemine bir dönüşüm tanımlar. Daha öncede ifade edildiği gibi, kompleks değişkenli fonksiyonların (yani $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ veya $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) görselleştirilmesi iki boyutlu uzayların aynı anda görselleştirilmesini gerektirir. Kompleks sayıların kuvvetleri alınarak, kuvvet serilerine de genişletilebilen kompleks fonksiyonlar matematiğin çeşitli alanlarında ve diğer bilim dallarında uygulama imkanına sahiptir. Bu anlamda $f(z) = z^n = r^n(cos(n\theta) + isin(n\theta))$ kompleks fonksiyonu alındığında, reel ve sanal kısımlar sırasıyla $\Re(f) = r^n cos(n\theta)$ ve $\Im(f) = r^n sin(n\theta)$ dir. Öte yandan bu fonksiyon orijin merkezli ve 1 birim yarıçaplı kapalı diski kendine eşler. Benzer şekilde $\{re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}\}$ kümesini de orijin merkezli ve 1 birim yarıçaplı kapalı diske(yani, $|z| \leq 1, z \in \mathbb{C}$) eşler.

Örnek 2.1.1. $w = f(z) = \dfrac{2}{z-1}$ fonksiyonu(dönüşümü) altında $|z-2| < 1$ çemberinin görüntüsünü bulalım.

Çözüm. $w = \dfrac{2}{z-1}$ eşitliğinden z çekilirse

$$\begin{aligned} w = \frac{2}{z-1} &\Rightarrow wz - w = 2 \\ &\Rightarrow z = \frac{2}{w} + 1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

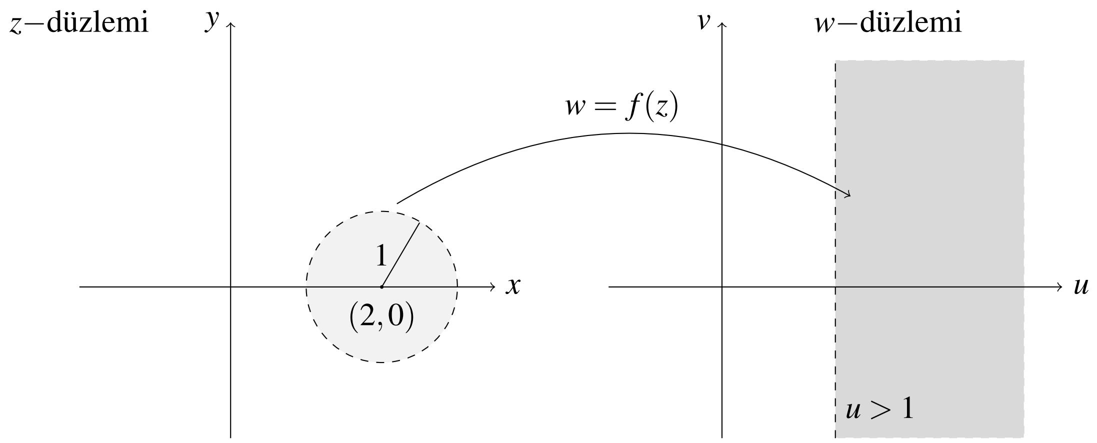
elde edilir. (2.2) ifadesi $|z-2| < 1$ de yerine yazılırsa;

$$\left|\frac{2}{w} + 1 - 2\right| < 1 \Rightarrow |2-w| < |w| \tag{2.3}$$

bulunur. Öte yandan $w = u + iv$ olup (2.3) de yerine yazılırsa;

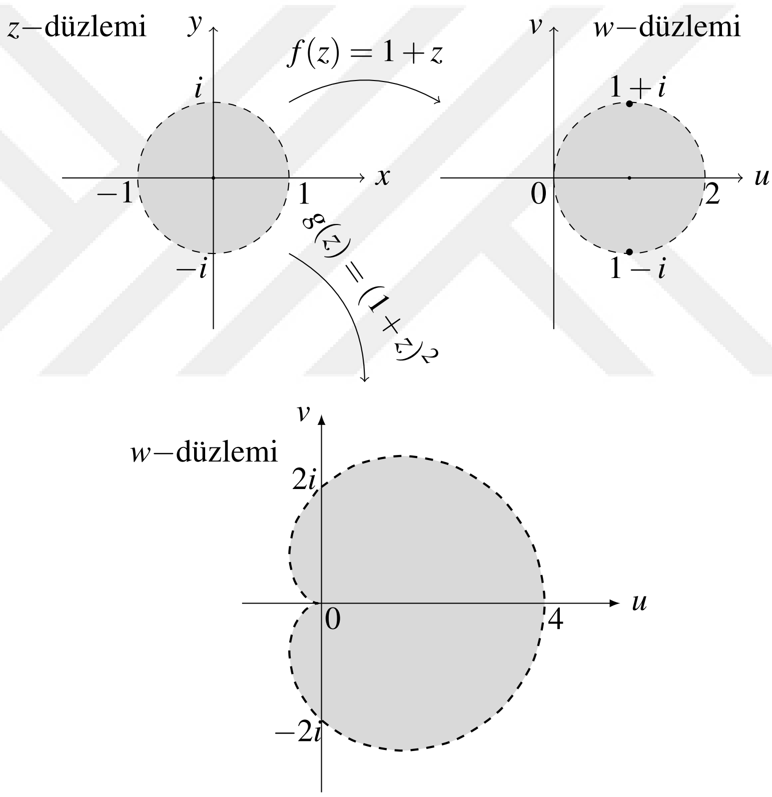
$$\begin{aligned} \Big|(2-u) - iv\Big| < |u+iv| &\Rightarrow (2-u)^2 + v^2 < u^2 + v^2 \\ &\Rightarrow u > 1 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $|z-2| < 1$ in $w = f(z) = \dfrac{2}{z-1}$ dönüşümü altındaki görüntüsü $u > 1$ yarı düzlemidir. Bu durum geometrik olarak aşağıda şekilde olduğu gibi gösterilebilir.



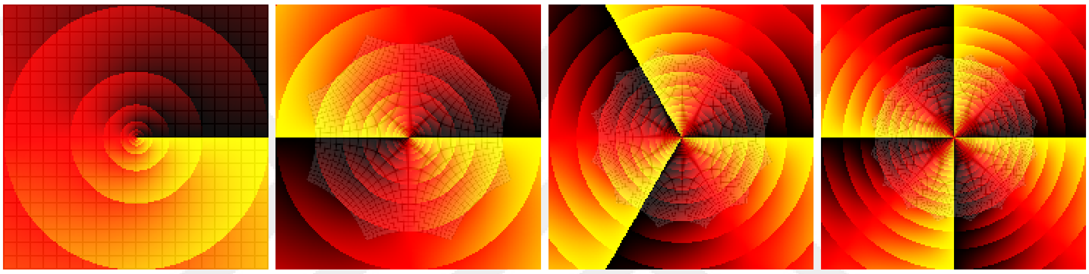
Şekil 2.4. $|z-2| < 1$ çemberinin $w = f(z) = \dfrac{2}{z-1}$ dönüşümü altındaki görüntüsü.

Genel olarak kompleks fonksiyonlar $z-$düzlemindeki bölgeleri $w-$düzlemindeki bölgelere dönüştüren (eşleyen) fonksiyonlardır. Bu anlamda öğle fonksiyonlar vardır ki yukarıda Şekil (2.4) de olduğu gibi sınırlı bir bölgeyi sınırsız bir bölgeye eşleyebilir. Öte yandan öğle fonksiyonlar da vardır ki $z-$düzlemindeki herhangi bir diski $w-$düzleminde sınırlı bir bölgeye eşleyebilir. Bu fonksiyonların belirli bir bölgede analitik, tek değerli ve univalent olma gibi bazı ilave şartlar altında görüntü kümeleri çok ilginç ortak karakterizasyonlara sahip olurlar. Ayrıca sözü edilen karakterizasyonlar kompleks analitik fonksiyonların sınıflandırılması için gerekli olan matematiksel araçları oluşturma çabalarının da temelini oluşturmaktadır. Doğal olarak bu fonksiyonların analitik özellikleri ile görüntü kümelerinin karakterizasyonlarının bir birini nasıl yansıttıkları oldukça merak uyandırmıştır. Bu da tam olarak geometrik fonksiyonların teorisinin bakış açısıdır. Basit bir örnek olarak açık birim disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ nin $f(z) = 1+z$ ve $g(z) = (1+z)^2$ dönüşümleri altındaki görüntüleri sınırlı birer bölgedir.

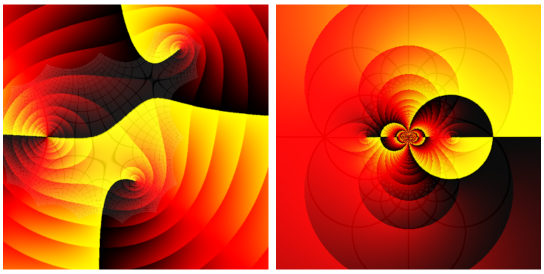


Şekil 2.5. Birim disk $\mathbb{D}$ nin $f(z) = 1+z$ ve $g(z) = (1+z)^2$ fonksiyonları altındaki görüntüsü.

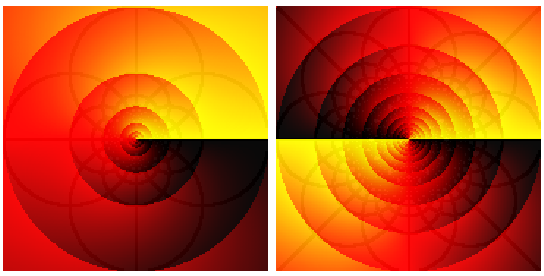
Daha öncede ifade edildiği gibi Geometrik fonksiyonlar alanında yapılan çalışmaların temel amacı, birim disk üzerinde tanımlanan kompleks analitik fonksiyonların ilave şartlar altında bazı çarpıcı özeliklerinin görselleştirilip, geometrik olarak yorumlayıp fonksiyonların sınıflandırılmasıdır. Ancak bazı durumlarda bir kompleks analitik fonksiyonun nasıl bir görüntü kümesine sahip olduğunu ve dolayısıyla hangi fonksiyon sınıfına dahil olduğunu anlamak tek bir grafikten yararlanarak belirlemek zor olabilmektedir. Bu dezavantajlı durum, alan renklendirme (Prof. Frank Farris tarafından ilk kez kullanılan bir terim-1998) olarak bilinen basit bir teknikle kısmen aşılabilmiştir. Bu teknik ya bir sayının resmini kopyalayarak ya da her noktanın rengini belirlemek için bir formül kullanarak $w-$düzlemini boyamaktadır. f nin görüntü kümesindeki her bir w noktasını, tanım kümesinde karşılık gelen z noktasının rengiyle renklendirir. $w-$ düzleminde ortaya çıkan renkli resim, $w = f(z)$ fonksiyonunun grafiğidir. Bu yöntem tabii ki bilgisayar grafikleri için çok uygundur. Alan renklendirmesi, sadece kompleks analitik fonksiyonlar için değil aynı zamanda herhangi bir kompleks fonksiyonun görüntü kümesini renklendirme için de kullanılmaktadır. Aşağıdaki grafikler bu anlamda verilmiştir.



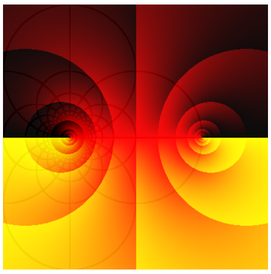
Şekil 2.6. $f(z) = z^k, k = 1,2,3,4$ fonksiyonun grafikleri.



Şekil 2.7. $f(z) = (z+2)^2 + (z-1-2i)(z+i)$ ve $f(z) = sin(\frac{1}{z})$ fonksiyonun grafikleri.



Şekil 2.8. $f(z) = \frac{1}{z}$ ve $f(z) = \frac{1}{z^2}$ fonksiyonun grafikleri.



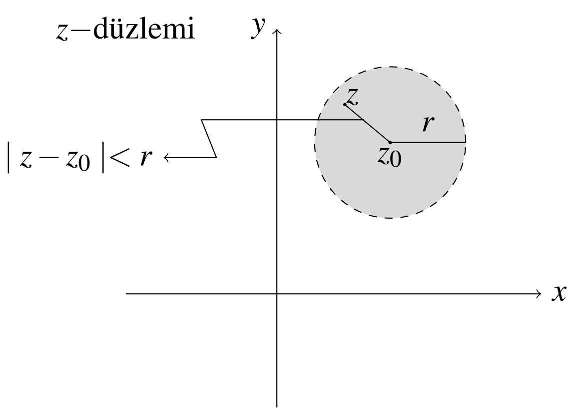
Şekil 2.9. $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ Möbius dönüşümüne ait grafik.

Kompleks düzlemdeki herhangi bir nokta kümesine iki boyutlu nokta kümesi adı verilir ve her noktaya da bu kümenin bir elemanı denir. Nokta kümelerini açıklayan bazı temel tanımlar vardır. Bu anlamda Kompleks analiz çalışmalarında komşuluk kavramı en temel kavramlardan biridir. Komşuluk kavramı delinmiş komşuluk, iç nokta, dış nokta, sınır noktası, açık küme, kapalı küme, limit noktası, sınırlı bölge, bağlantılı bölge, kapanış ve kapalı bölge vb. kavramlarla yakından ilgili olup, formal yani matematiksel kurallara uygun tanımlarını ortaya koymak için kullanılır. Bu sayede kompleks analizde komşuluk kullanılan Riemann dönüşüm teoremi, Cauchy teoremi gibi birçok teorem altında yatan fikirler, daha genel bölgelere uyarlanabilmektedir.

Tanım 2.1.4. r yeterince küçük herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere$|\, z - z_0 \,| < r$ eşitsizliğini sağlayan bütün $z \in \mathbb{C}$ noktalarının kümesine $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir r komşuluğu ya da bir açık disk denir ve

$$D(z_0, r) = \left\{ \,|\, z - z_0 \,| < r : z, z_0 \in \mathbb{C} \text{ ve } r \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

olarak gösterilir.



Şekil 2.10. $z_0 \in \mathbb{C}$ nin r komşuluğu.

Özellikle bizim çalıştığımız alanla ilgili olarak açık birim disk

$$\mathbb{D} = D(0,1) = \Big\{ \mid z \mid < 1 : z \in \mathbb{C} \Big\},$$

yani $z_0 = 0$ noktasının $r = 1$ komşuluğu çok önemlidir. Öte yandan

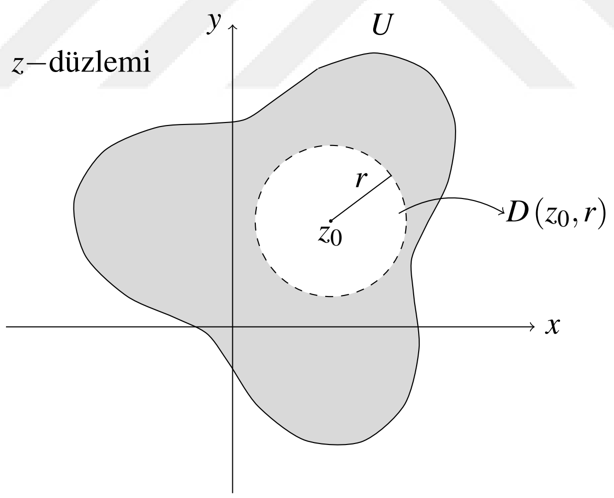
$$\bar{D}(z_0, r) = \Big\{ \mid z - z_0 \mid \leq r : z, z_0 \in \mathbb{C} \text{ ve } r \in \mathbb{R}^+ \Big\}$$

$$\partial D(z_0, r) = \Big\{ \mid z - z_0 \mid = r : z, z_0 \in \mathbb{C} \text{ ve } r \in \mathbb{R}^+ \Big\}$$

$$\bar{D}(z_0, r) - \{z_0\} = \Big\{ 0 < \mid z - z_0 \mid < r : z, z_0 \in \mathbb{C} \text{ ve } r \in \mathbb{R}^+ \Big\}$$

kümeleri de sırasıyla z_0 merkezli r yarıçaplı kapalı disk, çember ve delinmiş komşuluk olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.5. Bir $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ noktasına U kümesinin bir iç noktası denir ancak ve ancak z_0 noktasının $D(z_0, r) \subset U$ olacak şekilde en az bir $r \in \mathbb{R}^+$ komşuluğu varsa.

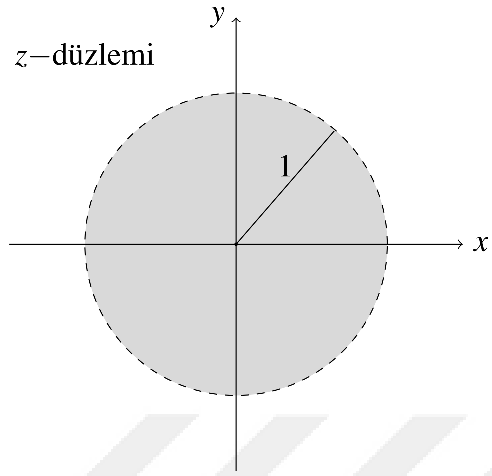


Şekil 2.11. $z_0 \in U$ bir iç noktadır.

Tanım 2.1.6. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinde olup, bir $U \subset \mathbb{C}$ kümesinde olmayan bütün noktaların kümesine U kümesinin komplementi denir ve $U^{\complement}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. Bir $U \subset \mathbb{C}$ kümesine açıktır denir eğer her bir $z_0 \in U$ için $D(z_0, r) \subset$ U olacak şekilde en az bir $r \in \mathbb{R}^+$ komşuluğu varsa. Yani açık küme iç noktalardan oluşan kümedir. Doğal olarak açık olamayan bir kümeye de kapalı küme denir.

Burada dikkat edilmesi gereken durum, r yarıçapının z_0 noktasına bağlı olduğudur. Eğer z_0 noktası kümenin sınırına yakın bir yerde ise, r haliyle yeterince küçük seçilmelidir. Bu anlamda bir açık küme her bir noktasının bir komşuluğu olarak da düşünülebilir.



Şekil 2.12. $|z| < 1$ bir açık kümedir.

Reel analizden de hatırlanacağı üzere fonksiyonlar sıklıkla Reel eksenin bir alt kümesi olan bir aralıkta veya bir yarı doğru olan tanım kümelerine sahiptirler. Örneğin, $y = f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında tanımlı iken, $sin^{-1}(x)$ fonksiyonu ise $[-1, 1]$ kapalı aralığında tanımlıdır. Eğer $y = f(x) = e^x$ fonksiyonunu -1 den 2 e kadar integre etmek istersek $y = f(x) = e^x$ fonksiyonunu tüm $\mathbb{R}$ de tanımlı olmasına rağmen ilgilendiğimiz tanım kümesi sadece $[-1, 2]$ dir. Bu tanım kümeleri açık, kapalı, yarı-açık, sınırlı veya sınırsız, bağlantılı veya bağlantısız olarak sınıflandırılabilir. Kompleks analizde ise, genellikle birim disk $\{|z| < 1 : z \in \mathbb{C}\}$, kapalı bir disk $\{|z| \geq 1 : z \in \mathbb{C}\}$, üst yarı düzlem $\{\Im(z) > 0 : z \in \mathbb{C}\}$ ve delinmiş düzlem $\mathbb{C} - \{0\}$ vb. tanım kümesi olarak kompleks düzlemin bir alt kümesi sahip olan $w = f(z)$ kompleks fonksiyonlar düşünülür. Bu kümeler de genel olarak açık, kapalı, yarı-açık, sınırlı veya sınırsı, bağlantılı veya bağlantısız olarak sınıflandırılır.

Tanım 2.1.8. $U \subset \mathbb{C}$ verildiğinde, bir $z_0 \in U$ noktasının uygun bir $D(z_0, r)$ komşuluğu en azından U da olan ve olmayan bir nokta içeriyorsa z_0 noktasına U kümesinin bir sınır noktası, bütün sınır noktlarının birleşimine de U kümesinin sınırı denir ve ∂U şeklinde gösterilir. Tüm sınır noktalarını ihtiva eden bir kümeye kapalı küme denir. Eğer sınır noktalarının sadece bazlarını ihtiva ediyorsa bu durumda küme ne açık ne de kapalıdır.

Tanım 2.1.9. $U \subset \mathbb{C}$ kümesi verildiğinde, eğer $\forall z \in U$ için $|z| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı varsa, U kümesine sınırlıdır denir.

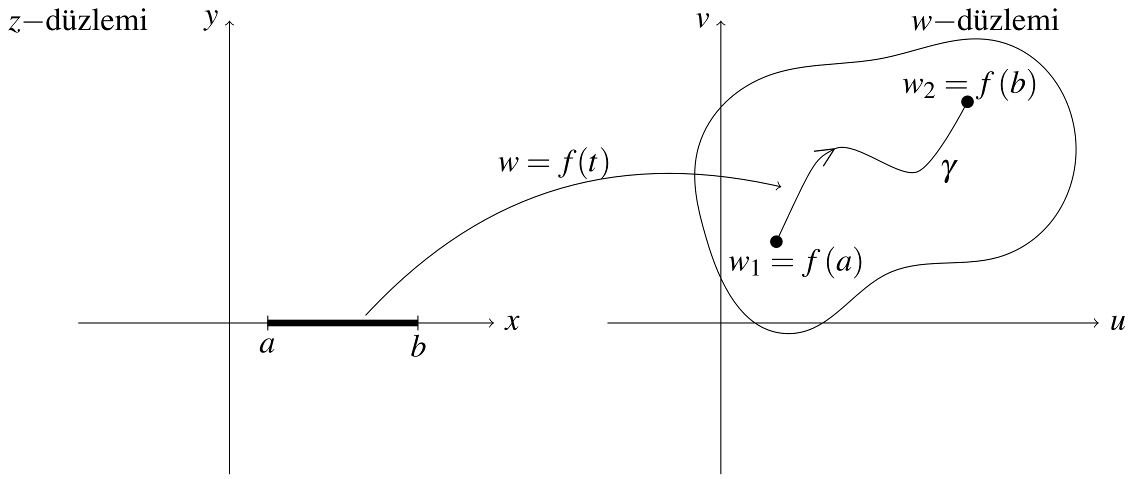
Tanım 2.1.10. Bir $U \subset \mathbb{C}$ kümesi kapalı ve sınırlı ise, $\mathbb{C}$ de kompakt denir (Zill ve Shanahan, 1940).

Yine Reel analizden hatırlanacağı üzer düzlemdeki bir eğrinin, eğri üzerindeki (x, y) koordinatlarının bir kümesi bir t değişkeninin fonksiyonları olarak temsil edilmesine söz konusu eğrinin parametrelendirilmesi denir. Örneğin $y = f(x) = x^2$ fonksiyonun bir parametrelendirilmesi (t, t^2) olarak verilebilir. Burada t değişkeni bir parametre ve x, y ve t arasındaki ilişki ise bir parametre denklemi olarak adlandırılır. Parametrelendirme yardımıyla eğri üzerindeki noktalar kolaylıkla elde edilebileceği için grafik çizimleri için oldukça yararlı bir matematiksel araç oluşturmaktadır. Bilindiği üzere kompleks fonksiyonlar, kompleks düzlemdeki parametrik eğrilerle yakından ilişkilidir. Bu ilişki yardımıyla kompleks fonksiyonlarda limit, süreklilik ve türevlenebilirlilik kavramları görselleştirilebilmektedir. Ayrıca paremetrik eğriler, reel doğrusal integral hesaplamalarında olduğu gibi, kompleks integral hesaplamalarında da oldukça önemlidir.

Tanım 2.1.11. Kompleks düzlemde bir $\gamma : f = (u, v)$ nokta kümesine bir eğri veya yol denir, eğer $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $u(t)$ ve $v(t)$ ler reel parametre t nin sürekli birer fonksiyonu olup $u = u(t)$ ve $v = (t)$ ise. Burada u, v ve t ler kompleks değil reel değişkenler olup, γ kümesi

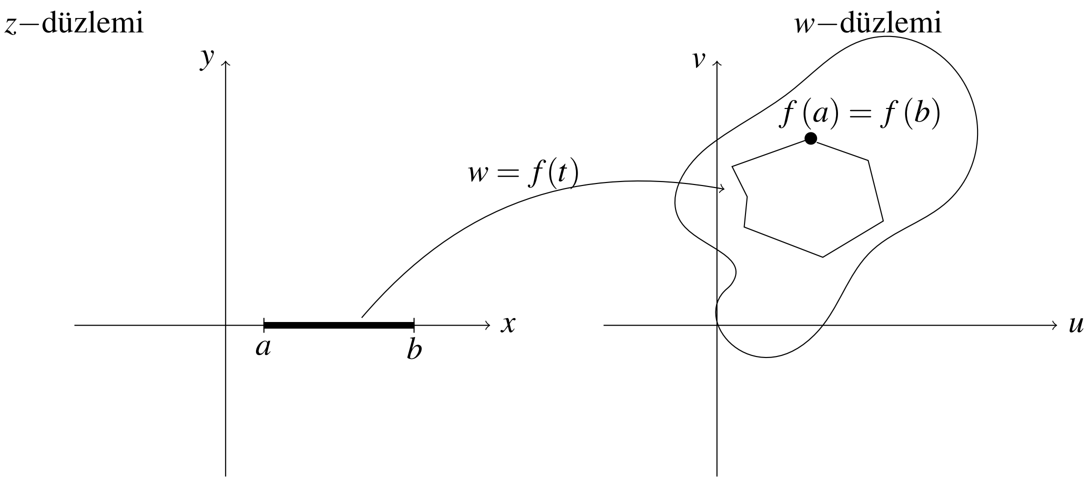
$$f(t) = u(t) + iv(t), a \leq t \leq b$$

ile tanımlanır. Ayrıca, burada yön $[a, b]$ üzerindeki doğal sıralama ile sağlanan yön olur. Bu nedenle $f(a)$ noktasına γ eğrisinin başlangıç noktası, $f(b)$ noktası da γ eğrisinin bitim noktası olarak adlandırılır. $f(t)$ fonksiyonu da γ eğrisinin bir parametrizasyonu olup, farklı parametrelendirmeler aynı yolu verebilir.



Şekil 2.13. Eğri ya da yol grafiği.

Sezgisel olarak, reel sayılar kümesinin her bir kapalı alt aralığından $\mathbb{C}$ ye tanımlanan sürekli her fonksiyona eğri ya da yol denir. Kendi kendini kesmeyen eğriye basit eğri, başlangıç ve bitim noktları aynı olan eğriye de kapalı eğri denir. Matematiksel olarak kapalı eğrinin gösterimi $f(a) = f(b)$ dir. Kendi kendini kesen bir eğrinin, arakesit noktaları eğrinin katlı noktları olarak adlandırılır. Bir γ eğrisi eğer başlangıç ve bitim noktaları hariç kendi kendinin kesmiyorsa Jordan eğrisi (veya basit kapalı eğri) denir. Bir Jordan eğrisinin sınırladığı bölgeye de Jordan bölgesi denir. Bir Jordan eğrisinin sınırladığı bölgeye de Jordan bölgesi denir. Jordan eğrisinin veya basit kapalı bir eğrinin içerisinde bulunduğu düzlemi (örneğin, komplek düzlem $\mathbb{C}$ yi) iki bölgeye ayırması gerekliliği sezgisel olarak açıktır. Formal olarak Jordan eğri teoremi olarak bilinen bu durum; eğer γ bir Jordan eğrisi ise bu durumda onun $\gamma^{\complement}$ komplementi ile birleşimi biri sınırlı biri de sınırsız olan iki ayrık bölgenin bir birleşimidir. Sınırlı olan bölge γ nın iç bölgesi olarak ve sınırsız olan bölge de γ nın dış bölgesi olarak adlandırılır. Öte yandan herbir sınırlı konveks bölgeninin bir Jordan bölgesi olduğu oldukça açıktır. Jordan eğrisi, adını basit kapalı eğri tanımını ilk olarak tanıtan Fransız matematikçi Camille Jordan (1838-1922) dan almıştır. Bir Jordan eğrisi, düzgün parçalı eğri olarak adlandırılır, eğer $j = 1, 2, \ldots, n$ ve (a, b) açık aralığında sonsuz türevlenebilir ve $f'(t) \neq 0$ olmak üzere $f(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ve türevleri her bir $[t_{j-1}, t_j]$ alt aralığında sürekli olacak şekilde $[a, b]$ kapalı aralığının bir $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ bölüntüsü varsa. Dikkat edilirse $n = 1$ için eğri bir Jordan eğrisidir.



Şekil 2.14. Kapalı düzgün parçalı eğri.

Kısaca kompleks düzlemde düzgün parçalı eğri, sonlu sayıda düz parçaya bölünebilen bir eğridir. Ayrıca söz konusu düzgün parçalı eğrinin başlangıç ve bitim noktaları aynı ise bu durumda kapalı düzgün parçalı eğri olarak adlandırılır. Düzgün parçalı eğriler kontur olarak da adlandırılmaktadır. Başlangıç ve bitim noktaları aynı olan kontur kapalı bir konturdur.Kontur eğrilerin bir dizisi olarak da tanımlanabilir. Reel analizde belirli integral olarak adlandırılan bir sayı elde etmek için $[a,b]$ aralığı boyunca $y = f(x)$ fonksiyonu integre edilir. Kompleks analizde bu integralin benzeri kontur integrali olarak adlandırılır ki, bu durumda bir $w = f(z)$ kompleks fonksiyonu z_1 den z_2 ye kadar bir yol veya kontur boyunca integre edilir. Reel analizde belirli integral, bir grafiğin altındaki alan olarak yorumlanırken, kompleks analizde kontur integralinin bir alan yorumu yoktur; daha çok fiziksel anlamda iş ya da akı'nın bir ölçüsü olarak yorumlanır. Ayrıca reel analizde a dan b ye gerçekten sadece bir yol varken, kompleks analizde ise z_1 den z_2 ye sonsuz sayıda kontur vay yol vardır ve bunlar potansiyel olarak farklı cevaplar verebilir. Bununla birlikte birçok durumda z_1 den z_2 ye integral değeri yola bağlı değildir. Bir konturun uzunluğu, bileşen eğrilerin uzunlukları toplamıdır. Ayrıca basit kapalı kontur, eğer iç bölgesi kontur üzerindeki bir gözlemciye göre daima solda kalıyorsa pozitif yönlü veya saatin dönme yönünün tersinde yönlendirilmiş bir kontur olarak adlandırılır. Diğer durumda saat yönünde veya negatif yönde yönlendirilmiş bir kontur olarak adlandırılır. Bu anlamda $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ pozitif yönlü bir kontur ise $-\gamma : [-b,-a] \to \mathbb{C}$ konturu negatif yönlü bir kontur olur.

Tanım 2.1.12. İki farklı nokta $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ verildiğinde başlangıç noktası z_1 ve bitim noktası z_2 olan yönlendirilmiş doğru parçası

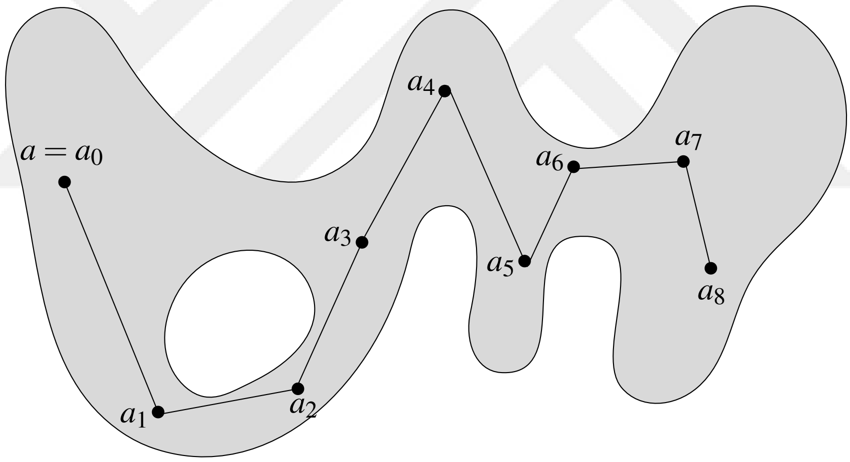
$$[z_1, z_2] = \Big\{ (1-t)z_1 + tz_2 : t \in [0,1] \Big\}$$

ile tanımlanan kümedir.

Tanım 2.1.13. Bir $U \subset \mathbb{C}$ kümesini alalım. Eğer her bir farklı $a, b \in U$ noktaları için $k = 1, 2, \ldots, n$ ve $a_0 = a, a_n = b$ olmak üzere öyle $a_0, a_1, \ldots, a_n \in U$ noktaları var ve her bir a_{k-1} , a_k noktalarını birleştiren doğru parçalarının birleşimi tamamen U içerisinde kalıyorsa, yani

$$[a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{k-1}, a_k] \in U$$

ise U kümesina yol bağlantılı küme denir.

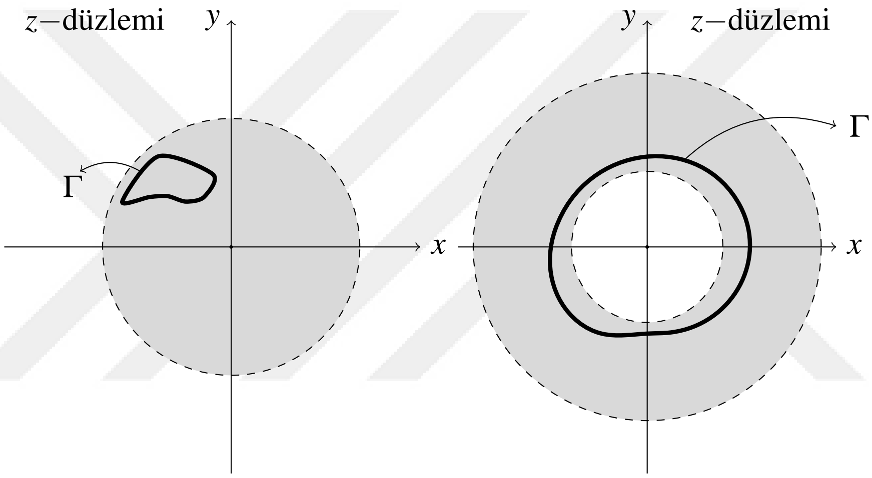


Şekil 2.15. $[a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_7, a_8] \in U$, $n = 8$ için bir örnek.

Sezgisel olarak bir $U \subset \mathbb{C}$ kümesine yol bağlantılıdır denir, eğer U içerisindeki her bir farklı nokta çifti tamamen U içerisinde kalacak şekilde uç uca eklenmiş sonlu sayıda çok köşeli(poligonal) yol ile bağlanabiliyorsa (Şekil 2.15). Doğası gereği bağlantılı bölgeleri sınıflandırmak gerekir. Çünkü bazı durumlarda bir küme içerisindeki iki farklı noktayı birleştiren sonlu sayıda yol kümede kalırken, bazı durumlarda da sonsuz sayıda yol kümede kalabilir. Bu anlamda eğer bir $U \subset \mathbb{C}$ kümesi içerisindeki farklı iki noktayı birleştiren bütün yollar yine U kümesinde kalıyorsa U kümesine basit bağlantılı (kısaca bağlantılı) küme denir. Verilen bilgilere göre basit bağlantılı her küme aynı zamanda yol bağlantılıdır.

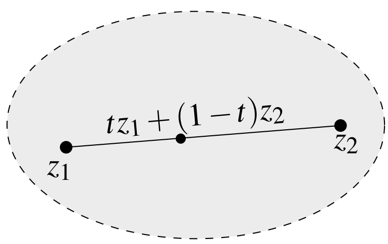
Bağlantılı kümeler kompleks anlamda limit, türevlenebilme ve integrasyon vb. için oldukça kullanışlıdır, çünkü küme üzerindeki herhangi bir noktadan başka herhangi bir noktaya küme içerisinde kalan çok sayıda yol ile gidilebilir. Ancak bu anlamda en ideal küme sınıfı hem açık ve hem de bağlantılı olan kümelerdir. Bu anlamda aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.1.14. Açık ve bağlantılı olan bir $U \subset \mathbb{C}$ kümesi basit bağlantılı bölge (kısaca bölge) olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle, eğer bir $U \subset \mathbb{C}$ bölgesinde her bir basit kapalı Γ eğrisinin (konturunun) sınırladığı küme sadece U kümesinin noktalarından oluşuyorsa, U bölgesine basit bağlantılı bölge denir. Geometrik olarak ise basit bağlantılı bölge içerisinde herhangi bir delik olmayan bölgedir.



Şekil 2.16. Basit bağlantılı olan bölge (sol) ve basit bağlantılı olmayan bölge (sağ).

Tanım 2.1.15. Bir $U \subset \mathbb{C}$ bölgesini alalım. Eğer her bir $z_1, z_2 \in U$ nokta çifti ve $t \in [0,1]$ için $[z_1, z_2] = tz_1 + (1-t)z_2 \in U$ oluyorsa U bölgesine konveks bölge denir. Sezgisel olarak konveks bölge her hangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden bölgedir.



Şekil 2.17. Konveks Bölge.

Tanım 2.1.16. Bir $U \subset \mathbb{C}$ bölgesini alalım. U bölgesine bir $z_0 \in U$ noktasına göre starlike (yıldızıl şekilli) denir eğer her bir $z_1 \in U$ noktası için z_0 noktasını z_1 noktasına bağlayan doğru parçası tamamen U da kalıyorsa. Yani

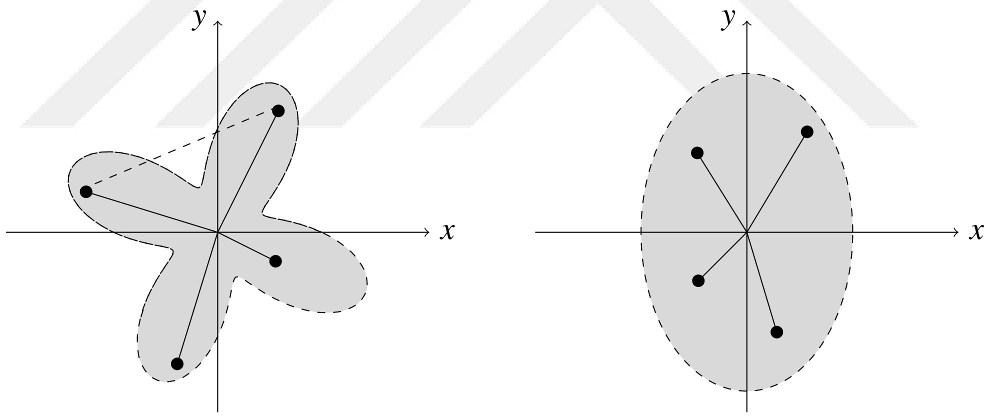
$$[z_0, z_1] = \left\{ (1-t)\, z_0 + t z_1 : t \in [0,1] \right\} \in U \tag{2.4}$$

ise. Burada kulanılan (2.4) ifadesi z_0 ve z_1 noktalarının bir kombinasyonudur. Eğer bu tanımda z_0 noktasından söz edilmezse yani $z_0 = 0$ olarak alınırsa orijine göre göre starlike olma anlaşılır. Bu durumda (2.4) ifadesi

$$[0, z_1] = \left\{ t z_1 : t \in [0,1] \right\} \in U$$

şeklini alır.

Bu durumda konveks bölge tanımı her noktasına göre starlike olan bölge olarak da verilebilir. Bizim çalıştığımız alanda starlike olma orijine göre starlike olmadır. Orijine göre starlile olma her noktaya göre starlike olma anlamına gelmez. Sezgisel olarak starlike olma orijinden bakıldığında bölgenin bütün noktalarının görülebilmesidir.



Şekil 2.18. Konveks değil ve starlike bölge (sol), konveks ve starlike bölge (sağ).

Kompleks fonksiyonlardaki limit tanımı, reel fonksiyonlardaki limit tanımına çok benzer olup, Weierstrass ve Jordan tanımı olarak da bilinen aynı $(\varepsilon - \delta)$ tekniği hala geçerlidir. Tek fark reel eksende bir limite yaklaşmak için sadece iki yön varken, kompleks düzlemde bir limite yaklaşmanın sonsuz yolları vardır. Kompleks düzlemde bir limitin var olduğunu göstermek için, sadece hangi yönden yaklaşılırsa yaklaşılsın limit değerinin aynı olduğunu göstermeye ihtiyacımız vardır. Diğer taraftan bir limitin olmadığını göstermek için sadece limit değerinin aynı olmadığı iki yön bulmalıyız. Bu durumda bir limitin var olup olmadığını göstermenin en iyi yolu reel ve sanal eksenler boyunca limit hesaplamaktır. Bunu yaparken de bu eksenlerden biri sabitlenirken diğer eksen boyunca limit hesaplanır. Örneğin, $z \to 0$ iken $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ fonksiyonunun limitinin olup olmadığını araştıralım.$z = x + iy$ alınırsa,

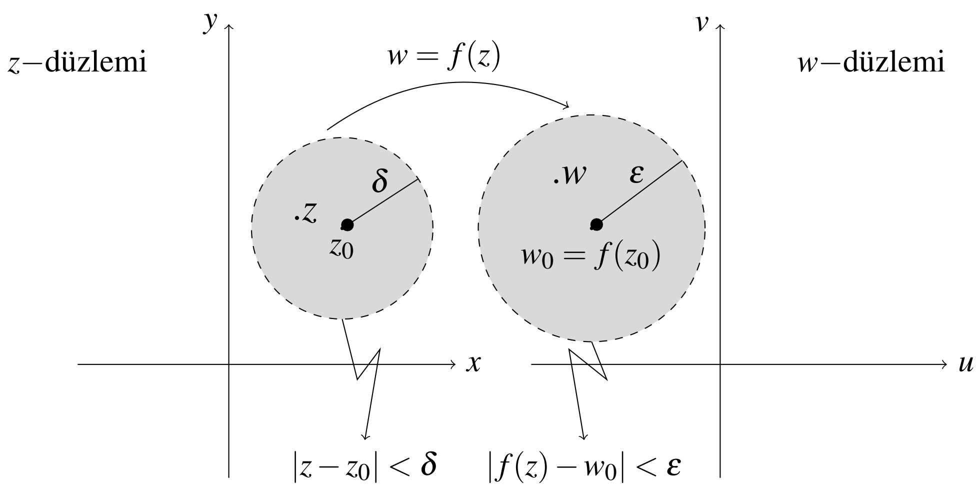
$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{x\to 0} \frac{x+i.0}{x-i.0} = 1(y-\text{ekseni sabitlendi})$$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{x\to 0} \frac{0+iy}{0-iy} = -1(x-\text{ekseni sabitlendi})$$

elde edilir. Kısmi limitler olarak da adlanıdırlan bu limitler eşit olmadığından aranan limit mevcut değildir. Bilindiği üzere, formal olmayan bir ifadeyle $\lim_{z\to z_0} f(z)$ limitinin varlığı, yani w_0 gibi bir değere eşit olmasının anlamı yoldan bağımsız olarak z değişkeninin aldığı değerlerin z_0 değerine çok yaklaşması durumunda $f(z)$ fonksiyonunun aldığı değerlerin w_0 ye çok yaklaşmasıdır.

Tanım 2.1.17. Bir $U \subset \mathbb{C}$ olmak üzere bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasına U kümesinin bir yığılma(limit) noktası denir, eğer yeterince küçük bir pozitif r reel sayısı için z_0 ın her bir $D(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğu U nun z_0 dan başka en az bir noktasını ihtiva ediyorsa. Dikkat edilirse z_0 noktası U ya ait olabilirde olmayabilir de.

Tanım 2.1.18. (Limitin formal tanımı) Bir $U \subset \mathbb{C}$ olmak üzere U kümesinin bir $z_0 \in \mathbb{C}$ yığılma noktasını alalım. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ kaldığında $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ kalacak şekilde ε na bağlı en az bir $\delta > 0$ varsa z oktası z_0 noktasına yaklaşırken $w = f(z)$ fonksiyonunun limiti $w_0 = f(z_0)$ dir denir ve $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ şeklinde gösterilir.



Şekil 2.19. Limit kavramının geometrik yorumu.

Burada $z_0 \in \mathbb{C}$ nin bir yığılma noktası olarak seçilmesinin nedeni keyfi olarak seçilen z noktalarının z_0 a yeterince yakın olduğundan emin olmaktır. Bilindiği üzere $w = f(z)$ fonksiyonunu z_0 noktasında tanımlı olması gerekmez. Geometrik olarak bu tanım, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için z_0 ın bir $\delta > 0$ delinmiş komşuluğu vardır öyle ki bu delinmiş komşulukta bulunan her z için $w = f(z)$ nin de $w_0 = f(z_0)$ ın $\varepsilon > 0$ komşuluğunda bulunduğunu ifade eder.

Kompleks bir sayının modülü reel bir sayı olduğundan, burada hem ε hem δ da birer yeterince küçük pozitif reel sayıyı temsil eder. Buna göre reel değişkenli fonksiyonların limitleri için geçerli olan tüm kurallar kompleks değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir. Öte yandan $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ ve $w_0 = u_0 + iv_0$ olsun. Bu durumda $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ dir ancak ve ancak

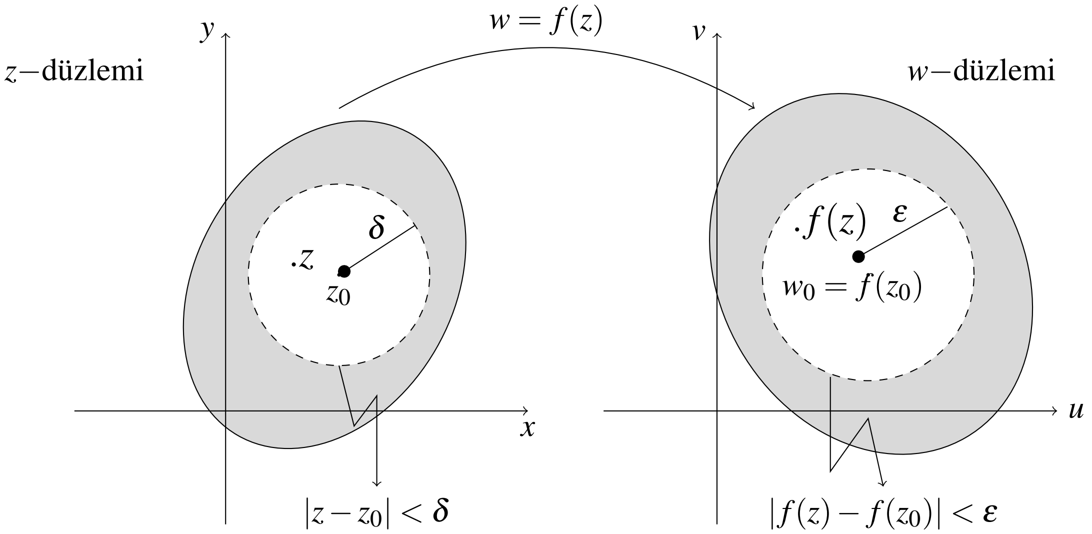
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \text{ ve } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

ise.

Dikkat edilirse burada bir kompleks limitin reel ve sanal kısımları kullanılmaktadır. Bu tekniğin bir çok kullanımı vardır. Birincisi ve en önemlisi, kompleks limit hesaplamasının, bir çift reel limit hesaplamasına indirgenerek hesaplanabilmesidir.

Öte yandan bir kompleks fonksiyonun sürekliliği tanıma da reel fonksiyonlardaki süreklilik tanımına çok benzer olup, aynı formal tanım yani $(\varepsilon - \delta)$ tekniği ile verilebilir.

Tanım 2.1.19. (Sürekliliğin formal tanımı) Eğer her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ kaldığında $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ kalacak şekilde ε na ve z_0 a bağlı en az bir $\delta > 0$ varsa $w = f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında süreklidir denir.



Şekil 2.20. Süreklilik kavramının geometrik yorumu.

Sezgisel olarak süreklilik, eğer $w = f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında sürekli ise, bu durumda z nin aldığı değerlerin z_0 değerine yeterince çok yaklaşması durumunda fonksiyonun aldığı $f(z)$ değerlerinin de $f(z_0)$ yeterince çok yaklaştığı anlamına gelmektedir. Ya da z değerlerinin düzgün bir şekilde değiştirilmesi durumunda $f(z)$ nin aldığı değerler içerisinde ani bir sıçrama olmamasıdır. Daha açık bir ifadeyle bağımsız değişkendeki küçük değişiklikler bağımlı değişkende büyük değişikliklere sebep olmaz. Bu ifadeler yukarıda formal yani matematiksel olarak verilen tanımın özüdür (Tanım (2.1.19)). Reel analizde olduğu gibi, eğer analitik olarak bir z_0 noktasında $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ elde ediliyorsa $w = f(z)$ kompleks fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir. Öte yandan eğer $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonları bir z_0 noktasında sürekli iseler $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu da z_0 noktasında süreklidir.

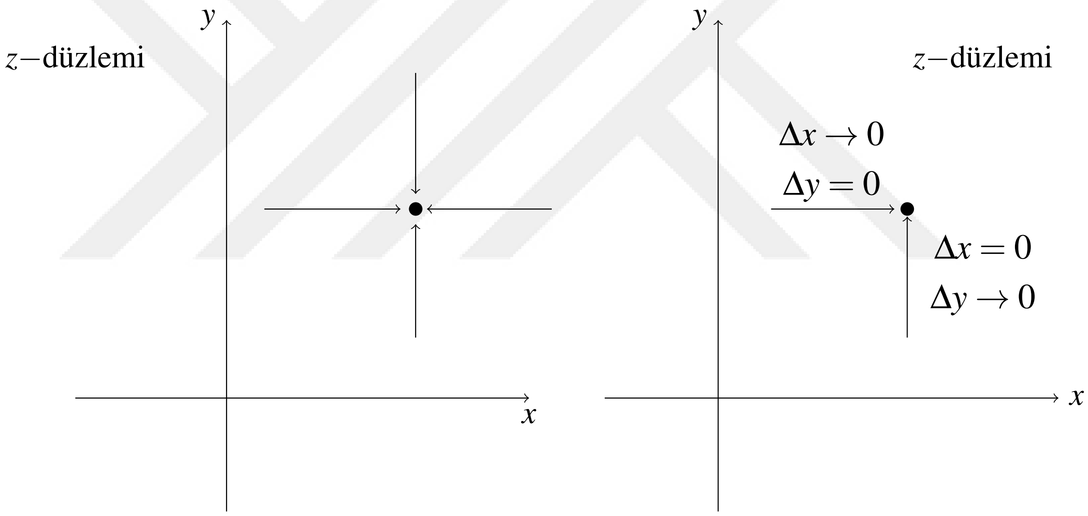
Kompleks f fonksiyonunun bir z_0 noktasındaki sürekliliğinin yanısıra, genellikle kompleks düzlemde bir bölge üzerindeki sürekliliği ile de ilgilenilmektedir. Eğer $w = f(z)$ fonksiyonu bir $U \subset \mathbb{C}$ bölgesinin her bir noktasında sürekli ise $w = f(z)$ ye U bölgesinde süreklidir denir.

Tanım 2.1.20. $U \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : U \to \mathbb{C}$ kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyonunun alalım.Eğer

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti var (sonsuz veya belirsiz değil) ve yaklaşım tarzına bağlı değil ise, f fonksiyonunun $z_0 \in U$ noktasında diferansiyellenebilir veya kompleks anlamda türevlenebilir(kısaca türevlenebilir) denir. Elde edilen limit değerine ise $w = f(z)$ fonksiyonunun $z_0 \in U$ noktasındaki türevi denir ve $f'(z_0)$ (Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) gösterimi) veya $\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_0}$ (Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) gösterimi) şeklinde gösterilir.

Öte yandan kompleks değişkenli fonksiyonların türevi de reel değişkenli fonksiyonların türevi gibi tanımlanabilir. Bu nedenle reel değişkenli fonksiyonların türevleri için geçerli olan tüm kurallar kompleks değişkenli fonksiyonların türevleri için de geçerlidir. Reel düzlemde herhangi bir noktaya ancak ve ancak sağdan ve soldan yaklaşılabilir. Ancak kompleks düzlemde bir noktaya sonsuz farklı şekilde yaklaşılabilir. Bu durumda aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 2.21. Sonsuz farklı şekilde yaklaşma(sol), yaklaşmanın en uygun iki yolu(sağ).

Kompleks analizde kısmi limitler olduğu gibi, kısmi türevler de vardır. Bir $w = f(z)$ fonksiyonunun bir $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasındaki kısmi türevleri sırasıyla;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + iy_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0}$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + iy_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{y - y_0}$$

şeklinde oluşturulur.Öte yandan bir f fonksiyonu bir z_0 noktasında türevlenebilirse

$$\frac{df}{dz}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

dir ki bu denklemler Cauchy-Riemann denklemleri olarak bilinirler.Bu durumda kompleks anlamda türevlenebilir olmak için Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlanması gerekliliği ortaya çıkmaktadır.

Tanım 2.1.21. Eğer bir $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesinde tanımlı kompleks değişkenli ve kompleks değerli $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu U nun her bir noktasında komleks anlamda türevlenebilirse U da analtik (veya holomorfik veya regüler) denir.

Bir f fonksiyonu bir U açık kümesinde analitik ise U da türevlenebilirdir. Eğer f fonksiyonu açık olmayan bir kümede analitik ise bu kümeyi içeren başka bir açık kümede analitiktir. Öte yandan kompleks değerli f fonksiyonunun bir z_0 noktasındaki türevinin varlığının anlamı, z_0 noktasının bir iç nokta mı yoksa bir sınır noktası mı olduğuna bağlı olarak değişir. Bu karışıklığı önlemek için tüm analitik fonksiyonlar açık kümeler üzerinde tanımlanırlar. Bilindiği üzere bu çalışmanın temelini açık birim diskte analitik olan fonksiyonlar oluşturmaktadır.

Özel olarak, tek değerli bir kompleks $f(z)$ fonksiyonuna bir z_0 noktasında analitiktir denir, eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında ve z_0 ın uygun bir komşuluğundaki her bir noktada kompleks anlamda türevlenebilirse. Başka bir iafedyle, sadece z_0 noktasında değil aynı zamanda z_0 a yakın tüm noktalarda kompleks anlamda türevlenebilirse z_0 da analitik olan bir fonksiyondan söz edilebilir. Bu durumda analitiklik, türevlenebilirlilikten daha güçlü bir durum ve daha yaralı olduğu açıktır. Yani analitik fonksiyonlar türevlenebilir fonksiyonlardan daha öte bir durumu ifade etmektedir. Yine iyi bilinir ki z_0 noktasında türevli olan bir $f(z)$ fonksiyonunun kompleks türevi

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) \tag{2.5}$$

şeklinde de tanımlanabilir. Bu tanım reel değerli bir fonksiyonun bir noktadaki türev tanımına oldukça benzemektedir. Ancak burada sonsuz küçük olarak seçilen Δz nin bir kompleks sayı olduğu unutulmamalıdır. Dolayısıyla bu tanım kompleks düzlemde bir noktaya sonsuz farklı şekilde yaklaşılabilir gerçeğinden hareketle, kompleks anlamda türevlenebilirlilik tanımını tam olarak karşılayan bir tanım olmayabilir (2.21). Kompleks fonksiyonların çok boyutlu olması bu fonksiyonları türevlenebilirliği için bazı ekstra şartlar getirmektedir. Bu şartlar $f(z)$ fonksiyonun z_0 noktasında tanımlı, $f'(z_0) \neq \infty$ ve (2.5) limitinin yönden bağımsız olmasıdır. Yön bağımsızlığı, Cauchy-Riemann denklemlerine yol açan güçlü bir durumdur. Genelliği bozmadan z_0 yerine z alıp, koordinat yönleri boyunca daha önce de ifade edilen varyasyonlar uygulanarak limit noktasına yaklaşıldığında

$$\Delta z = \Delta x \Rightarrow f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y = 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x,y) - iv(x,y))}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

ve

$$\Delta z = i\Delta y \Rightarrow f'(z) = \lim_{\Delta x = 0, \Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y))}{i\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

olur. Elde edilen bu iki sonucun eşitliğinden

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ ve } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

veya

$$u_x = v_y \text{ ve } v_x = -u_y$$

olduğu açıktır. Bu eşitlikler, bilindiği üzere Cauchy-Riemann denklemleri olarak adlandırılmaktadır. Bu aşamada, acaba hangi şartlar altında bir kompleks fonksiyonun analitik olduğu düşünümek doğal olacaktır. Kompleks analizde, Agustin Cauchy ve Bernard Riemann adını taşıyan Cauchy-Riemann denklemleri süreklilik ve türevlenebilirlik kriteri ile birlikte, kompleks bir fonksiyonun analitik olabilmesi için bir gerek ve yeter şart oluşturulmuştur. Bu denklemler ilk olarak 1752 yılında Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)'in yaptığı çalışmalarda ortaya çıkmıştır. Daha sonra Leonhard Euler 1797 yılında bu denklem sisteminin analitik fonksiyonlarla olan ilişkisini ortaya koymuştur. Cauchy ise 1814 yılında fonksiyonlar teorisini ortaya koymak için kullanmıştır. Nihayetin de 1851 yılında Riemann eşitlikleri doktora tezinde kullanmıştır.

Teorem 2.1.1. (Analitik olmanın işlemsel tanımı) Kabul edelim ki$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu $z-$düzleminin bir U bölgesinde analitik olsun.Bu durumda U bölgesinin her bir noktasında

(i) u_x, u_y, v_x, v_y kısmi türevleri var ve sürekli olup,

(ii) $u_x = v_y$ ve $v_x = -u_y$ eşitlikleri sağlanır.

Bu teorem bize $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonunun bir bölgede analitik olabilmesi için bu bölgedeki bütün noktalarda $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ reel değerli fonksiyonlarının x ve y ye göre birinci dereceden sürekli oan kısmi türevlerini var olup Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlanması gerektiğini ve devamında da $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ nin birinci dereceden kısmi türevlerinin bu bölgede sürekli olması koşuluyla (yeterlilik şartı) tersinin de doğru olduğunu yani f nin analitik olduğunu (gereklilik şartı) ifade etmektedir. Cauchy-Riemann denklemleri kompleks türevleri hesaplamamıza da yardımcı olur. Sonuç olarak kompleks türev $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$ şeklinde verilebilir. Öte yandan bir kompleks fonksiyonun reel ve sanal kısımının kısmi türevlere sahip olması kompleks fonksiyonun türevlenebileceği anlamına gelmez. Ancak kompleks fonksiyon türeve sahip ise bu durumda reel ve sanal kısımları türevlenebilir olmak zorundadır.

Buraya kadar verilen bilgilerden de anlaşılacağı üzere, kompleks türevlenebilme ve analitiklik kavramaları birbiriyle yakından ilişkilidir. Bu başlıca bir termonoloji yani matematiksel terim sorunudur. Sırasıyla verilen bir noktada türevlenebilen bir fonksiyondan söz ederken, belirli bir alanda türevlenebilen olan bir fonksiyondan söz etmiş oluyoruz. Örneğin, $w = f(z) = z$ fonksiyonu herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ noktasında kompleks türevlenebilir, böylece $\mathbb{C}$ de analitiktir. Genel olarak bir fonksiyonun analitik olduğu bölge, fonksiyonun türevlenebilir olduğu bölgenin iç bölgesidir. Bu nedenle analitik bir fonksiyonun tanım bölgesi, genellikle kompleks düzlemin bölümleri açısından mekânsal olarak tanımlanır. Örneğin, bir kompleks fonksiyon kompleks düzlem $\mathbb{C}$ nin tamamında analitik olabilir veya kompleks düzlemin üst yarısında yani bütün $z \in \mathbb{C}$ ler için $\Im(z) > 0$ de analitik olabilir veya $z \neq 0$ olmak üzere bütün kompleks düzlem $\mathbb{C}$ de vb. analitik olabilir.

Tanım 2.1.22. Kompleks düzlemin tamamında analitik olan bir kompleks fonksiyona tam fonksiyon denir. Tam fonksiyonlar integral fonksiyonları olarak da adlandırılmaktadır.

Bu tür fonksiyonlar, kompleks düzlemdeki herhangi bir nokta komşuluğunda kuvvet serilerine de genişletebilir ve kuvvet serisi tüm kompleks düzlemde yakınsaktır. Bu nedenle tam fonksiyonun temsil eden kuvvet serisini yakınsama yarıçapı istenildiği kadar büyük alınabilir. Tam fonksiyonlar üç kategoriye ayrılır. Eğer, tam fonksiyon sonsuzda bir tekilliğe (singüleriteye) sahip değil ise tam fonksiyon bir sabit fonksiyon olur. Eğer sonsuzda bir esas singüleriteye sahipse tam fonksiyon üstel, logaritmik, trigonometrik veya bir transandantal yani cebirsel olmayan fonksiyon olur. Eğer sonsuzda n. derceden bir kutba sahipse, tam fonksiyon n. derceden bir polinom fonksiyon olur.

Örnek 2.1.2. $w = f(z) = z^2$ fonksiyonunun tam fonksiyon olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm. $z = x + iy$ alınırsa $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ elde edilir. Bu durumda $u(x,y) = x^2 - y^2$ ve $v(x,y) = 2xy$ olur. Bu durumda $u_x = 2x, u_y = -2y, v_x = 2y$ ve $v_y = 2x$ elde edilir ki bu kısmi türevler bütün x ve y değerleri için Cauchy-Riemann denklemlerini sağlarlar. Buda bize $z-$düzleminde ki bütün noktalar için $w = f(z) = z^2$ nin türevlenebildiğini gösterir. Bu durumda açıktır ki $w = f(z) = z^2$ fonksiyonu her yerde analitik olup bir tam fonksiyondur.

Örnek 2.1.3. $w = f(z) = |z|^2$ fonksiyonunun tam fonksiyon olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm. $z = x + iy$ alınırsa $f(z) = x^2 + y^2$ elde edilir. Bu durumda $u(x,y) = x^2 + y^2$ ve $v(x,y) = 0$ olur. Bu durumda $u_x = 2x, u_y = 2y, v_x = 2y$ ve $v_x = v_y = 0$ elde edilir ki $z = 0$ hariç bu kısmi türevler hiçbir yerde Cauchy-Riemann denklemlerini sağlamazlar. Böylece $w = f(z) = |z|^2$ fonksiyonu $z = 0$ hariç hiçbir yerde ve $z = 0$ ın hiçbir komşuluğunda türevlenemez. Dolayısıyla $w = f(z) = |z|^2$ fonksiyonu $z-$düzleminde analitik değildir. Bu durumda bir tam fonksiyon değildir.

Bütün üstel, trigonometrik ve polinom fonksiyonlar her yerde analitiktir. Herhangi bir rasyonel fonksiyon paydayı sıfır yapan değer hariç her yerde analitiktir. Analitik fonksiyonlar analitik oldukları bölgede her dereceden türevlere sahip olup, bu türevlerin her biri ilgili bölegede analitiktir. Ayrıca analitik fonksiyonlar analitik oldukları bölgede tek bir kuvvet serisiyle temsil edilebilirler. Bilindiği üzere fonksiyonlar teorisinde de en önemli seri kuvvet serisidir. Ayrıca analitik fonksiyonlar, harmonik fonksiyonlar ile de yakından ilişkilidir. Çünkü analitik fonksiyonların hem reel hem de sanal kısımları birer harmonik fonksiyondur. Bu durumun Cauchy Riemann denklemlerinin basit bir sonucu olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 2.1.23. Bir $U \subset \mathbb{C}$ alalım. Bir reel değerli $u(x,y)$ fonksiyonuna U da harmoniktir denir, eğer U da u_{xx}, u_{xy}, u_{yx} ve u_{yy} kısmi türevleri sürekli olup

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

veya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Laplace denklemi sağlanıyorsa.

Matematiksel fizikte elektriksel manyetik ve yerçekimi potansiyelleri, sabit durum sıcaklıkları ve hidrodinamik problemlerinde oldukça yaygın olarak kullanılan Laplace denklemi, özelliklerini ilk kez inceleyen Fransız matematikçi Pierre-Simon Laplace (1749-1827)'ın adını taşıyan ikinci dereceden bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümleri yani denklemi sağlayan fonksiyonlar harmonik fonksiyonlar olarak bilinir.

Teorem 2.1.2. Eğer $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu bir $U \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ise bu durumda $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonları da U bölgesinde harmoniktir.

İspat. Cauchy-Riemann denklemlerinden $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ olduğu açıktır. Buradan da $u_{xx} = v_{yx}$ ve $u_{yy} = -v_{xy}$ elde edilir. Öte yandan bir analitik fonksiyonun her dereceden kısmi türevlere sahip olduğuna göre $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonları ikinci dereceden kısmi türevlere sahiptir. Dolayısıyla bu da keza $v_{xy} = v_{yx}$ olmasını garanti eder. Buradan Laplace denkleminde $u_{xx} = v_{yx}$ ve $u_{yy} = -v_{xy} = -v_{xy}$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= v_{yx} - v_{xy} \\ &= v_{xy} - v_{xy} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $u(x,y)$ fonksiyonunun harmonik olduğu gösterilmiş oldu. Benzer şekilde $v(x,y)$ fonksiyonunun da harmonik olduğu gösterilebilir. □

Özel olarak burada $v(x,y)$ fonksiyonuna $u(x,y)$ fonksiyonunun harmanik eşleniği veya $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ ler eşlenik harmonik fonksiyonlar olarak adlandırır. Ayrıca yukarıda verilen Teorem (2.1.2) $u(x,y)$ fonksiyonunun yalnızca bir $v(x,y)$ harmonik eşleniğe sahip olabileceğini ifade eder. Daha da önemlisi harmonik eşleniklik simetri özelliğine sahip değildir. Yani v , u nun bir harmonik eşleniği ise, bu durumda u nun v nin harmonik eşleniği olması gerekmez.

Teorem 2.1.3. Eğer $u(x,y)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir $U \subset \mathbb{C}$ bölgesinde harmonik ise bu durumda $u(x,y)$ fonksiyonu U bölgesinde analitik olan bir $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonunun reel kısmıdır. Bir başka ifadeyle $u(x,y)$ nin U da daima bir $v(x,y)$ harmonik eşleniği vardır.

Bu teorem u nun bir analitik fonksiyonun reel kısmı olabilmesi için harmonik olması gerektiğini ifade eder. Eğer u harmonik değil ise, analitik bir fonksiyonun reel kısmı olamaz. Tersine, eğer u bir $U \subset \mathbb{C}$ bölgesinde harmonik ise, bu onun bir analitik fonksyonun reel kısmı olduğunu garanti eder mi? Bu sorunun cevabı genel anlamda evettir. U tüm kompleks düzlem olduğunda daima doğrudur. Ancak U nun basit bağlantılı olmaması durumunda bir analitik fonksiyonun reel kısmı olmayan harmonik fonksiyon durumları ortaya çıkabilmektedir.

Örnek 2.1.4. $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ fonksiyonunun harmonik olduğunu gösterip, harmonik eşleniğini bulalım.

Çözüm. $u_{xx} = -6x$ ve $u_{yy} = 6x$ olup bu durumda Laplace denklemi sağlanır. O halde $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ fonksiyonu harmonik bir fonksiyondur. Şimdi de harmonik eşleniğini bulalım. $v(x,y)$ harmonik eşlenik olsun. Bu durumda $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonları Cauchy-Riemann denklemlerini sağlarlar. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int v_y dy \\ &= \int u_x dy, u_x = v_y \text{ olduğu için} \\ &= \int \left(2 - 3x^2 + 3y^2\right) dy \\ &= 2y - 3x^2 y + y^3 + \varphi(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varphi(x)$ fonksiyonu x in bilinmeyen bir fonksiyonudur. Şimdi $\varphi(x)$ fonksiyonunu bulalım. $v_x = -u_y$ olduğuna göre,

$$-6xy + \varphi'(x) = -6xy$$

olup buradan $\varphi'(x) = 0$ elde edilir. Buna göre ya $\varphi(x) = 0$ veya $\varphi(x) = c$ (bir sabit) dir. Bu durumda aranan harmonik eşlenik $v(x,y) = 2y - 3x^2 y + y^3 + c$ olarak elde edilir. Bu örnekten de anlaşılacağı üzere bir analitik fonksiyonun reel kısmı verildiğinde, sanal kısmı (veya tersi) bir sabit farkı ile elde edilebilir.

Uygulamalarda $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonları harmonik eşlenik fonksiyonlar ise $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu kompleks potansiyel fonksiyon olarak adlandırılır. Kompleks potansiyel fonksiyonun birçok fiziksel yorumu vardır. Örneğin, sıvı akışında $u(x,y)$ reel kısmı hız-potansiyel ve $v(x,y)$ sanal kısmı da akışkanlık doğrularına karşılık gelirler ki bu doğrular bir birbirini dik olarak keserler. Elektrostatik ile ilgili bir problemin çözümünde $u(x,y)$ fonksiyonu izotermal eğrilerine, $v(x,y)$ fonksiyonu da ısı akış doğrularına karşılık gelebilir. Harmonik fonksiyonlar saf ve uygulamalı matematiğin birkaç alanında da önemli bir rol oynamasına rağmen çoğu matematikçi ve matematik öğrencisi, analitik fonksiyonların temel özelliklerine harmonik fonksiyonlardan daha fazla aşinadır. Analitik fonksiyonlar analitik oldukları bölgede her dereceden türevlere sahitir. Başka bir ifadeyle bir kompleks fonksiyon bir bölgede bir kere türevlenebilirse aynı bölgede her dereceden türevlere sahip olur. Bu durumda elde edilen türvelerde ilgili bölgede analitiktir. Aynı durum reel fonksiyonlar için geçerli değildir. Çünkü bazı reel fonksiyonlar bir kere türevlenebilir, ancak iki kere türevlenemez. Analitik fonksiyonlar her dereceden türevlere sahip olduklarından kuvvet serisi açılımları vardır. Bu kuvvet serilerinin türevleri orijinal serilerle aynı yakınsaklık yarıçapına sahiptirler. Buradan anlaşıldığı üzere her analitik fonksiyon bir kuvvet serisi ile ve her kuvvet serisi de bir analitik fonksiyonla temsil edilebilir. Ancak aynı durum reel fonksiyonlar için geçerli değildir. Yani bir kuvvet serisi ile temsil edilemeyen reel fonksiyonlar vardır. Bir bölgede analitik olan iki fonksiyonun toplamları, çarpımları ve bileşkeleri de aynı bölgede anlitiktirler. Sınırlı tam fonksiyonlar sabit fonksiyonlardır (Liouville Teoremi). Bir analitik fonksiyonun modülü (mutlak değeri) fonksiyonun analitik olduğu bölgenin iç bölgesinde maksimuma sahip olamaz (Maksimum Modül Teoremi). Bir noktada analitik olan fonksiyonu temsil eden kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı, ilgili noktanın en yakın singüler noktaya olan uzaklığıdır.

Tanım 2.1.24. Kompleks sayıların bir sonsuz serisi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots$ şeklindeki sonsuz bir toplamdır. Eğer serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise seri yakınsak olup, bu durumda kısmi toplamlar dizisinin limiti serinin toplamını verir.Yani, $S_n(z) = \sum_{n=1}^{n} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ olmak üzere, eğer $S = \lim_{n\to\infty} S_n(z)$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ dir. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisi yaknsak değil ise ıraksak olarak adlandırılır.

Reel seriler kompleks serilerin özel bir durumudur. Öte yandan a_n ve b_n ler kompleks z_n genel teriminin reel ve sanal kısımları olmak üzere Tanım (2.1.24) de verilen kompleks serinin reel ve sanal kısımlerı sırassıyla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ olur. Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yazılabilir. Bu durumda eğer bir kompleks serinin reel ve sanal kısımları yakınsak ise kompleks seri yakınsak olur.

Tanım 2.1.25. Eğer reel $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ serisi yakınsak ise, bu durumda kompleks $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisi mutlak yakınsaktır.

Tanımdan anlaşıldığı üzere mutlak yakınsaklık yakınsaklığı gerektirmektedir. Ancak bunun tersi doğru olmayabilir. Yani yakınsaklık mutlak yakınsaklığı gerektirmez. Örneğin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ serisi yakınsak iken $\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{n}|$ ıraksaktır. Ayrıca $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ kompleks serisi yakınsak ise, bu durumda $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$ dır. Dikkat edilirse bu $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ demekle aynıdır, yani reel ve sanal kısımların limiti sıfırdır. Bu durum kompleks serilerin ıraksıklığının belirlenebilmesi için n. terim testi (veya kısaca terim testi veya ıraksaklık testi) olarak adlandırılan basit bir yöntem sunmaktadır. Eğer $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ (veya yok ise) seri ıraksaktır.

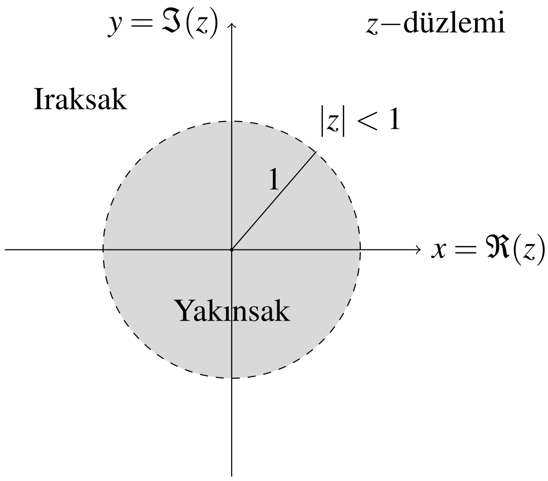
En önemli seri türleri geometrik serilerdir. Bunun nedeni, aslında bir geometrik serinin toplamını bulabilmemiz ve kuvvet serileri teorisinin ağırlıklı olarak geometrik serilere dayanmasıdır. Bu anlamda $|z| < 1$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ geometrik serisini alalım. Bu durumda iddiamız $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ olduğudur. Yukarıda verilen bilgilerin ışığı altında $S_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$ olup, $S_n(z) - zS_n(z) = 1 - z^n$ eşitliğinden $S_n(z)$ çekilirse yani eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılırsa

$$S_n(z) = \frac{1-z^n}{1-z}$$

elde edilir. Geometrik seri $n \to \infty$ iken bu toplamın limitidir. Eğer $|z| < 1$ ise geometrik seri $\frac{1}{1-z}$ ye yakınsar, $|z| > 1$ ise ıraksak olur veya $|z| = 1$ ise bir şey söyelenemez. Bu durumda

$$1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \Leftrightarrow |z| < 1$$

dir.



Şekil 2.22. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ kuvvet serisinin yakınsaklığı ve ıraksaklığı.

Dikkat edilirse z nin iki farklı fonksiyonuna sahibiz. Bunlardan birincisi sadece $|z| < 1$ olması durumunda elde edilen $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ sonsuz geometrik serisidir. Bir diğeri ise $z = 1$ hariç her yerde tanımlı ve düzgün olan $\frac{1}{1-z}$ fonksiyonudur. $|z| < 1$ açık birim diski içerisinde $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ sonsuz geometrik serisi ve $\frac{1}{1-z}$ fonksiyonu özdeştirler. Ancak bu disk dışında (yani $|z| \geq 1$ de) hiçbir şekilde özdeş değillerdir, çünkü seri bu bölgede bir anlam ifade etmemektedir (yani ıraksaktır). Genellikle sonsuz geometrik seri yerine kısaca geometrik seri kavramı kullanılmaktadır.

Bilindiği üzere kuvvet serileri, çeşitli alanlardaki fonksiyonları analiz etmenin önemli bir yoludur. Bazı durumlarda doğrudan kuvvet serileriyle çalışmak, orijinal fonksiyonu değerlendirmek veya analiz etmek için daha kolay bir yaklaşım sağlayabilir. Bir fonksiyon kuvvet serisiyle temsil edilebildiğinde analitik olduğu söylenir. Daha öncede ifade edildiği gibi analitik fonksiyonların her dereceden türevleri vardır ve bu türevlerin her biri yine bir analitik fonksiyondur. Bu, kuvvet serilerinin türevlerinin orijinal serilerle aynı yakınsama yarıçapına sahip kuvvet serileri olduğu ve dolayısıyla analitik fonksiyonları temsil ettiği gerçeğinden kaynaklanır. Kuvvet serileri Analizde üstel, logaritmik ve trigonometrik vb. fonksiyonların analitik açılımlarını elde etmenin en yaygın yoludur. Öte yandan bazı diferansiyel denklemleri ve integral denklemleri çözüm yöntemlerinden biri belki de en etkili olan kuvvet serileri ile çözüm yöntemidir. Bizim çalıştığımız alan da dahil olmak üzere bazı durumlarda orijinal fonksiyon yerine (örneğin Koebe fonksiyonu) onu temsil eden kuvvet serisini değerlendirmek tek pratik yol olabilir, bu nedenle bu aşamada kuvvet serileri hakkında bilgi verilecektir.

Tanım 2.1.26. $c_n \in \mathbb{C}$ ve $z, z_0 \in \mathbb{C}$olmak üzere

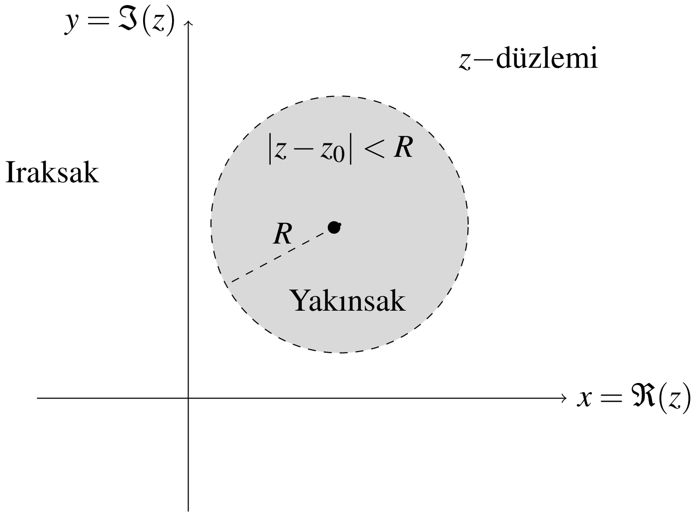
$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, n \in \mathbb{N}^+$$

serisine $(z - z_0)$ ın bir kuvvet serisi denir. Burada c_n ler kuvvet serisinin katsayıları, z_0 yakınsaklık diskinin merkezi ve z de değişken olarak adlandırılır.

$z = z_0$ için seri daima yakınsaktır, z nin diğer değerleri için konuma bağlı olarak yakınsak olabilirde olmaya bilirde. Bununla birlikte, serinin yakınsadığı z kümesi her zaman açık bir disktir. Genel serilerin yakınsaklığı için kulanılan testlerden biri geometrik serilerin yakınsaklığına da öncülük eder. Bu test, kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının bulunmasında da yaygın olarak kullanılan oran testidir. Oran testine göre, bir kuvvet serisi yakınsaktır eğer, $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{R}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{c_n(z - z_0)^n} \right| = |z - z_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \equiv \frac{|z - z_0|}{R} < 1$$

ise. Her kuvvet serisi için $R \in [0, \infty)$ olacak şekilde tek bir R sayısı vardır ki bu sayıya kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı denir. Burada önemli olan nokta şudur ki; kuvvet serileri z_0 merkezli $|z - z_0| < R$ açık diski içerisinde daima yakınsak olup, z_0 merkezli $|z - z_0| > R$ kapalı diski içerisinde ise daima ıraksaktır. $|z - z_0| = R$ olması durumunda ise bir şey söylenemez. Eğer, $R = 0$ yani yakınsama diski tek bir noktadan oluşuyor ise seri herhangi bir $z \neq z_0$ noktasında yakınsak değildir. Ancak, $R = \infty$ yani yakınsama diski tüm kompleks düzlem ise seri her bir z noktasında yakınsaktır. Burada z_0 noktasında analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonunu temsil eden kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının, z_0 noktası ile fonksiyonun en yakın singüler noktası arasındaki uzaklık olduğunu hatırlamakta fayda vardır. Öte yandan herhangi bir $0 < r < R$ için ise seri $|z - z_0| \leq r$ kapalı diskinde düzgün yakınsaktır.



Şekil 2.23. Bir kuvvet serisinin yakınsaklığı ve ıraksaklığı.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde kuvvet serileriyle çalışmak oldukça yararlı olduğu bilinen bir gerçektir. Bu anlamda, kuvvet serileri kompleks fonksiyonların tekil (singülerite) noktalarının sınıflandırılmasında, rezidüzü hesaplamalarında ve analitik devamlılık (bir bölgede tanımlanan bir analitik fonksiyonun daha geniş bir bölgede tanımlanan bir fonksiyona genişletmek) vb. konularda oldukça yararlı analitik araçlar sunmaktadır. Benzer şekilde birim disk $\mathbb{D}$ de hem analitik ve hem de univalent (kısaca univalent analitik) olan fonksiyonların sınıflandırılmasında da oldukça yararlı analitik araçlar sunmaktadır. Bazı durumlarda $w = f(z)$ formuyla verilen bir kompleks fonksiyonun hangi sınıfa dahil olduğunu görmek veya belirlemek oldukça zor olabilir. Ancak çoğu durumda verilen fonksiyonu bir kuvvet serisiyle temsil etmek bu zorlukları ortadan kaldırabilmektedir.

Yukarıda da ifade edildiği gibi analitik devamlılık, bir kompleks fonksiyonun tanım bölgesinin genişletilmesinin bir yolunu sağlar. En yaygın uygulama, bir z_0 noktasının komşuluğunda $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ kuvvet serisiyle tanımlanan kompleks analitik fonksiyonlardır. Böyle bir kuvvet serisi sadece yakınsaklık yarıçapı içerisinde geçerlidir. Analitik devamlılık yoluyla uygun koşullar altında, fonksiyon beklenenden daha büyük bir yakınsaklık yarıçapı içerisinde geçerli olan bir kuvvet serisine sahip olacaktır ve bu kuvvet serisi fonksiyonu orijinal tanım bölgesi dışında da temsil etmek için kullanılabilir. Bu durum, örneğin; trigonometrik, üstel, logaritmik ve hiperbolik fonksiyonların tanımlarını reel eksenden tüm kompleks düzleme doğal olarak genişlemesini sağlar. Bu durumda analitik fonksiyonlar sınıfı polinom fonksiyonlar sınıfının bir analitik devamı olarak görülebilir. Böyle bir genişlemenin sonsuz bir seri olmasına izin verilmesiyle, analitik fonksiyonların bir nokta komşuluğunda bir kuvvet serisiyle bir anlamda polinomlarla temsil edilebileceği gerçeğini ortaya koymuştur. Bu anlamda Taylor teoremi, polinom fonksiyonlar sınıfından daha geniş olan analitik fonksiyonlar sınıfının başlangıcında ve gelişimde oldukça yararlı bir matematiksel araç olarak kullanılmıştır. Taylor teoremi, 1715 yılında ilgili teoremin bir versiyonunu belirten İngiliz matematikçi Brook Taylor (1683-1731) adıyla anılmaktadır. Teoremin başka bir versiyonun 1671 yılında İskoç matematikçi James Gregory (1683-1675) tarafından da verildiği bilinmektedir. Taylor teoremi trigonometrik, üstel, logaritmik ve hiperbolik vb. fonksiyonların değerlerini sadece reel eksenden değil tüm kompleks düzleme doğru bir şekilde hesaplayabilmek için basit aritmetik formül verir. Bu formüller, günümüz bilgisayarlarında yukarıda sözü edilen hesaplamaları yapabilmek için kullanılan yazılım programlarının temelini oluşturmaktadır.

Bu aşamada birkaç analiz konusunun birikimi olan ve analizdeki en önemli sonuçlardan biri olan Taylor teoremi ile devam etmek gerekir. Taylor teoremi bir analitik fonksiyonun bir noktadaki ve bu noktadaki tüm türev değerleri biliniyorsa, bu fonksiyonun her noktadaki fonksiyon değerlerini bulmak için kullanılabilmektedir.

Teorem 2.1.4. (**Analitik Fonksiyonlar İçin Taylor Teoremi**) Kabul edelim ki $f(z)$ fonksiyonu bir $U \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olsun. $f(z)$ fonksiyonu, $z_0 \in U$ ve $R > 0$ bir reel sayı olmak üzere U nun ihtiva ettiği herhangi bir $|z - z_0| < R$ komşuluğunda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

serisine yakınsar. Bu seriye $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının $|z - z_0| < R$ komşuluğunda temsil eden Taylor seirisi denir.

Bu teoremin ispatı reel analizdeki durumundan oldukça farklı olup Cauchy türev formülüne doğru gider. Bu durumda $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere katsayılar için

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

formülüne sahip oluruz. Bu formül Cauchy türev formülü (veya genişletilmiş Cauchy türev formülü) olarak bilinir. Burada γ eğrisi iç bölgesi tamamen U da kalan ve z_0

noktasını çevreleyen herhangi bir basit kapalı eğridir. Seriye z_0 noktasının $|z-z_0|<R$ komşuluğunda kompleks analitik $f(z)$ fonksiyonunu temsil eden Taylor serisi de denir. Taylor serileri, kuvvet serisi olarak adlandırılan serilerin daha genel halidir. Özel olarak $z_0=0$ notasındaki Taylor serisine Maclaurin serisi denir. Öte yandan olağan üstü Cauchy türev formülü, basit bağlantılı bir bölgede tanımlı olan kompleks analitik fonksiyonun bölge içersinde aldığı değerlerin, fonksiyonun bölgenin sınırı üzerinde aldığı değerler tarafından belirlenebilceğini ifade eder. Bunu yaparken de temelde ortalam değer teoremini kullandığını bilmek oldukça önemlidir. Diğer taraftan gösterilebilir ki bir analitik fonksiyon farklı iki seri ile temsil edilemez (Taylor serisinin tekliği). Bunun için $|z-z_0|<R$ yakınsaklık diski içerisinde $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^n$ olduğunu kabul edelim. Bu eşitlikte $z=z_0$ alınırsa $c_0=d_0$ olduğu direkt olarak elde edilir. Her iki seri de türevlendirilirse eşitlik $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nd_n(z-z_0)^{n-1}$ şeklini alır. Burada da $z=z_0$ alınırsa $c_1=d_1$ elde edilir. Benzer prosedür devam ettirilirse Taylor serisini tekliği elde edilmiş olur.

Bir analitik fonksiyonun Taylor serini (açılımını) hesaplamak için metot hep aynıdır. Bunun için etkili bir yöntem olarak bir algoritmadan yararlanılabilir. Dar anlamda algoritma, bir fonksiyonu hesaplamak için iyi tanımlanmış sıralı adımlar anlamına gelebilir. Algoritma 9. yüzyıl matematikçi Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi'nin adından türetilmiştir. Bir örnek üzerinde görelim. Örneğin kolay anlaşılması açısından $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ fonksiyonunun $z_0=0$ noktası civarında (komşuluğunda) Taylor serisini bulalım.

Adım 1. Fonksiyonun bütün türevlerini hesapla. Bu iş sıkıcı gelebilir ki öğledir. Bu $f(z)=\dfrac{1}{1-z}=(1-z)^{-1}$ fonksiyonunun türevleri için tümevarımsal bir formül bulmaktan kaynaklanır. Örneğimiz için sıfırıncı türev yani $f^{(0)}(z)$ fonksiyonun kendisi olup

$$f^{(0)}(z)=f(z)=(1-z)^{-1}$$

dir.Birinci türev,

$$f^{(1)}(z)=-1(1-z)^{-2}(-1)=(1-z)^{-2}$$

dir. İkinci türev,

$$f^{(2)}(z)=-2(1-z)^{-3}(-1)=2(1-z)^{-3}$$

dir. Bu şekilde devam edilirse bunlar bize n. türev için tümevarımsal

$$f^{(n)}(z) = n!(1-z)^{-n-1}$$

türev formülünü önermektedir.

Adım 2. Türevlerde $z = z_0$ yaz. Türev alma çabalarıyla karşılaştırıldığında bu adım oldukça kolaydır. Örneğimiz için $z_0 = 0$ olduğuna göre

$$f^{(n)}(z) = n!$$

bulunur.

Adım 3. Taylor serisinin c_n katsayılarını hesapla.Tanımdan Taylor serisinin n. katsayısı $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ olduğuna göre, örneğimiz için

$$c_n = \frac{n!}{n!} = 1$$

bulunur.

Adım 4. Taylor serisini yaz.Örneğimiz için, $z_0 = 0$ noktası komşuluğunda $f(z) = (1-z)^{-1}$ fonksiyonu için Taylor serisi

$$(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$$

olarak bulunur.

Bu standart seriyi kullanarak başka türetilmiş serileri ve yakınsaklık yarıçaplarını kolayca elde edebiliriz. z yerine $2z^2$ yazılırsa

$$\frac{1}{1-2z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$$

eld edilir. Orijinal seri $|z| < 1$ iken yakınsak olduğuna göre, türetilmiş seri ise $|2z^2| < 1$ yani $|z| < 1/\sqrt{2}$ için yakınsaktır. Daha genel olarak, eğer f ve g fonksiyonlarının bir z_0 noktasının komşuluğunda Taylor açılımları biliniyorsa, bu durumda aynı z_0 noktası komşuluğunda iki fonksiyonun çarpımlarının, toplamlarının ve farklarının Taylor açılımları sırasıyla polinamlar kümesinde yapılan standart çarpma, toplama ve fark işlemleri yapılarak elde edilebilir. Bölme işlemi payda sıfır olmayan katsayı sabitlerine sahip olduğu sürece, yani $z = z_0$ olduğu zaman payda sıfır olmuyorsa çalışır.

Daha öncede ifade edildiği gibi Taylor serisi adını İngiliz matematikçi Brook Taylor (1685-1746)'dan almıştır (1715) [21]. Eğer seri sıfır yani orijin merkezli ise, Taylor serisi daha sade bir biçime girer ve bu seriye İskoç matematikçi Colin Maclaurin(1698-1746) ne istinaden Maclaurin serisi denir [22]. Taylor ve Maclaurin serileri, fonksiyonların verilen bir noktadaki sayısal değerlerini bulmak, türev ya da integral alma işlemlerini seriler yardımıyla daha kolay yapmak, diferansiyel veya integral denklemlerin çözümlerini bulmak için kullanılır. Ayrıca Taylor serisinin sınırlı sayıda terimleri kullanılarak, bir fonksiyonun yaklaşık değerlerini bulmak için yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bu aşamada bir fonksiyonun singüler noktaları ve singüler noktalarının sınıflandırmasıyla yakından ilgili olan tanımlar verilmiştir. Basit bir örnek olarak, f nin sıfır olduğu noktada $\frac{1}{f}$ fonksiyonu bir singüleriteye sahip olur.

Tanım 2.1.27. $f(z) = \alpha$ denklemini sağlayan z değerlerine fonksiyonun $\alpha-$yerleri denir. Sabit olmayan bir analitik fonksiyonun $\alpha-$yerleri izole noktalardır.

Tanım 2.1.28. $f(z)$ analitik fonksiyonunun sıfır yeri bir z_0 noktasıdır, öğleki bu noktada $f(z)$ fonksiyonu analitik olup $f(z_0) = 0$ dır. $0-$yerleri yerine genel olarak sıfırları veya kökleri ifadeleri kullanılmaktadır.

Tanım 2.1.29. z_0 noktasına bir $f(z)$ fonksiyonunun m.derceden sıfırıdır denir, eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik ve $f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ olup ancak $f^m(z_0) \neq 0$ ise. Birinci derceden sıfır basit sıfır olarak adlandırılmaktadır.

Başka bir ifadeyle, eğer $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$ var, ancak $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}$ yoksa, bu durumda f fonksiyonun z_0 noktasında m. dereceden (veya çarpımsal) bir kökü vardır denir.

Örneğin,$f(z) = cos(z) - 1 + \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \dots$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasında 4. dereceden bir sıfır noktası vardır.

Bazı sıfır değerleri diğerlerinden daha baskın olabilir. Örneğin, $f(z) = (z-1)(z+2)$ ve $g(z) = (z-1)^2(z+2)$ fonksiyonları alındığında, her iki fonksiyonda $z = 1$ noktasında sıfıra sahiptir. Ancak $g(z)$ fonksiyonu $z = 1$ de çift katlı sıfıra yani köke sahiptir. Başka bir ifadeyle $z \to 1$ iken her iki fonksiyonda 0'a yaklaşır. Ancak g fonksiyonu 0' a f den daha hızlı yaklaşır ($f(1.01) \approx 0.02, g(1.01) \approx 0.0002$).

Eğer $f(z)$ fonksiyonu analitik ve z_0 noktasında m. derceden bir sıfıra sahip ise, bu durumda $f(z)$ fonksiyonu için z_0 merkezli Taylor serisi, z_0 ın bir komşuluğunda en az bir $g(z)$ fonksiyonu vardır öğleki $g(z)$ fonksiyonu z_0 da analitik ve $g(z_0) \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1} + \dots \\ &= (z-z_0)^m \Big[a_m + a_{m+1}(z-z_0) + a_{m+2}(z-z_0)^2 + \dots \Big] \\ &= (z-z_0)^m g(z) \end{aligned}$$

şeklini alır.

Tanım 2.1.30. Bir $z_0 \in U$ noktasına $U \subset \mathbb{C}$ bölgesinin bir izole noktası denir, eğer r pozitif bir reel sayı olmak üzere, z_0 noktasının U nun başka hiçbir noktasını ihtiva etmeyen en az bir $0 < |z-z_0| < r$ delinmiş komşuluğu varsa.

Bu anlamda bir $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ noktasının $f(z) \not\equiv 0$ fonksiyonunun bir sıfırı olduğunu kabul edelim. Bu durumda r herhangi bir pozitif bir reel sayı olmak üzere, eğer f fonksiyonunun z_0 noktasının bir $0 < |z-z_0| < r$ delinmiş komşuluğunda başka bir sıfırı yoksa, z_0 noktasına bir izole sıfır noktası denir.

Tanım 2.1.31. Eğer $f(z)$ analitik fonksiyonu analitik olmadığı bir $z = z_0$ noktasının uygun bir komşuluğu $f(z)$ fonksiyonun analitik olduğu en az bir nokta ihtiva ediyorsa $z = z_0$ noktasına singüler(tekil) nokta veya $f(z)$ fonksiyonunun singüleritesi denir.

Diğer bir ifadeyle $f(z)$ fonksiyonun analitik olmadığı yani bir kuvvet serisi olarak yazılamadığı yani türevinin tanımlı olmadığı $z = z_0$ noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir singüler noktası denir. Aksi halde $z = z_0$ noktası $f(z)$ fonksiyonu için bir regüler nokta olur. Yani fonksiyonun analitik olduğu noktaya bir regüler nokta denir. Eğer $z = z_0$ noktası $f(z)$ fonksiyonu için bir singüler nokta ise $f(z)$ fonksiyonu $z = z_0$ ın bir kuvvet serisi olarak yazılamaz.Örneğin, $f(z) = |z|^2$ fonksiyonu her yerde analitik olduğundan singüler noktası yoktur. $\dfrac{1}{z-\alpha}$ fonksiyonu için ise $z_0 = \alpha$ noktası bir singüler noktadır. Dolayısıyla $z_0 = \alpha$ noktasında bir kuvvet serisine sahip değildir. Ancak singülerite noktasına yeterince yakın olan noktalarda fonksiyon analitik olabilir. Dolayısıyla bir kuvvet serisi açılım ile de temsil edilebilir. Genel olarak fonksiyon singüler noktada anormal bir şekilde davrandığından singüler noktaları sınıflandırmak gerekir. Kompleks analizde bu anlamda kullanılan birkaç singülerite vardır. Bu sınıflamaları daha kolay yapabilme ve anlaşılır olması adına Laurent serisi çok yararlı bir matematiksel araç olarak kullanılmaktadır.

Hatırlanacağı üzere, eğer $w = f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik bir fonksiyon ise, bu durumda z_0 ın uygun bir komşuluğunda bir Taylor açılımı olarak yazılabilir ve yakınsaklık yarıçapı en yakın singüleriteye olan uzaklıktır. Bu durumda, z_0 noktası singüleriteden yeterince uzak olmalıdır. Ama eğer z_0 noktası singüleriteye çok yaklaştırılırsa ve hatta singüleriteye taşınırsa yukarıda da ifade edildiği gibi fonksiyon anormal bir şekilde davranacaktır. Bu gibi durumlarda kullanılabilen ve Laurent serisi olarak bilinen başka bir seri genişlemesi vardır. Laurent serileri z_0 ın hem pozitif hem de negatif kuvvetlerinin içeren bir kuvvet serisidir. Herbir Taylor serisi bir Laurent serisi iken tersi doğru değildir.

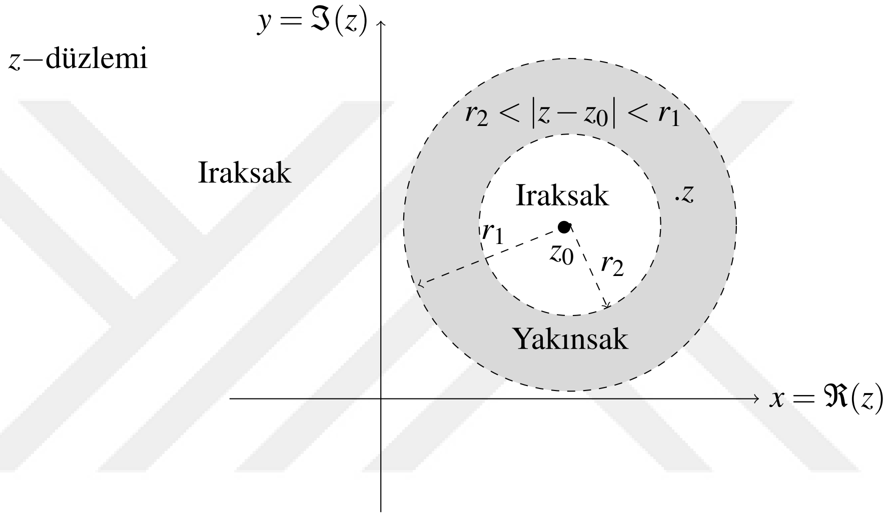
Taylor serisinin eksik yönlerinden biri, yakınsaklık bölgesinin genelikle $f(z)$ fonksiyonunun analitik olduğu bölgenin bir parçası olması olarak görülebilir. Bu anlamda Laurent serisi $f(z)$ yi olabildiğince geniş bir bölge üzerinde bir kuvvet serisi olarak temsil etme imkanı vermektedir. Seriyi bir singüler(tekil) noktası komşuluğunda tekil noktaya kadar, ancak tekil noktayı dahil etmeden genişletebiliriz. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu analitik olmadığı bazı noktalar civarındaki halka bölgelerde seri ile temsil edilebilir. Dolayısıyla $f(z)$ fonksiyonu z_0 singüler noktasının bir delinmiş komşuluğunda Laurent serisi ile temsil edilmiş olur. Ayrıca Taylor serisinin yakınsaklık bölgesi bir disk iken, Laurent serisinin yakınsaklık bölgesi bir halkadır.

Tanım 2.1.32. Bir $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında bir singüler noktaya sahip ve $r_1, r_2 > 0$ reel sayı değerleri için $\{z \in \mathbb{C} : r_2 < |z - z_0| < r_1\}$ halka bölgesinde analitik olsun. Bu durumda

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

serisine $f(z)$ analitik fonksiyonunu $r_2 < |z-z_0| < r_1$ halkası üzerinde temsil eden Laurent serisi denir. Burada ayrıca $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ serilerine de sırasıyla, Laurent serisinin esas (veya singüler) ve analitik (veya regüler) kısımları denir. Ayrıca r_1 ve r_2 değerleri de sırasıyla dış ve iç yakınsaklık yarıçapları olarak adlandırılır. Bu durumda $r_2 < |z-z_0| < r_1$ halkasında Laurent serisi, analitik $f(z)$ fonksiyonuna yakınsak ve $|z-z_0| < r_2$ veya $|z-z_0| > r_1$ için ise ıraksak olacaktır.

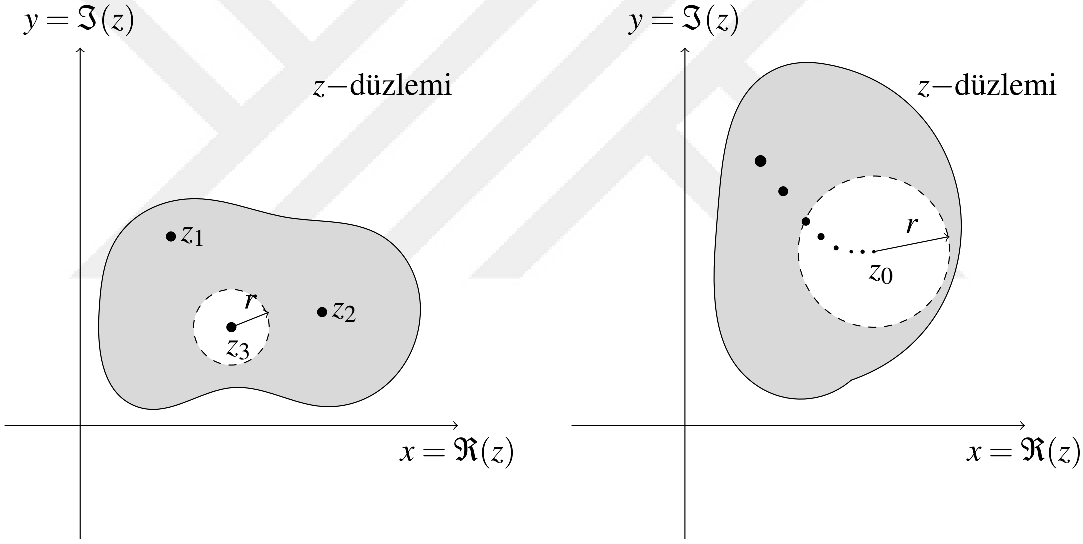


Şekil 2.24. Laurent serisinin yakınsaklık bölges.

Şekil (2.24) Taylor serisinin bir uzantısı olan Laurent serisinin içerisinde yakınsak olduğu $r_2 < |z-z_0| < r_1$ yakınsama bölgesini (halkasını) göstermektedir. Dikkat edilirse bu uzantı, $(z-z_0)$ ın negatif kuvvetlerini de içermektedir. Ayrıca $|z-z_0| < r_1$ için Laurent serisinin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ analitik kısmı bir analitik fonksiyona, $|z-z_0| > r_2$ için ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ esas kısmı ise başka bir analitik fonksiyona yakınsar. Her iki seri, yani $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ serisi $r_2 < |z-z_0| < r_1$ halkasında ise birlikte aynı analitik fonksiyona yakınsar. r_1 in r_2 den küçük olduğu durumlar da olabilir. Bu durumda serinin asla yakınsamayacağı açıktır. Eğer $r_2 < r < r' < r_1$ olarak seçilir ise, bu durumda Laurent serisi $r < |z-z_0| < r'$ üzerinde düzgün yakınsak olur. Öte yandan Laurent serisinin esas kısmı için üç olası durum vardır. Birinci durumda, esas kısım hiç terime sahip olmayabilir. İkinci durumada, esas kısım sonlu sayıda terime sahip olabilir. Üçüncü durumda ise, esas kısım sonsuz sayıda terime sahip olabilir. Bu durumlar singüler noktaların sınıflandırlıması için kullanılabilmektedir.

Singüler noktalar izole edilmiş singüler nokta ve izole edilmemiş singüler nokta olmak üzere temelde iki sınıfa ayrılmaktadır. Bu kavramlar yerine sırasıyla ayrık singüler nokta ve ayrık olmayan singüler nokta ifadeleri de kullanılabilir. İzole edilmiş singüler noktalar, fonksiyonu temsil eden Laurent serisinin sahip olduğu forma göre de kaldırılabilir singüler nokta, kutup noktası ve esas singüler nokta olmak üzere sınıflandırılır.

Tanım 2.1.33. Kabul edelim ki $f(z)$ analitik fonksiyonu $z = z_0$ noktasında bir singüler noktaya sahip olsun. Eğer $z = z_0$ noktasının en az bir delinmiş komşuluğunda $f(z)$ fonksiyonunun $z = z_0$ dan başka hiçbir singüler noktası yoksa $z = z_0$ noktasına izole edilmiş singüler nokta denir. Ya da bir $r > 0$ için $f(z)$ fonksiyonu $z = z_0$ noktasının $D(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik ise $z = z_0$ noktasına izole edilmiş singüler nokta denir. Aksi takdirde izole edilmemiş singüler nokta denir.



Şekil 2.25. z_1, z_2, z_3 izole edilmiş singüler noktalar (sol), z_0 izole edilmemiş singüler nokta (sağ).

Örneğin, $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ fonksiyonu için $z_0 = 1$ izole edilmiş singüler noktalardır. Çünkü $z_0 = 1$ noktasının komşuluğu olan öğle bir delinmiş disk (yani, $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$) bulabiliriz ki, f fonksiyonunun başka hiçbir singüler noktası yoktur, yani fonksiyon bu delinmiş diskte analitiktir. Öte yandan $f(z) = \log(z)$ fonksiyonu $z_0 = 0$ da bir izole edilmemiş bir singüleriteye sahiptir. Çünkü yarıçap r ne kadar yeterince küçük seçilirse seçilsin, $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < r\}$ delinmiş diski $z_0 = 0$ dan başka singüleriteler de içerir.

Şekil (2.25) den de görüldüğü gibi izole edilmiş bir nokta bir singüler nokta olup r komşuluğu tamamen kendisinden ve regüler noktalardan oluşur. Dahada önemlisi izole edilmemiş bir singüler noktanın delinmiş bir r komşuluğu singüler noktaları da içerir. Ayrıca şekilden z_0 ın singüler noktaların bir kümesinin yığılma noktası olduğu görülmektedir. İzole edilmiş singüler noktaları kutup, kaldırılabilir singüler, esas singüler ve dallanma noktalarını içerir.

Eğer, $z = z_0$ noktası $f(z)$ fonksiyonu için bir izole edilmiş singüler nokta ise bu durumda bazı $r > 0$ reel değeri için $f(z)$ fonksiyonu $D(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitiktir. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu $D(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ şeklinde bir Laurent serisi ile temsil edilebilir veya Laurent serisine yakınsar. Daha açık bir ifadeyle temsil veya yakınsama izole açık disk $0 < |z - z_0| < r$ de geçerlidir. Bu reel fonksiyonlarda olmayan bir özelliktir.

Bir $z = z_0$ noktasının $D(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğu civarında analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonun $z = z_0$ da Laurent serisine açılabilmesi için bu delinmiş komşulukta analitik olması yetmez aynı zamanda tek değerli olmalıdır. Bu nedenle $f(z) = \log(z)$ fonksiyonu $z = 0$ noktasının hiçbir delinmiş komşuluğunda Laurent serisine açılamaz.

Tanım 2.1.34. $g(z)$ bir analitik fonksiyon ve $g(z_0) \neq 0$ olmak üzere $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ fonksiyonu için $z = z_0$ noktasına m. dereceden kutup noktası denir. Diğer bir ifadeyle $f(z)$ fonksiyonun $z = z_0$ noktası civarında Laurent açılımının esas kısmı $(z - z_0)$ ın m.kuvvetini (sonlu sayıda terim) ihtiva ediyorsa yani

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

şeklinde ise $z = z_0$ noktasına m. dereceden kutup noktası denir.Eğer $m = 1$ ise $z = z_0$ noktası basit kutup noktası olarak adlandırılır. Ayrıca bu durumda $\frac{1}{z-z_0}$ teriminin c_{-1} katsayısına f fonksiyonun z_0 kutup noktasındaki rezidüsü denir ve $Rez(f, z_0) = c_{-1}$ şeklinde gösterilir.

Örneğin, $f(z) = \dfrac{1}{(z-5)^2(1-z)^3}$ fonksiyonu için $z = 5$ noktası civarındaki Laurent açılımı

$$\frac{-1}{64(z-5)^2} + \frac{3}{625(z-5)} - \frac{3}{125} + \frac{5(z-5)}{2048} - \frac{15(z-5)^2}{16348} + \frac{21(z-5)^3}{65536} + O\left((z-5)^4\right)$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere bu açılımın esas kısmı $m = 2$. kuvveti ihtiva etmektedir. Bu durumda $z = 5$ noktası $f(z)$ fonksiyonun 2.dereceden kutup noktasıdır. Benzer şekilde

$f(z)$ fonksiyonunun $z=1$ noktası civarındaki Laurent açılımı ise

$$-\frac{1}{16(z-1)^3}-\frac{1}{32(z-1)^2}-\frac{3}{256(z-1)}-\frac{1}{256}-\frac{5(z-1)}{4096}-\frac{-3(1-z)^2}{8192}+O\left((1-z)^3\right)$$

şeklinde olup, açılımın esas kısmı $m=3$. kuvveti ihtiva etmektedir. Dolayısıyla $z=1$ noktası $f(z)$ fonksiyonu için 3. dereceden bir kutup noktasıdır.

Öte yandan,$f(z)=\dfrac{i}{z(z-i)}$ fonksiyonunun sırasıyla $z=i$ ve $z=0$ noktaları komşuluğundaki Laurent açılımları sırasıyla

$$\frac{1}{z-i}+i-(z-i)-i(z-i)^2+(z-i)^3+i(z-i)^4+O\left((z-i)^5\right)$$

ve

$$-\frac{1}{z}+i+z-iz^2-z^3+iz^4+O(z^5)$$

şeklindedir. Her iki açılımda da esas kısım $m=1$. kuvvetleri ihtiva etmektedir. Dolayısıyla hem $z=i$ ve $z=0$ noktaları $f(z)=\dfrac{i}{z(z-i)}$ fonksiyonu için birer basis kutup noktasıdır. Buraya kadar verilen bilgilerden sonra m. derceden kutuplar, sıfıra eşit olmayan bir analitik fonksiyonun $(z-z_0)^m$ ile bölünmesiyle ortaya çıkmaktadır. Bunu m. dereceden sıfırlarla mukayese edersek, ki onlar tersine sıfır olmayan bir analitik fonksiyonu $(z-z_0)^m$ ile çarpmayla ortaya çıkmaktadır.

Tanım 2.1.35. $f(z)$ analitik fonksiyonunun $z=z_0$ bir singüler noktası osun. Eğer $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ var veya $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$ ise $z=z_0$ noktasına kaldırılabilir singüler nokta denir. Diğer bir ifadeyle, $f(z)$ fonksiyonunu $z=z_0$ singüler noktasının bir $0<|z-z_0|<r$ delinmiş komşuluğunda analitik yapabilecek şekilde en az bir $r>0$ reel sayısı varsa $z=z_0$ noktasına kaldırılabilir singüler nokta denir. Başka bir ifadeyle, $f(z)$ fonksiyonu $z=z_0$ noktasında singüleritiye sahip ancak $f(z)$ fonksiyonunun $z=z_0$ noktası civarındaki Laurent açılımının esas kısmı hiç bir terime sahip değil ise, yani

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

ise $z=z_0$ noktasına kaldırılabilir singüler nokta denir. Bu durumda z_0 noktasında fonksiyon değeri $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ değerine eşit olarak seçilirse fonksiyon bu noktada analitik olur.

Örneğin, $f(z) = \dfrac{sinz}{z}$ fonksiyonu için $z = 0$ noktası civarındaki Laurent açılımı

$$1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 + O(z^6)$$

şeklinde olup, Tanım (2.1.35) göre $z = 0$ noktası kaldırılabilir bir singüler noktadır. Peki, bu durumda fonksiyonun singüleritesi nasıl kaldırılır? Biz biliyoruz ki $f(z) = \dfrac{sinz}{z}$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasında analitik olmayıp $\mathbb{C} - \{0\}$ da analitiktir. Bu durumda $g(z)$ bir tam fonksiyon olmak üzere ve $sinz$ de tam fonksiyon olduğu için $sinz = z + z^3 g(z)$ olarak yazılabilir. Bunun anlamı sıfıra eşit olmayan z için, fonksiyon $f(z) = \dfrac{sinz}{z} = 1 + z^2 g(z)$ şeklinde yeniden yazılabilir. Dikkat edilirse $1 + z^2 g(z)$ fonksiyonu da tam fonksiyondur. Böylece $z = 0$ için $f(0) = 1$ olarak tanımlamış olduk. Bu da gösterdi ki $f(z)$ fonksiyonu keza $z = 0$ da analitiktir. Böylece singülerite kaldırılmış oldu.

Tanım 2.1.36. Eğer $z = z_0$ izole edilmiş singüler noktası ne kaldırılabilir ne de bir kutup noktası ise $z = z_0$ noktasına $f(z)$ analitik fonksiyonunun bir esas singüler noktası denir. Diğer bir ifadeyle $f(z)$ fonksiyonunun $z = z_0$ noktası civarındaki Laurent açılımının esas kısmı sonsuz sayıda terim ihtiva ediyorsa, yani

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

şeklinde ise $z = z_0$ noktasına esas singüler nokta denir.

Örneğin, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ fonksiyonu $z_0 = 0$ noktasında analitik değildir. Ancak $z_0 = 0$ noktasının bazı komşuluklarında analitiktir. Dolayısıyla $z_0 = 0$ noktası bir singüler noktadır. Öte yandan fonksiyonun $z_0 = 0$ noktasının $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ delinmiş komşuluğundaki Laurent açılımı

$$\cdots + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{z} + 1$$

şeklinde olup bu açılımın esas kısmında sonsuz çoklukta terim vardır. O halde $z_0 = 0$ noktası $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ fonksiyonu için bir esas singüler noktadır.

Ayrıca kaldırılabilir singüler, kutup ve esas singüler noktalar teoremlerle de karakterize edilebilirler. İlgili teoremler aşağıda verilmiştir.

Çizelge 2.1. İzole edilmiş singüler noktaların sınıflandırılması

$z = z_0$	$0 < \|z - z_0\| < r$ için Laurent Serisi
Kaldırılabilir singülerite	$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$
n. derceden kutup	$\frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$
Basit kutup	$\frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$
Esas singülerite	$\dots + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \dots + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$

Teorem 2.1.5. (**Riemann Teoremi**) $f(z)$ fonksiyonu $z = z_0$ noktasında bir izole edilmiş singüler noktaya sahip olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu $z = z_0$ noktasının uygun bir komşuluğunda sınırlı ise bu durumda $z = z_0$ noktası bir kaldırılabilir singüler noktadır.

Teorem 2.1.6. $f(z)$ fonksiyonu $z = z_0$ noktasında bir izole edilmiş singüler noktaya sahip olsun. Eğer $z \to z_0$) iken $|f(z)| \to \infty$ oluyorsa $z = z_0$ noktası bir kutup noktasıdır.

Teorem 2.1.7. (**Casorati-Weierstrass Teoremi**) $f(z)$ fonksiyonu $z = z_0$ noktasında bir izole edilmiş singüler noktaya sahip olsun. Ayrıca herhangi bir $c \in \mathbb{C}$ sayısı verilsin. Eğer $z = z_0$ noktasının yeterince küçük her bir $r > 0$ delinmiş komşuluğunda $|f(z) - c| < r$ olack şekilde en az bir z sayısı varsa $z = z_0$ noktası bir esas singüler noktadır. Bu teorem herhangi bir analitik fonksiyonun bir esas singüler noktanın yeterince küçük bir r komşuluğunda herhangi bir keyfi değere çok yaklaştırılabilceğini ifade eder.

Tanım 2.1.37. Sonlu sayıdaki kutup noktaları hariç bir $U \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olan fonksiyona meromorf fonksiyon denir. Yani bir bölgede kutup noktasından başka singüler noktası olmayan fonksiyona meromorf fonksiyon denir.

Örneğin $f(z) = \frac{e^z}{z}, g(z) = \frac{sin(z)}{(1-z)^2}$ ve Riemann Zeta ve Gamma fonksiyonları tüm kompleks düzlemde meromorf fonksiyonlardır.

Buraya kadar verilen ön bilgilerden bir bölgede kompleks anlamda türevlenebilmenin bir $f(z)$ fonksiyonunun çok sayıda özelliğinin varlığına işaret ettiğini gördük. En genel anlamda bütün $f(z)$ kompleks fonksiyonları analitik oldukları bölgede sonsuz türevlenebilirler ve dolayısıyla aynı yakınsaklık yarıçapına sahip bir kuvvet serileri ile de temsil edilebilirler. Bu aşamada öncelikle bir kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının nasıl bulunabileceğini hatırlayıp yukarıda verdiğimiz iki önemli iddiayı ispatlayalım. Bir kuvvet serisi verildiğinde yakınsaklık yarıçapı nasıl hesaplanır? Her ne kadar bu sorunun tek bir cevabı olmasa da, birçok durumda aşağıdaki teorem bu soruya cevap vermektedir.

Teorem 2.1.8. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R olsun. Bu durumda

(i) (Oran Testi) Kabul edelim ki $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ var veya ∞ dir. Bu durumda

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

dir.

(ii) (Cauchy-Hadamard Kök Testi) Kabul edelim ki $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ var veya ∞ dir. Bu durumda

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

dir.

İspat. (i) nin ispatını verelim. (ii) nin ispatı benzer şekilde yapılabilir. Kabul edelim ki $0 \leq L \leq \infty$ olmak üzere $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ olsun. Bu durumda $a_n = c_n(z - z_0)^n$ alınıp $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ kuvvet serisine oran testi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{c_n(z - z_0)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |z - z_0| \\ &= L||z - z_0| \end{aligned}$$

elde edilir. Oran testine göre eğer $L|z - z_0| < 1$ yani $|z - z_0| < \frac{1}{L}$ ise seri yakınsak, eğer $L|z - z_0| > 1$ yani $|z - z_0| > \frac{1}{L}$ ise ıraksaktır. Bu durumda yakınsaklık yarıçapnın $R = \frac{1}{L}$ olduğu doğrulanmış oldu. □

Teorem 2.1.9. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ kuvvet serisinin R yakınsaklık

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|}$$

eşitliğini sağlar.

Teorem 2.1.10. (**Karşılaştırma testi**)

Bir $M_n \in \mathbb{R}$ için $|z_n| \leq M_n$ ve $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak ise bu durumda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ yaknsak olup böylece $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ de yakınsaktır.

İspat. $z_n = x_n + iy_n$ olarak alınırsa hipotezden $|x_n| \leq |z_n| \leq M_n$ ve $|y_n| \leq |z_n| \leq M_n$ olduğu açıktır. Böylece $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ ve $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ mutlak yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ serisi yakınsak olur.

□

Teorem 2.1.11. (**Kuvvet serisinin mutlak yakınsaklığı**) Eğer $z_1 \neq z_0$ olmak üzere $z = z_1$ için $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ kuvvet serisi yakınsak ise bu durumda $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ şartını sağlayan herhangi bir z için mutlak yakınsaktır.

İspat. Hipotezde $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ serisi yakınsak olarak kabul edildiğinden $\lim\limits_{n\to\infty} c_n (z - z_0)^n = 0$ dir. Dolayısıyla $= 1, 2, \ldots$ olmak üzere $|c_n||z_1 - z_0|^n \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Bu durumda $\rho = \frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|c_n(z - z_0)^n| &= |c_n||z - z_0|^n \\
&= |c_n||z_1 - z_0|^n \left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \right)^n \leq M\rho^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre eğer $0 \leq \rho < 1$ yani $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ ise $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ serisi mutlak yakınsak olur. □

Teorem 2.1.12. Eğer $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarı çapı R olsun. Bu durumda $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n (z - z_0)^{n-1}$ kuvvet serisi de aynı R yakınsaklık yarıçapına sahip olur.

İspat. Genelliği kaybetmeden $z = 0$ alalım. Bu durumda $|z| < R$ olur. $|z| < \rho < R$ olacak şekilde öğle bir ρ alalım ki $0 < r < 1$ için $r = \dfrac{|z|}{\rho}$ olsun. Bu durumda orijinal kuvvet serisinin terimleri yardımıyla türevlendirilmiş kuvvet serisinin terimlerinin tahmin edebilmek için, mutlak değerlerini yeniden yazalım;

$$\left| n c_n z^{n-1} \right| = \frac{n}{p} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{n-1} |c_n \rho^n| = \frac{n r^{n-1}}{\rho} |c_n \rho^n|.$$

Buradan oran testi yardımıyla, $\sum_{n=0}^{\infty} nr^{n-1}$ serisi için

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)r^n}{nr^{n-1}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)r\right]=r<1$$

olduğu için seri yakınsaktır. Bu durumda $\left(nz^{n-1}\right)$ dizisi bir M reel sayısı ile sınırlıdır. Bu da bize

$$\left|nc_n z^{n-1}\right|\leq\frac{M}{\rho}\left|c_n\rho^n\right|$$

olduğunu verir. Dolayısyla $\rho<R$ olduğu için $\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n\rho^n\right|$ serisi de yakınsaktır.

Öte yandan, kabul edelim ki $|z|>R$ olsun. Bu durumda $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n z^n\right|$ serisi de ıraksaktır ve $n\geq 1$ için

$$\left|nc_n z^{n-1}\right|\leq\frac{1}{|z|}\left|c_n z^n\right|$$

dir. Böylece Teorem (2.1.10) karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ serisi de ıraksaktır. Böyelece verilen her iki seri de aynı yakınsaklık yarıçapına sahiptir. Burada $f'(z)=g(z)$ olduğu açıktır. Kuvvet serileri terim terim türevlendirilebildiğinden elde edilen kuvvet serisi orijinal seri ile aynı yakınsaklık yarıçapına sahip oldukları görülmektedir. □

Bir $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ kuvvet serisinin $R>0$ yakınsaklı yarıçapı olmak üzere $|z-z_0|<R$ diskinde aynızamanda bir $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ analitik fonksiyonunu tanımladığını veya temsil ettiğini biliyoruz. Kuvvet serilerinden, temsil ettikleri fonksiyonlardan direkt bir hesaplamayla elde edilemeyen birçok önemli özelliği kolayca elde edebiliriz. Örneğin, yukarıda da ispatlandığı gibi bir $|z-z_0|<R$ diskinde analitik olan $f(z)$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve türevi de aynı $R>0$ yakınsaklık yarıçapına sahip olması. Bu aşamada $f(z)$ fonksiyonu bir $z=z_0$ noktasında analitik ise, o zaman bu noktada her dereceden türevleri sahip olduğunu cebirsel olarak gösterelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + \dots \tag{2.6}$$

olduğunu biliyoruz. (2.6) ile verilen kuvvet serisinin birinci türevini elde etmek için terim terim türevlendirme yöntemiyle

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z-z_0) + 3c_3(z-z_0)^2 + \dots \tag{2.7}$$

elde edilir. İkinci türevi elde etmek için (2.7) kuvvet serisi terim terim türevlendirilirse

$$f'(z) = 2c_2 + 6c_3(z-z_0) + \dots$$

elde edelir. Bu işlem süreci k. türevi elde etmek için ard arda uygulanırsa, k. türev formülü olarak

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n (z-z_0)^{n-k}$$

kuvvet serisi elde edilmiş olur. Bu özelliğe sahip olan bir fonksiyonuna sonsuz türevlenebilir veya her dereceden türevlere sahip olan bir fonksiyon veya düzgün bir fonksiyon denir.

Teorem 2.1.13. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarı çapı R olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun $|z-z_0| = R$ çemberi içerisinde en az bir singüler noktası vardır.

Lemma 2.1.1. $Q(z) \neq 0$ olmak üzere bir $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ rasyonel fonksiyonu sonsuzda bir kutup veya kaldırılabilir singüleriteye sahip olur. Singüleriteye sahip olması için gerek ve yeter şart $\deg P(z) \leq \deg Q(z)$ olmasıdır.

Teorem 2.1.14. Genişletilmiş kompleks düzlemde (yani $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de) analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu sabittir.

İspat. Bir $f(z)$ fonksiyonu genişletilmiş kompleks düzlemde analitik ise Laurent açılımı $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ Taylor açılımından oluşur. Burada $z = \dfrac{1}{z'}$ alınırsa;

$$f\left(\frac{1}{z'}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{z'}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z')^n}$$

elde edilir. $f\left(\frac{1}{z'}\right)$ fonksiyonu $z' = 0$ da analitik olduğundan $n = 1, 2, \ldots$ için $c_n = 0$ olur. Bu da bize $f(z) = c_0$ olduğunu veriri. □

Sonuç 2.1.1.

(i) Bir z_0 noktasının uygun bir komşuluğunda analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu tarafından katsayıları benzersiz bir şekilde belirlenen bir tek kuvvet serisi vardır. Yani, bir analitik fonksiyon bir tek kuvvet serisi ile temsil edilir.

(ii) (Terim terim inetgrasyon) Eğer γ, $R > 0$ yakınsaklık yarıçapı olmak üzere bir $|z - z_0| < R$ diski içerisinde sınırlı bir eğri ise, bu durumda terim-terim integrasyon ile

$$\int_\gamma f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma c_n (z - z_0)^n \, dz$$

olarak verilebilir.

(iii) Bir $f(z)$ fonksiyonu, kapalı bir disk veya reel eksen aralığı gibi bazı açık olamyan kümelerde analitik ise , verilen kümeyi kapsayan daha büyük bir açık kümede doğal olarak analitiktir.

Teorem 2.1.15. Genişletilmiş kompleks düzlemde tanımlanan bir $f(z)$ fonksiyonu analitiktir ancak ve ancak $f(z)$ bir rasyonel fonksiyon ise. Yani genişletilmiş kompleks düzlemde tanımlanan analitik fonksiyonlar rasyonel fonksiyonlardır.

Bu aşamada analitik fonksiyonların bir çok şaşırtıcı özelliğini elde etmek, kontur (yol veye çizgi) integrallerini hesaplamak için kullanılan Cauchy, Schwarz ve Pisson integrallerini daha iyi anlamak ve dğerlendirmek için bilinmesi gereken tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.38. $a \leq z \leq b$ olmak üzere z ye bağlı bir $f(z) = u(z) + iv(z)$ sürekli kompleks fonksiyonu için

$$\int_a^b f(z)dz = \int_a^b u(z)dz + i\int_a^b v(z)dz$$

integraline a dan b ye çizgi integrali denir.

Komplek analizde çizgi integrali, bir eğri boyunca hesap edilecek integraldir ki, elde edilen sonuç eğri uzunluğunu verir. Bu anlamda uzunlukları ölçülebilen eğrilere ölçülebilir eğriler denir. Kontur integrali ise bir yol boyunca belirli integrali hesaplamadır. İntegral alma işlemi, temelde bir fonksiyonun bazı bölgelerdeki aldığı değerlerin toplamıdır. Bu anlamda çizgi integrali, fonksiyonun değerini integra ettiğimiz alanın bir çizgiyi, yani tek boyutlu bir eğri olduğu özel bir durmdur. Kontur integrali ise, çizgi inetgralinin kompleks değişkenli fonksiyonlara genişlemesidir. Her iki durumda da temelde, Eski Yunanlıların sonsuzluğu matematiksel anlamda belirli amaçlar için kullanabilme çabalarıyla başlayan ve Riemann tarafından da formal bir yapıya kavuşturulan ve bu nedenle de Riemann toplamı olarak bilinen matematiksel araç bulunmaktadır. Başlangıç noktası a ve bitim noktası b olan kopleks düzlemin bir γ eğrisinin alalım. γ eğrisinin $a = z_0 < z < z_2 < \cdots < z_k < \cdots < z_n = a$ noktalarıyla oluşturulan $[z_0, z_1], [z_1, z_2], \ldots, [z_{n-1}, z_n]$ ve $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü olarak adlandırlan n sayıda alt aralığa bölelim. Bu durumda $w_k \in (z_{k-1}, z_k)$ ve $\Delta z = z_k - z_{k-1}$ olmak üzere

$$S_n = f(w_1)(z_1 - z_0) + f(w_2)(z_2 - z_1) + \cdots + f(w_n)(z_n - z_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \Delta z_k f(w_k)$$

şeklindeki toplama Riemann toplamı denir.Bu toplam $n \to \infty$ iken, yani $[a, b]$ aralığı sonsuz alt parçaya sahip olduğunda en büyük parçanın uzunluğu sıfıra yaklaşacaktır, yani $|\Delta z_k| \to 0$ olacaktır. Öte yandan f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan bu aralığın parçalanma şeklinden bağımsız olarak bir limite yaklaşır ve

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta z_k f(w_k) = \int_a^b f(z) dz = \int_\gamma f(z) dz$$

olarak yazılır. Elde edilen limit değeri çizgisel integral olarak adlandırılırken, $f(z)$ fonksiyonuna da Riemann anlamda integrallenebilen (kısaca inetgrallenebilen) fonksiyon denir.

Teorem 2.1.16. (**İntegraller İçin Üçgen Eşitsizliği-I**)Kabul edelim ki,$f(z)$ fonksiyonu $a \leq z \leq b$ de tanımlı kompleks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left| \int_a^b f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(z)| dz \tag{2.8}$$

dir. Eşitsizlikteki eşitlik, ancak ve ancak $f(z)$ değerlerinin tümü başlangıçtan itibaren aynı ışın üzerinde ise gerçekleşir.

İspat. Bu integral bir Riemann toplamına yaklaştırılarak ispatlanabilir.Buna göre

$$\left|\int_a^b f(z)dz\right| \approx \left|\sum f(z_k)\Delta z\right| \leq \sum |f(z_k)|\Delta z \approx \int_a^b |f(z)dz$$

elde edilir. Ortadaki eşitsizlik kompleks sayıların toplamları için kullanılan standart üçgen eşitsizliğidir. □

Bazen bir yol integralini tam olarak hesaplamak çok zordur. Bu durumda integralin bir üst sınırını bulma yeterli olabilir. Teorem (2.1.16) bu anlamda oldukça kullanışlıdır.

Teorem 2.1.17. (**İntegraller İçin Üçgen Eşitsizliği-II**) $a \leq t \leq b$ olmak üzere γ eğrisinin bir parametresi olarak $\gamma(t)$ alalım. Bu durumda $dz = \gamma'(t)dt$ ve $|dz| = |\gamma'(t)|dt$ olup, herhangi bir $f(z)$ fonksiyonu ve γ eğrisi için

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|dz \tag{2.9}$$

dir.

İspat. Teorem (2.1.16) nın direkt bir sonucu olarak hemen elde edilir.

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(z))\,\gamma'(t)dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))\,||\gamma'(t)|dt \\ &= \int_\gamma |f(z)|dz\end{aligned}$$

elde edilir. □

Bu teoremin bir soucu olarak, $M > 0$ olmak üzere, eğer γ boyunca her z için $|f(z)| < M$ ise, bu durumda

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq M|\gamma|$$

dir. Burada $|\gamma|$ değeri γ eğrisinin uzunluğudur.

Reel analizden de hatırlanacağı üzere, belirli bir integrali hesaplamanın en kolay yolu, bir ters-türev bulmak ve Analizin temel toremini kullanmaktır. Aynı şey kompleks analizde de yapılabilir.

Teorem 2.1.18. (**Kompleks analizin temel teoremi**) Kabul edelim ki $f(z)$ ve $F(z)$ fonksiyonları, $F(z)$ bir U bölgesinde kompleks türevlenebilir ve her $z \in U$ için $F'(z) = f(z)$ olacak şekilde fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda U içerisindeki herhangi z_1 ve z_2 noktalarını bağlayan γ konturo için

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} \\ &= F(z_2) - F(z_1)\end{aligned}$$

dir.

Bu toremin bir sonucu olarak, eğer bir f fonksiyonu bir U bölgesinde anti-türeve sahip ise, bu durumda U içerisindeki bütün kapalı γ konturları için $\int_\gamma f(z)dz = 0$ olacağı açıktır. Bunun bir sonucu olarak da U bölgesinde başlangıç ve bitim noktaları aynı olan ik kapalı γ_1 ve γ_2 konturu için $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$ olduğudur.

Teorem 2.1.19. (**Cauchy Teoremi, Cauchy-Goursat Teoremi**) Kabul edelim ki U, z_0 noktasını ihtiva eden basit bağlantılı bir bölge ve $f(z)$ fonksiyonu da $U - \{z_0\}$ da analitik ve sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda U içerisndeki bütün kapalı γ eğrileri için

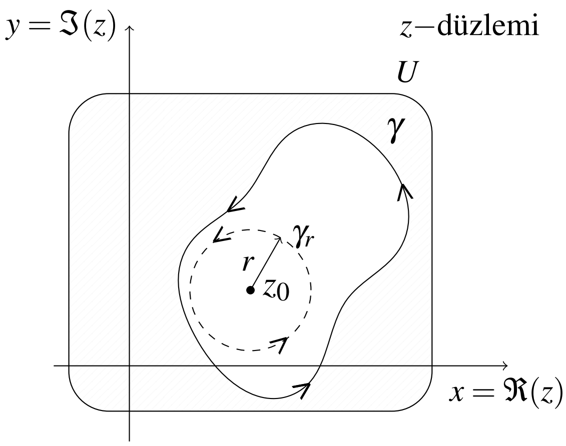
$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \tag{2.10}$$

dir.

İspat. Teorem (2.1.18) bize

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_r} f(z)dz$$

olduğunu söyler. Burada γ_r, z_0 ın r yarıçaplı bir komşuluğudur.



Şekil 2.26. U basit kapalı bir bölge ve
$f(z)$ fonksiyonu $U - \{z_0\}$ da analitik ve sürekli.

$f(z)$ sürekli olduğu için biz biliyoruz ki, γ_r içerisinde $|f(z)|$ sınırlı, yani $|f(z)| < M$ olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı vardır. Bu durumda Teorem (2.1.17) integraller için üçgen eşitsizliğinden

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz \leq M(\gamma_r \text{nin yay uzunluğu}) = M2\pi r$$

elde edilir. Öte yandan r yeterince küçük olabileceğinden (yani $r \to 0$) bu durumda

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = 0$$

olur. □

Genellikle Cauchy integrali teoremi veya basitçe Cauchy teoremi olarak adlandırılan bu temel teorem, basit ve çok bağlantılı bölgeler için geçerlidir. Bu teoremin ispatı Cauchy tarafından f fonksiyonunun sürekli olma ek varsayımıyla verildi. Bununla birlikte, Fransız matematikçi Edouard Goursat (1858-1936) bu ek varsayımı kaldırarak bir ispat verdi. Bu nedenle, teorem Cauchy-Goursat teoremi olarak da adlandırılmaktadır. Kompleks integral teorisinde bir çok önemli sonuç, başlangıç noktası olarak Cauhy integral formülüne sahiptir.

Yukarıda da açıklandığı gibi, eğer f fonksiyonu bir basit bağlanılı U bölgesinde analitik ise bu durumda, U içerisindeki herhangi bir kapalı kontur boyunca f nin integralinin sıfır olduğunu ifade etmektedir. Morera ilk kez aynı varsayımlar altında tersinin de doğru oduğunu ispatlamıştır. Bu teorem bir anlamda basit bağlantılı bölgelerde yol bağımsızlığının, analitik olma ve bir ters-türeve sahip olma özelliklerinin hemen hemen aynı anlama geldiğini ifade etmektedir.

Teorem 2.1.20. (**Morera Teoremi**) f fonksiyonu basit bağlantılı bir U bölgesinde sürekli ve U bölgesindeki her bir kapalı γ eğri için

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \tag{2.11}$$

ise, bu durumda f fonksiyonu U bölgesinde analitiktir.

Kompkeks analizde, bir fonksiyonun analitik olduğunu kanıtlamak için önemli bir ölçü olan Morara teoremi 1886 yılında İtalyan matematikçi ve fizikçi Giacinto Morera (1856-1909) tarafından verildi. Genel anlamda Morera teoreminin tersi doğru değildir. Tersinin doğru olabilmesi için ek varsayımların mutlaka sağlanması gerekir.

Kompleks analizde, çalışmaların en önemli nesnelerini analitik fonksiyonların oluşturduğu açıktır. Cauchy teoremi, kompleks integral hesabın en temel, en iyi bilinen ve en faydalı sonucunu verirken, analitik fonksiyonların bir dizi ilginç ve yararlı özelliğini ortaya çıkarmakta oldukça yararlı bir matematiksel araç sunmaktadır. Cauchy integral teoremi daha önce de ifade edildiği gibi bizi, Cauchy integral formülüne götürür. Cauchy'nin kompleks integral üzerine ilk çalışması, 1814 tarihli bir makalede yayınlamıştır (Bottazzini 1986, 132). Bu çalışması, Cauchy'nin ünlü integral formülünün ve Cauchy-Riemann denklemlerinin ilk ipucu olarak kabul edilmektedir. Cauchy'nin integral formülünden doğrudan elde edilen sayısız teorem ve sonuç vardır. Bu aşamada öncelikle fonksiyonlar için Cauchy integral formülünü verilip, devamında da yukarıda sözü edilen teoremlerden sunulan tez konusuyla yakından ilgili olanlar verildi.

Teorem 2.1.21. (**Cauchy İntegral Formülü**) Kabul edelim ki, γ pozitif (yani saatin dönme yönünün tersi) yönlü basit kapalı bir eğri ve $f(z)$ fonksiyonu da γ eğrisinin sınırladığı U bölgesinde tanımlı ve analitik bir fonksiyon olsun.Bu durumda z_0 noktası U bölgesinde bir iç nokta olmak üzere

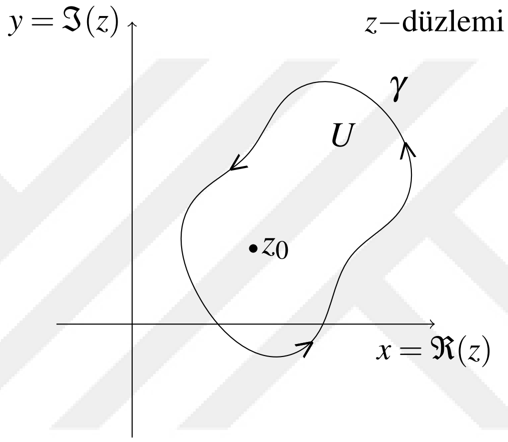
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{2.12}$$

formülü vardır.

Bilindiği üzere, bir bölgenin U bölgesini sınırı üzerinde hareket eden bir gözlemciye göre bölge daima sol tarafta kalıyorsa bölge pozitif yönlü olduğu söylenir. Eğer bölge çembersel bir bölge ise saat yönünün tersinde yönlendirilen bölge pozitif yönlü olarak kabul edilir. Bu anlamda kapalı bir eğri üzerinden saat yönünün tersine bir $\int_\gamma$ integrasyonun yapıldığını belirtmek için $\oint\limits_\gamma$ kullanılabilmektedir. Bu durumda (2.12) formülü

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

şeklini alır.



Şekil 2.27. γ basit kapalı bir eğri ve $f(z)$ fonksiyonu γ içerisinde ve üzerinde analitik.

İspat. İstediğimiz sonuca ulaşmak için $g(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ olarak alalım. $f(z)$ fonksiyonu U da analitik olduğundan biz biliyoruz ki $g(z)$ fonksiyonu $U - \{z_0\}$ da analitiktir. Öte yandan z_0 da türevli olduğuna göre,

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = f'(z_0)$$

dir. Yani, eğer $g(z_0) = f'(z_0)$ olarak tanımlanırsa, $g(z)$ fonksiyonu z_0 da sürekli olur. Bu durumda Teorem (2.1.19) den

$$\int_\gamma g(z) dz = 0, \text{yani} \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

yazılır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz &= \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz \\ &= f(z_0)\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}dz \\ &= 2\pi i f(z_0)\end{aligned}$$

elde edilir. Buda ispatı tamamlar. □

Cauchy integral formülü, uygun hipotezler altında, basit bir kapalı eğri içindeki bir analitik fonksiyonun değerlerinin sınır eğrisi üzerinde fonksiyonun aldığı değerler tarafından belirlendiğini göstermektedir. Reel değerli fonksiyonlarla karşılaştırıldığında, bu yönüyle Cauchy teoremi oldukça dikkat çekicidir.

Teorem 2.1.22. (**Türevler İçin Cauchy İntegral Formülünün Genel Versiyonu**) Eğer $f(z)$ ve γ, Cauchy İntegral formülünde olan aynı şartları sağlıyorsa, bu durumda γ eğrisi içerisindeki bütün z_0 iç noktaları için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, n \in \mathbb{N}^+ \tag{2.13}$$

dir.

Önce formülün altında yatan nedeni yakalamak için bazı matematiksel manipülasyonlar yaparak formal olmayan bir ispat verip, ardından formal ispatı verelim. $z_0 \in U$ olmak üzere $f'(z_0)$ elde ettiğimiz (2.12) integral gösteriminin her iki tarafının türevi alınır ve gerekli olan cebirsel işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{z-z_0}\right)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\end{aligned}$$

olur. Bu aşamadan sonra matematiksel tümevarım yöntemiyle, daha yüksek mertebeden türevlerin formülleri kolaylıkla elde edilebilir.

İspat.(Formal ispat) Bu ispat, her iki terimin sırasıyla

$$f(z_0+\Delta z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0-\Delta z_0}dz \text{ ve } f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

integral gösterimi kullanarak ve $\lim\limits_{\Delta z_0\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z_0)-f(z_0)}{\Delta z_0}$ limiti yani türev tanımını kullanarak yapılabilir. Buna göre, gerekli olan cebirsel işlemlerin de yardımıyla

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+\Delta z_0)-f(z_0)}{\Delta z_0} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0-\Delta z_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z_0)(z-z_0)}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2-\Delta z_0(z-z_0)}dz \qquad (2.14)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu aşamada her iki tarafın $\Delta z_0 \to 0$ iken limiti alınırsa, $f'(z_0)$ için Cauchy formülü

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

olarak bulunmuş olur. (2.14) eşitliğinde limiti integral işaretinin altına almakta sakınca yoktur, çünkü integrand sürekli ve payda asla sıfır olmaz. □

Teorem 2.1.23. (**Cauchy Eşitsizliği**) γ_r eğrisinin $|z-z_0|=r$ olarak alalım. Kabul edelim ki, $f(z)$ fonksiyonu γ_r eğrisi üzerinde ve içerisinde yani $|z-z_0|=r$ diskinde analitik olsun. Bu durumda z_0 noktası γ_r de olmak üzere $M_r := mak|f(z)|$ alınırsa

$$\left|f^{(n)}f(z_0)\right| \le \frac{n!M_r}{r^n}, n\in\mathbb{N}^+ \qquad (2.15)$$

dir.

İspat. Türevler için (2.13) Cauchy integral formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}f(z_0)\right| &\le \frac{n!}{2\pi}\int_{\gamma_r}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}|dz| \\ &= \frac{n!}{2\pi}\frac{M_r}{r^{n+1}}\int_{\gamma_r}|dz| \\ &= \frac{n!}{2\pi}\frac{M_r}{r^{n+1}}2\pi r \\ &= \frac{n!M_r}{r^n}\end{aligned}$$

$\square$

Reel analizde sınırlı olan birçok fonksiyon olduğunu biliyoruz. Örneğin, $y = f(x) = sinx$ fonksiyonu için $-1 \leq sinx \leq 1$ olduğundan sınırlı olduğu açıktır. Bu fonksiyon hiçbir ilave şart ile hem sınırlı hem de sabit yapılamaz. Öte yandan komplek analizde de sınırlı olan birçok fonksiyonlar vardır. Ancak burada dikkat edilmesi gereken bir durum vardır. Fransız matematikçi Josep Liouville (1809-1882), Cauchy integral teoremini bir sonucu olarak kompleks düzlemde sınırlı olan tüm tam fonksiyonların sabit olması gerektiğini ifade etmiştir. Başka bir ifadeyle tam fonksiyonların sabit değillerse sınırlandırlamayacağını ifade etmektedir.

Teorem 2.1.24. (**Liouville Teoremi**) Kabul edelim ki $f(z)$ tam fonksiyonu kompleks düzlemde sınırlı, yani, her bir $z \in \mathbb{C}$ için $|f(z)| \leq M$ olacak şekilde en az bir $M > 0$ reel sayısı vardır. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu sabittir. Kısaca, eğer $f(z)$ fonksiyonu tam ve sınırlı ise sabittir. O halde sabit olmayan bir tam fonksiyon sınırlı olamaz.

İspat. z_0 noktasının herhangi bir r komşuluğu için (2.15) Cauchy eşitsizliği $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$ olduğunu garanti eder. Öte yandan, biz biliyoruz ki r yeterince küçük seçilebilir. Bu nedenle herhangi bir $z_0 \in \mathbb{C}$ için $|f'(z_0)| = 0$ elde edilir. Türev 0 olduğu için, fonksiyonun kendisi sabit olmak zorundadır. $\square$

$P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n, sin(z), e^z$ fonksiyonlarının hepsi tamdır ancak sınırlı değildirler. Ayrıca (2.1.24) Liouville teoreminin bir sonucu olarak, sabit olmayan bir tam fonksiyonun herhangi bir kompleks sayıya yeterince çok yaklaştırılabilir sonucu ortaya çıkmaktdır. Yani $f(z)$ sınırlı olmayan bir tam fonksiyon ise, verilen herhangi bir $w \in \mathbb{C}$ ve yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $|f(z) - w| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $z \in \mathbb{C}$ vardır. Doğru olduğunu görmek için tersini yani her $z \in \mathbb{C}$ için $|f(z) - w| \geq \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ fonksiyonu $\frac{1}{\varepsilon}$ ile sınırlı bir tam fonksiyon olur. Böylece (2.1.24) Liouville teoremine göre $g(z)$ sabittir. Dolayısıyla $f(z)$ sabittir. Bu ise varsayımımızla çelişir.

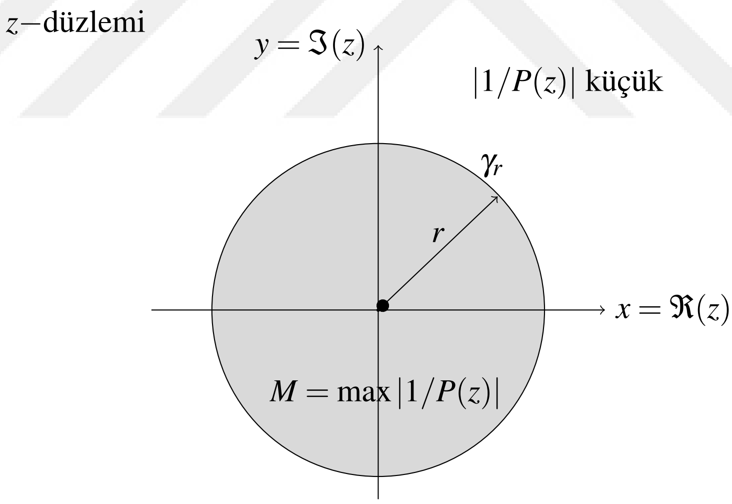
Reel analizden bir $P(x)$ polinomunu çarpanlarını bulma problemlerini düşünelim. Bazen verilen bir polinomun (örneğin, $x^2 - 4$) lineer (doğrusal) çarpanlarına ayrıla bildiği bazen de ayrılamadığı (örneğin, $x^2 + 4$) açıktır. Bilindiği üzere Reel analizde köke sahip olmayan polinomlar çarpanlara ayrılamazlar. Komplek analizde bu durumlar çok daha iyidir. Kompleks analizde verilen her $P(z)$ polinomu linner çarpanlarına ayrılabilir. Ya da başka bir ifadeyle kompleks katsayılara sahip, sabit olmayan her tek değişkenli polinom en az bir kompleks köke sahiptir. Cebirin temel teoremi olarak bilinen bu ifadenin ispatı tamamen (2.1.24) Liouville teoremine dayanmaktadır.

Teorem 2.1.25. (**Cebirin Temel Teoremi**) Derecesi $n \geq 1$ ve baş katsayısı $c_n \neq 0$ olan herhangi bir $P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$ polinom denklemi tam olarak n sıfıra(köke) sahiptir. Yani $c \neq 0$ ve $z, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere $P(z)$ polinomu $P(z) = c(z - z_1) \ldots (z - z_n)$ şeklinde yazılabilir. Burada $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ lerin hepsinin farklı olması gerekmez.

İspat. İspat iki aşamada yapılacaktır. İlk aşamada $P(z)$ nin en az bir kökü olduğunu gösterelim. Bu, (2.1.24) Liouville teoremi ile birlikte çelişki ile yapılır. $P(z)$ nin sıfırı olmadığını kabul edelim. Bu durumda,

(i) $f(z) = 1/P(z)$ fonksiyonunun tam olduğu açıktır. Çünkü kabul gereği $P(z)$ nin sıfırı yoktur.

(ii) $f(z)$ sınırlıdır. Çünkü $|z| \to \infty$ iken $1/P(z) \to 0$ dır.



Açıktır ki, $z \to \infty$ iken $|1/P(z)| \to 0$, yani $|1/P(z)|$ dairenin dışında küçüktür. Bu nedenle $|1/P(z)|$, M ile sınırlıdır. Bu durumda, Liouville teoremine göre $f(z)$ fonksiyonu sabit ve dolayısıyla da $P(z)$ sabittir. Ancak bu bir çelişkidir. Bu nedenle $P(z)$ nin sıfır yok varsayımı yanlıştır. Yani $P(z)$ en az bir köke sahiptir.

İkinci aşamada $P(z)$ nin n köke sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ olarak yazılabileceği açıktır. Bu durumda $Q(z)$, $n-1$. dercedendir. Eğer

$n-1>0$ ise, yukarıda verilen prosedürü $Q(z)$ ye uygulayabiliriz. Bu prosedüre $Q(z)$ nun derecesi 0 olana kadar devam edebiliriz. Buda ispatı bitirir. $\square$

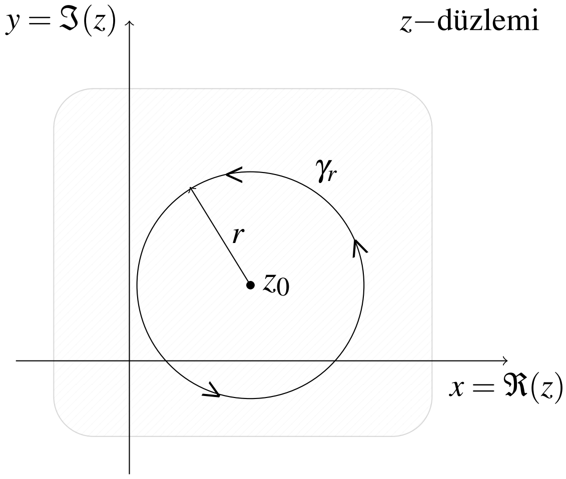
Bir aralıkta tanımlanan reel değerli türevlenebilir fonksiyonlar için Ortalama değer teoremi, Analiz ‘deki en temel sonuçlardan biridir. Ortalama değer teoremi, herhangi bir fonksiyonun bir aralıktaki değerinin net değişimi ile bu aralıktaki türevinin olası değerleri arasında yakın bir bağlantı olduğunu söyler. Bu bağlantı nedeniyle, fonksiyonun değerleri hakkındaki bilgilere dayanarak türevin olası değerleri hakkında sonuçlar çıkarabiliriz ve tersine, türevinin değerleri hakkındaki bilgilere dayanarak fonksiyonun değerleri hakkında sonuçlar çıkarabiliriz. Kompleks değerli fonksiyonlar söz konusu olduğunda, fonksiyon tüm kompleks düzlem boyunca türevlenebilir olsa bile teorem teorem doğru olamayabilir. Ancak kompleks analizde Gauss’un ortalama değer teoremi eğer $f(z)$ fonksiyonu, merkezi z_0 ve yarıçapı r olan bir C_r çemberinin içinde ve üzerinde analitik ise, o zaman $f(z_0)$, C_r üzerindeki $f(z)$ değerlerinin ortalaması olan bir sonuç oluşturmaktadır. Bu aşamada Teorem (2.1.21) in, yani Cauchy teoreminin ilginç sonuçlarından bir olan ve maksimum modul prensibinin ispatında kullanacağımız Gauss ortalama değer teoremini ifade ve ispat edelim.

Teorem 2.1.26. (**Gauss Ortalam Değer Teoremi**) Kabul edelim ki $f(z)$ fonksiyonu z_0 merkezli ve r yarıçaplı bir kapalı disk içerisinde ve üzerinde analitik olsun. Bu durumda

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta \tag{2.16}$$

dir. Yani $f(z_0)$ değeri, sınır eğrisi üzerindeki $f(z)$ değerlerinin aritmetik ortalamasına eşittir.

İspat. Bu teoremin ispatı, temelde $C_r = |z-z_0| \leq r$ diskinde Teorem (2.1.21) in, yani Cauchy teoreminin bir uygulamasıdır.



C_r nin sınırı olan γ_r yi

$$\gamma(\theta)=z_0+re^{i\theta},0\leq\theta\leq 2\pi$$

ve dolayısıyla $\gamma'(\theta)=ire^{i\theta}$ olarak parametrelendirebiliriz. Bu durumda Teorem (2.1.21) Cauchy formülünden,

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta \end{aligned}$$

elde edilir ki, buda ispatı bitirir. □

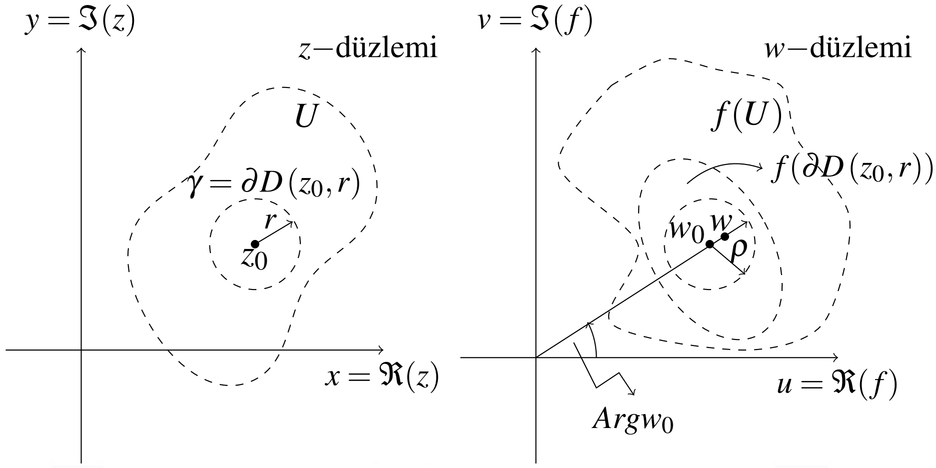
Teorem 2.1.27. (**Maksimum Modül Prensibi**) Kabul edelim ki $f(z)$ basit bağlantılı bir U bölgesinde analitik ve z_0, U da bir nokta olsun. Bu şartlar altında

(i) Eğer, $|f(z)|$, z_0 noktasında bir yerel maksimuma (lokal maksimum veya relatif maksimum) sahip ise, bu durumda $f(z)$ fonksiyonu z_0 ın uygun bir komşuluğunda sabittir.

(ii) Eğer, U sınırlı ve basit bağlantılı bir bölge ve $f(z)$ fonksiyonu da U da ve onun sınırında sürekli ise, bu durumda $f(z)$ fonksiyonu sabittir veya $|f(z)|$ nın mutlak maksimumu (kısaca maksimumu) yalnızca U nun sınırında oluşur (Maksimum modül prensibinin genel versiyonu).

İspat. Birinci bölümün ispatında Teorem (2.1.26) deki Ortalama değer özelliği ve Teorem (2.1.16) deki üçgen eşitsizliği kullanılır. z_0, $|f(z)|$ nin bir yerel maksimumu olduğunda, z_0

ın her bir yeterince küçük $\gamma : |z - z_0| = r$ komşuluğu ve γ üzerindeki z için $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ yazabiliriz.



Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
|f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta \right| && \text{(Ortalama değer teoremi)} \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) \right| d\theta && \text{(Üçgen Eşitsizliği)} \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0) \right| d\theta && (|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq |f(z_0)|) \\
&= |f(z_0)|
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Yukarıda verilen işlem zincirdeki tüm eşitsizlikler eşitlik olmalıdır. İlk eşitsizlik ancak tüm θ için, $f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)$ orijinden itibaren aynı ışın üzerinde kalıyorsa, yani aynı argümana sahip iseler bir eşitlik olabilir. İkinci eşitsizlik ancak, tümü $|f(z_0 + re^{i\theta})| = |f(z_0)|$ ise bir eşitlik olabilir. Yani, bütün $f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)$ ler aynı büyüklüğe ve aynı argümana sahiptirler. Buda hepsinin aynı olduğu anlamına gelir. Son olarak, eğer $f(z)$ çember boyunca sabitse ve $f(z_0)$ çember üzerindeki $f(z)$ nin ortalması ise, o zaman $f(z) = f(z_0)$, yani z_0 ın uygun bir komşuluğunda sabittir.

İkinci bölümde U nun sınırlı ve $f(z)$ fonksiyonunun U üzerinde sürekli olduğu varsayımları ve sınırıyla birlikte U üzerinde $|f(z)|$ mutlak bir maksimuma sahip olduğunu garanti eder. Öte yandan birinci bölüm de, $f(z)$ sabit olmadığı sürece mutlak maksimumun U bölgesinin içinde bulunamayacağını garanti eder. Bu durumda, mutlak maksimum iç kısımda değilse sınırda olmalıdır. $\square$

Kısaca maksimum modül prensibi ifade eder ki,$f(z)$ fonksiyonu bir U bölgesinde tanımlı sabit olmayan analitik bir fonksiyon ise $|f(z)|$ maksimum değerini bu bölge içerisinde alamaz, sınırında alır. Bu teoremin ilk temel uygulamalarından biri adını Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) 'dan alan Schwarz lemmasıdır. Schwarz lemmasının oldukça geniş kampsamlı uygulamalar sahiptir. Schwarz lemmasının en klasik versiyonu, birim disk üzerinde tanımlı sınırlı ve analitik bir fonksiyonun davranışı (büyüme hızları) hakkında bilgi verir. Bu lemmanın, fonksiyonun yalnızca, birim diski birim diske ve orijinin orijine eşlemesi şeklindeki nispeten hafif hipotezlere tabidir. Bu anlamda (2.1.24) Liouvile teoremi aşağıda verilecek olan Schwarz lemmasının bir genellemsi olarak düşünülebilir.

Lemma 2.1.2. (**Schwarz Lemması**) $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskinde $|f(z)| \leq 1$ ve $f(0) = 0$ şartlarını sağlayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu şartlar altında

$$|f(z)| \leq |z| \text{ ve } |f'(0)| \leq 1$$

dır. Eğer bazı $0 \neq z \in \mathbb{D}$ noktaları için $|f(z)| = |z|$ veya $|f'(0)| = 1$ ise, bu durumda $|c| = 1$ olan bir c sabiti için $f(z) = cz$ (Rotasyon) dir.

İspat. İstenilen sonuca ulaşmak için, $g = \mathbb{D} \to \mathbb{C}, g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $z = 0$ noktasındaki singülerite kaldırılabilirdir ve

$$g(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0)$$

elde edilir. Böylece $g = \mathbb{D} \to \mathbb{C}, g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & ,z \neq 0 \text{ ise} \\ f'(0) & ,z = 0 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu analitiktir. Dolayısıyla $0 < r < 1$ olmak üzere $|z| = r$ çemberinde

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}$$

elde ederiz. Bu durumda Teorem (2.1.27) maksimum modül teoremine göre, kapalı disk $|z| \leq r$ de $|g(z)|$ maksimum değerini $|z| = r$ nin sınırında alır. Yani,

$$|z| \leq r \Longrightarrow |g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

dir. Bu aşamada $n \geq 1$ olmak üzere $r_n := 1 - \dfrac{1}{2n}$ olarak alınırsa, $n \to \infty$ iken $r_n \to 1$ olacağı açıktır. Her $z \in \mathbb{D}$ için, en az bir $m \geq 1$ vardır, öyleki $|z| \leq r_m \leq r_n < 1$ ve her $n \geq m$ için ise $g(z) \leq \dfrac{1}{r_n}$ olur. Bu durumda $n \to \infty$ iken $\dfrac{1}{r_n} \to 1$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için ise $|g(z)| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{r_n} = 1$ elde ederiz. Böylece $|g(z)| = \dfrac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$ ve $f(0) = 0$ olmak üzere her $z \in \mathbb{D}$ için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$ elde edilmiş olur.

Eğer, bazı $0 \neq z \in \mathbb{D}$ için $|f(z)| = |z|$ veya $|f'(0)| = 1$ ise, bu durumda $|g(z)| = 1$, $|z| < 1$ diskinde olur, yani maksimuma $\mathbb{D}$ diskinin bir iç noktasında ulaşır. Bu durumda ise, maksimum modül prensibine göre, $g(z)$ fonksiyonu sabit fonksiyon olur. Yani, $g(z) = c, c \in \mathbb{C}, |c| = 1$ dir. O halde, $\mathbb{D}$ de , $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(z) = cz = e^{i\theta}$ dır. □

Tanım 2.1.39. Birim disk $\mathbb{D}$ de analitik olup, $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$ koşullarını sağlayan $f(z)$ fonksiyonuna bir Schwarz fonksiyonu denir. Bütün Schwarz fonksiyonlarının sınıfı Ω ile gösterilir.

Schwartz fonksiyonları klasik olarak $\mathbb{C}$ üzerinde düzenli fonksiyonlar olarak da tanımlanır, öyle ki onların tüm türevleri, herhangi bir polinomun fonksiyonun tersine hızla azalır. Bu anlamda Ω sınıfı türevi hızla azalan fonksiyonların sınıfıdır.

Tanım 2.1.40. Bir $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna bir açık dönüşüm denir, eğer her bir U açı kümesi için $f(U) = \{f(z) : z \in U\}$ açık ise.

Teorem 2.1.28. (**Açık Dönüşüm Teoremi**) Bir açık ve bağlantılı $G \subset \mathbb{C}$ alt kümesi ve sabit olmayan $f : G \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu verilsin. Bu durumda her bir $U \subset G$ açık alt kümesinin $f(U)$ görüntü kümesi $\mathbb{C}$ de açık ise.

Bu, açık kümelerin ileri görüntülerinin açık olduğu, açık kümelerin ters görüntülerinin ise süreklilik ek şartı altında açık olduğu anlamına gelir. Analitik fonksiyonların geometrik özelliklerini anlamak için çok kullanışlı olan bu teorem, analitik olma ve reel türevlenebilirlilik arasındaki farkı ortaya koyma açısından önemli olduğu kadar, açık dönüşümlerin bileşkelerinin açık olması ve açık kümelerin ters görüntülerinin ancak süreklilikle açık olduğunu ortaya koyması açısından da oldukça önemlidir.

Sonuç 2.1.2. Eğer $U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu bire-bir analitik bir fonksiyon ise, bu durumda

(i) $f(U)$ açık,

(ii) $f'(z)$ türev fonksiyonu U da sıfır değildir,

(iii) $f^{-1} : f(U) \to U \subset \mathbb{C}$ ters fonksiyonu da analitik olup, türevi

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

dir. Başka bir ifadeyle eğer $w = f(z)$ ise $z = f^{-1}(w)$ ters fonksiyonunun türevi

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}}$$

dir.

Bu aşamada analitik bir fonksiyon verildiğinde, onu biri diğerinden daha basit ve daha hızlı büyüyen (dolayısıyla daha baskın olan) iki fonksiyonun toplamı olarak yazarak kök (sıfır) bulma problemlerini basitleştirmek için kullanılan Rouche teoremini verelim. Fransız matematikçi Eugene Rouche (1832-1910) mezun olduğu okulun matematik dergisinde yayınlanan bir makalesinde iki analitik fonksiyonun düzlemin bir eğri ile sınırlanmış bir bölgesinde aynı sayıda sıfıra sahip olduğunu ortaya koyan bir yöntem sunmuştur. Bu yöntem, belirli koşullar veya parametreler altında bir bölgedeki bir fonksiyonun kök sayısını bulmaya yardımcı olur.

Teorem 2.1.29. (**Rouche Teoremi**) $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarının her biri, sınır eğrisi ∂U olan bir U bölgesi içerisinde ve üzerinde analitik fonksiyonlar ve ∂U eğrisi üzerindeki her bir z için $|g(z)| < |f(z)|$ ise, bu durumda $f(z)$ ve $f(z) + g(z)$ fonksiyonları U da aynı sayıda sıfıra(köke) sahiptirler.

İspat.

$$p(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n$$
$$f(z) = c_n z^n$$

$$g(z) = p(z) - f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_{n-1} z^{n-1}$$

olarak alalım. Öte yandan $|z| = r$ çemberinde $|f(z)| = |c_n| r^n$ ve $|g(z)| \leq |c_0| + |c_1| z + |c_2| z^2 + \cdots + |c_{n-1}| z^{n-1}$ dir. r yeterince büyük seçilirse

$$\frac{|c_0| + |c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{n-1}|}{|c_n|} < r$$

olur. Bu durumda $|g(z)| < |f(z)|$ eşitsizliği, orijin merkezli ve r yarıçaplı çember üzerindeki her z için doğrulanmış oldu. Dolayısıyla $f(z)$ fonksiyonu Teorem (2.1.25) Cebirin temel teoremine göre n köke sahip olduğundan ispat tamamlanmış oldu. $\square$

Örneğin, $g(z) = e^z + 5z^3 - 1$ fonksiyonunu alalım. İddiamız birim disk $\mathbb{D}$ içerisinde bu fonksiyonun üç köke sahip olduğudur. Bunun doğru olduğunu göstermek için, birim disk $\mathbb{D}$ üç köke sahip olan fonksiyonu $f(z) = 5z^3$ olarak alalım. Öte yandan $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları tam fonksiyonlar yani $\mathbb{C}$ de analitik olup birim disk $\mathbb{D}$ içerisinde köke sahip değildirler. Aynı zamanda birim disk $\mathbb{D}$ üzerindeki her bir z için

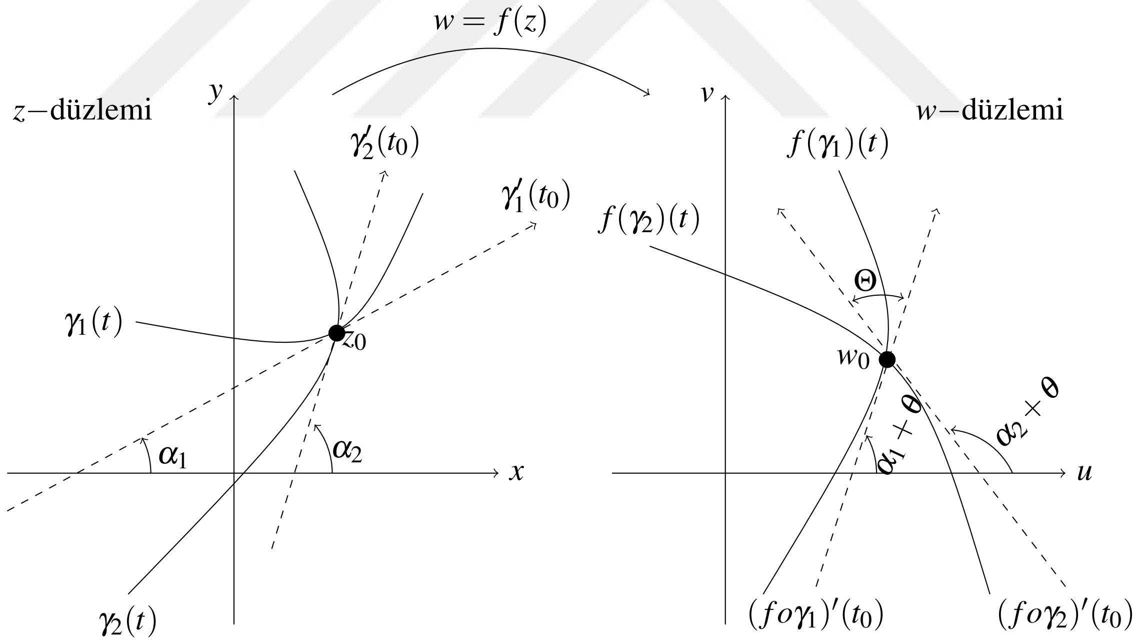
$$|f(z) - g(z)| = |e^z + 1| \leq |e^z| + 1 \leq 2 < 5 = |5z^3| = |f(z)|$$

elde edilir. Rouche teoreminin şartları sağlandığına göre, birim disk içerisine $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları aynı sayıda köke sahiptirler. Yani, $g(z)$ fonksiyonunun birim disk içerinde üç kökü vardır.

Komlpeks analiz uygulamalarının çoğunun arkasındaki itici güç, kompleks fonksiyonlar ile iki değişkenli analitik fonksiyonlar arasındaki dikkat çekici bağlantıdır. Herhangi bir analitik kompleks fonksiyonun reel ve sanal kısımları otomatik olarak analitiktir. Bu şekilde, kompleks fonksiyonlar, iki boyutlu Laplace denklemine, çok çeşitli fiziksel ve matematiksel uygulamalarda yararlanılabilecek zengin bir ek çözümler dizisi sağlar. En yararlı sonuçlardan biri, iki kompleks fonksiyonun birleşiminin de kompleks bir fonksiyon olduğu temel gözleminden kaynaklanmaktadır. Bu dönüşüm, Euclid düzleminde yönlü açıları koruyan konformal bir dönüşüm üreten değişkenlerin bir kompleks değişimi olarak yeniden yorumlanır. Konformal dönüşümler, Laplace denklemine, sıvı akışı, aerodinamik, termomekanik, elektrostatik ve elastikiyet gibi çok çeşitli fiziksel problemlerde ortaya çıkan kompleks düzlemsel bölgelerde çözümler oluşturmak için etkili bir şekilde kullanılabilmektedir. Formal olmayan bir tanım; konformal fonksiyonlar, $\mathbb{C}$ de kesişen eğriler arasındaki açıları koruyan fonksiyonlar olarak verilebilir.

Formal bir tanım verebilmek için bazı ön bilgiler verilebilir: kabul edelim ki $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında kompleks anlamda türevlenebilir ve $\gamma(t)$ de $\gamma(t_0) = z_0$ olmak üzere z_0 noktasından geçen düzgün bir eğri olsun. Bu durumda fonsiyon z_0 noktasında $w_0 = f(z_0)$ noktasına ve γ eğrisini de $\tilde{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ ye eşler. Ayrıca z_0 noktasındaki $\gamma'(t_0)$ teğet vektörü de, w_0 noktasındaki $\tilde{\gamma}'(t_0) = (fo\gamma)'(t_0)$ teğet vektörüne eşlenir. Bu gösterimlere bağlı olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.1.41. **(Konformal Dönüşüm)** $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında konformaldir, eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasından geçen geçen herhangi bir düzgün $\gamma(t)$ eğrisinin, z_0 noktasındaki teğet vektörünü bir θ açısı ile döndürüp ve bir $\rho > 0$ sabit ile ölçeklendirirse. Yani, herhangi bir γ eğrisi için, $(fo\gamma)'(t_0)$ teğet vektörü,$\gamma'(t_0)$ yi θ ile döndürürek ve bir $\rho > 0$ sabiti ile ölçeklendirerek bulunur.



Şekil 2.28. Bir konformal dönüşüm.

Bir konformal dönüşüm z_0 noktasındaki bütün teğet vektörlerini aynı miktarda döndürür ve ölçeklendirir. Konformalik yani konformal olma yerel bir durumdur. Yani farklı bir z_1 noktasında dönme açısı ve ölçek çarpanı farklı olabilir. Öte yandan döndürmeler teğet vektörler arasındaki açıları koruduğundan, konformal dönüşümlerin bir diğer temel bir özelliği kesişen eğriler arasındaki açıları korumalarıdır. Konformallik tüm analitik kompleks fonksiyonların sahip olduğu dikkat çekici bir özelliktir. Sezgisel olarak konform dönüşümler $z-$düzleminde verilen yönlü eğrilerin aralarındaki açıları ve oranlarını ve hatta yönü de koruyan dönüşümlerdir. Konformal dönüşümler $z-$düzlemindeki orijinal görüntünün $w-$düzleminde gerçekçi bir görüntüsünü verirler. Bir D bölgesinde tanımlı bir $f(z)$ fonksiyonu D bölgesinin her bir noktasında konformal ise D de konformaldir denir.

Not 2.1.1. $a \leq t \leq b$ bir parametre olmak üzere $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ bir bölgede tanımlı $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eğrisinin parametrik gösterimi ise, bu durumda $f(z(t))$ de $w-$düzleminde γ eğrisine karşılık gelen $\tilde{\gamma}$ eğrisinini parametrik gösterimidir. Ayrıca teğet vektörü ise $\tilde{\gamma}'(t) = x'(t) + iy'(t)$ türevi ile elde edilir.

Teorem 2.1.30. (**Konformal Olmanın Kutupsal Tanımı**) Eğer $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında konformal ise, bu durumda öğle bir $c = \rho e^{i\theta}$ kompleks sayısı vardır ki $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasındaki teğet vektörünü c ile çarpar.Tersine eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasındaki teğet vektörünü $c = \rho e^{i\theta}$ kompleks sayısı ile çarpaıyorsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında konformaldir.

İspat. Tanım olarak $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında konformal olması, bir θ açısı ve bir $\rho > 0$ sabiti olduğu anlamına gelir, öğleki $f(z)$ dönüşümü z_0 noktasındaki teğet vektörünü θ ile döndürür ve ρ ile ölçeklendirir. Bu da tam olarak $c = \rho e^{i\theta}$ ile çarpanının etksidir. □

Teorem 2.1.31. (**Konformal Olmanın İşlemsel Tanımı**) Eğer $f(z)$ fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ve herhangi bir $z_0 \in D$ için $f'(z_0) \neq 0$ ise bu durumda $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında konformaldir. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasındaki teğet vektörlerini $f'(z_0)$ ile çarpar.

İspat. $\gamma(t_0) = z_0$ olmak üzere kabul edelim ki $\gamma(t) = z$ eğrisi z_0 dan geçen yönlü bir eğri olsun. Bu durumda $\gamma(t) = z$ eğrisi $f(z)$ fonksiyonu altında $f(\gamma(t))$ eğrisine dönüşür. Buradan da türevde zincir kuralı yardımıyla,

$$\begin{aligned} \left.\frac{df(\gamma(t))}{dt}\right|_{t_0} &= \left. f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right|_{t_0} \\ &= f'(\gamma(t_0))\,\gamma'(t_0), \gamma(t_0) = z_0 \\ &= f'(z_0)\gamma'(t_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda Teorem (2.1.30) ya göre teoremin ispatı tamamlanmıştır. Bu ifadenin tersi de doğrudur. Bir düzlemsel konformal dönüşümün türevi sıfır olmaz. Ters fonksiyonun türev hesaplama formülü bilidiği üzere (Bak, Sunuç (2.1.2)),

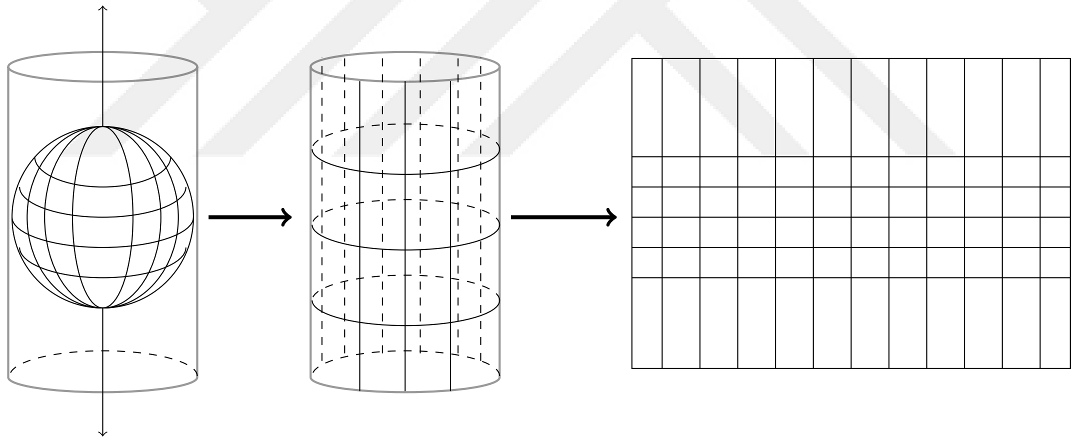
$$w = f(z) \Leftrightarrow \frac{d}{dz} f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

dir. Buda gösterir ki f^{-1} ters fonksiyonunun türevlenebilmesi için f nin türevi hiçbir yerde sıfır olmamalıdır. □

Teorem 2.1.32. (**Ters Fonksiyon Teoremi**) Kabul edelim ki $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasının bir komşuğunda analitik ve $f'(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu konformal ve bire bir örten olarak z_0 noktasının bir komşuluğunu $f'(z_0)$ ın bir komşuluğuna eşler. Özellikle bu durumda $f^{-1}(z)$ vardır ve z_0 ın bir komşuluğunda analitik olur.

Sonuç olarak, eğer $D \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $f : D \to \mathbb{C}$ bire bir analitik bir fonksiyon ise, bu durumda f fonksiyonu D den $f(D)$ ye bir konformal dönüşüm olarak adlandırılır. Bu durumda Teorem (2.1.28) yani açık dönüşüm teoremine göre $f(D)$ açık olup ve aynı zamanda $f^{-1} : f(D) \to D$ ters fonksiyonu da otomatik olarak analitik olur. Keza Teorem (2.1.30) ya göre de $f'(z)$ türevi, D de asla sıfır olmaz ve bu onlara adlarını veren konformal dönüşümlerin açı korumu özelliğine yol açar. Konformal terimi gerçekte her noktada açıyı korumak anlamına gelir, ancak onu günümüzde kompleks analizde univalent (bire bir) analitik fonksiyonlar için kullanmak doğal hale gelmiştir. Bu anlamda konformal dönüşümler, kompleks analizde düzlemsel eğriler arasındaki açıları koruma özelliği ile tanımlanan bir fonksiyon sınıfıdır. Ayrıca konformal dönüşümler temel bölge eşlemeler, yarı düzlemlere eşlemeler, dairesel bölgeler eşlemler ve karma bölgelere eşlemeler olarak sınıflandırılabilir. Konformal dönüşümlerin belki de en ayırt edici özelliklerinden biri, basit dönüşümler oluşturarak, geometrik özelliklerinin incelenmesi oldukça zor olan dönüşümleri daha kolay bir yapıya çevirmesidir. Bu, iki kopleks analitik fonksiyonun bileşkesinin de aynı zamanda kompleks analitik olmasına dayanmaktadır.

Kompleks analizin yanısıra fizik ve mühendisliğin bir çok alanında son derece önemli olan konformal dönüşümlerin kaynağı olarak, basit bağlantılı bir bölgenin konformal olarak başka bir basit bağlantılı bölgeye eşlenebileceğini ortaya koyan Riemann dönüşüm teoremi kabul edilebilir. Aslında bölgeler arasında konformal dönüşümün çok klasik bir örneğini ilk kez 1569 yılında Flamen haritacı, matematikçi, filozof, ilahiyatçı Gerardus Mercator (veya Latince adı Gerhard Kramer) (1512–1594) tarafından ”Mercator Projeksiyon” adıyla yayımlamıştır. Bu sistemin kurucusu olan Mercator'un asıl isminin Gerhard de Kramer olduğu bilinmektedir. Mercator, haritaların gelişmesinde coğrafi bilgilerin matematiksel esaslara bağlanıp doğru olarak gösterilebilmesi için yoğun çalışmalara yapmıştır. Bu anlamda ilk haritasını 1538 yılında yayınlamıştır. Tamamen ”Mercator Projeksiyon” esasına göre oluşturulan bu harita bugün kullanılan deniz haritalarına temel oluşturmaktadır. Bilindiği üzere haritacılık alanında projeksiyon kısaca küresel bir yüzeyin özelliklerini düz bir düzlemde tasvir etme yöntemlerinden biridir. Mercator projeksiyonuna göre orijinal bölgedeki açılar harita üzerindeki görüntüde korunmaktadır. Dolayısıyla böyle bir harita projeksiyonu konformal olarak adlandırılır. Denizcilerin pusulayı kullanarak yön bulabilmelerinin kolaylaştırmak amacıyla geliştirlen Mercator projeksiyonu kısaca, küresel bir yüzeyin özelliklerini düz bir düzlemde tasvir etme yöntemidir. Bu projeksiyonun temel görünümü aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 2.29. Mercator Projeksiyonu .

Şekilden de görüldüğü gibi Mercator Projeksiyonu konformaldir ve büyük daireleri düz doğrular olarak görünmesi özelliğine sahiptir. Buda loxodromları yani iki nokta arasındaki en kısa rotayı çizmeyi kolaylaştırır ve dolayısıyla pusula yönünü takip etmeyi kolaylaştırır. Burada belkide en önemli nokta Mercator projeksiyonu altında yatan ilginç gerçeği ortaya koyarken, temel matematiksel çerçeve için gerekli olan logaritmanın 1610 yıllarında Napier tarafında, Calculus'un bir birlerinden bağımsız olarak 1660 yıllarında Newton ve Leibnitz tarafından, Kompleks düzlemde rastgele basit bağlantılı bir bölgesinin bire bir ve konformal olarak bir disk üzerine eşlenebileceğini ortaya koyan Riemann dönüşüm teoreminin 1851 yılında Riemann tarafında ve Diferansiyel geometrinin 1880 yıllarında Gauss tarafından henüz geliştirildiğini bilmektir.

Bu aşamada konformal dönüşümlerin açı koruma özelliğini trigonometri bilgimizi kullanarak ispat edelim. Sırasıyla $z-$ düzleminde bir z_0 noktasında kesişen γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $\gamma_1'(t_0)$ ve $\gamma_2'(t_0)$ teğet vektörleri arasında kalan açı Şekil (2.28) e göre $\alpha_2-\alpha_1$ olup bu açıya kosinüs teoremi uygulanırsa;

$$\left|\gamma_1'(t_0)-\gamma_2'(t_0)\right|^2=\left|\gamma_1'(t_0)\right|^2+\left|\gamma_2'(t_0)\right|^2-2\left|\gamma_1'(t_0)\right|\left|\gamma_1'(t_0)\right|cos(\alpha_2-\alpha_1)$$

$$\alpha_2-\alpha_1=cos^{-1}\left(\frac{\left|\gamma_1'(t_0)\right|^2+\left|\gamma_2'(t_0)\right|^2-\left|\gamma_1'(t_0)-\gamma_2'(t_0)\right|^2}{2\left|\gamma_1'(t_0)\right|\left|\gamma_2'(t_0)\right|}\right) \tag{2.17}$$

elde ederiz.

Benzer şekilde sırasıyla $f(\gamma_1)(t)$ ve $f(\gamma_2)(t)$ görüntü eğrilerinin $(fo\gamma_1)'(t_0)$ ve $(fo\gamma_2)'(t_0)$ teğet vektörleri arasında kalan açı (Θ olarak alalım) için kosinüs teoremi uygulanırsa;

$$\left|(fo\gamma_1)'(t_0)-(fo\gamma_2)'(t_0)\right|^2=\left|(fo\gamma_1)'(t_0)\right|^2+\left|(fo\gamma_2)'(t_0)\right|^2 -2\left|(fo\gamma_1)'(t_0)\right|\left|(fo\gamma_2)'(t_0)\right|cos(\Theta)$$

$$\Theta=cos^{-1}\left(\frac{(fo\gamma_1)'(t_0)\Big|^2+\left|(fo\gamma_2)'(t_0)\right|^2-\left|(fo\gamma_1)'(t_0)-(fo\gamma_2)'(t_0)\right|^2}{2\left|(fo\gamma_1)'(t_0)\right|\left|(fo\gamma_2)'(t_0)\right|}\right) \tag{2.18}$$

Teorem (2.1.32) den $f'(z_0)\neq 0$ olduğuna göre, (2.18) eşitliğinden

$$\Theta=$$

$$cos^{-1}\left(\frac{\left|f'(\gamma_1(t_0))\gamma_1'(t_0)\right|^2+\left|f'(\gamma_2(t_0))\gamma_2'(t_0)\right|^2-\left|f'(\gamma_1(t_0))\gamma_1'(t_0)-f'(\gamma_2(t_0))\gamma_2'(t_0)\right|^2}{2\left|f'(\gamma_1(t_0))\gamma_1'(t_0)\right|\left|f'(\gamma_2(t_0))\gamma_2'(t_0)\right|}\right)$$

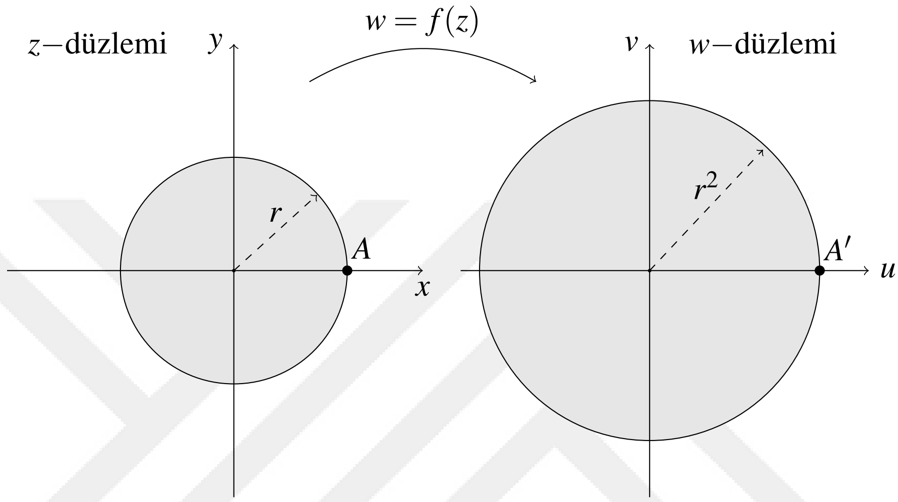
$$=\gamma_1-\gamma_2$$

olduğu görülür. Buda ispatı bitirir.

Bir örnek olarak, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ olmak üzere $w=f(z)=z^2$ tam fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonun z üzerindeki etkilerini inceleyelim. Bu gibi durumlarda kutupsal koordinatlar daha yararlı olacağından $z = re^{i\alpha}$ olarak alınırsa,

$$w = f(re^{i\alpha}) = (re^{i\alpha})^2 = r^2 e^{2i\alpha}$$

elde edilir. Aytıca bu dönüşüm $|w| = |z|^2$ ve $arg(w) = 2arg(z)$ dönüşüm eşitliklerini üretir. Bu durumda r yarıçaplı bir çember kendi etrafında pozitif yönde bir tur attığında, r^2 yarıçaplı çember kendi etrafında pozitif yönde iki tur atar.



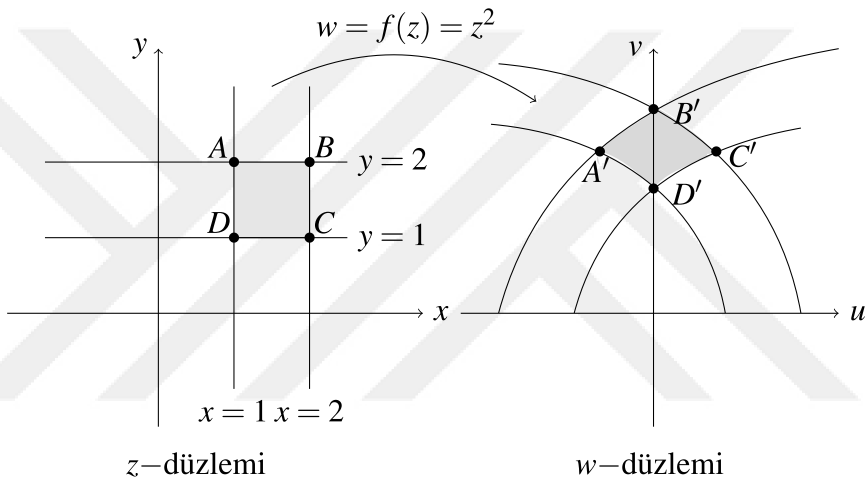
Şekil 2.30. $w = f(z) = z^2$ dönüşümünün $x^2 + y^2 = r^2$ çemberine etkisi.

$z-$düzleminde A noktasının esas argümenti 0 olup, bu noktaya $w-$düzleminde karşılık gelen A' noktasının da esas argümentinin 0 olduğu açıktır. Benzer olarak $z-$düzlemindeki 45^o lik esas argümentin, $w-$düzleminde ki karşılığı 90^o olacaktır. Bunun anlamı $z-$düzlemindeki çember bir tur atarken $w-$ düzlemindeki çemberin aynı yönde iki tur atmasıdır. Öte yandan bu fonksiyon bire bir değildir. Çünkü, $i \neq -i$ olduğu halde $f(i) = f(-i) = -1$ dir. Ayrıca $w = f(z) = z^2$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $z = \sqrt{w}$ karekök fonksiyonu olur ki, bu fonksiyon çift dallı bir fonksiyondur. Daha da önemlisi, $z = 0$ noktasında $f'(z) = 2z$ türev fonksiyonu 0 dır. Dolayısıyla tüm $z-$ düzleminde konformal değildir. Bu durumda $w = f(z) = z^2$ fonksiyonu 0 noktasını içermeyen $z-$düzleminin basit bağlantılı bir alt bölgesinde tanımlanırsa fonksiyon hem tek dallı ve hem de konformal olur. Basit bağlantılı bölge olarak $z-$düzleminde $D = \{x + iy : 1 \leq x \leq 2 \text{ ve } 1 \leq y \leq 2\}$ ile verilen karesel bölgeyi alalım. Bu bölgede her bir z için $f'(z) = 2z \neq 0$ olacağından bu bölgede $w = f(z) = z^2$ fonksiyonu konformal olur.

Dönüşüm eşitliklerinin bu bölgede alınan herhangi bir z değeri üzerinde sahip olduğu etkileri geometrik olarak görebilmek için dönüşümün dik koordinat sisteminde ürettiği eşitliklerden yararlanalım. Bunun için $z = x + iy$ olarak alınırsa;

$$w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

elde edilir. Yani verilen dönüşüm(veya fonksiyon) $u = u(x,y) = x^2 - y^2$ ve $v = v(x,y) = 2xy$ dönüşüm denklemlerini üretmiş oldu. Buna göre $w = f(z) = z^2$ fonksiyonu elde edilen dönüşüm denkemlerini kullanarak, yukarıda verilen D bölgesini üst yarı düzlemde aşağıda şekilde verilen bölgeye eşler.



Şekil 2.31. $w = f(z) = z^2$ fonksiyonu altında D karasel bölgesinin görüntüsü.

Bu gibi durumlarda dönüşüm eşitliklerinin z değeri üzerinde sahip olduğu etkileri geometrik olarak kolayca görmek için Mercator projeksiyonunda olduğu gibi düz doğru ve çember gibi eğrilerin veya düzlemsel şekillerin görüntülerinin düşünmek genelde yapılan bir uygulamadır. Yukarıda verilen şekil (2.31) de düz doğrular için bu uygulama yapılmıştır. Sezgisel olarak biliyoruz ki bir $w = f(z)$ dönüşümü eğer yönlü eğriler arasındaki açıyı ve dahi yönü koruyorsa bir konformal dönüşümdür. Daha da önemlisi konformal dönüşümler, son derece küçük şekillerin hem açılarını hem de şekillerini korur, ancak boyutlarını veya eğriliğini korumayabilir. Öte yandan açıların büyüklüğünü koruyan, ancak yönlerini korumayan bir dönüşüme eş-açılı dönüşüm denir (Churchill ve Brown 1990, p.241).

Tanım 2.1.42. Eğer $w = f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) = 0$ ise bu durumda z_0 noktasına $w = f(z)$ fonksiyonun bir kritik noktası denir.

Kritik nokta, matematiğin birçok alanında ve birçok bilim dalında kullanılan bir terimdir. Reel analizden hatırlanacağı üzere kritik nokta, fonksiyonun tanım kümesinde türevlenemediği veya türevinin sıfıra eşittiği olduğu noktadır. Benzer şekilde kompleks analizde de fonksiyonun tanımlı olduğu bölgede analitik olmadığı veya türevinin sıfıra eşit olduğu noktadır. Bu anlamda kompleks analizde sonsuzdaki noktayı temsilen kullanılan ∞ gösterimi hem Mercator projeksiyonu hem de Riemann küresi yani Streografik projeksiyonu için bir kritik noktadır. $|z| \to \infty$ iken Riemann küresi üzerindeki Z noktası $N(0,0,1)$ kutup noktasına çok yaklaşacaktır (Bak, Şekil (2.32)). Bu anlamda kritik nokta belirli bir dönem bilim adamlarının kullanmak dahi istemedikleri veya açıklayamadıkları sonsuz kavramının matematiksel tanımına imkan bulmuşlardır.

Tanım 2.1.43. $D, U \subseteq \mathbb{C}$ alalım. Eğer $f : D \to U$ olacak şekilde bire bir ve analitik $w = f(z)$ fonksiyonu varsa bu iki bölgeye konformal olarak eşittir denir. Başka bir ifadeyle, eğer aşağıdaki koşullar doğruysa D ve U bölgeleri konformal olarak eşittir:

1. f bire birdir.
2. f analitiktir.
3. f^{-1} analitiktir.

Öte yandan kendi üzerine olan konformal fonksiyona da bölgenin konformal otomorfizması denir. Ayrıca, yukarıda tanım olarak verilen konformal eşitlik şartının oldukça kısıtlayıcı olduğu anlaşılmaktadır. Buda bize konformal olarak eşit olan iki bölgenin ancak aynı yerel geometriye sahip olduğunu ifade etmektedir.

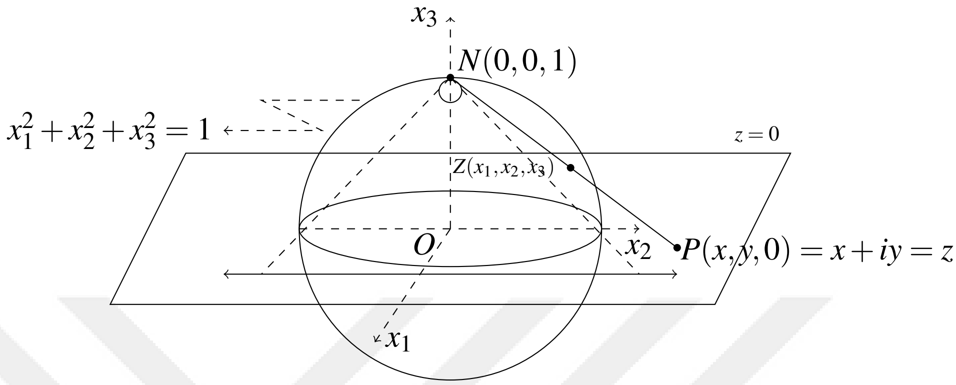
Örnek 2.1.5. Açık birim disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ve üst yarı düzlem $U = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ olarak alalım. Bu iki bölge geometik özellikleri açısından çok farklı (örneğin, $\mathbb{D}$ sınırlı iken Usınırlı değil) olmalarına rağmen $w = f(z) = \dfrac{i-z}{i+z}$ dönüşümü altında bir birlerine konformal olarak eşittirler. Kısaca iddiamızı $w = f(z)$ nin U yu $\mathbb{D}$ ye konformal olarak eşlediğidir. Bu durumda, eğer $z \in U$ ise, zorunlu olarak i noktası $-i$ noktasına olduğundan daha yakındır. Bu nedenle $|i-z| < |i+z|$ ve böylece $|f(z)| < 1$ olur ki, buda bize $f(z) \in \mathbb{D}$ olduğunu verir. Diğer taraftan $g : \mathbb{D} \to U$ ters fonksiyonu için $w \in \mathbb{D}$ iken $\Im(g(w)) > 0$ olduğunu göstermeye ihtiyacımız var. Gerekli cebirsel işlemler yapılırsa $w = f(z) = \dfrac{i-z}{i+z}, f : U \to \mathbb{D}$ fonksiyonun tersinin $f^{-1}(z) = i\dfrac{1-w}{1+w} = g(w), g : \mathbb{D} \to U$

olduğu kolayca görlür. Amacımıza ulaşmak için $w = u + iv$ olarak alınırsa;

$$\begin{aligned}
\Im(g(w)) = \Re\left(\frac{1-w}{1+w}\right) &= \Re\left(\frac{1-u-iv}{1+u+iv}\right) \\
&= \Re\left(\frac{1-u-iv}{1+u+iv}\frac{1+u-iv}{1+u-iv}\right) \\
&= \frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre elde edilen son eşitliğin paydası hiçbir zaman negatif değildir ve $w \neq -1$ olduğunda da sıfırdan farklıdır. Eğer $|w| = u^2 + v^2 < 1$ ise pay her zaman pozitiftir. Bu cebirsel ve geometrik yorumlar bize gerçekten H ve $\mathbb{D}$ nin konformal olarak eşit olduklarını ifade etmektedir.

Bu bölümde de Möbius (veya kesirli doğrusal veya Bilineer) dönüşümler ve özellikleri hakkında temel bilgiler verilmiştir. İyi bilinir ki, Möbius dönüşümler konformal dönüşümlerin temel ve özel bir sınıfını oluştururlar. Mobius dönüşümleri temsil eden fonksiyonların kompleks değişkenli analitik fonksiyonlar teorisinde çok önemli rolleri vardır. Örneğin, bu dönüşümler bir bölgenin diğerine bire bir konformal eşlenmesini bulmak için çok uygun yöntemler sağlar. Kompleks değişkenli fonksiyonlar sınıfı içerisinde, bir bölgenin diğerine eşlenmesi, konformal dönüşümler içerisinde ki uygulamalı problemlerde sıklıkla yapılır. Ayrıca konformal dönüşümler Mobius dönüşümlerin bileşkesi olarak yazılabilir. Bu dönüşümlerin aslında tarihsel olarak bakıldığında fonksiyonların grafikleri kavramlarından çok daha önce ortaya çıktığı bilinmektedir. Mobius dönüşümleri fizik, mühendislik, tıp (örneğin, üç boyutlu görüntüleme), haritacılık ve matematik alanlarında birçok problemlerle ilgili uygulamalara sahiptir. Bu anlamda ilgi çekici Möbius fonksiyonlarının ne yaptığını hem geometrik olarak ve hem de cebirsel olarak anlamak oldukça önemlidir. Kesirli lineer dönüşümler olarak da bilinen Möbius dönüşümlerin ağırlıklı olarak ilk kez 1831 yılında Alman matematikçi, astronom (gök bilimci) ve fizikçi August Ferdinand Möbius (1790-1868) tarafından yayınlanan bir makalede tanıtıldığı kabul edilmektedir. Ancak yayımlanma tarihinden kısa bir süre önce Möbius'den bağımsız olarak Çek asıllı Alman matematikçi ve fizikçi Johann Benedict Listing (1808-1882) tarafından ilk kez tanımlandığı ve fakat 1861 yılına kadar yayımlamadığı da bilinmektedir. Bu nedenle kompleks sayıların gerçek gücünü ortaya çıkaran bu dönüşümler August Ferdinand Möbius'e atfedilmekte ve onun adıyla bilinmektedir. Temel olarak bir Möbius dönüşümü, düz bir düzlemin Riemann küresine eşleştirildiği ve ardından düz düzleme geri döndüğü Stereografik projeksiyonun özel bir türüdür. Bu anlamda içerisinde yaşadığımız Fiziksel Dünya için en kullanışlı özelliklerinden biri, düzlemi Riemann küresine ve Reiamnn küresini de düzleme eşlerken kutup hariç her noktada açıları korumasıdır. Açı koruma özelliğinden dolayı Riemann küresi veya stereografik projeksiyon konformaldir.



Şekil 2.32. Riemann Küresinin düzleme stereografik projeksiyonu veya izdüşümü.

Reel analizden hatırlanacağı üzere bağımsız bir değişkenin belirli bir sayıya (veya noktaya), Reel eksen üzerindeki doğal sıralamaya bağlı olarak sağdan veya soldan çok yaklaşması durumunda fonksiyonun aldığı değerler ya çok büyür ($+\infty$) ya da çok küçülür ($-\infty$). Örneğin, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ dir. Benzer bir durumlarla kompleks analizde de zaman zaman karşılaşılaşılabilmektedir. Ancak Kompleks analizde, Reel analizde olduğu gibi $+\infty$ ve $-\infty$ arasında herhangi bir ayrım yapılamadığı bilinen bir gerçektir. Doğası gereği $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde sonsuzdaki (veya ideal) nokta diye adlandırılan ve ∞ ile gösterilen tek bir nokta vardır ve kompleks düzlemdeki tüm yönler bu noktaya çıkar. Bu anlamda genişletilmiş kompleks düzlem kavramının tanıtılması gerekmektedir. Genişletilmiş kompleks düzlem, sonsuzdaki tek nokta ∞ ile $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin birleşimidir, yani $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ olup, $\mathbb{C}$ ye $\mathbb{C}_\infty$, $\tilde{\mathbb{C}}$ veya $\bar{\mathbb{C}}$ gibi bazı ilaveler yapılarak gösterilmektedir. z_0 bir kompleks sayı olmak üzere, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ gibi limitlerin $z\to z_0$ iken, yani z nin z_0 kompleks sayısını çok yaklaşması durumunda $f(z)$ fonksiyon değerlerinin nasıl değiştiğini ölçtüğünü biliyoruz. Bu anlamda genişletilmiş kompleks düzlem de $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ gibi limitleri, yani $f(z)$ fonksiyonun sonsuzun komşuluğunda nasıl değiştiğini hesaplamaya imkan sağlamaktadır. Bazı durumlarda bu limitlerin sonlu (örneğin, 0 gibi) noktalardaki limitlere dönüştürülebildiğ, yani $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\lim\limits_{z\to 0} f(\frac{1}{z})$ olduğu bilinen bir gerçektir. Verilen bilgilerden de anlaşılacağı üzere bazı durumlar için çok önemli matematiksel araçlar sağlayan stereografik projeksiyon Riemann küresinin kuzey kutbundan kaynaklanan ışınlar yardımıyla küre yüzeyindeki noktaları düzlem üzerindeki noktalara bire-bir eşler (Terside). Bu anlamda Kuzey kutup noktası $N(0,0,1)$ hariç birim küre $S = \{(x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ (Riemann küresi) üzerindeki $Z = (x_1, x_2, x_3)$ şeklindeki her nokta ile kompleks sayılar arasında

$$\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} = x + iy = z$$

bağıntısı vardır. Tersine, bu bağıntı yardımıyla $\mathbb{C}$ düzlemindeki herhangi bir $z = x + iy$ kompleks sayısına Riemann küresi üzerinde bir $Z = (x_1, x_2, x_3)$ noktası karşılık gelir. Tanım gereği, kutup noktası $N(0,0,1)$ sonsuzdaki nokta yani ideal noktaya karşılık getirildiğine göre, gerekli olan cebirsel işlemlerin yapılmasıyla

$$z = x + iy \longmapsto Z = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

elde edilir. Bu aşamada verilen bilgiler doğrultusunda genişletilmiş kompleks düzlem ile Riemann küresi arasındaki $M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{R}^3$ bire-bir konformal eşlemesi

$$M(Z) = \begin{cases} \frac{1}{|z|^2+1} \left(2\Re(z), 2\Im(z), |z|^2 - 1 \right) & , z \in \mathbb{C} \\ N(0,0,1) & , z = \infty \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

Stereografik projeksiyonun geometrik anlamda pek çok güzel özlelliği vardır. Geometrik olarak açıktır ki, stereografik izdüşümü $z-$düzlemindeki her doğruyu küre üzerinde kutuptan geçen çemberlere dönüştürür. Bunun tersi de doğrudur (Bak, Şekil (2.32)). Öte yandan herhangi bir $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ rasyonel fonksiyonu Riemann küresi üzerind bir sürekli fonksiyona genişletilebilir. Özel olarak eğer herhangi bir z noktası için $h(z) = 0$ ve $g(z) \neq 0$ ise, bu durumda $f(z)$ fonksiyonu ∞ olarak tanımlanabilir. Bu tür dönüşümler en genel anlamda Möbius dönüşümleri olarak bilinir.

Möbius dönüşümlerin en yaygın olarak kullanıldığı alanlardan biri haritacılıktır. Takdir edilir ki Dünyanın üç boyutlu bir haritasını çıkarmak çok pratik olmayıp, ayrıca üretimi ve dağıtımı da oldukça maliyetli olacaktır. Bu nedenle Dünya'nın üç boyutlu görüntüsünü iki boyutlu bir uzaya çevirmek için bir matematiksel araca ihtiyaç vardır. Bu araç daha önce de ifade edildiği gibi kompleks sayıların ortaya çıkardığı Möbius dönüşümüdür. Möbius dönüşümleri üç boyutlu dünyamızın iki boyutlu düzlem üzerinde yani harita üzerinde bir temsilini vermektedir. Bunu verirken, açılar ve yönler korunurken, düzlem üzerinde döndürmeler (translations), ötelemeler (rotations), büyüme veya büzülme (dilatations) ve tersinir olma (inversion) olabilir. Öte yandan tıbbi problemleri çok yüksek doğrulukla teşhis edebilen bir yazılım oluşturmak için Möbius dönüşümlerinden de yararlanılmaktadır. Bilindiği üzere, yazılımlar bilgisayarlarda belirli sonuçları oluşturmak veya elde etmek için tasarlanmış ve algoritma olarak adlandırılan bir dizi talimatların, programlama dillerinden birinin kullanarak bilgisayarlara tanıtılmasıdır. Bu anlamda örneğin, tomografi gibi cihazlarda kullanılan çok güçlü yazılım programları varlıklarını tamamen Möbius dönüşümüne ve dolayısıyla bir küreyi düzleme konformal olarak yansıtan bir eşlemeye borçudur. Yukarıda haritacılık alanında ifade edilen süreçle tıbbi görüntüleme süreçleri oldukça birbirine benzemektedir. Buraya kadar verilen bilgilerden Möbius dönüşümlerinin ne kadar çok yönlü olarak günlük hayatta kullanıldığı açıktır. Şekil (2.32)) de günlük hayatta tıptan, haritacılığa ve fotoğrafçılık gibi çeşitli alanlarda kullanılan stereografik projeksiyon geometrik olarak verilmiştir. Geometrik olarak Möbius dönüşümlerinin ne kadar yararlı matematiksel bir araç olduğunu verdikten sonra, bir Möbius dönüşümünün cebirsel yorumlarını vermemiz oldukça yarar olacaktır.

Tanım 2.1.44. $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ olmak üzere $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ fonksiyonu bir lineer(doğrusal) kesirli dönüşüm veya kısaca lineer dönüşüm olarak adlandırılır. Eğer $ad-bc \neq 0$ ise $f(z)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşümüdür ve

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc \neq 0 \tag{2.19}$$

olarak gösterilir.

$\Delta = ad-bc$ ifadesi $M(z)$ dönüşümünün determinantı olarak adlandırılmaktadır. Möbius dönüşümünde $\Delta \neq 0$ olması gerekliliği;

$$M(z_1) - M(z_2) = \frac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz+d)(cz_2+d)}$$

eşitliğinden elde edilir. Bu eşitlikte eğer $ad-bc=0$ alınırsa $M(z_1)-M(z_2)=0$)(veya $M(z_1)=M(z_2)$) eşitliğinden $M(z)$ dönüşümü sabit olur.Aynı zamanda $ad-bc\neq 0$ alınması $M(z)$ dönüşümünün bire bir olduğunu gösterir. Daha da önemlisi $\Delta = ad-bc\neq 0$ kısıtlaması teğet vektörün elde edilmesine imkan sağlayacaktır.Bir $M(Z)$ Möbius dönüşündeki a,b,c,d katsayıları bir tek şekilde belirlenmez. Başka bir ifadeyle a,b,c,d kat sayıları $M(Z)$ Möbius dönüşümünün kendisinden bağımsızdır. Eğer $0\neq\lambda\in\mathbb{C}$ alınırsa $\lambda a,\lambda b,\lambda c$ ve λd katsayılarına karşılık olarak

$$\frac{a\lambda z+\lambda b}{c\lambda z+\lambda d}=\frac{az+b}{cz+d}=M(z)$$

elde edilir. Bu anlamda hedeflediğimiz sonuca ulaşabilmek için $\lambda=\dfrac{1}{\pm\sqrt{ad-bc}}$ alınır ve gerekli olan cebirsel işemler yapılırsa;

$$M(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a\dfrac{1}{\pm\sqrt{ad-bc}}z+\dfrac{1}{\pm\sqrt{ad-bc}}b}{c\dfrac{1}{\pm\sqrt{ad-bc}}z+\dfrac{1}{\pm\sqrt{ad-bc}}d}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda;

$$\Delta=\frac{a}{\mp\sqrt{ad-bc}}\frac{d}{\mp\sqrt{ad-bc}}-\frac{b}{\mp\sqrt{ad-bc}}\frac{c}{\mp\sqrt{ad-bc}}=\frac{ad-bc}{ad-bc}=1$$

olur ki bu da arzu edilen sonuçtur. Dolayısıyla Möbius dönüşümünde $ad-bc\neq 0$ şartı yerine $ad-bc=1$ de alınabilir. Bu şartı sağlayan Möbious dönüşümleri normalleştirilmiş Möbious dönüşümler olarak adlandılmaktadır.

$ad-bc\neq 0$ şartı aynı zamanda Möbius dönüşümlerinin parabolik, eliptik, hiperbolik ve loxodormik olarak sınıflandırılmasına da temel oluşturmaktadır. Bu dönüşümlerin her biri benzersiz özelliklere sahip olup, matematik dünyasının ötesine uzanan uygulamalara sahiptirler.

Tanım 2.1.45. (2.19) eşitliği ile verilen bir $M(z)$ Möbius dönüşümü, eğer

(i) $M(z)=z+a$ şeklinde ise bir öteleme(translations) olarak adlandırılır.

(ii) $a > 0, a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $M(z) = az$ şeklinde ise bir büyüme (dilations) olarak adlandırılır. Şayet $0 < a < 1, a \in \mathbb{R}$ ise bu durumda $M(z) = az$ bir büzülme olarak adlandırılır.

(iii) $\theta \in \mathbb{R}$ ise $M(z) = e^{i\theta} z$ bir dönme (rotations) olarak adlandırılır.

(iv) $z \neq 0$ olmak üzere $M(z) = \dfrac{1}{z}$ şeklindeki dönüşüm ters (inversion) dönüşüm oarak adlandırılır.

Lemma 2.1.3. (2.19) eşitliği ile verilen bir $M(z)$ Möbius dönüşümü, her biri birer Möbius dönüşümü olan ve tanımları Tanım (2.1.45) de verilen dört temel dönüşümün bileşkesidir.

İspat. $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ alalım.

Eğer $c = 0$ ise, bu durumda

$$M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

elde edilir ki, bu öncelikle bir büyüme ve ardından da bir ötelemedir. $M_1(z) = \dfrac{a}{d}z$ ve $M_2(z) = z + \dfrac{b}{d}$ olarak alınırsa $M = M_1 o M_2$ olduğu açıktır.

Eğer $c \neq 0$ ise, bu durumda da

$$M(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$$

olur ki, bu da sırasıyla bir öteleme, ters, büyüme ve dönme, ve tekrar bir ötelemedir. Burada da $M_1(z) = z + \dfrac{d}{c}, M_2(z) = \dfrac{1}{z}, M_3(z) = \dfrac{bc - ad}{c^2} \dfrac{1}{z + \frac{d}{c}}$ ve $M_4(z) = z + \dfrac{1}{c}$ olarak alınır ve gerekli olan cebirsel işlemler yapılırsa $M = M_4 o M_3 o M_2 o M_1$ elde edilir. □

Eğer z, $M(z)$ Möbius dönüşümünün bir sabit noktası ise, bu durumda

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

olur. Eğer burada $c \neq 0$ ise $M(z)$ doğal olarak iki sanit noktaya sahip olur. Eğer $c = 0$ ise bu duruda da tek bir sabit noktaya sahip olur ve dolayısıyla $M(\infty) = \infty$ dir.

Buraya kadar verilen bilgilerden sonra $ad-bc \neq 0$ olmak üzere $M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ Möbious dönüşümleri için, eğer $c \neq 0$ ise

$$M(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & , z = -d/c, z \neq \infty \\ \infty & , z = -d/c \\ \dfrac{a}{c} & , z = \infty \end{cases}$$

yazılabilir. Benzer olarak ters Möbious dönüşümü için de

$$M^{-1}(z) = \begin{cases} \dfrac{dz-b}{-cz+a} & , z = a/c, z \neq \infty \\ \infty & , z = a/c \\ \dfrac{-d}{c} & , z = \infty \end{cases}$$

yazılabilir.

Uyarı 2.1.1. Birim disk $D(0,1) = \mathbb{D}$ den $\mathbb{C}$ kompleks düzleme f konformal dönüşümü yoktur. Çünkü olsaydı $f^{-1} : \mathbb{C} \to D(0,1)$ ters fonksiyonu sabit olmayan sınırlı bir tam fonksiyon olacaktır. Bu ise (2.1.24) Liouville teoremi ile çelişmektedir.

Özellik 2.1.1. $a \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{C}$ olmak üzere $M(z) = az+b$ dönüşümü çemberi çembere eşler.

İspat. İspat iki aşamada yapılabilir. İlk aşamada bir çemberin görüntüsün bir çember olduğunu, ikinci aşamada ise tersine görüntüsü çember olan orijinal şeklin kendisinin de bir çember olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $\gamma \subset \mathbb{C}$ bir çember olsun, böylece bir $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ için $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ olarak yazılabilir. Bu durumda amacımız γ nın dönüşüm altındaki görüntüsünün yani $M(\gamma)$ nin bir çember olduğunu göstermektir. Gerçekten, herhangi bir $z \in \gamma$ alındığında;

$$\begin{aligned} |M(z) - M(z_0)| &= |(az+b) - (az_0+b)| \\ &= |az - az_0| \\ &= |a||z-z_0| \\ &= |a|r \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bize $M(\gamma)$ nin $M(z_0)$ merkezli ve $|a|r$ yarıçaplı bir çember olduğunu verir. Bu anlamda özel bir örnek olarak, $M(z) = z - i$ olarak alalım. Eğer z noktası $z-$düzleminde 1 birim yarıçaplı ve orijin merkezli çember üzerinde ise, bu duurumda $z - i$ noktası $w-$düzleminde 1 birim yarıçaplı ve $-i$ merkezli çember üzerinde bulunur.

Tersine, kabul edelim ki $M(z) \in \mathbb{C}$, $M(z_0)$ merkezli ve $|a|r$ yarıçaplı bir çember üzerinde olsun. Bu durumda $M^{-1}\left(a^{-1}(M(z)-b)\right) = M(z)$ olup, aynı zamanda

$$\begin{aligned}|M^{-1}\left(a^{-1}(M(z)-b)\right)| &= |a^{-1}(M(z)-b) - a^{-1}(M(z_0)-b)| \\ &= |a^{-1}||M(z)-M(z_0)| = r\end{aligned}$$

olur. Buda bize $a^{-1}(M(z)-b) \in \gamma$ ve de dolayısıyla $M(z) \in M(\gamma)$ olduğunu verir. Böylece, $M(\gamma)$ kesin olarak z_0 merkezli ve r yarıçaplı bir çemberdir. □

Özellik 2.1.2. $M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ olarak tanımlanan $M(z)$ Möbius dönüşümü $z-$düzlemindeki bir çemberi $w-$düzlemindeki bir doğruya ya da çembere eşler.

İspat. $z-$düzlemindeki bir çember $w-$düzlemindeki bir doğruya ya da çembere eşlenecektir. Eğer orijinal çemberimiz bir z_0 kutup noktasından geçerse bu durumda $M(z_0) = \infty$ olur. Buda bize görüntünün sınırsız olduğunu ifade eder. Bu nedenle, böyle bir çemberin görüntüsü ancak bir doğru olmak zorundadır. Eğer orijinal çember z_0 kutup noktasından geçmezse, görüntü sınırlı yani bir çember olmak zorundadır. □

Özellik 2.1.3. $M(z) = \dfrac{1}{z}(z \neq 0)$ ters dönüşümü analitik olup, çemberleri ve doğruları çemberler ve doğrulara eşler.

İspat. $f(z)$'nin analitik olduğunu göstermek için, herhangi bir $z_0 \neq 0$ noktasdında bir kuvvet serisine sahip olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bazı cebirsel manipülasyonları kullanarak istediğimiz sonuca ulaşabiliriz. Şöyle ki,

$$\begin{aligned}f(z) = \frac{1}{z} &= \frac{1}{z - z_0 + z_0} \text{ (Cebirsel manipülasyon)} \\ &= \frac{1}{z_0}\frac{1}{1 - \frac{(-(z-z_0))}{z_0}} \\ &= \frac{1}{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z_0^n}(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}}(z-z_0)^n\end{aligned}$$

elde edilir.Buda ispatı tamamlar (Bak, Teorem (2.1.4)).

İspatımızın ikinci kısmında ise $M(z) = \frac{1}{z}(z \neq 0)$ ters dönüşümünün çemberleri ve doğruları çemberler ve doğrulara eşlediğini gösterelim. Bunun için $\mathbb{C}$ de $0 \neq z \in \mathbb{C}, z = x+iy$ ve m,n her ikisi birden sıfır olmamak üzere bir $l = \{x+iy : mx+ny = p\}$ doğrusunu alalım. Öte yandan $M(z) = u+iv$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} M(x+iy) &= \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan katsayıların eşitliğinden

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ ve } v = \frac{-y}{x^2+y^2} \tag{2.20}$$

dir. Ayrıca gerekli olan cebirsel işlemlerin uygulanmasıyla (2.20) eşitliğinden

$$u^2+v^2 = \frac{1}{x^2+y^2} \tag{2.21}$$

elde edilir. Öte yandan $z \neq 0$ olarak seçildiğine göre $mx+ny = p$ eşitliğini

$$m\frac{x}{x^2+y^2} + n\frac{y}{x^2+y^2} = p\frac{1}{x^2+y^2} \tag{2.22}$$

olarak yeniden yazabiliriz. Bu aşamada (2.20) ve (2.21) eşitlikleri (2.22) de yerine yazılırsa

$$mu - nv = p(u^2+v^2) \tag{2.23}$$

elde ederiz. Eğer $p \neq 0$ ise (2.23) eşitliği u ve v değişkenlerine bağlı bir çember denklemidir. Yani $M(z)$ dönüşümü l doğrusunu bir çembere eşlemiş olur. Eğer $p = 0$ ise bu durumda da (2.23) eşitliği $mu = nv$ ile verilir. Bu durumda da $M(z)$ dönüşümü l doğrusunu orijinden geçen bir doğruya eşlemiş olur. İkici adımda bir Möbius dönüşünün bir çemberi başka bir çembere eşlediğini gösterelim. Bilindiği üzere $z-$düzleminde $z = x+iy \neq 0$ ve $m \neq 0$ olmak üzere

$$C = \{x+iy : m(x^2+y^2)+nx+py+k = 0\} \tag{2.24}$$

çemberi alınabilir. Bu çemberin $M(z) = \frac{1}{z}$ ters dönüşümü altındaki görüntüsünü bulmak için (2.24) ifadesinde x yerine $\dfrac{u}{u^2+v^2}$ ve y yerine de $\dfrac{-v}{u^2+v^2}$ yazmak yeterli olacaktır. Buna göre,

$$m\left(\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2+\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)^2\right)+n\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)+p\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)+k=0$$

elde ederiz. Burada gerekli olan cebirsel kısaltmalar yapılırsa en sade şekliyle

$$k(u^2+v^2)+nu-pv+m=0$$

elde ederiz ki, bu bir çember denkleminden başka bir şey değildir. □

Buraya kadar verilen bilgilerden sonra cebirsel olarak incelendiğinde $M(z) = \dfrac{1}{z}(z \neq 0)$ ters dönüşümünde z yerine kutupsal gösterim olan $re^{i\theta}$ alınırsa;

$$M(z) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

elde edilir ki, buna göre $M(z)$ nin argümenti z nin argümentinin ters işaretlisi olurken, modlüde z nin modülünün çarpma işlemine göre tersidir. Geometrik olarak bakıldığında z noktası orijine yaklaşırken $M(z)$ değeri uzaklaşacaktır. Bunun tersi de geçerli olacaktır. Eğer z orijin etrafında pozitif yönde hareket ederken $M(z)$ değeri bu yönün tersinde yani negatif yönde hareket edecektir ve bunun tersi de doğru olacaktır. Eğer bir l doğrusu üzerinde orijine en yakın noktası P olan bir doğru ise, bu durumda $M(z) = \frac{1}{z}$ ters dönüşüm altındaki görüntüsü, üzerinde orojine en yakın noktası $1/P$ olan ve orijinden geçen bir doğru olacaktır. Bunun terside doğru olacaktır. Başka bir durum olarak eğer C üzerinde orijine en yakın nokta P ve en uzak noktası T olan orijinden geçmeyen bir çember ise, bu durumda $M(z) = \frac{1}{z}$ ters dönüşüm altındaki görüntüsü, üzerinde orijine en yakın noktası $1/T$ ve en uzak noktası da $1/P$ olan orijinden geçmeyen bir çember olacaktır.

Bir Möbius dönüşümü altında bir doğru veya çemberin görüntüsünün başka bir doğru veya çember olduğu gerçeği Möbius dönüşümlerinin değişmez bir geometrik özelliğidir. Bu anlamda Möbius dönüşümleri fonksiyonların sınıflandırılmasında çok yararlı bir araç olarak kullanılmaktadır. Örneğin birim diski kendine eşleyen Möbius dönüşümlerinin sınıfı gibi.

Örnek 2.1.6. $M(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ (Cayley dönüşümü) alalım. Bu dönüşüm $x-$eksenini birim çembere ve üst yarı düzlemi de birim çembere eşler.

Çözüm. İlk önce z reel eksen üzerinde doğal sıralamasına göre hareket etsin. Bu durumda dönüşümün etkisinin görmek için $z = x$ almak yeterli olacaktır. Bu durumda,

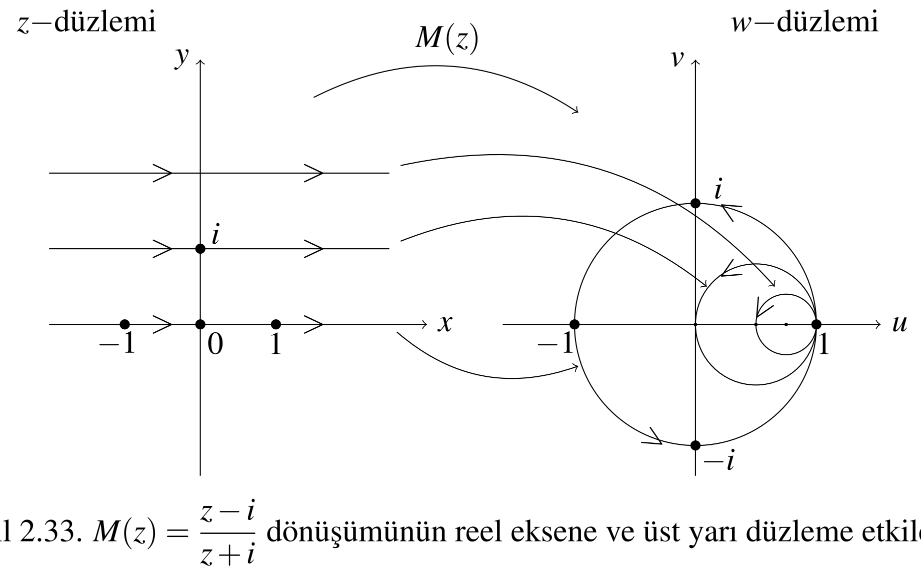
$$M(z) = \frac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow |M(x)| = \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

elde edilir. Buna göre z reel eksen üzerinde pozitif yönde hareket ederken $M(z)$ de $w-$düzleminde birim çember üzerinde pozitif (saatin dönme yönünün tersi) yönde hareket eder.

Şimdi de $y > 0$ olmak üzere $z = x + iy$ alalım. Yani z üst yarı düzlemde hareket etsin. Bu durumda $|y+1| > |y-1|$ yazılabilir ve

$$|z+i| = |x+i(y+1)| > |x+i(y-1)| = |z-i| \Longrightarrow M(z) = \frac{|z-i|}{|z+i|} < 1$$

olur. Böylece $M(z)$ dönüşümü üst yarı düzlemi birim diske eşlemiş olur.



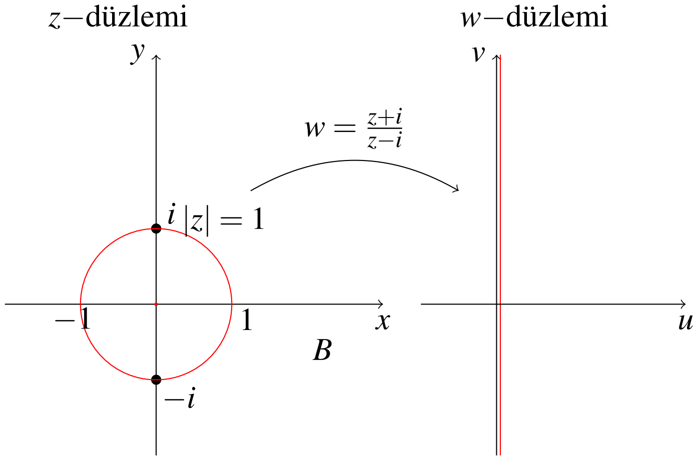
Şekil 2.33. $M(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ dönüşümünün reel eksene ve üst yarı düzleme etkileri .

Sonuç olarak bu hesaplamalar göstermektedir ki, Cayley dönüşümü reel ekseni, saatin dönme yönünün tersinde hareket ederek 1 den başlayıp 1'e gelen birim çembere ve üst yarı düzlemi de yine birimim çemberin iç bölgesine eşlenmektedir. İngiliz matematikçi Arthur Cayley (1821-1895) tarafından 1846 yılında oluşturulan bu dönüşüm bazı özel görevleri($M(i) = 0, M(\infty) = 1, M(-1) = i, M(0) = -1, M(1) = -i$ ve yukarıda verilen geometrik yorumlar) yerine getiren konformal bir dönüşümden çok daha fazlasıdır.Günümüzde savunma sistemleri, radyo ve televizyon frekansları, empedans grafikleri vb. birçok mühendislik hesaplamalarında kullanılmaktadır.

August Mönius'un ifadesiyle bir Möbious dönüşümü Tanım (2.1.45) de verilen öteleme (translation), uzama (dilations), dönme (rotations) ve ters dönüşüm (inversion) temel dönüşümlerinin özel bir durumu veya onların bileşkesidir. Bu anlamda bir Möbius dönüşümü basit bileşenlerine ayrılabilir. Bu ise örneğin, $M(z) = \frac{z+i}{z-i}$ gibi oldukça komplike olan dönüşümlerin gerek cebirsel anlamda gerekse de geometrik anlamda analiz edilmesini çok daha kolay hale getirebilmektedir. $M(z) = \frac{z+i}{z-i}$ dönüşümü öncelikle bir öteleme, ardından bir öteleme, ardından bir uzama ve dönme ve ardından da tekrar bir öteleme olarak

$$z \longmapsto z-i \longmapsto \frac{1}{z-i} \longmapsto 2i.\frac{1}{z-i} \longmapsto 1+2i.\frac{1}{z-i} = M(z)$$

şeklinde basit bileşenlerine ayrılabilir. Bu durumda geometrik olarak yorum yapmak oldukça kolaylaşacaktır. Örneğin $M(z) = \frac{z+i}{z-i}$ dönüşümü altında $\{|z| = 1 : z \in \mathbb{C}\}$ birim çemberinin görüntüsünü bulabiliriz. Bunun için birim çember üzerinde bir z noktası alalım. Bu durumda $z-i$ ötelem dönüşümü altındaki görüntüsü $(0,-i)$ merkezli 1 birim yarıçaplı çember üzerinde bir nokta olur. Bu noktanın görüntüsü ise $\frac{1}{z-i}$ ters dönüşümü altındaki görüntüsü ise oriijine en uzak noktası $-2i$ olan ve orijinden geçen bir çember üzerinde bir nokta olur ki, bu çember aslında orijine en yakın noktası $\frac{-1}{2i} = \frac{i}{2}$ olan yatay bir doğrudur. Bu doğrunun $\frac{2i}{z-i}$ uzama ve dönme dönüşümü altındaki görüntüsü ise $2i.\frac{i}{2} = -1$ den geçen dikey bir doğru olacaktır. Sonuç olarak elde edilen bu görüntü 1 birim sağa ötelenirse son görüntü orijinden geçen dikey bir doğru olur.



Şekil 2.34. $M(z) = \frac{z+i}{z-i}$ dönüşümü altında birim çemberin görüntüsü.

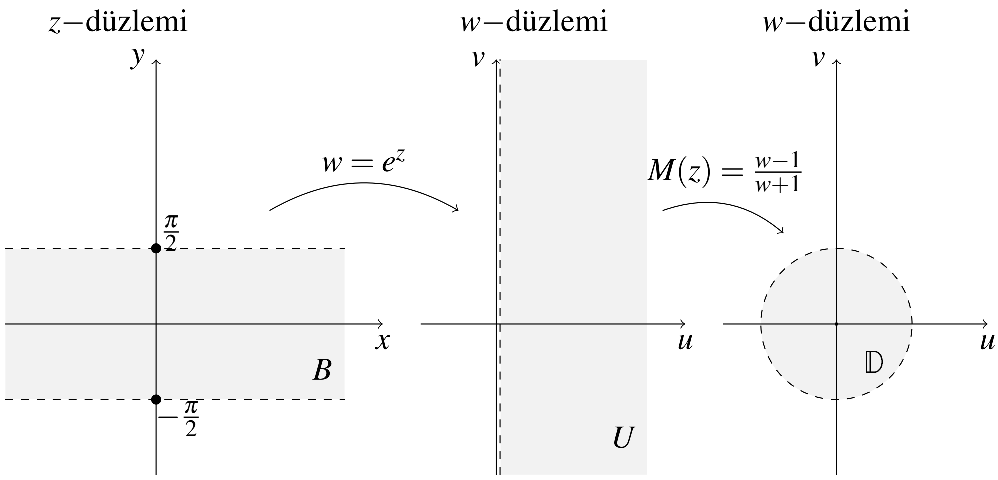
Örnek 2.1.7. $w = e^z$ dönüşümü $B = \left\{ -\frac{\pi}{2} < \Im(z) < \frac{\pi}{2} \right\}$ yatay şeridini konformal olarak $U = \{\Re(w) > 0\}$ sağ yarı düzlemine eşler. Diğer taraftan da

$$M(z) = \frac{w-1}{w+1} \tag{2.25}$$

Möbius (veya kesirli lineer) dönüşümü ise sağ yarı düzlem U yu konformal olarak birim disk $\mathbb{D} = \{|M(z)| < 1\}$ ye eşler. Bu durumda (2.25) dönüşümünde w yerine e^z alınırsa

$$M(z) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1} \tag{2.26}$$

bileşke dönüşümü elde edilmiş olur. Elde edilen (2.26) dönüşümü ise U yatay şeridini birim disk $\mathbb{D}$ ye eşleyen bire bir bir konformal dönüşümdür.



Şekil 2.35. Konformal dönüşümlerin bileşkesi.

Riemann dönüşüm teoremi kompleks analizin ve dolayısıyla da konformal dönüşümler için en temel teoremdir. Aslında, bu teorem, geometrik bir bakış açısıyla Geometrik fonksiyon teorisinde yapılan çalışmaların da başlangıcı sayılmaktadır. Çünkü birim disk üzerinde tanımlanan analitik fonksiyonların oluşturduğu herhangi bir fonksiyon sınıfı için kullanılan bilgileri sağlayan matematiksel araçlar ve ilginç geometrik yorumların temelinde Riemann dönüşüm teoremi vardır. Riemann dönüşümü, fonksiyonun kompleks değerlerine karşılık reel değerli katsayılara sahiptir. Bu nedenle birim disk üzerinde tanımlanan Riemann dönüşümünü orijin komşuluğundaki Taylor açılımındaki katsayılarının işaretleri $f(0) = 0$ ve $f'(0) > 0$ ye bağlı olarak belirlenebilir. Bu etkileyici teorem, bir $U \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgesini konformal olarak $\mathbb{D} = \{|z| < 1 : z \in \mathbb{C}\}$ birim diske eşlenebileceğini ifade eder. İspatı oldukça tekniktir. Biz biliyoruz ki bir konformal döşümün tersi de konformaldır. Bu durumda Riemann dönüşüm teoremi ifade eder ki kompleks düzlemin eşit olmayan herhangi iki basit bağlantılı bölgesi konformal olarak birbirine eşittir. Bu teorem ilk defa matematiksel anlamda, 1851 yılında Bernard Rieman (1826-1866) tarafından doktora tezinde ifade ve ispat edildi. Bu tarihten beri birçok matematikçi bu teoremin farklı ya da daha kompakt (özgün anlamını kaybetmeden) ispat versiyonlarını yaptılar. Bu değerli bilim adamı 1826 yılında Kuzey Almanya'da küçük bir kasaba olan Breslenz'de doğdu. 1840-1846 yılları arasında Hannover'de liseye devam etti. 1846 yılında Göttingen Üniversitesine yazılan Bernard Riemann, Gauss (69 yaşında Profesör), Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Carl Gustav Jacob Jacobi gibi bilim adamlarından dersler aldı. 1841-1851 yılları arasında Gauss'un danışmalığında doktora çalışması yaptı. 1851-1859 yılları arası Bernard Riemann'ın en üretken olduğu dönemdir. Bu dönemde 9 makalesi yayımlandı. 1866 yılında İtalya'da ölen Riemann'ın bu tarihten sonra ise 7 makalesi daha yayımlanmıştır. Ayrıca, bilim adına çok önemli olan şu çalışmalarını verebiliriz: Riemann İntegrali, Riemann Küresi, Riemann-Schwarz prensibi, Riemann Zeta Fonksiyonu, Riemann-Hilbert Uygunluğu, Reiamnn Yüzeyi, Cauchy-Riemann Denklemleri, Riemann-Brill-Voter Teoremi, Riemann Geometrisi, Riemann Hipotezi, Riemann Toplamı, Riemann-Roch Teoremi.

Daha öncede ifade edildiği üzere Riemann dönüşüm teoreminin ispatı oldukça teknik olup farklı yaklaşımlar kullanılabilmektedir. Bu anlamda burada verilecek olan ve temelleri ünlü

Alman matematikçi Koebe'nin fikirlerine dayanan ispatta kullanılan iki önemli teoremi hatırlatarak devam edelim.

Teorem 2.1.33. (**Hurwitz Teoremi**) Kabul edelim ki $\{f_k\}$, bir D bölgesinde $f(z)$ fonksiyonuna yakınsayan bütün analitik fonksiyonların bir dizisi ve ayrıca $f(z)$ fonksiyonu bir $z_0 \in D$ noktasında n. mertebeden sıfıra(yani köke) sahip olsun. Bu şartlar altında yeterince büyük bir $p > 0$ vardır öğleki $f_k(z)$, $|z - z_0| < \rho$ diskinde tam olara n sıfıra sahip olur. Dahası bu sıfırlar, k değeri sonsuza yaklaşırken (yani $k \to \infty$ iken) z_0 noktasın yaklaşırlar.

Teorem 2.1.34. (**Montel Teoremi**) Kabul edelim ki $\mathcal{F}$, bir D bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde düzgün sınırlı olup, D bölgesinde analitik olan bütün fonksiyonların bir sınıfı (ailesi) olsun. Bu şartlar altında $\mathcal{F}$ sınıfındaki her bir dizi, D bölgesinde yakınsak bir alt diziye sahip olur.

Tanım 2.1.46. (**Düzgün sınırlılık**) Bir $\mathcal{F}$ ailesine bir D bölgesinde düzgün sınırlıdır denir, eğer bütün $f \in \mathcal{F}$ ler için $|f| < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti varsa.

Lemma 2.1.4. Birim disk $\mathbb{D}$ yi kendisne konformal olarak eşleyen $M : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ dönüşümünü alalım. Bu durumda bir $z_0 \in \mathbb{D}$ için

$$M(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - \bar{z_0} z}$$

olacak şekilde $|\lambda| = 1$ şartını sağlayan bir $M(z)$ Möbious dönüşümü vardır.

İspat. Eğer, $|\lambda| = 1$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
|M(z)| &= \left|\lambda \frac{z - z_0}{1 - \bar{z_0} z}\right| = \left|\frac{z - z_0}{1 - \bar{z_0} z}\right|, |\lambda| = 1 \\
&= \left|\frac{1}{\bar{z_0}} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z_0}}\right|, |z| = |z_0| = 1 \\
&= \left|\frac{z - z_0}{\bar{z} - |z|^2 \bar{z_0}}\right| \\
&= \left|\frac{z - z_0}{\bar{z} - \bar{z_0}}\right|, |z| = 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da arzu edilen sonuçtur. Böylece verilen $M(z)$ dönüşümü birim diski kendisine eşlemiş olur.

$\square$

Teorem 2.1.35. (**Riemann Dönüşüm Teoreminin Orijinal Versiyonu**) Bir $U \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgesini birim disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ye eşleyen, bir konformal $f : U \to \mathbb{D}$ dönüşüm vardır (Riemann 1851).

Eğer bir $U \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgesi birim disk $\mathbb{D}$ ye konformal olarak eşit ve herhangi bir $z_0 \in U$ için

$$f(z_0) = 0 \text{ ve } f'(z_0) > 0$$

şartları sağlanıyorsa, bu durumda $f : U \to \mathbb{D}$ konformal dönüşümü tek türlü belirleni (Koebe 1907).

İspat. $z_0 \in U$ seçelim ve U de $|f(z)| \leq 1$ ve $f'(z_0) = 0$ şartlarını sağlayan bütün univalent f fonksiyonlarının sınıfını $\mathcal{F}$ ile gösterelim. Bu şartlar altında teoremin ispatını üç adımda gerçekleştirilebilir.

1. $\mathcal{F}$ sınıfı boş değildir.
2. Maksimal sonlu türeve sahip bir $g \in \mathcal{F}$ fonksiyonu vardır.
3. g fonksiyonu U dan $\mathbb{D}$ ye bir biholomorfik (yani iki yönlü analitik) fonksiyondur.

Adım 1. Kabul edelim ki $a \notin U$ dir. Bu durumda U basit bağlantılı olduğu için, bu $h(z)$ ile göstereceğimiz $\sqrt{z-a}$ nın bir tek değerli analitik dalını tanımlayabileceğimizi doğrular. Bu ise h fonksiyonunun bire bir olduğunu ve hem $h(U)$ da ve hem de $-h(U)$ da değer almadığını doğrular. Gerçekten eğer $h(z_1) = h(z_2)$ ise bu durumda $z_1 - a = z_2 - a$ olup, bu da bize $z_1 = z_2$ olduğunu verir. Dolayısıyla $h(z)$ fonksiyonu aynı argümantle zıt değerleri alamaz yani $h(U) = -h(U)$ olamaz. Genelliği bozmadan, bu durumda h fonksiyonu altında U nun görüntüsünün bir $\{|h(z) - h(z_0)| < \rho\}$ diskini kapsadığı sonucu çıkar ve ayrıca $\{|h(z) + h(z_0)| < \rho\}$ diskinde değer almaz. Bu nedenle bütün $z \in U$ noktaları için $|h(z) + h(z_0)| \geq \rho$ ve sonuç olarak da $2|h(z_0)| \geq \rho$ olur. Bu noktadan sonra

$$f_0(z) = \frac{\rho}{4} \frac{|h'(z_0)|}{|h(z_0)|^2} \frac{h(z_0)}{h'(z_0)} \frac{h(z) - h(z_0)}{h(z) + h(z_0)} \tag{2.27}$$

olarak tanımlana f_0 fonksiyonun $\mathcal{F}$ sınıfında olduğu gösterilmelidir. h fonksiyonu bire bir olduğu için doğal olarak f_0 fonksiyonu da bire birdir. f_0 fonksiyonunun U da analitik olduğu görmek için (2.27) eşitliğinde en sağda bulunan çarpanın paydasının U da sıfır olmadığı ve ayrıca iki analitik fonksiyonun bölümü olduğu açıktır ($h(U)$ ve $-h(U)$ nun farklı olmasının bir sonucu olarak). Dolayısıyla f_0 bire birdir. Ayrıca,

$$\left|\frac{h(z)-h(z_0)}{h(z)+h(z_0)}\right| = |h(z_0)|\left|\frac{1}{h(z_0)} - \frac{2}{h(z)+h(z_0)}\right| \leq \frac{4|h(z_0)|}{\rho}$$

olarak alnırsa

$$|f_0(z)| \leq \frac{\rho}{4}\frac{|h'(z_0)|}{|h(z_0)|^2}\frac{h(z_0)}{h'(z_0)}\frac{4|h(z_0)|}{\rho} = 1$$

elde edilir. Buda biz $|f_0(z)| \leq 1$ olduğu isaptlar, böylece $f_0 \in \mathcal{F}$ dir. Yani $\mathcal{F}$ boş değildir.

Adım 2. $A = Sup\{|f'(z_0)| : f \in \mathcal{F}\} > 0$ olarak alalım. Burada A için hiçbir varsayımda bulunulmadığına ve A nın sonsuz da olabileceğine dikkat edelim. Aynı zamanda $f_n'(z_0)$ türevleri A ye yakınsak olacak şekilde $\mathcal{F}$ deki fonksiyonların bir $\{f_n\}$ dizisi alalım. Bu durumda (2.1.34) Montel teoremine göre, normal olarak U da bir g analitik fonksiyonuna yakınsayan bir f_n alt dizisi vardır. Başlangıçta f_n ler üzerinde zorunlu kılınan şartlardan dolayı U da $|g(z)| \leq 1$ ve $g(z_0) = 0$ ve de $|g'(z_0)| = A$ olur. Bu da bize tanımlanan A nın sonlu olduğunu gösterir. Bu durumda Adım.2 nin ispatı tamamlanmıştır.

Adım 3. (2.1.33) Hurwitz teoreminin sonucundan alıntı yaparak, f_n ler univalent (tek değerli) olduklarından g nin ya univalent veya sabit olması gerekir. $|g(z_0)| = A > 0$ olması g nin z_0 ın komşuluğunda sıfırdan farklı bir türeve sahip olması gerektiği ve dolayısıyla g nin sabit olamayacağı sonucu çıkar. Bu aşamada g nin birim disk $\mathbb{D}$ de tüm değerleri aldığını göstermeliyiz. Bunu göstermek için, bir çelişki kabul ediyoruz ki bu çelişki $|w_0| < 1$ olacak şekilde ki w_0 lar için $g(z) \neq w_0$ olduğudur. Bunun bir çelişki olduğunu ortaya koyacak fonksiyonu

$$\frac{g(z)-w_0}{1-\overline{w_0}g(z)} \tag{2.28}$$

olarak tanımlayalım. Bu fonksiyon paydası birim disk $\mathbb{D}$ de asla sıfır olmayan analitik bir fonksiyondur. Dolayısıyla, buda fonksiyonun görüntüsü birim disk eksi orijin (yani, $\mathbb{D} - \{0\}$) olduğu açıktır. (2.28) fonksiyonunun paydasının her zaman sıfır olmadığı gözlemlendiğine göre, bu fonksiyonu karekökünün analitik olan dalını

$$F(z) = \sqrt{\frac{g(z) - w_0}{1 - \overline{w_0}g(z)}} \tag{2.29}$$

olarak tanımlayabiliriz. Bu durumda yapmamız gereken $F(z)$ nin delinmiş birim diski delinmiş birim diske eşlediğini göstermektir. Bunun için de $F(z)$ analitik fonksiyonunu kullanarak

$$G(z) = \frac{F(z) - F(z_0)}{1 - \overline{F(z_0)}F(z)} \tag{2.30}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $G(z)$ fonksiyonu delinmiş birim diski, z_0 noktasını 0 götürerek delinmiş birim diske eşler.Bu durumda hem (2.30) ile verilen $G(z)$ ve hem de (2.28) verilen $g(z)$ fonksiyonları z_0 noktasını 0'a götürürler ve her ikisi de $\mathcal{F}$ nin birer elemanıdırlar. Bununla birlikte, direkt bir hesaplamayla

$$\begin{aligned} |G'(z_0)| &= \frac{|g'(z_0)|}{2\sqrt{|w_0|}} \left(1 - |w_0|^2\right) \frac{1 - |w_0|}{(1 - |w_0|)^2} \\ &= \frac{A}{2\sqrt{|w_0|}}(1 + w_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $|w_0| < 1$ olduğu için $|G'(z_0)| > A$ olduğu doğrulanır ki bu ise $\mathcal{F}$ sınıfındaki g fonksiyonunun maksimum türevi z_0 noktasında aldığı gerçeği ile çelişir. Dolayısıyla, g nin birim diskte bir değer almadığı varsayımımız yanlış olur. Yani g nin ispatı tamamlayan birim diskte olması gerektiği sonucuna varıyoruz.

Teoremin ispatını tamamlamak için f dönüşümünü bir tek olduğunu göstermeliyiz. $\mathbb{D}$ yi U ya eşleyen başka bir g dönüşümü daha olduğunu kabul edelim. Bu durumda fog^{-1} bileşke dönüşümü de birim disk $\mathbb{D}$ nin başka bir konformal dönüşümü olur ve

$$(fog^{-1})(0) = f(z_0) = 0$$

şartı sağlanır. Öte yandan Lemma (2.1.4) ye göre $|\lambda| = 1$ olmak üzere $fog^{-1}(z) = \lambda z$ yazılabilir. Bu aşamada istediğimiz sonuca ulaşmak için $(fog^{-1})(0)$ yi hesaplamamız yeterli olacaktır.

$$(fog^{-1})'(0) = f'(g^{-1}(0))(g^{-1})'(0) = f'(z_0)\frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Dikkat edilirse bu sonuç λ pozitif reel sayısına eşittir. Keza hipotez gereği $|\lambda| = 1$ dir. O halde $fog^{-1}(z) = z$ olup buradan da $f^{-1} = g^{-1}$ yani $f = g$ elde edilir. $\square$

Lemma 2.1.5. *U kompleks düzlemde bir bölge ve $f : U \to \mathbb{C}$ sıfıra özdeş olmayan (yani, $f(z) \neq 0$ olan) analitik bir fonksiyon osun. Bu durumda öğle bir $g : U \to \mathbb{C} - \{0\}$ fonksiyonu vardır ki her $z \in U$ için $f(z) = [g(z)]^2$ dir.*

İspat. $\forall z \in U$ için $f(z) \neq 0$ ve f analitik olduğuna göre $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ fonksiyonu da analitiktir (Bak, Teorem (2.1.15)). Buna göre öğle bir $h : U \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu tanımlanabilir ki

$$h(z) = \ln[f(z)] \tag{2.31}$$

dir. Eğer (2.31) eşitliğinin her iki tarafının z ye göre türevi alnırsa

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \tag{2.32}$$

elde edilir. $f(z)$ analitik olduğundan açıktır ki $h'(z)$ de analitiktir. Eğer (2.31)da $z = z_1$ alınırsa temel logaritma bilgimizle kolayca

$$e^{h(z_1)} = f(z_1) \tag{2.33}$$

olduğunu görebiliriz. Şimdi $\forall z \in U$ için (2.32) de kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left[f(z).e^{-h(z)}\right]' &= f'(z)e^{-h(z)} - f(z)h'(z)e^{-h(z)} \\
&= f'(z)e^{-h(z)} - f(z)\frac{f'(z)}{f(z)}e^{-h(z)} \\
&= e^{-h(z)}\Big(f'(z) - f'(z)\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $f'(z)e^{-h(z)}$ sabittir. Bu durumda (2.33) den $f(z) = e^{h(z)}$ olduğu dolayısıyla da $g(z) = e^{\frac{h(z)}{2}}$ elde etmiş oluruz. Daha açık olarak $[g(z)]^2 = f(z)$ dir. Bu da arzu edilen sonuçtur. $\square$

Daha öncede ifade edildiği gibi Bernard Riemann tarafından doktora tezinde ortaya konan ve günümüzde de kompleks analiz müfredatının önemli bir parçasını oluşturan standart Riemann dönüşüm teoremi iki açıdan yetersiz görülebilmektedir. Bunlardan birincisi, verilen basit bağlantılı bir U bölgesinin $\mathbb{D}$ birim diske eşleyen dönüşümün varlığını garanti etmesine karşılık söz konusu dönüşümün nasıl oluşturulabileceğini ortaya koymamasıdır. İkincisi ise, U bölgesinin sınırını ne şekilde dönüştürdüğü hakkında bir şey söylememesidir. Bu yetersizlikler tam 92 yıl sonra ünlü Alman matematikçi Paul Koebe (1882-1945)'nin, Riemann dönüşüm teoreminin derinliklerinde yatan geometrik özellikleri ortaya çıkaran ve bu anlamda da univalent fonksiyonlar teorisinin başlangıcı olarak da kabul edilen çalışmalarıyla giderilmiştir. Daha kapsamlı olarak Geometrik fonksiyonlar teorisinde de birçok teoreme temel oluşturan bu çalışmaların ana başlıkları şu şekilde verilebilir:

(i) $w = f(z)$ birim disk $\mathbb{D}$ de tanımlı analitik univalent bir fonksiyon ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ olmak üzere öğle bir pozitif reel sayı r sabiti vardır ki bu durumda $|w| < r$ dir. Yani verilen şartlar altında f fonksiyonunun görüntüsü r yarıçaplı diski kapsar.

(ii) $w = f(z)$ birim disk $\mathbb{D}$ de tanımlı analitik univalent bir fonksiyon ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ olmak üzere bir pozitif reel sayı r sabitine bağlı olarak öğle pozitif $m_1(r)$ ve $M_1(r)$ değerleri vardır ki, bu durumda $m_1(r) \leq |f(z)| \leq M_1(r)$ dir.

(iii) $w = f(z)$ birim disk $\mathbb{D}$ de tanımlı analitik univalent bir fonksiyon ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ olmak üzere bir pozitif reel sayı r sabitine bağlı olarak öğle pozitif $m_2(r)$ ve $M_2(r)$ değerleri vardır ki, bu durumda $m_2(r) \leq |f'(z)| \leq M_2(r)$ dir.

Kompleks düzlemde tanımlı bir $w = f(z)$ fonksiyonunun (2.5) ile verilen bir noktadaki türevinin anlamı, reel analizdeki anlamından farklıdır. Reel analizde $y = f(x)$ ile verilen bir fonksiyonunun türevi, x bağımsız değişkenindeki değişimin fonksiyonun y bağımlı değişkenindeki meydana getirdiği değişme oranının bir ölçüsüdür. Bu ölçü hatırlanacağı üzere bir noktadaki akı, hız veya eğim gibi fiziksel bilgileri temsil eder. Bununla birlikte kompleks değişkenli fonksiyonlarda temel öncelik türevin var olup olmadığıdır. Türevin varlığı, kompleks fonksiyonun analitik ve geometrik özellikleri hakkında bilgi vermektedir. Bir kompleks değerli f fonksiyonunun bir z_0 noktasındaki türevinin varlığının anlamı, z_0 noktasının fonksiyonun tanımlı olduğu bölgenin bir iç noktası mı? Yoksa bir sınır noktası mı? Olduğuna bağlı olarak değişmektedir. Bu karışıklığı önlemek için, tüm analitik fonksiyonlar kompleks düzlemin açık bir alt kümesinde yani bir bölge üzerinde tanımlanırlar. Bu durumda Koebe'nin yukarıda verilen çalışmaları $w = f(z)$ analitik fonksiyonlarının görüntü bölgelerinin, birer geometrik karakterizasyon olarak sınırlılığına, boyutuna ve şekline atıf yapmaktadır. Bu kavramlar ise analitik fonksiyonların sınıflandırılabilmesi için çok önemlidir. Bu anlamda Koebe'nin çalışımları Univalent fonksiyonlar teorisinin başlangıcı olarak kabul edilmektedir.

Koebe (aynı zamanda bağımsız olarak çağdaşı Franszı matematikçi Henri Poincare (1854-1912)), bir basit bağlantılı Riemann yüzeyinin Riemann küresi $\tilde{\mathbb{C}}$ (Eliptik model)' ye veya kompleks düzlem $\mathbb{C}$ (Parabolik model)'ye ya da birim disk $\mathbb{D}$ (Hiperbolik model) ye izomorf (konformal olarak eşit) olduğunu ifade ve ispat etmiştir. Bu durum Koebe-Poincare Normalleştirme teoremi olarak da bilinir. Dikkat edilirse, Normalleştirme teoremi Riemann yüzeyinin Rirmann küresi üzerinde basit bağlantılı bir alan olduğu Riemann dönüşüm teoreminin özel bir durumudur. Bu en kolay stereografik projeksiyon ile görülebilir (Bak, Şekil (2.32)).Küreyi kullanmanın güzel bir özelliği olarak daha önce de ifade edildiği üzere, düzlemdeki düz çizgilerin küredeki dairelere karşılık gelmesi ve böylece düz çizgiler ve dairelerin aynı temele oturtulmasıdır. Ayrıca, Riemann yüzeylerinin eliptik, parabolik ve hiperbolik olarak adlandırılması Riemann geometrisinden gelmektedir. 1907 yılındaki çalışmasıyla Riemann yüzeylerinin homojenleştirilmesine ve aynı zamanda sınıflandırılmasına da çok önemli katkı sağlamıştır. Bu anlamda Normalleştirme teoremi 19. yüzyıl Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli parametrelerinden birisiydi. Ağırlıklı olarak Kompleks fonksiyonlar üzerine çalışan Paul Koebe 1900 yılında girdiği Kiel Üniversitesi'nde Matematik ve Fizik eğitimi aldı. Koebe, doktorasını 24 Haziran 1905'te Berlindeki Freadrich-Wilhems Üniversitat'tan aldı. Bir ara Göttingen Üniversitesi'nde Privatdozent (Özel hoca) olarak atandı ve yukarıda ifade edilen en ünlü çalışmasını burada gerçekleştirdi. Aynızamanda Koebe'den beş yaş küçük olan ve kompleks analitik univalent fonksiyonların $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonların geometrik karakteristikleri üzerine çok önemli çalışmalar yapan Ludwig Bieberbach (1886-1945) aynı üniversitede doçent olarak çalışmaktaydı. 1916 yılında Ludwig Bieberbach tarafından ileri sürülen ve gününmüzde Bieberbach varsayımı olarak bilinen hipoteze göre: $\mathcal{S}$ sınıfına ait olan tüm $f(z)$ fonksiyonları $\mathbb{D}$ birim diskinde $n \geq 2$ için $|c_n| \leq n$ olack şekilde bir $f(z) = z + c_2z^2 + c_3z^3 + \ldots$ Taylor açılımına sahiptir.$|c_n| = n$ eşitliği ancak ve ancak $f(z)$ fonksiyonu $k(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$ Koebe fonksiyonu olursa geçerlidir. Bu varsayım ve Ludwig Bieberbach'ın bu alanda yaptığı diğer çalışmalar incelendiğinde Koebe'nin Bieberbach'ın araştırmaları üzerinde büyük etkiye sahip olduğu görülür.

Kompleks analitik fonksiyonlar teorisi içerisinde yapılan çalışmalardan da anlaşılacağı üzere birçok matematikçi analitik fonksiyonların dönüşüm özellikleri ile ilgilenmiştirler. $\mathbb{D} = \{|z| < 1 : z \in \mathbb{C}\}$ birim disk ve kompleks düzlemin herhangi bir açık alt kümesi U verildiğinde, U üzerindeki hangi şartlar $f^{-1} : \mathbb{D} \to U$ olmak üzere $f : U \to \mathbb{D}$ konformal dönüşümün varlığını garanti eder. Bu soruya Rieman dönüşüm teoremi yardımıyla cevap bulunması, matematikçilere U üzerindeki analitik fonksiyonlar hakkında çok az geometrik yapıya sahip olunan soruları daha kullanışlı özelliklere sahip olan birim disk $\mathbb{D}$ ye aktarılmasını sağlamıştır. Diğer bir ifadeyle basit bağlantılı bir bölgede birebir ve analitik olan fonksiyonların araştırılması, $\mathbb{D}$ birim diskte birebir ve analitik olan fonksiyonların araştırılması ile sınırlandırılabilir. Dolayısıyla, bir bölgede analitik olup belirli özelliklere sahip olan fonksiyonların görüntüleri ve geometrik özelliklerinin nasıl olduğu ve onların kuvvet serilerinin katsayıları hakkındaki ekstremal sorulara verilen cevaplar daha da netleşir. Bu şekildeki fonksiyonların görüntüleri çeşitli geometriler ve özellikler tanımlarlar. İyi bilinir ki Geometrik fonksiyonlar teorisi konformal dönüşümlerin analitik özelliklerini görüntülerinin geometrik özelliklerine ilişkilendirmeyi amaçlar. Analiz ve geometrinin etkileşimi Geometrik fonksiyon teorisinin belki de en büyüleyici yönüdür. Univalent fonksiyon teorisi de bu etkileşimi klasik bir şekilde ortaya çıkarır. Şimdi de bu teori yani univalent fonksiyonlar ile ilgili temel bilgileri verelim.

3. UNİVALENT FONKSİYONLARIN SINIFLARI

İkinci bölümde univalent(yalınkat (Türkçe), schlict (Almanca), odnolistni (Rusça)) fonksiyonlar teorisi altında yatan kompleks analizini bazı temel tanımları ve teoremler verildi. Bu bölümde ise univalent fonksiyonların $\mathcal{S}$ sınıfı ve onun bazı altsınıfları analitik ve geometrik şartları ile birlikte verildi. Reel analizde univalent terimi, basitçe bir fonksiyon için bire-bir olma anlamına gelir. Bununla birlikte Kompleks analizde, kompleks düzlemin açık bir alt kümesinde tanımlı analitik ve bire-bir olan fonksiyonlara atıfta bulunarak, çok daha spesifik bir anlamda kullanılır. Univalent fonksiyonlar teorisi büyük oranda, birim disk $\mathbb{D} = \{|z| < 1 : z \in \mathbb{C}\}$ içerisinde analitik ve univalent olup bir de $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartlarıyla normalize edilmiş f fonksiyonlarının $\mathcal{S}$ sınıfı ile ilgilenir. Univalent olma bir fonksiyonu için çok güçlü bir özelliktir. Bir analitik univalent fonksiyon açı koruma özelliği olduğu için aynı zamanda bir konformal dönüşümdür. Öte yandan, $\mathcal{S}$ sınıfına ait herbir f fonksiyonun bir Taylor açılımı vardır ve univalent olma bu açılımdaki katsayıların boyutları üzerine çok güçlü bir sınırlama getirir (Bak, Teorem (3.1.11) Bieberbach Varsayımı). Bu durum alan teoremi ile ifade edelir. $\mathcal{S}$ sınıfı ile ilgili temel sonuçların bir çoğu alan teoreminin direkt sonuçlarıdır (Bak, Teorem (3.1.10) Grönwall Alan Teoremi). Bu nedenle alan teoremi univalent fonksiyonlar teorisinin temel taşıdır denebilir. Öte yandan univalent fonksiyonlar teorisini gelişimini Riemann dönüşüm teorisindeki gelişmeler borçlu olduğu da unutulmamalıdır. Univalent olma düzgün yakınsaklık altında korunur (Bak, Özellik (3.1.1)). Univalent fonksiyonların bileşkesi de univalenttir (Bak, Teorem (3.1.3)). Taylor serisi ile verilen fonksiyonların genellikle $\mathcal{S}$ sınıfına ait olup olmadığını kontrol etmek oldukça zordur. Örneğin, $\mathcal{S}$ sınıfındaki en önemli fonksiyonlardan biri olan Koebe fonksiyonunun $k(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$ Taylor serisine bakarak $k(z) \in \mathcal{S}$ olduğunu görmek zordur. Ancak birim disk içerisinde Koebe fonksiyonunu temsil eden analitik $k(z) = z(1-z)^{-2}$ fonksiyonu yine birim disk içerisinde univalent olan bir dizi dönüşümün bileşkesi olarak yazılabilir. Bu sayede kolaylıkla $\mathcal{S}$ sınıfının bir elemanı olduğu görülebilir. Bir diğer yöntem de analitik olarak bu durumu belirlemek için kullanılabilecek gereklilik ve yeterlilik şartları vardır.

3.1. Univalent Fonksiyonlar ve $\mathcal{S}$ Sınıfı

Tanım 3.1.1. Birim disk $\mathbb{D} = \{|z| < 1 : z \in \mathbb{C}\}$ de analitik olup

$$f(0) = f'(0) - 1 = 0 \tag{3.1}$$

şartlarıyla normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı genel olarak $\mathcal{A}$ ile gösterilir.$\mathcal{A}$ sınıfı

$$\mathcal{A} = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ analitik ve } f(0) = f'(0) - 1 = 0\} \tag{3.2}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada empoze edilen $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartlarına da normalleştirme şartları denir. Öte yandan birim disk $\mathbb{D}$ de analitik olup $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartları ile normalize edilmiş bir fonksiyon normalize edilmiş analitik fonksiyon olarak adlandırılabilir. Normalleştirme şartlarının doğruluğu Koebe'nin iddiasında genelliği bozmadan $z_0 = 0$ alınırsa kendiliğinden ortaya çıkar (Bak, Teorem (2.1.35)). Başka normalleştirme şartları da vardır [23]. Fakat en çok bilinen ve kullanılan normalleştirme şartı yukarıda (3.1) ile verilen normalleştirme şartıdır.

Tanım 3.1.2. Sezgisel olarak bir U bölgesinde analitik olan $f(z)$ fonksiyonu aynı değeri iki kez almıyorsa bu bölgede univalent (yalınkat, tek katlı) denir. Cebirsel olarak ise, eğer her $z_1, z_2 \in U$ ve $z_1 \neq z_2$(veya $z_1 - z_2 \neq 0$) için $f(z_1) \neq f(z_2)$(veya $f(z_1) - f(z_2) \neq 0$) ise $f(z)$ fonksiyonuna U bölgesinde univalent denir.

Öte yandan, eğer $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasının uygun bir komşuluğunda univalent ise $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında yerel(lokal veya relatif (göreceli)) univalenttir denir. Başka bir ifadeyle bir $f(z)$ fonksiyonu ancak ve ancak yalnız kendi tanım kümesine geri dönemiyorsa univalenttir, çünkü, dönebiliyorsa bazı noktalarda aynı değeri iki kez alıyor demektir. Asla dönmeme özelliğinin matematiksel karşılığı aşağıda Teorem (3.1.1) de verilmiştir. Tanım (3.1.2) ile verilen univalent olma metodu bir fonksiyonun univalent olup olmadığının belirlenmesi amacıyla bu alanda yapılan ileri seviyedeki çalışmalarda genel olarak kullanılmamaktadır. Sadece bu amaç için bilim adamları birkaç matematiksel analiz metodu geliştirmişlerdir ($f'(z) \neq 0, \frac{zf'(z)}{f(z)}, 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ vb). Bir anlamda univalentlik için yeterlilik şartları olarak da adlandırabileceğimiz teoremlerden en çok kullanılan ve en çok bilinen ikisi aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1.1. (**Univalent Olmanın İşlemsel Tanımı**) $f(z)$ fonksiyonu bir U bölgesinde univalent ise bu durumda her $z \in U$ için $f'(z) \neq 0$ dır.

İspat. Kabul edelim ki f fonksiyonu U bölgesinde univalent iken bir $z_0 \in U$ noktası için $w_0 = f(z_0)$ ve $f'(z_0) = 0$ olsun. Bu durumda $f(z) - w_0$ fonksiyonu $n \geq 2$ dereceye sahip olup, Teorem (2.1.25) Cebirin temel teoremi gereğince $f(z) = w$ denklemi w_0 ın komşuluğundaki w için z_0 komşuluğunda en az farklı iki köke sahip olur. Bu ise (3.1.2) univalent olma tanımına aykırıdır. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. □

Teorem 3.1.2. (**Univalent Olma İçin Yeterlilik Şartı- Noshiro-Warschawski Teoremi**) Eğer $f(z)$ fonksiyonu bir U bölgesinde(tercihen konveks) analitik ve $\Re(f'(z)) > 0$ ise, bu durumda f fonksiyonu U bölgesinde univalenttir [24], [25].

İspat. Bu teoremde verilen univalent olma için yeterlilik şartının ispatı tamamen konveks U bölgesinde tanımlı olan f analitik fonksiyonunun, U bölgesindeki farklı iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerinde de tanımlı ve analitik) olması gerçeğine dayanmaktadır. Bu anlamda, $z_1 \neq z_2$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere $z_1, z_2 \in U$ noktaları için $\gamma = tz_2 + (1-t)z_1$ alalım. Eğer $z = tz_2 + (1-t)z_1$ değişken dönüşümü yapılırsa $dz = (z_2 - z_1)dt$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(z_2) - f(z_1) &= \int_{z_1}^{z_2} f'(z)dz \\ &= (z_2 - z_1)\int_0^1 f'(tz_2 + (1-t)z_1)dt \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki taraf $z_2 - z_1 \neq 0$ ye bölünürse

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \int_0^1 f'(tz_2 + (1-t)z_1)dt$$

olur. Bu aşamada her iki tarafın reel kısımları alınırsa

$$\Re\left\{\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}\right\} = \Re\left\{\int_0^1 f'(tz_2 + (1-t)z_1)dt\right\}$$

Öte yandan f fonksiyonu, U bölgesinde analitik olduğundan f' türevi vardır ve U bölgesinde analitiktir (Bak, Teorem (2.1.12)). Ayrıca bir fenomen olarak biliyoruz ki f fonksiyonu bir z_0 noktasında türevlenebilirse, aynı zamanda bu noktada süreklidir. O halde f fonksiyonu U bölgesinde aynı zamanda süreklidir. Bu durumda,

$$\Re\left\{\int_0^1 f'(tz_2+(1-t)z_1)dt\right\} = \int_0^1 \Re\left\{f'(tz_2+(1-t)z_1)\right\}dt$$

yazılır. Bütün $z \in U$ için $\Re(f'(z)) > 0$ (Teoremn hipotezinden verilen) ve ayrıca kabulümüze göre $z_1 - z_2 \neq 0$ olduğun göre

$$\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1} \neq 0$$

ve dolayısıyla $f(z_1)-f(z_2) \neq 0$ elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar. □

Uyarı 3.1.1.

(i) Analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu için bir z_0 noktasında $f'(z_0) \neq 0$ olması yerel(lokal) univalent olmaya eşdeğerdir (Palka 1991).

(ii) Bir U bölgesinde hem analitik ve hem de univalent (kısaca analitik univalent) olan $f(z)$ fonksiyonu U bölgesinde konformaldir. Bu durumda f fonksiyonunun ölçeklendirilmesi(büyüme veya büzülmesi), ötelenmesi ve/veya dönmesinden oluşan fonksiyon da univalent olur. Yani univalentlik korunur (Bak, Teorem (3.1.3)).

Açıktır ki bir $f(z)$ fonksiyonu U bölgesinde univalent ise U bölgesinin her bir noktasında aynı zamanda yerel univalentir. Ancak tersine bir bölgede yerel univalent olan bir fonksiyon o bölgede univalent olmayabilir. Örnek olarak $\mathbb{C}-\{0\}$ bölgesinde aynı zamanda analitik olan $f(z)=z^2$ fonksiyonunu alalım. Açıktır ki, $z \neq 0$ için $f'(z)=2z \neq 0$ dır. Dolayısıyla uyarı(3.1.1) (i) gereğince $f(z)=z^2$ fonksiyonu $\mathbb{C}-\{0\}$ de yerel univalenttir. Ancak $\mathbb{C}-\{0\}$ bölgesinde $z_1 \neq z_2 =$ olacak şekilde $z_1 = i$ ve $z_2 = -i$ alınırsa $f(z_1)=f(z_2)=-1$ elde edilir ki bu da bize $f(z)=z^2$ fonksiyonunun $\mathbb{C}-\{0\}$ de univalent olmadığını gösterir. Ancak $f(z)=z^2$ fonksiyonu $\{\Re(z)>0 : z \in \mathbb{C}\}$ de hem yerel univalent ve hem de univalent olur. $f(z)=z+\frac{z^n}{z}$ fonksiyonu herbir pozitif n tamsayısı için birim disk $\mathbb{D}$ de univalent iken, $f(z)=sinz$ fonksiyonu daha büyük bir disk olan $|z| \leq \frac{\pi}{2}$ de univalenttir.

$f(0)=f'(0)-1=0$ normalleştirme şartları bir anlamda $\mathbb{D}$ de analitik univalent olup $\mathcal{S}$ ($\mathcal{A}$ sınıfının elamanları olan fonksiyonlara univalent olma empoze edilerek elde edilen fonksiyonların sınıfı, $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$) sınıfının üyesi olmayan bir fonksiyonda buluna ilgisiz terimleri elimine (yok) ederek, elde edilen yeni fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfını bir üyesi yapar . Daha açık bir ifadeyle eğer f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de herhangi bir analitik fonksiyon ise, bu durumda

$$\frac{f(z)-f(0)}{f'(0)} = g(z)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ de olur. Örneğin, $f(z) = e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de analitik ve aynı zamanda univalent bir fonksiyondur. Ancak normalleştirme şartlarını sağlamadığı için $\mathcal{S}$ sınıfının bir üyesi değildir. Ancak

$$g(z) = \frac{f(z)-f(0)}{f'(0)} = \frac{(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots)-1}{1} = z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfının bir üyesidir.

Teorem 3.1.3. $f(z)$ fonksiyonu bir U bölgesinde analitik univalent ve $g(z)$ fonksiyonu da $f(z)$ nin U yu eşlediği bölgede yani $f(U)$ da univalent olsun. Bu durumda gof bileşke fonksiyonu U da univalent konformaldir.

İspat. $f(z)$ fonksiyonu univalent olduğuna göre Tanım (3.1.2) ye göre $\forall z_1, z_2 \in U$ ve $z_1 - z_2 \neq 0$ için $f(z_1) - f(z_2) \neq 0$ olur. $g(z)$ fonksiyonu da $f(U)$ görüntü bölgesinde univalent olduğuna göre benzer düşünceyle $g(f(z_1)) - g(f(z_2)) \neq 0$ olur. Bu da bize direkt olarak gof bileşke fonksiyonunun univalent olduğunu verir. Burada $f = g^{-1}$ ya da $g = f^{-1}$olduğu açıktır. Daha kesin bir ifadeyle g nin univalent olması f nin univalent olmasının bir sonucudur.

İspatı tamamlamak için $g = f^{-1}$ ters fonksiyonunun analitikliğini gösterelim. Bir w_0 alındığında, f fonksiyonu birinci bölüm gereği univalent olduğundan $w_0 = f(z_0)$ olacak şekilde bir tek $z_0 \in U$ vardır. Dolayısıyla bu durumda,

$$\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} = \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} \tag{3.3}$$

yazılabilir. Elde edilen (3.3) eşitliğinin sol tarafının $w \to w_0$ iken, sağ tarafının ise $z \to z_0$ iken limiti alınırsa

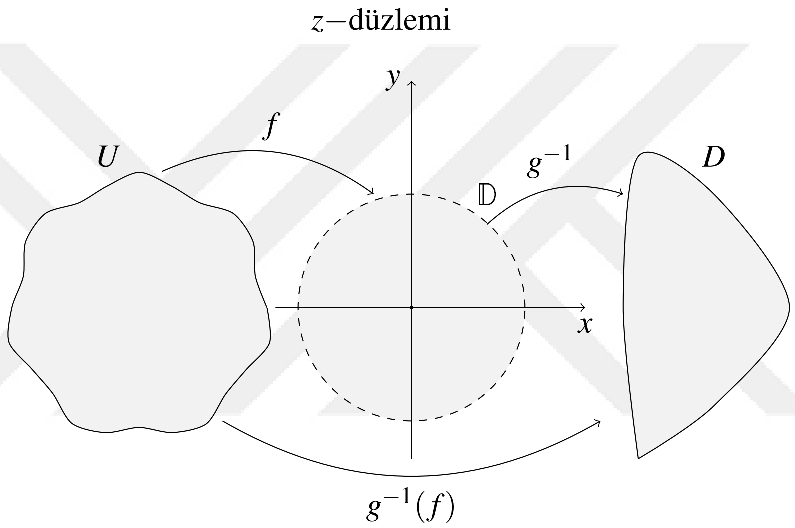
$$\lim_{w\to w_0} \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}$$

elde edilir ki bu da bize açık olarak

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z)} = \left(f'(z_0)\right)^{-1}$$

olduğunu verir. Öte yandan Teorem (3.1.1) den biz biliyoruz ki $f'(z_0) \neq 0$ dır. Böylece $g = f^{-1}$ nin analitikliği elde edilmiş oldu. $\square$

Sonuç olarak kabul edelim ki f ve g fonksiyonları sırasıyla U ve D bölgelerinden birim disk $\mathbb{D}$ ye analitik ve univalent olsunlar. Bu durumda $g^{-1}of$ fonksiyonu da U dan $\mathbb{D}$ ye analitik ve univalenttir.



Şekil 3.1. $g^{-1}of : U \to D$ bileşke fonksiyonu.

Daha önce ifade edildiği üzere Riemann dönüşüm teoremi basit bağlantılı bir U bölgesini şu üç $\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C}_\infty$, $\mathbb{C}$ veya $\mathbb{D}$ bölgeden birine eşlemektedir. Daha açık olarak ifade etmek gerekirse, eğer $\tilde{\mathbb{C}} \diagdown U$ en az iki nokta ihtiva ediyorsa U bölgesini açık birim disk $\mathbb{D}$ ye, bir nokta ihtiva ediyorsa kompleks düzlem $\mathbb{C}$ ye ve boş (yani nokta ihtiva etmiyor) ise Riemann küresi $\tilde{\mathbb{C}}$ ye eşler. Bu alanda yapılan çalışmaların genelinde olduğu gibi bizim bu çalışmamamızda da en az iki sınır noktasına sahip bir U bölgesi yerine genelliği bozmadan, ona konformal olarak denk olan açık birim disk $\mathbb{D}$ alınacaktır. Anlaşılacağı üzere basit bağlantılı bölgeler üzerindeki çalışmalar birim disk $\mathbb{D}$ üzerindeki çalışmalar ile sınırlandırılmaktadır. Bu durumun analitik fonksiyonların sınıflandırılmasını oldukça kolaylaştıracağı açıktır. Aksi takdirde farklı bölgeler için analitik fonksiyonları görüntülerinin karakteristik özelliklerine göre sınıflandırmak çok zor ve hatta imkansız olacaktır. Birim disk $\mathbb{D}$ de analitik olan fonksiyonların sınıfı $\mathcal{H}$ ile gösterilmektedir. Bu durumda (3.2) ile verilen $\mathcal{A}$ sınıfı $\mathcal{H}$ sınıfının bir alt sını olur. Birim disk $\mathbb{D}$ de normalleştirilmiş analitik fonksiyonların sınıfı yani $\mathcal{A}$ sınıfı boş değildir. (3.1) şartları ile normalize edilmiş çok sayıda analitik fonksiyon vardır. Bu anlamda verebileceğimiz en açık örnek $f(z) = z$ birim fonksiyonudur. Birim fonksiyon birim disk $\mathbb{D}$ de tanımlı olan fonksiyonların herhangi bir sınıfında bulunabilir.

(2.1.35) Riemann dönüşümü gereği kompleks düzlemin basit bağlantılı bir alt bölgesinin birim disk $\mathbb{D}$ nin $\mathcal{A}$ sınıfına ait herhangi bir f fonksiyonu altındaki görüntüsü olduğu söylenebilir. Daha önce de ifade edildiği gibi bu fonksiyonların görüntüleri yıldızıl (starlike),yıldızıla yakın (close-to-starlike), konveks (convex), konvekse yakın (close-to-convex) vb. çok hoş geometrik karaktersizasyonları yansıtmaktadırlar. Görüntüleri belirli geometrileri tanımlayan bu fonksiyonlar geometrik fonksiyonlar olarak bilinirler. Tam da bu noktada doğal olarak f fonksiyonunun analitik özelliklerinin ve $f(\mathbb{D})$ görüntü kümesinin geometrik özelliklerinin bir birlerini nasıl yansıttıkları merak konusu olmuştur. Araştırmacılar sadece söz konusu geometrileri tanımlamakla kalmayıp, ayı zamanda fonksiyonların belirli özellikleri ile görüntülerinin geometrik özellikleri arasında yakın bağlantılar kurmayı da başardılar. Bu anlamdaki en temel çalışma 1907 yılında Koebe'nin yaptığı çalışma olarak kabul edilmektedir. Daha geniş anlamda, bu çalışma Kompleks analizin bir alt dalı olan ve analitik fonksiyonların geometrik özelliklerinin inceleyen Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından biri olan univalent fonksiyonlar teorisini başlangıcı olarak da kabul edilmektedir. Bu alandaki en önemli ve bilim adamlarını uzun süre meşgul eden iki problem sırasıyla; hangi şartlar altında $\mathcal{A}$ sınıfına ait bir $w = f(z)$ fonksiyonunun n. Taylor açılımı katsayısının n ile sınırlı olduğu (Teorem (3.1.11) Bieberbach Varsayımı) ve f fonksiyonunun görüntüsünün $\rho > 0$ olmak üzere $|w| < \rho$ disklerini ihtiva ettiğidir (Teorem (3.1.13) Koebe 1/4 Teoremi). Bu sorulara cevap verebilmek için $\mathcal{A}$ sınıfına ait fonksiyonlara ilave şartlar koymak gerekir. Bu şartların en belirleyici olanı univalent olmadır. Diğer şartlar tamamen ilave cebirsel şartlardan ibarettir.

Tanım 3.1.3. $\mathbb{D} = \{|z| < 1 : z \in \mathbb{C}\}$ birim diskinde analitik olup (3.1) şartları ile normalize edilmiş analitik ve unilanet (ilave şart) fonksiyonların sınıfı genel olarak $\mathcal{S}$ ile gösterilir.

Bu durumda $\mathcal{S}$ sınıfı analitik olarak

$$\mathcal{S}=\left\{f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}: f \text{ analitik ve univalent }, f(0)=f'(0)-1=0\right\} \tag{3.4}$$

şeklinde verilebilir. Öte yandan $\mathcal{S}$ sınıfı $\mathcal{A}$ sınıfının bir altsınıfı olduğuna göre (3.4) gösterimi daha sade olarak

$$\mathcal{S}=\left\{f: f\in\mathcal{A} \text{ ve } f \text{ univalent }\right\} \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir.

(3.1) normalize etme şartları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olan her bir $f(z)$ fonksiyonunun

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \tag{3.6}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahip olmalarını garanti etmektedir (Bak, [26]).

Univalent fonksiyonlar teorisinde ağırlıklı olarak $\mathcal{S}$ sınıfına ait olan fonksiyonlar ile ilgilenmektedir. Dikkat edilirse $\mathcal{S}$ sınıfı $\mathcal{A}$ sınıfına ait fonksiyonlara ilave olarak univalent olma şartı empoze edilerek elde edilmektedir.Bu durumda $\mathcal{S}$ sınıfı $\mathcal{A}$ sınıfının bir altsınıfı olup, doğal olarak $\mathcal{S}$ sınıfına ait olan fonksiyonların özellikleri $\mathcal{A}$ sınıfa ait fonksiyonlara genişletilebilir.Yani $\mathcal{S}$ sınıfındaki fonksiyonların incelenmesi,$\mathcal{A}$ sınıfındaki genel fonksiyonların incelenmesi için yeterli olacaktır. Ancak bunun tersi her zaman doğru olmayabilir. İlave şartlar koyarak (empoze ederek) yeni altsınıflar tanımlamanı temel dayanağı bazı fonksiyon sınıflarının diğer sınıflara yaygın olarak ilişkilendirilemeyen bazı özel (spesifik) özelliklere sahip olmalarıdır.Univalent fonksiyonlar teorisi böyle fonksiyonların hem geometrik ve hem de analitik özellikleri ile ilgilenir. Bu anlamda çalışmamıza derinlik kazandırabilmemiz için bazı soruları doğal olarak sormamız gerekmektedir. Çalışmamıza da yön verebilecek soruların bazıları şu şekilde sıralanabilir:

1. (3.6) ile verilen Taylor açılımının $a_1, a_2, \ldots$ Taylor katsayıları f fonksiyonunun analitik ve geometrik özelliklerin belirler mi? Bu özelliklerin en ekstremal olanını sağlayan fonksiyon ya da fonksiyonlar var mıdır?

2. f fonksiyonun $\mathbb{D}$ de univalent veya yıldızıl veya konveks olabilmesi için $a_1, a_2, \ldots$ Taylor katsayıları üzerine hangi ilave şart ya da şartları koymak gerekir?
3. (3.6) ile verilen f fonksiyonu için $a_1, a_2, \ldots$ Taylor katsayıları üzerinde bir mutlak sınır var mıdır? Eğer varsa, öğle bir f fonksiyonu var mıdır ki, bu sınıra ulaşır?
4. (3.6) ile verilen Taylor açılımının $a_1, a_2, \ldots$ Taylor katsayıları ile $f(\mathbb{D})$ görüntüsünün $\rho > 0$ olmak üzere $|w| < \rho$ diskinin ihtiva etmesi arasında bir ilişki var mıdır?
5. Bazı döşümlerin birim disk $\mathbb{D}$ de univalentliği koruyamadıklarını varsayarak, bu dönüşümlerin $\mathbb{D}$ nin bir altdiskinde univaletliği koruya bilmesi ile $a_1, a_2, \ldots$ Taylor katsayıları arasında bir bağınıt var mıdır?

Yukarıda verilen soruların bazılarının cevapları çalışmamızın doğal akışı içerisinde kendiliğinden cevap bulacaktır. Diğer soruların cevapları ilgili kaynaklardan incelenebilir.

Univalent fonksiyonların en temel $\mathcal{S}$ sınıfı ve onun alt sınıfları soyut anlamda incelenmektedir. Bu sınıfları oluştururken dikkate alınan pek çok analitik özellik veya geometrik karakterizasyon söz konusu sınıfın bütün üyeleri için geçerli olmaktadır. Ancak bazı durumlarda öğle bir analitik özellik veya geometrik karakterizasyon vardır ki (3.6) ile verilen Taylor açılımının $a_1, a_2, \ldots$ katsayılarına bağlı olarak söz konusu sınıfın bir tek üyesi için geçerli olabilmektedir. Bu durumda söz konusu özellik (veya karakterizayon) ekstremal özellik (veya karakterizasyon) ve bu özelliğe (veya karakterizasyona) sahip olan fonksiyon da ekstremal fonksiyon olarak adlandırılmaktadır. Örneğin, $\mathcal{S}$ sınıfındaki her bir fonksiyon için $|a_n| \leq 2$ katsayı mutlak sınırlaması geçerlidir. Bu karakterizasyonda ekstremal olan durum eşitsizlik içerisindeki eşitlik durumudur, yani bir anlamda mümkün olanın en iyisidir. Bu anlamda $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir dizi ekstremal özelliğe sahip olan ve baş örnek olarak da adlandırılan $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu univalent fonksiyon teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Bu fonksiyon için $|a_2| = 2$ olup, bu ekstremal özelliği $\mathcal{S}$ sınıfının Koebe fonksiyonundan daha iyi sağlayabilecek başka bir üyesi olmadığı anlamına gelir. Ludwig Bieberbach, $k(z)$ Koebe fonksiyonun $\mathcal{S}$'deki tüm fonksiyonlar arasında Koebe fonksiyonunun mümkün olan en büyük katsayılara sahip olduğu hipotezini ileri sürdü. Bieberbach varsayımı olarak da bilinen bu hipotezin tam ispatı bilim adamlarını bir asırdan fazla uğraştırmıştır.

Koebe fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de analitik, normalize edilmiş ve univalent olduğunu göstermek oldukça kolaydır. Koebe fonksiyonunun her bir $z \in \mathbb{D}$ noktasında türevlenebilir olması onun analitik olduğunu gösterir. Bu durumda $k(z) \in \mathcal{A}$ dir. Öte yandan $k'(z) = \dfrac{(1+z)}{(1-z)^3}$ olmak üzere $k(z)$ Koebe fonskiyonu $k(0) = 0$ ve $k'(0) = 1$ şartlarını da sağlar. Dolayısıyla $k(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de normalize edilmiştir. $\mathbb{D}$ de Koebe fonsiyonunun univalent olduğunu göstermek için $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ olmak üzere $k(z_1) - k(z_2) = 0$ iken $z_1 - z_2 = 0$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Bu durumda,

$$k(z_1) - k(z_2) = \frac{z_1}{(1-z_1)^2} - \frac{z_2}{(1-z_2)^2} = 0$$

yazılır. Buradan basit bir cebirsel işlem yardımıyla,

$$\frac{(1-z_1z_2)(z_1-z_2)}{(1-z_1)^2(1-z_2)^2} = 0 \tag{3.7}$$

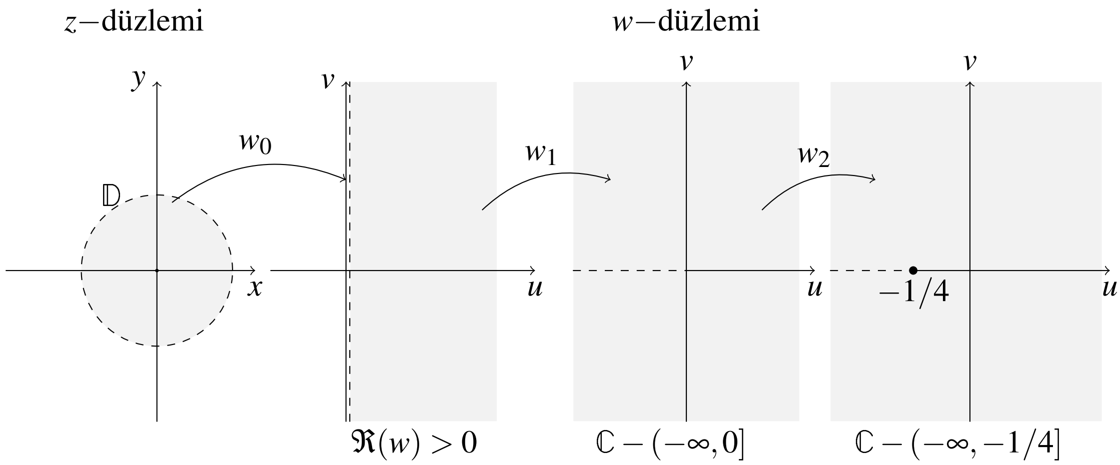
elde edilir. $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ oduğundan $|z_1| < 1$ ve $|z_2| < 1$ dir. Bu da bize $|z_1z_2| = |z_1||z_2| < 1$ olduğunu verir. Bu durumda (3.7) eşitliğinin sağlanabilmesi için $z_1 - z_2 = 0$ olması gerekir. Dolayısıyla, $k(z)$ Koebe fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de univalenttir.

Koebe fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim dsikini konformal olarak $k(\mathbb{D}) = \mathbb{C} - (-\infty, \frac{-1}{4}]$ bölgesine eşler. Bu en kolay fonksiyonlarda bileşke işlemi kullanılarak görülebilir. Fonksiyonlarda bileşke işlemi bazı durumlarda $w = f(z)$ formuyla verilen bir fonksiyonun analitik veya geometrik özelliklerini tespit edebilmek için fonksiyonun grafiğine veya kuvvet serisi ile temsil edilmesine alternatif bir araç olarak kullanılabilmektedir. Temel matematik bilgisinden de hatırlanacağı üzere fonksiyonlarda bileşke işlemi, bir fonksiyonun bağımlı değişkeninin diğer bir fonksiyonun bağımsız değişkeni olarak kullanıldığı işlemdir. Bu teknik matematikte istenen sonuçlara ulaşabilmek adına oldukça yaygın olarak kullanılabilmektedir. Bu teknikte göreceli olarak basit fonksiyonlar kullanılarak daha komplike (karmaşık) olan fonksiyonlara ulaşılmaktadır. Yani bir anlamda parçalardan bütüne ulaşılmaktadır. Bizim amacımız verilen orjinal fonksiyondan görülmesi zor olan geometrik ya da analitik özellikleri nispeten basit fonksiyonların geometrik ya da analitik özelliklerinden yararlanarak elde etmektir. Bu anlamda $k(z)$ Koebe fonksiyonunu birim disk $\mathbb{D}$ de hem analitik hem de univalent olan $w_0(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, $w_1(z) = z^2$ ve $w_2(z) = \dfrac{1}{4}[z-1]$

fonksiyonların bileşkesi olarak yazılabilir. Yani,

$$\begin{aligned}(w_2ow_1ow_0)(z) &= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right]\\ &= \frac{(1+z)^2-(1-z)^2}{4(z-1)^2}\\ &= \frac{4z}{4(1-z)^2}\\ &= \frac{z}{(1-z)^2}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nz^n\end{aligned}$$

elde edilir. Dikkat edilirse $w_0(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ dönüşümü birim disk $\mathbb{D}$ yi sağ yarı düzlem $\{\Re(w)>0\}$ eşleyen bir Möbius dönüşümü, iki analitik fonksiyonun çarpımı olarak düşüne bileceğimiz $w_1=w_0^2$ dönüşümü ise $\{\Re(w)>0\}$ bölgesini $\mathbb{C}-(-\infty,0]$ bölgesine eşler. Son olarak $w_2=\dfrac{1}{4}[w-1]$ dönüşümü ise $\mathbb{C}-(-\infty,0]$ bölgesini öncelikle 1 birim sola öteler ve sonra $\frac{1}{4}$ ile çarpar. Yine dikkat edilirse $k(\mathbb{D})$ yi bulabilmek için birim disk $\mathbb{D}$ de konformal olan bir dizi dönüşümün bileşkesi kullanılmıştır. Buna göre $k(\mathbb{D})$ geometrik olarak aşağıdaki gibi olur.



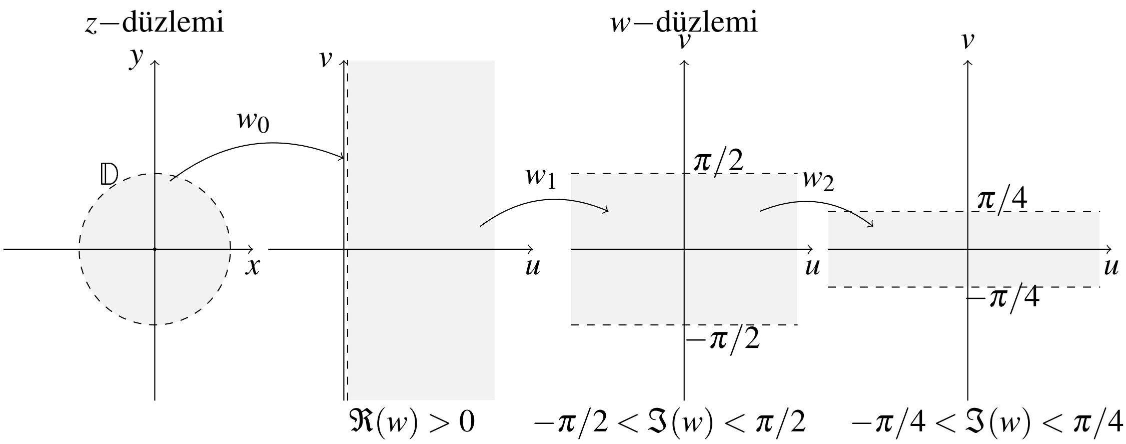
Şekil 3.2. $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe döşümü altında birim disk $\mathbb{D}$ nin görüntüsü .

Elde edilen Şekil (3.2) den de görüldüğü gibi $k(\mathbb{D})=\mathbb{C}-(-\infty,-1/4]$ görüntü kümesi starlike (Bak, Tanım (2.1.16)) olup konveks (Bak, Tanım (2.1.15)) değildir. Sezgisel temelde bu görüntü kümesi univalentlik bozulmadan elde edilen en geniş görüntü kümesidir. Başka bir ifadeyle $\mathcal{S}$ sınıfına ait başka hiçbir fonksiyon univalentlik bozulmadan birim disk

$\mathbb{D}$ yi daha geniş başka bir bölgeye eşleyemez. Dolayısıyla bu ekstramal özelliği sağlayan tek fonksiyon $k(z)$ Koebe fonksiyonudur. $\mathcal{S}$ sınıfının birer üyesi olan diğer bazı basit ve önemli olan dönüşümler şunlardır:

1. $f(z) = z$ birim dönüşümü. Bu durumda $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ dir.
2. $f(z) = \dfrac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \ldots$ dönüşümü. Bu dönüşüm altında $\mathbb{D}$ birim diskini $f(\mathbb{D})$ görüntüsü $\Re(w) > 1/2$ yarı düzlemidir.
3. $f(z) = \dfrac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + \ldots$ dönüşümü. Bu dönüşüm altında $\mathbb{D}$ birim diskin $f(\mathbb{D})$ görüntüsü $\mathbb{C} - (-\infty, -1/2] \cup [1/2, \infty)$ dir.
4. $f(z) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^5}{5} + \ldots$ dönüşümü. Bu dönüşüm altında $\mathbb{D}$ birim diskini $f(\mathbb{D})$ görüntüsü ise $\{-\pi/4 < \Im(w) < \pi/4\}$ şerididir.

Son örnek için $w_0(z) = \frac{1+z}{1-z}$, $w_1(z) = \log(w_0(z))$ ve $w_2(z) = \dfrac{1}{2}w_1(z)$ olarak alınır ve gerekli olan cebirsel işlemler yapılırsa $f(z) = (w_2 o w_1 o w_0)(z) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ olduğu görülür. Bu durumda $w_0(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ Möbius dönüşümü daha önce de ifade eildiği gibi $\mathbb{D}$ birim diski konformal olarak sağ yarı düzlem $\{\Re(w) > 0\}$ ye eşler. $w_1(z) = \log(w_0(z))$ dönüşümü ise $w_0(z)$ ile elde edilen görüntüyü $\{-\pi/2 < \Im(w) < \pi/2\}$ şeridine konformal olarak eşler. Son adımda ise $w_2(z) = \dfrac{1}{2}w_1(z)$ dönüşümü elde edilen son görüntüyü $1/2$ ile çarpar. Bu durumda dönüşüm altında birim disk $\mathbb{D}$ nin nihai(son) görüntüsü geometrik olarak aşağıdaki gibi verilebilir.



Şekil 3.3. $f(z) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ döşümü altında birim disk $\mathbb{D}$ nin görüntüsü .

Elde edilen Şekil (3.3) den de görüldüğü gibi $f(\mathbb{D}) = \{\pi/4 < \Im(w) < \pi/4\}$ görüntü kümesi hem starlike (Bak, Tanım (2.1.16)) olup hem de konveks (Bak, Tanım (2.1.15)) bir bölgedir. Dikkat edilirse $f(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ dönüşümü öncelikle bir büyüme (dilation), ardından bir büzülme ve dönme (dilation and rotation) ev hemen ardından da yine bir büzülme (dilation) basit bileşenlerine ayrılmıştır.

$\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun çarpımı her zaman $\mathcal{S}$ sınıfına ait iken, toplamları her zaman $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir. Örneğin, $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ ve $g(z) = \dfrac{z}{1+iz}$ fonksiyonlarını alalım. $f, g \in \mathcal{S}$ olduğu açıtır. Ancak,

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve} g'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2}$$

olup

$$f'(z) + g'(z) = \frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Eğer elde edilen bu son eşitlikte $|z| < 1$ yani $z \in \mathbb{D}$ olacak şekilde $z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$ alınırsa $f'(z) + g'(z) = 0$ olduğu görülecektir. Bu ise bize $f(z) + g(z)$ toplam fonksiyonunun (3.1) ile verilen normalleştirme şartlarını sağlamadığını gösterir. Dolayısıyla $f(z) + g(z) \notin \mathcal{S}$ dir. Bu durumda akla gelen doğal soru şu olmalıdır: Acaba hangi temel dönüşümler altında $\mathcal{S}$ sınıfı korunur? Bu soruya genel bir cevap oluşturan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.4. $\mathcal{S}$ sınıfı aşağıda verilen dönüşümler altında korunur. Daha açık olarak eğer $f \in \mathcal{S}$ ise aşağıda verilen g fonksiyonları da $\mathcal{S}$ de dir.

(i) (Rotation=Dönme,Rotasyon)$f \in \mathcal{S}$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta})$ ise, bu durumda $g \in \mathcal{S}$ dir.

(ii) (Dilation=Genişleme (veya büzülme)) $f \in \mathcal{S}$ ve $r \in (0,1)$ olmak üzere $g(z) = r^{-1} f(rz)$ ise bu durumda $g \in \mathcal{S}$ dir.

(iii) (Conjugation=Eşlenik) $f \in \mathcal{S}$ ve $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a_2}z^2 + +\overline{a_3}z^3 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \overline{a_n} z^n$ ise bu durumda $g \in \mathcal{S}$ dir.

(iv) (Disk automorphism=Disk Otomorfizması) $f \in \mathcal{S}$ ve $z_0 \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)}, z \in \mathbb{D}$$

ise bu durumda $g \in \mathcal{S}$ dir.

(v) (Omitted-value transformation=Atlanmış(veya Alınmayan) değer dönüşümü) $w \neq f(z)$ ve $f \in \mathcal{S}$ olmak üzere $g(z) = \dfrac{wf(z)}{w - f(z)}, z \in \mathbb{D}$ ise bu durumda $g \in \mathcal{S}$ dir.

(vi) (Range transformation=Görüntü Dönüşümü)$f \in \mathcal{S}$ ve $\Phi : f(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ analitik ve univalent bir fonksiyon olmak üzere

$$g(z) = \frac{\Phi(f(z)) - \Phi(0)}{\Phi'(0)} = \frac{(\Phi o f)(z) - \Phi(0)}{\Phi'(0)}$$

ise bu durumda $g \in \mathcal{S}$ dir.

(vii) (square-root transformartion=Karekök Dönüşümü) $f \in \mathcal{S}$ olmak üzere $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$ ise bu durumda $g \in \mathcal{S}$ dir.

İspat. Yukarıda verilen dönüşümler altında $\mathcal{S}$ sınıfının korumduğunu gösterebilmek için temelde univalent fonksiyonların bileşkelerinin de univalent olduğu olgusu kullanılmaktadır (Bak, Teorem (3.1.3)).

(i) Kabul edelim ki $f \in \mathcal{S}$ olsun. $R, T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ univalent olacak şekilde sırasıyla $R(z) = e^{i\theta}z$ ve $T(z) = e^{-i\theta}z$ dönüşümlerini alalım. Bu durumda

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta}z) = (T o f o R)(z)$$

olarak tanımlanabilir. Bileşke dönüşüm olduğundan g fonksiyonun univalent olduğu açıktır. Şimdi $\mathbb{D}$ de g nin analitik oduğunu gösterelim.Bunun için g nin z ye göre türevini almak yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned} g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta}z) &\Rightarrow g'(z) = e^{-i\theta} e^{i\theta} f'(e^{i\theta}z) \\ &\Rightarrow g'(z) = f'(e^{i\theta}z) \end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir. Öte yandan $\mathcal{S}$ sınıfına ait her bir fonksiyon için türev sıfırdan farklı olduğundan $f'(e^{i\theta}z) \neq 0$ olup, bu da (3.8) eşitliğinden direkt olarak $g'(z) \neq 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\mathbb{D}$ de $g(z)$ nin analitik olduğunu gösterilmiş oldu (Bak, Teorem (3.1.1)). Son olarak g fonksiyonun (3.1) normalleştirme şartlarını sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim. Bunun için $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta}z)$ ve $g'(z) = f'(e^{i\theta}z)$ fonksiyonlarında sırasıyla $z = 0$ alınır ve gerekli olan cebirsel işlemler yapılırken

$f(0)=0, f'(0)=1$ oldukları da kullanılırsa sırasıyla $g(0)=0$ ve $g'(0)=1$ elde edilir. Dolayısıyla buraya kadar yapılan işlemler $g \in \mathcal{S}$ olduğunu verir. İlave olarak burada $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}$, $g(z)=e^{-i\theta} f\left(e^{i\theta} z\right)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{(n-1)i\theta} z^n$ ve $g'(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty} n a_n e^{(n-1)i\theta} z^{(n-1)}$ olduğu dikkate alınırsa verilen bilgiler daha kolay anlaşılacaktır.

(ii) $f \in \mathcal{S}$ ve $r \in (0,1)$ alalım.$R, T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olacak şekilde $R(z)=rz$ ve $T(z)=\frac{z}{r}$ univalent dönüşümlerini alalım. Bu durumda

$$g(z)=\frac{1}{r} f(rz)=(T o f o R)(z)$$

olarak tanımlanır. g fonksiyonu univalent fonksiyonların bileşkesi olduğundan univalenttir. Bu aşamada g nin $\mathbb{D}$ de analitik olduğunu gösterelim. Bunun için (i) de olduğu gibi g nin z ye göre türevi alınırsa,

$$g'(z)=\frac{1}{r} r f'(rz)=f'(rz)$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ sınıfına ait her bir fonksiyon için türev sıfırdan farklı olduğundan açık olarak $g'(z) \neq 0$ olacaktır. Bu da bize g nin $\mathbb{D}$ de analitik olduğunu gösteririr. Şimdi de g nin (3.1) normalleştirme şartlarını sağladığını gösterelim. $z=0$ için

$$g(z)=\frac{1}{r} f(rz) \Rightarrow g(0)=\frac{1}{r} f(0)=0$$

ve

$$g'(z)=f'(rz) \Rightarrow g'(0)=f'(0)=1$$

elde edilir. Dolayısıyla buraya kadar yapılan işlemler $g \in \mathcal{S}$ olduğunu verir. İlave olarak $f(z)=z+a_2 z^2+a_3 z^3+\ldots$ olduğu kullanılırsa g ve g' nin Taylor açılımları sırasıyla

$$\begin{aligned} g(z)=\frac{1}{r} f(rz) &= \frac{1}{r}(rz+a_2 r^2 z^2+a_3 r^3 z^3+\ldots) \\ &= z+a_2 r z^2+a_3 r^2 z^3+\ldots \end{aligned}$$

ve

$$g'(z) = 1 + 2a_2rz + 3a_3r^2z^2 + \dots$$

elde edilir. Bu durumda yukarıda verilen bilgiler daha kolay anlaşılabilir.

(iii) $f \in \mathcal{S}$ alalım. $w(z) = \overline{z}$ olarak tanımlanırsa $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü univalent olur. Bu durumda

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}(wofow)(z)$$

fonksiyonu univalent dönüşümlerin bileşkesi olduğundan kesin olarak univalenttir. Öte yandan $w(z) = \overline{z}$ dönüşümü $z_0 = 0$ noktasında kompleks anlamda türevlenemez, yani

$$\lim_{z_0 \to 0} \frac{w(z) - w(z_0)}{z - z_0}$$

limiti tanımlı değildir. Dolayısyla $w(z) = \overline{z}$ dönüşümü $\mathbb{D}$ de analitik değildir. Bu durumda (i) ve (ii) de olduğu gibi f nin (3.1) normalleştirme şartlarını sağladığını kullanarak g nin de sağladığını gösteremeyiz. Bunu yerine f nin (3.6) Taylor açılımından yararlanabiliriz. Bu durumda f her bir kapalı disk $|z| \leq r < 1$ düzgün yakınsak olmak üzere (3.6) Taylor açılımı $f(z)$ ye yakınsar. Bu durumda

$$z + \sum_{n=2}^{\infty} \overline{a}_n z^n$$

Taylor açılımınında yakınsaklık yarıçapı 1 olup $\mathbb{D}$ de bir analitik fonksiyon tanımlar. Bu fonksiyonun kolayca

$$\begin{aligned} g(z) = \overline{f(\overline{z})} &= \overline{\overline{z} + a_2\overline{z}^2 + a_3\overline{z}^3 + \dots} \\ &= z + \overline{a}_2 z^2 + \overline{a}_3 z^3 + \dots \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca bu aşamada detaylar atlanarak $g(0) = 1$ ve $g'(0) = 1$ olduğu da kolayca yazılabilir. Bütün verilen bilgilerden sonra g nin $\mathbb{D}$ de analitik-univalent olup ve normalleştirme şartlarını da sağladığı açıktır. Dolayısıyla $g \in \mathcal{S}$ dir.

(iv) $f \in \mathcal{S}$ ve $z_0 = w(0)$ olmak üzere birim disk $\mathbb{D}$ yi konformal olarak kendine eşleyen (yani birim disk tanımalan bu dönüşüm altında invaryanttır) $w(z) = \dfrac{z + z_0}{1 + \overline{z}_0 z}$ Möbius dönüşümünü alalım. $z_0 \in \mathbb{D}$ yani $|z_0| < 1$ olduğundan $g(0) = 0$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f(w(z)) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)} \tag{3.9}$$

olarak tanımlanan g fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de univalent olur. Çünkü $g(z_1) = g(z_2)$ alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{f(w(z_1)) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)} = \frac{f(w(z_2)) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)} &\Rightarrow f(w(z_1)) - f(z_0) = f(w(z_2)) - f(z_0) \\ &\Rightarrow w(z_1) = w(z_2) \\ &\Rightarrow z_1 = z_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bize g nin univalent olduğunu gösterir. Bu aşamada g nin (3.1) normalleştirme şartlarını sağladığını gösterelim.(i),(ii) de ve kısmende (iii) de olduğu gibi $f \in \mathcal{S}$ olmasının bir sonucu olarak ve ayrıca $z = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{f(w(0)) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)}, w(0) = z_0 \\ &= \frac{f((z_0) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)}, \left(1-|z_0|^2\right) f'(z_0) \neq 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de $g'(0) = 1$ olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle $g'(z)$ türev fonksiyonunu bulalım;

$$g(z) = \frac{f(w(z)) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)} \Rightarrow g'(z) = \frac{f'(w(z))}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)}.$$

$g'(z)$ türevinde $z = 0$ alınırsa

$$g'(0) = \frac{f'(w(0))}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)} \tag{3.10}$$

olur. Öte yandan

$$f(w(z)) = f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right) \Rightarrow f'(w(z)) = \frac{1-|z_0|^2}{(1+\overline{z_0}z)^2} f'\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right)$$

olup bu son ifadede $z=0$ yazılırsa

$$f'(w(0)) = \frac{1-|z_0|^2}{(1+0)^2} f'\left(\frac{z_0}{1}\right) = (1-|z_0|^2) f'(z_0)$$

elde edilir. Elde edilen bu değer (3.10) da yarine yazılırsa $g'(0)=1$ olduğu görülecektir. Bu durumda (3.9) ile g dönüşümünün $\mathbb{D}$ de analitik-univalent ve aynı zamanda normalleştirme şartlarını da sağladığı gösterilmiş oldu. Bütün bunlara göre $g \in \mathcal{S}$ dir.

(v) $f \in \mathcal{S}$ ve $w \neq f(z)$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w-f(z)} \tag{3.11}$$

alalım. g yi univalent fonksiyonların bileşkesi olarak yazabilmek için $T(\xi) = \frac{w\xi}{w-\xi}$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda $w \neq \xi$ için $g(z) = (Tof)(z)$ olarak yazılabilir. g dönüşümü univelet fonksiyonların bileşkesi olduğuna göre açık olarak $\mathbb{D}$ de univalent olur. Ayrıca $f(0)=0$ olması (3.11) ile verilen g fonksiyonu için $g(0)=0$ olmasını gerektirir. Öte yandan (3.11) ile verilen g fonksiyonunun z ye göre türevi alınırsa

$$g'(z) = \frac{w^2 f'(z)}{(w-f(z))^2}$$

elde edilir. Elde edilen g' türevinde $w \neq f(z)$ olmak üzere $z=0$ alınıp $f \in \mathcal{S}$ olmasından kaynaklanan $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ gerçekleri de kullanılırsa $g'(0)=1$ bulunur. Dikkat edilirse $w \neq f(z)$ olması her bir $z \in \mathbb{D}$ için $g'(z) \neq 0$ olmasını ve dolayısıyla da g nin $\mathbb{D}$ de analitik olmasını garanti eder.Bütün verilenlere göre $g \in \mathcal{S}$ olduğu ispatlanmıştır.

(vi) $f \in \mathcal{S}$ olmak üzere $f(\mathbb{D})$ de analitik ve univalent bir $\Phi : f(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu tanımlayalım.Bu durumda eğer,

$$g(z) = \frac{(\Phi o f)(z) - \Phi(0)}{\Phi'(0)} \tag{3.12}$$

olarak tanımlanırsa g fonksiyonu univalent olan fonksiyonların bileşkesi olduğundan birim disk $\mathbb{D}$ de univalenttir. Ayrıca her bir $z \in \mathbb{D}$ için

$$g'(z) = \frac{f'(z)\Phi'(f(z))}{\Phi'(0)} \neq 0 \tag{3.13}$$

olduğundan g fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de analitiktir. Öte yandan $z=0$ alınırsa $f \in \mathcal{S}$ olmasından kaynaklanan $f(0)=0$ gerçeği de kullanılırsa (3.12) eşitliğinden $g(0)=0$ elde edilir. İlave olarak $g'(0)=1$ olduğunu göstermek için $f'(0)=1, f(0)=0$ gerçekleri de eşitlik (3.13) eşitliğinde kullanılırsa $g'(0)=1$ olduğu kolayca elde edilir. Buraya kadar verilen bilgilere göre $g \in \mathcal{S}$ dir.

(vii) Kabul edelim ki $f \in \mathcal{S}$ ve $g(z)=\sqrt{f(z^2)}$ olsun. Bu durumda normalleştirme şartı gereği $z=0$ için $f(0)=0$ olduğu ve karekök fonksiyonunun çift dallı olduğu da dikkate alınırsa g yi tanımlarken dikkat etmeliyiz. $z \in \mathbb{D}$ ve b_n ler kompleks katsayılar olmak üzere karekök dönüşümünün

$$\begin{aligned} g(z)=\sqrt{f(z^2)} &= z(1+a_2z^2+a_3z^4+a_4z^6+\dots)^{1/2} \\ &= z+b_3z^3+b_5z^5+\dots \end{aligned}$$

tek değerli olan pozitif dalını seçebiliriz. Bu şekilde seçilen g fonksiyonunun $\mathbb{D}$ de univalent olduğu açıktır. Ayrıca her bir $z \in \mathbb{D}$ için $g'(z)=1+3b_3z^2+5b_5z^4+\cdots \neq 0$ olduğundan g analitiktir. Öte yandan $z=0$ alınırsa kolayca $g(0)=0$ ve $g'(0)=1$ görülebilir. Bu durumda verilenlere göre $g \in \mathcal{S}$ dir. Burada $g(z)=z+b_3z^3+b_5z^5+\dots$ elde edilirken, Reel analizden hatırlanacağı üzere $(1+x)^{1/2}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\dots$ açılımı kullanılmıştır. f nin g içerisinde simetrilenmesi orojindeki ikinci türevin elimine edilmesine yol açtığı görülmektedir.

(vii) de verilen ispat modifiye edilerek aşağıda verilen teoremin ispatı kolaylıkla elde edilebilir. □

Teorem 3.1.5. $f \in \mathcal{S}$ ve $k=2,3,4,\dots$ olmak üzere eğer $g(z)=\left[f(z^k)\right]^{1/k}$ dönüşümü f nin k. dereceden kök dönüşümü ise bu durumda $g \in \mathcal{S}$ dir. $k=2$ iken elde edilen $g(z)=z+b_3z^3+b_5z^5+\dots$ fonksiyonlarına tek-univalent fonksiyonlar denir. $\mathcal{S}$ sınıfına ait tek-univalent fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^2$ ile gösterilir.

İspat. Bir $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonunun (3.6) ile verilen Taylor açılımında z yerine z^k değişken dönüşümü yapılırsa;

$$\begin{aligned} f(z^k) &= z^k+a_2z^{2k}+a_3z^{3k}+\cdots+a_nz^{nk}+\dots \\ &= z^k\left[1+a_2z^k+a_3z^{2k}+\cdots+a_nz^{(n-1)k}+\dots\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu aşamada her iki tarafın k. dereceden kökü,yani $\frac{1}{k}$. dereceden kuvveti alınır ve α bir negatif tamsayı olmayan herhangi bir kompleks sayı olmak üzere

$$(1+z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

Binom eşitliği de kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
g(z) = [f(z^k)]^{1/k} &= z\left[1 + a_2 z^k + a_3 z^{2k} + \cdots + a_n z^{(n-1)k} + \ldots\right]^{1/k} \\
&= z\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{k}}{n} \left(a_2 z^k + a_3 z^{2k} + \cdots + a_n z^{(n-1)k} + \ldots\right) \\
&= z\Big[1 + \frac{1}{k}\left(a_2 z^k + a_3 z^{2k} + \cdots + a_n z^{(n-1)k} + \ldots\right) \\
&+ \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}1\right)}{2!}\left(a_2 z^k + a_3 z^{2k} + \cdots + a_n z^{(n-1)k} + \ldots\right)^2 + \ldots\Big] \\
&= z\Big[1 + \frac{1}{k} a_2 z^k + \frac{1}{2k^2}(1-k)a_2^2 z^{2k} + \frac{1}{k} a_3 z^{2k} + \ldots\Big] \\
&= z + \frac{1}{k} a_2 z^{k+1} + \frac{1}{2k^2}\left[2ka_3 - (k-1)a_2^2\right] z^{2k+1} + \ldots
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu Taylor açılımı z nin bir polinomu olduğuna göre analitiktir. Ayrıca gerekli olan cebirsel işlemler yapılırsa kolaylık univalent olduğu gösterilebilir. Öte yandan elde edilen g fonksiyonunun $\mathcal{S}$ sınıfının $g(0) = g'(0) - 1 = 0$ normalizasyon şartlarını da sağlar. Doyısıyla $g \in \mathcal{S}$ dir. □

İleride yapılacak işlemler için bir hazırlık olması amacıyla $k = 2$ alınırsa, g fonksiyonunun Taylor açılımı

$$g(z) = z + \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{8}[4a_3 - a_2^2]z^5 + \ldots$$

elde edilir.

Özellik 3.1.1. $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ olmak üzere bir $\{f_n\}$ dizisini alalım. Eğer $\{f_n\}$ dizisi $\mathbb{D}$ nin bir kompakt altkümesinde bir analitik f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise, bu durumda $f \in \mathcal{S}$ dir.

İspat. Öncelikle, eğer $\{f_n\} \in \mathcal{S}$ ise, bu durumda f fonksiyonu keza $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = f(0) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = f'(0) = 1$ olduğundan f fonksiyonu normalleştirme şartlarını sağlanmış oldu. Şimdi de f nin univalent olduğunu gösterelim. Bunun için keyfi bir $z_0 \in \mathbb{D}$ noktası alalım. Bu durumda başka bir $z \neq z_0$ noktası için $f(z) \neq f(z_0)$olduğunu gösterebiliriz. $\mathbb{D}\diagdown\{z_0\}$ bölgesinde $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Dikkat edilirse bu bölgede g_n sıfıra sahip değildir. Dahası, $g_n(z)$ de $g(z) = f(z) - f(z_0)$ a yakınsar. (2.1.33) Hurwitz teoremini bir sonucu olarak biz biliyoruz ki, her hangi bir $z \in \mathbb{D}\diagdown\{z_0\}$ için ya $g(z) \neq 0$ dır ki, bunun anlamı bütün $z \neq z_0 \in \mathbb{D}$ ler için $f(z) \neq f(z_0)$ dir, ya da $g(z) = 0$ dır ki bunun da anlamı f sabittir. Bu ise $f \in \mathcal{S}$ olması gerçeğinden kaynaklanan $f'(0) = 1$ olması şartı ile çelişir. Bütün bu verilen bilgilerin sonucunda f fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de analitik-univalent olup normalleştirme şartlarını da sağladığından $f \in \mathcal{S}$ dir. □

Bu teoremden çıkarılacak sonuç; $\mathcal{S}$ sınıfının birim disk $\mathbb{D}$ üzerindeki tüm analtik fonksiyonların düzgün yakınsamaya göre kompakt bir alt kümesi olmasıdır. Kabaca söylemek gerekirse, $\mathcal{S}$ kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır. Kapalılığın anlamı ise $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlarının bir yakınsak dizisinin limitinin yine $\mathcal{S}$ de olmasıdır (Bak, Özellik (3.1.1)). Burada açık olmayan durum yakınsak dizisinin limitinin univalent olma durumudur. Standart (2.1.33) Hurwitz teoremini bir sonucu olan aşağıdaki teoremle giderilebilir.

Teorem 3.1.6. Kabul edelim ki $\{f_n\}$ bir U bölgesinde univalent fonksiyonların bir sınıfı ve U da bir f fonksiyonuna yakınsak olsun. Bu durumda f fonksiyonu ya univalenttir ya da sabittir.

İspat. İspata bir varsayımla başlayalım. Kabul edelim ki f fonksiyonunun U bölgesindeki z_0 ve ξ_0 noktaları için $f(z_0) = f(\xi_0) = w_0$ şartını sağlayan bir sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda z_0 ve ξ_0 noktaları $f(z) - w_0 = 0$ denklemnini sonlu mertebeden sıfırları(yani kökleri) olur. Bu durumda (2.1.33) Hurwitz teoreminden z_0 ve ξ_0 noktalarına yakınsayan z_k ve ξ_k dizileri vardır öğleki aynı zamanda $f(z_k) - w_0 = 0$ ve $f(\xi_k) - w_0 = 0$ dir. f_k ların univalent olmaları her bir k için $z_k = \xi_k$ olduğunu doğrular ki bu da limit durumunda $z_0 = \xi_0$ olduğu anlamına gelir ve f_k ların univalent olmaları ile çelişir. Böylece bizim f nin sabit olmadığı varsaymımızla bir çelişki ortaya çıkar. Bu da teoremin ispatını tamamlar. □

Buraya kadar verilen bilgilerden univalent fonksiyonlar altında topoljik özelliklerin korunduğunu, yani invaryant kaldıklarını ifade edilebilir. Eğer univalent fonksiyonun tersinin türevin daima var olduğu gösterilirse bu iddia doğrulanmış olur. Teorem (3.1.3) de bir nivalent fonksiyonun tersinin türevinin daima var olduğu gösterildi. Bu durumda iddamız doğrudur.

Bu aşamada, Alman matematikçi H. Prawitz tarafından 1927 yılında tanıtılan ve bu alanda Grönwall Alan Teoremi gibi birçok ana teoremlerin ispatında kullanılan Prawitz eşitsiliği verilebilir. Bu sonuç, esasen Teorem (3.1.10) Gronwall alan teoremine eşdeğerdir [27].

Teorem 3.1.7. (**Prawitz Eşitsizliği**) $f \in \mathcal{S}$ ve $[z/f(z)]^{\alpha/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n z^n$ alalım. Bu durumda bütün α reel sayıları için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-\alpha)}{\alpha} |\sigma_n|^n \leq 1$$

dir.Özel olarak $\alpha = 2$ alnırsa aşağıda verilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.1. $f \in \mathcal{S}$ ve $[z/f(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ alalım. Budurumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)|c_n|^2 \leq 1 \tag{3.14}$$

dir.

B. Friedman, 1946 tarihli 'Univalent fonksiyonlar üzerine iki teorem' adlı makalesinde, a_n Taylor açılımı katsayılarının her biri birer tamsayı olup birim disk $\mathbb{D}$ de analitik ve univalent olan sadece dokuz rasyonel fonksiyon olduğunu ispatladı [28].

Teorem 3.1.8. (**B. Friedman Teoremi**) $f \in \mathcal{S}$ alalım. Eğer bütün a_n katsayıları rasyonel tam sayı ise, bu durumda f fonksiyonu aşağıda verilen

$$z, \frac{z}{1 \mp z}, \frac{z}{1 \mp z^2}, \frac{z}{(1 \mp z)^2}, \frac{z}{1 \mp z + z^2}$$

dokuz rasyonel fonksiyondan biridir.

İspat. $F(z) = \dfrac{z}{f(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ olarak alınırsa, bu durumda c_n katsayılarının her biri birer rasyonel tam sayı olur. Öte yandan $c_1 = -a_2$ ve de $|a_2| \leq 2$ olması bize $|c_1| \leq 2$ olduğunu verir. Bu durumda (3.14) eşitsizliğinden $|c_2| \leq 1$ ve $n \geq 3$ için de $c_n = 0$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla, c_n ler için olası durumlar:

$$c_1 = 0, \mp 1, \mp 2; c_2 = 0, \mp 1; c_n = 0 (n \geq 3)$$

şeklinde olacaktır. Bu değerlerin kombinasyonundan toplam on beş fonksiyon elde edilir. Bununla birlikte şu altı

$$1 \mp 2z, 1 \mp 2z - z^2, 1 \mp z - z^2$$

fonksiyon birim disk $\mathbb{D}$ de sıfıra sahip olduklarından ve payda da sıfır olamayacağına göre alınamazlar. Dolayısıyla geriye dokuz fonksiyon kalır. Bu fonksiyonların $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ sınıfı

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Z}} = \left\{ z, \frac{z}{1 \mp z}, \frac{z}{1 \mp z^2}, \frac{z}{(1 \mp z)^2}, \frac{z}{1 \mp z + z^2} \right\}$$

ya da

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Z}} = \{ f \in \mathcal{S} : c_n \in \mathbb{Z} \}$$

şeklinde verilebilir. □

Buraya kadar, birim disk $\mathbb{D} = \{|z| < 1 : z \in \mathbb{C}\}$ de analitik olup, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ normalleştirme şartlarını sağlayan univalent, yani farklı noktalarda farklı değerler alan fonksiyonları oluşturduğu $\mathcal{S}$ sınıfı hakkında genel bilgiler verildi. $\mathcal{S}$ sınıfı ile yakından ilgili olan ($\mathcal{S}^2$ ve $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ dışında) bir diğer bir sınıf ise $\mathbb{D}$ birim diskinin komplementi olan $\mathbb{D}^{\complement} = \Delta = \{|z| > 1 : z \in \mathbb{C}\}$ de analitik ve univalent olup her bir elemanı

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \tag{3.15}$$

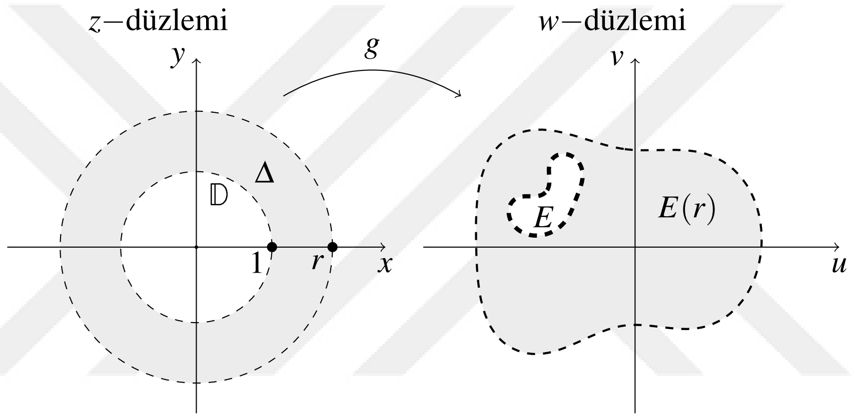
Laorent seri açılına sahip olan g fonksiyonlarının oluşturduğu $\sum$ sınıfıdır. $\sum$ sınıfının fonksiyonları, ∞ da basit bir kutba sahip olacak şekilde normalleştirilmiş olurlar. Dolayısıyla, bu sınıf

$$\sum = \left\{ g : \Delta \to \mathbb{C} : g \text{ univalent }, \lim_{z \to \infty} g(z) = \infty, g'(\infty) = 1 \right\}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = \infty$ şartı, ∞ un uygun bir komşuluğunda g nin analitik olduğunu garanti etmektedir. Öte yandan g nin ∞ daki türevi $f(z) = g^{-1}(z^{-1})$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasındaki türevinden elde edilebeleceği açıktır. Yani $g'(\infty) = f'(0)$ dir. Daha önce de ifade edildiği gibi $\mathcal{S}$ sınıfına ait olan fonksiyonların görüntü karakterizasyonları ile Beiberbach varsayımı olarak biline, a_n Taylor katsayılarının modülleri arasındaki ilişki oldukça ilgi uyandırmıştır. Doğal olarak $\sum$ sınıfının elemanlarının da benzer bir sınırlamayı sağlayıp sağlamadığı oldukça ilgi çekmiştir. Bu anlamda univalet olmayla beraber $g \in \sum$ nin Laurent açılımının katsayıları üzerinde Grönwall Alan Teoremi olarak bilinen çok güçlü bir sınırlama vardır (Bak, Teorem (3.1.10)). Bu anlamda her bir $g \in \sum$ fonksiyonu $z \in \Delta$ için yakınsak olup, Δ yı bir kompakt ve bağlantılı E kümesinin komplementine ,yani $E = \mathbb{C} \diagdown g(\Delta)$ ye bire-bir eşler. Burada b_0 katsayısı E bölgesinin konform merkezi olarak adlandırılır ve

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})d\theta$$

ile verilir. Dikkat edilirse E kümsei g fonksiyonunun almadığı değerler kümesidir. Aşağıda verilen şekilde $E(r) = \mathbb{C} \diagdown \left\{ g(z) : |z| > r \right\}$ olduğu açıktır.



Şekil 3.4. $g \in \sum$ için $g(\Delta) = E$ ve $g(\Delta(r)) = E(r)$ $(r > 1)$.

Bazen $0 \in E$ olduğunu kabul etmek daha uygun olup, $\sum$ sınıfının bir altsınıfı olan

$$\sum{}' = \left\{ g : \Delta \to \mathbb{C} : g \in \sum, 0 \notin g(\Delta) \right\}$$

sınıfını düşünmek bazı uygulamalarda daha yararlı olabilmektedir. Dikkat edilirse $\sum'$ sınıfının elemanları $0 \notin g(\Delta)$ koşulunu sağlayan $g \in \sum$ fonksiyonlarının sınıfıdır. Bu şekildeki dönüşümler, herhangi bir elemanın görüntüsünün sadece bir sabit kadar çevirirler ancak görüntünün şeklini değiştirmezler. Bu nedenle bu iki sınıf birbirine oldukça yakın olup özelliklerinin birçoğu ortaktır. $\sum'$ sınıfının tanıtılma sebeplerinden biri, $\mathcal{S}$ ve $\sum'$ sınıfları arasında bire-bir bir eşleme olmasıdır. Yani her bir $f \in \mathcal{S}$ için

$$g(z) = f^{-1}(\frac{1}{z}) = z - a_2 + (a_2^2 - a_3)z^{-1} + \cdots \in \sum{}', |z| > 1$$

dir. Ayrıca burada bütün $z \in \Delta$ ler için $g(z) \neq 0$ dir.Tersine her bir $g \in \sum'$ ise bu durumda

$$f(z) = g^{-1}(\frac{1}{z}) \in \mathcal{S}, |z| > 1$$

dir. Daha açık bir ifadeyle eğer f fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına ait keyfi bir fonksiyon ise $g(z) = 1/f(z^{-1})$ fonksiyonu $\sum'$ sınıfına aittir. Tersine her bir $g \in \sum'$ fonksiyonu için ise $f(z) = 1/g(z^{-1})$ fonksiyonu da $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Ayrıca $\sum$ sınıfının uygulamalarda başka bir altsınıf olarak

$$\sum_0 = \left\{ g \in \sum : b_0 = 0 \right\}$$

şeklinde ayırmak uygun olabilmektedir. $\sum_0$ sınıfına ait fonksiyonlar tam fonksiyonlar olarak da adlandırılmaktadır. Başka bir ifadeyle $\sum_0$ sınıfı $\sum$ sınıfına ait olup $w_0 = 0$ değerini almayan fonksiyonların sınıfıdır. Bu durumda $\sum_0 \subset \sum$ olduğu açıktır. Ayrıca $\mathcal{S}$ sınıfı ile $\sum_0$ sınıfı arasında da bire-bir bir eşleme vardır. Eğer $f \in \mathcal{S}$ ise, bu durumda $g(z) = f^{-1}(z^{-1}) \in \sum_0$ dır. Tersine, eğer $g \in \sum_0$ ise, bu durumda da $f(z) = g^{-1}(z^{-1}) \in \mathcal{S}$ dir. Örneğin, Koebe fonksiyonu $k(z) \in \mathcal{S}$ iken,

$$g(z) = \frac{1}{k(\frac{1}{z})} = z - 2 + z^{-1}$$

olması, $g \in \sum_0$ olduğunu gösterir.

Buraya kadar $\mathcal{S}$ sınıfıyla ilgili olarak analtik özellikler detaylı bir şekilde verilmeye çalışıldı. Ayrıca son bölümde $\mathcal{S}$ sınıfıyla yakından ilgili olan $\sum, \sum'$ ve $\sum_0$ sınıfları tanıtıldı. Bu sınıfların kısa bir tarihçesi ve oldukça ilginç olan örenkleri ilgili kaynaklardan incelenebilir [29]. Bu aşamadan sonra $\mathcal{S}$ sınıfının geometrik özellikleri ile ilgili bilgiler verilecektir. Özellikle $\sum$ sınıfını tanılmasındaki esas amaç $\mathcal{S}$ sınıfa ait fonksiyonların geometrik özelliklerinin belirlenmesinde temel oluşturmasıdır. Burada dikkat edilmesi gereken husus, $\sum$ sınıfının $\mathcal{S}$ sınıfından daha geniş olması, dolayısıyla da elemanlarının sahip olduğu geometrik özelliklerin $\mathcal{S}$ sınıfının elemanlarına da şümul edilmesi yani kapsamasıdır.

Şekil (3.4) de verilen $g(\Delta) = E$ alanı oldukça düzensiz olabilir. Bu düzensiz alanı bulmanın temel yolu, r yi sağdan 1 yaklaştırıp alanı sonsuz altalanlara bölerek toplam alanı E ye yaklaştırmak olmalıdır. Yani

$$\text{Alan } E = \lim_{r \to 1^+} \text{Alan} E(r)$$

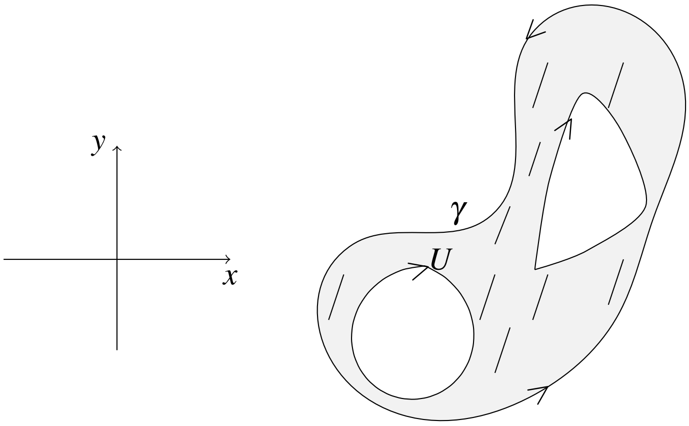
olmalıdır. $E(r)$ bölgeleri kompleks düzlem $\mathbb{C}$ de $\gamma(r)$ düzgün sınır eğrilerine sahip oldukları için ancak Green teoreminin kompleks formu uygulanarak bulunabilirler. 1914 yılında İsveç kökenli Amerikalı matematikçi Thomas Hakon Grönwall (1877-1932), $|z| > 1$ olmak üzere (3.15) ile verilen fonksiyonların $\sum$ sınıfına ait olması için, $b_0, b_1, \ldots$ Taylor-Laurent serisi katsayıları üzerin çok güçlü bir sınırlama getirmiştir. Bu sınırlama alan teoremi olarak bilinir ki, univalent fonksiyonlar teorisinin analitik anlamda olduğu kadar geometrik anlamda da temelidir. Burada kompleks bir fonksiyon bir noktada izole edilmiş bir singüleriteye sahipse, Taylor serisini Laurent serisiyle değiştirilebileceğini hatırlamakta fayda vardır. Birkaç farklı ispatı yöntemi olan Alan teoreminin de ispatı oldukça teknik olup, bu ispatlardan en kolay ve pratik olanı yukarıda sözü edilen Green teoremi kullanılarak yapılandır. Bu nedenle öncelikle Green teoremini hatırlatmak yararlı olacaktır.

Teorem 3.1.9. (**Green Teoreminin Kompleks Versiyonu**) $\mathbb{C}$ de pozitif yönde yönlendirilmiş düzgün parçalı ve basit kapalı bir γ eğrisini ve bu eğrinin sınırladığı bir U bölgesini alalım. Eğer $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları U üzerinde birinci dereceden parçalı kısmi türevlere sahip ise, bu durumda

$$\oint_\gamma \left(Pdz + Qd\bar{z}\right) = \int\int_U \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial \bar{z}}\right) dz d\bar{z}$$

dir.

Buna göre türevi alınabilen P ve Q fonksiyonlarının U bölgesi üzerindeki integarli iki katlı integrallere dönüştürülerek çözülebilir. Green Teoremi, sıklıkla uzun ve sıkıcı parametrizasyonlardan kurtulmak ve zor integralleri kolayca çözmek için kullanılır. Teorem hem basit hem de çok bağlantılı bölgelerde geçerlidir.



Şekil 3.5. Soldaki U bölgesini sınırlayan kapalı bir γ eğrisi .

İspat. $z = x + iy$ olarak alınırsa sırasıyla $\bar{z} = x - iy$, $dz = dx + idy$ ve $d\bar{z} = dx - idy$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\oint_\gamma (Pdz + Qd\bar{z}) &= \oint_\gamma P(dx + idy) + Q(dx - idy) \\ &= \oint_\gamma (P + Q)dx + i(P - Q)dy\end{aligned}$$

olur. Bu aşamada Green teoreminin, türevleri özel bir düzlemde integre etmek için kullanıldığından hareketle esas olarak, bir düzlemsel eğri ile birleştirilen çizgi integralini hesaplamak için kullanıldığını hatırlamak gerekir. Bir çizgi integrali verildiğinde, Green teoremi kullanılarak yüzey integraline veya çift katlı integrale veya tersine dönüştürülebilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\oint_\gamma (P + Q)dx + i(P - Q)dy &= \int\int_U \Big(\frac{\partial i(P - Q)}{\partial x} - \frac{\partial (p + Q)}{\partial y}\Big)dxdy \\ &= \int\int_U \Big(i\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) + \Big(-i\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)dxdy\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan gerekli hesaplamalar yapılırsa;

$$\begin{aligned}dxdy = d\Big(\frac{z + \bar{z}}{2}\Big)d\Big(\frac{z - \bar{z}}{2i}\Big) &= \frac{1}{4i}(-dzd\bar{z} + d\bar{z}dz) \\ &= \frac{1}{2i}d\bar{z}dz = \frac{1}{2i}dzd\bar{z}\end{aligned}$$

olur. Buna göre integrand içerisindeki ifadeler yeniden düzenlenirse,

$$i\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=i\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial P}{\partial y}\Big)=2i\frac{\partial P}{\partial \bar{z}}$$

ve

$$-i\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}=-i\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-i\frac{\partial Q}{\partial y}\Big)=-2i\frac{\partial Q}{\partial z}$$

elde edilir. Bütün bunlara göre,

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma}(Pdz+Qd\bar{z}) &= \int\int_{U}\Bigg(\Big(i\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)+\Big(-i\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\Bigg)dxdy\\ &= \int\int_{U}\Big(2i\frac{\partial P}{\partial \bar{z}}-2i\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\frac{1}{2i}dzd\bar{z}\\ &= \int\int_{U}\Big(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial \bar{z}}\Big)dzd\bar{z}\end{aligned}$$

elde edilir. Buda ispatı bitirir. □

Green teoreminin oldukça şaşırtıcı bir kullanım alanı da, bilindiği üzere bazı ilginç alanların hesaplanmasında kullanılmasıdır. Şekil (3.5) de görüldüğü gibi Green teoremi, iki veya daha fazla basit kapalı eğrinin çevrelediği bölgenin alanını bulacak şekilde genelleştirilebilmektedir. Şimdi alan teoremi ifade ve ispat edilebilir.

Teorem 3.1.10. (**Grönwall Alan Teoremi**) Eğer (3.15) ile verilen $g(z)$ fonksiyonu $\sum$ de yani $g(z)\in\sum$ ise, bu durumda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\leq 1$ dir.

İspat. g fonksiyonunun alamadığı değerlerin kümesi E olsun. $r>1$ olmak üzere $|z|=r$ çemberinin g altındaki görüntüsü γ_r olsun. g univalent olduğundan γ_r nin $(E\subset)E(r)$ bölgesini çevreleyen basit kapalı bir eğri olduğu açıktır. Öte yandan $g(z)=w=u+iv$ alınırsa $dudv=\frac{1}{2i}d\bar{w}dw$ olur. Bu durumda her bir $r>1$ için Teorem (3.1.9) Green teoreminden $E(r)$ alanı,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\text{Alan}E(r) &= \frac{1}{\pi}\int\int_{E(r)}dudv\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\int_{E(r)}d\bar{w}dw\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)}\bar{w}dw, \text{((3.1.9)Green Teoremine göre)}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\bar{g}(z)g'(z)dz\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it} g'(re^{it})\overline{g(re^{it})}dt$$

elde edilir. Son eşitliği elde edebilmek için $w = g(z)$ ve $z = re^{it}$ değişken dönüşümleri yapılmıştır. Ayrıca g nin ve dolayısıyla g' türevinin univalentliği kullanılıp, her birinin kuvvet serisi temsilleri alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\text{Alan}E(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(re^{it} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n r^{-n}e^{-int}\right)\left(re^{-it} + \sum_{n=0}^{\infty}\bar{b}_n r^{-n}e^{int}\right)dt \\ &= r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} r^{-2n}|b_n|^2\end{aligned}$$

olur (Burada ikici eşitlik elde edilirken, e^{it} nin farklı kuvvetlerinin dikliği kullanıldı).

Öte yandan $\text{Alan}E(r) = \text{Alan}(\mathbb{D}\setminus g(\Delta)) \geq 0$ olduğu için, her bir $m > 0$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{m} r^{-2n}n|b_n|^2 \leq r^2, m = 1,2,\ldots$$

kısmi toplamı elde edilir. Şimdi $r \to 1^+$ alınırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$$

elde edilir ki, bu da aranan sonuçtur. □

Yukarıda verilen ispatta da görüldüğü üzere, Univalent fonksiyon teorisinde alan teoremi, belirli sınıflara ait fonksiyonların kuvvet serisi katsayıları tarafından doğrulanan bir eşitsizlik vermektedir. Bu anlamda teorem elde edilen sonucu itibarıyla değil de, ispatta alan kavramının kullanılması nedeniyle bu ismi almıştır.

Sonuç 3.1.2. Eğer $g(z) \in \sum$ ise bu durumda $|b_1| \leq 1$ dir. Bu eşitsizlikteki eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1}, |b_1| = 1 \tag{3.16}$$

şeklinde olmasıdır.

İspat. (3.1.10) Alan teoreminden $|b_1| \leq 1$ yazılabilir. Eğer $|b_1| = 1$ ise, bütün $n \geq 2$ ler için $b_n = 0$ elde ederiz. Bu durumda g fonksiyonu (3.16) de verilen forma sahip olmuş olur. Aslında biz $|b_1| = 1$ olmak üzere b_0 ve b_1 Taylor-Laurent katsayıları için $g \in \sum$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için, karekök dönüşümünün bazı seçimleri için $a_1 = \sqrt{b_1}$ ve $a_2 = 1/a_1$ alalım. Ayrıca $h_1(z) = a_1 z$ ve $h_2(z) = a_2 z - a_2 b_0$ dönüşümlerini tanımlayalım. h_1 ve h_2 döüşümlerinin her biri $\mathbb{C}$ ini bir aoutomorfizmasıdır. Bu durumda $f = h_2 ogoh_1$ dönüşümü Δ üzerinde tanımlanmış univalent bir fonksiyon olur (Bak, Teorem (3.1.3)). Bu durumda basit bir cebirsel hesaplamayla

$$\begin{aligned} f = h_2 ogoh_1 &= h_2(g(h_{1(z)})) = h_2(g(a_1 z)) \\ &= h_2\Big(a_1 z + b_0 + \frac{b_1}{a_1 z}\Big) \\ &= a_2\Big(a_1 z + b_0 + \frac{b_1}{a_1 z}\Big) - a_2 b_0 \\ &= a_1 a_2 z + \frac{a_2 b_1}{a_1 z}, a_2 = \frac{1}{a_1} \Rightarrow a_1 a_2 = 1 \\ &= z + \frac{b_1}{a_1^2 z}, a_1 = \sqrt{b_1} \Rightarrow a_1^2 = b_1 \\ &= z + \frac{1}{z} \text{ (Joukowsky fonksiyonu)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu aşamada gerekli olan cebirsel hesaplamalar yapılarak, elde edilen f dönüşümünün Δ da univalent ve $f(\Delta) = \mathbb{C} \diagdown [-2,2]$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Aynı zamanda $f(\infty) = \infty$ ve $f'(\infty) = 1$ olduğu da açıktır. $\square$

(3.1.10) Alan teoremi aslında $\sum$ sınıfı fonksiyonları içindir. Ancak bu teorem $\mathcal{S}$ sınıfı için Taylor açılımı katsayılarını tahmin etmeyede öncülük etmektedir. Bu yöndeki ilk varsayım daha öce de ifade edildiği gibi ünlü Bieberbach varsayımdır (1916). Formal olmayan bir ifadeyle Bieberbach varsayımı, her bir $n \geq 2$ olmak üzere $\mathcal{S}$ sınıfına ait herbir $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ fonksiyonların $a_2, a_3, \ldots$ katsayılarının $|a_n|$ maksimizasyon problemini çözmeye yöneliktir. Bu problemler işin doğası gereği iki türlü olabilir. Birincisi f fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfında değişiyorken her $n \geq 2$ için $|a_n|$ üzerinde bir mutlak sınır var mıdır? İkincisi de eğer $\mathcal{S}$ sınıfındaki f fonksiyonlarının $n \geq 2$ olmak üzere n. katsayıları sınırlı ise, $\mathcal{S}$ sınıfının bir f fonksiyonu var mıdır? ki onun n. katsayısı bu sınıra ulaşır mı? Beieberbach'ın ikinci katsayı a_2 ile ilgili varsayımı, genel anlamda a_n için ilk somut adım olarak kabul edilmektedir. Ayrıca Bieberbach varsayımı bu alanda yapılan birçok ileri çalışma için de temel olarak kabul edilmektedir. Daha da önemlisi bu varsayım, univalent fonksiyonlar teorisindeki standart fikirlerin ve tekniklerin ve de bu anlamda Koebe fonksiyonunun ekstremal bir fonksiyon olarak nasıl ortaya çıktığını da göstermesi açısından oldukça yararlı olmuştur. Başka bir ifadeyle Bieberbach varsayımının kendisi ve sonuçları univalent fonksiyon teorisinin anlaşılması açısından oldukça önemlidir. Günümüzde Bieberbach varsayımı Bieberbach teoremi olarak da bilinmektedir. Verilen bu motivasyon artırıcı bilgilerden sonra, Alman matematikçi Ludwig Georg Elias Moses Bieberbach (1882-1982) tarafından verilen ve Bieberbach varsayımı olarak bilinen varsayımının ikinci dereceden katsayı için ispatını verelim.

Teorem 3.1.11. (**Bieberbach Varsayımı-1916**) Eğer (3.6) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ de bir fonksiyon ise, bu duruda $|a_2| \leq 2$ dir. Eşitsizlik içerisindeki eşitlik durumu(yani $|a_2| = 2$) ancak ve ancak $f(z)$ fonksiyonu $k(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonun bir rotasyonu ise gerçeklesir.

İspat. $f \in \mathcal{S}$ dönüşümüne Bieberbach varsayımı ile yakından ilişkili olan pozitif değerlikli karekök dönüşümü uygulanırsa

$$h(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{a_2}{2}z^3 + \frac{4a_3 - a_2^2}{8}z^5 + \dots$$

elde edilir ve $h \in \mathcal{S}$ dir (Bak, Teorem(3.1.5). Şimdi $h(z)$ dönüşümünün inversi (tersi) alınır ve elde edilen dönüşüm $g(z)$ ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{1}{h(1/z)} = \frac{1}{\sqrt{f(1/z^2)}} &= \frac{1}{\frac{1}{z} + \frac{a_2}{2z^3} + \dots} \\ &= z\Big(\frac{1}{1 + \frac{a_2}{2z^2} + \dots}\Big) \\ &= z\left[1 - \left(\frac{1}{2}a_2 z^{-2} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2}a_2 z^{-2} + \dots\right)^2 - \dots\right] \\ &= z - \frac{a_2}{2}z^{-1} + \dots \end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edilir. Dikat edilirse elde edilen $g(z)$ fonksiyonu (3.15) formundadır. Dolayısıyla $g(z) \in \sum$ dır. (3.15) ile (3.17) nin aynı dereceli terimlerinin katsayıları karşılıklı olarak eşitlendiğinde $b_1 = -\dfrac{a_2}{2}$ olduğu görülecektir. Öte yandan Sonuç (3.1.2) den biliyoruz ki $\sum$ sınıfına ait olan her bir fonksiyon için $|b_1| \leq 1$ dir. Bu durumda kolaylıkla $|b_1| = |-a_2/2| \leq 1$ ilişkisi görülecektir. Dolayısıyla $|a_2| \leq 2$ elde edilir. İspatı tamamlamak için ekstremal $|a_2| = 2$ özelliğe sadece $k(z)$ Koebe fonksiyonun sahip olduğunu gösterelim.

Bunun için (3.17) de $|a_2| = 2$ alınırsa

$$g(z) = z - \frac{2}{2}z^{-1} + \cdots = z - \frac{1}{z} + \ldots \tag{3.18}$$

elde edilir ki burada $|b_1| = 1$ olduğu açıktır. Bu durumda yine Sonuç(3.1.2) nin ispatında da ifade edildiği üzere $n \geq 2$ için $|b_n| = 0$ olacaktır. Dolayısıyla (3.18) de elde edilen $g(z)$ fonksiyonunun, $|e^{i\theta}| = 1$ olduğu da kullanılırsa

$$g(z) = z - \frac{1}{z} = z - \frac{e^{i\theta}}{z} \tag{3.19}$$

şeklini alır. Bu da $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4 - 2e^{i\theta}z^2 + e^{2i\theta}}$ ye eşittir. Bu eşitlikte $\frac{1}{z^2} = w$ alınırsa

$$\begin{aligned} f(w) = \frac{w}{(1-e^{i\theta}w)^2} &= e^{-i\theta}\frac{e^{i\theta}w}{(1-e^{i\theta}w)^2} \\ &= e^{-i\theta}k(e^{i\theta}w) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ünlü Koebe fonksiyonun bir rotasyonu veya bir ailesidir. Bütün verilenler birleştirildiğinde teoremin ispatı tamamlanmıştır. $e^{-i\theta}k(e^{i\theta}w)$ fonksiyonu $k(z)$ fonksiyonunun açısal dönüşümü olarak da adlandırılır. Bu anlamda aşağıdaki tanım verilebilir. □

Tanım 3.1.4. α modülü 1 olan bir kompleks sayı olmak üzere analitik - kuvvet serisi olarak

$$k_\alpha(z) = \frac{z}{(1-\alpha z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{(n-1)\theta}z^n \in \mathcal{S}$$

şeklinde verilen fonksiyona Koebe fonksiyonunun rotasyonu denir.

Koebe fonksiyonun bu $|a_2| = 2$ ekstremal özelliği ile aşağıda verilecek olan Teorem (3.1.12) Bieberbach Varsayımı-de Branges Teoremi'nin tam da kalbindedir. Söz konusu bu varsayımın, $\mathcal{S}$ sınıfına ait her bir f fonksiyon için geçerli olduğu varsayımın neden olduğu doğal bir durumdur.Bu durum bu alanda çalışan bilim adamalarını 'Katsayı problemi' olarak da bilinen $f \in \mathcal{S}$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $|a_n| \leq n$ olduğu varsayımının doğruluğunu ispatlamaya yöneltti. Belki de bu alandaki hiçbir problem, katsayı problemi kadar bilim adamalarının ilgisinin çekmemiştir. 1984 yılında $|a_n| \leq n$ genel durumu Louis de Branges tarafından ispatlanıncaya kadar geçen 68 yılda bazı araştırmacılar tarafından $n = 2,3,4,5$ değerleri için ispatlanmıştır. Bu anlamda aşağıdaki tablo verilebilir.

Çizelge 3.1. Katsayı Probleminin İspatı

Sonuç	Bilim adamları ve tarih
$\lvert a_2\rvert \leq 2$	Bieberbach(1916)
$\lvert a_3\rvert \leq 3$	Loewner(1923)
$\lvert a_4\rvert \leq 4$	Garabedian ve Schiffer(1955)
$\lvert a_5\rvert \leq 5$	Pederson ve Schiffer (1972)
$\lvert a_n\rvert \leq n$	de Branges(1984)

Branges'in genel durumu ispatlamadan önce, $n = 6$ için $|a_6| \leq 6$ olduğu varsayımının da ispatlandığını bilmekte fayda vardır. Branges'in katsayı probleminin çözümüne ilişkin yaptığı katkıdan dolayı günümüzde $f \in \mathcal{S}$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $|a_n| \leq n$ olduğu varsayımı de Branges teoremi olarak da bilinmektedir. Fransız matematikçi Luis de Branges de Bourcia(1932-)'nın Bieberbach varsayımı ile ilgili kanıt uzun süre birçok matematikçi tarafından şüpheyle karşılanmıştır. Ancak matematikçilerin oluşturduğu bir ekip tarafından doğrulandıktan sonra kabul görmüştür. Bu dönemlerde $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonların Taylor katsayıları üzerindeki kesin sınırlar bilinse de aynı durum $\sum$ sınıfına ait fonksiyonlar için geçerli değildi. de Branges'in yaptığı katkı bu şüpheleri ortadan kaldırmıştır. Bu anlamda Bieberbach varsayımı $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonların geometrik özellikleri hakkında çok önemli bir sonuç anlamına gelirken, de Branges teoremi ise $\sum$ sınıfına ait fonksiyonların geometrik özellikleri hakkında çok önemli bir sonuç analmına gelir.

Teorem 3.1.12. (**Bieberbach Varsayımı-de Branges Teoremi**) Eğer (3.6) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ de bir fonksiyon ise, bu duruda $|a_n| \leq n$ dir. Kesin eşitsizlik durumu ancak f fonksiyonu $k(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonun bir rotasyonu olmadığı sürece geçerli olur.

İspat. Teoremde ileri sürülen hipotezlerin doğru olduklarını göstermek için kutupsal koordinatlarla işlem yapmak kolaylık sağlayacaktır. Bu anlamda $a_1 = 1$ ve $|z| < 1$ olmak üzere $z = re^{i\theta}$ alalım. Bu durumda f nin kutupsal koordinatlara bağlı kuvvet serisi

$$\begin{aligned} f(z) = f(re^{i\theta}) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n cos(n\theta) + i \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n sin(n\theta) \\ &= u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta}) \end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\Im f(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n sin(n\theta) \tag{3.20}$$

olduğu açıktır. Elde edilen (3.20) eşitliği $sin(n\theta)$ ile çarpılıp, 0 dan π ye kadar integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) sin(n\theta) d\theta &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} a_n r^n sin^2(n\theta) d\theta \\ &= a_n r^n \end{aligned} \tag{3.21}$$

bulunur. Öte yandan, Reel analizde $0 \leq \theta \leq \pi$ ve $n = 1, 2, \ldots$ için

$$|sin(n\theta)| \leq nsin\theta$$

olduğu tümevarım yöntemiyle kolayca ispat edilebilmektedir. Buna göre (3.21) ifadesi yeniden düzenlenirse,

$$|a_n r^n| \leq \frac{2n}{\pi}\int_0^{2\pi} |v(re^{i\theta})| sin\theta d\theta \tag{3.22}$$

olur. f univalent olduğundan $0 < r < 1$ ve $0 < \theta < \pi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 \neq f(re^{i\theta} - f(re^{-i\theta}) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) \\ &= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n sin(n\theta) \\ &= 2iv(re^{i\theta}) \end{aligned}$$

yani,

$$v(re^{i\theta}) \neq 0$$

dır. Öte yandan $v(re^{i\theta}) \neq 0$, θ nın sürekli bir fonksiyonu olduğundan $0 < \theta < \pi$ aralığında işaret değiştirmez. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} r = |a_1 r| &= \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) sin\theta d\theta \right| \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| v(re^{i\theta}) \right| sin\theta d\theta \end{aligned} \tag{3.23}$$

dir. Elde edilen (3.23) eşitliği (3.22) de yerine yazılırsa,

$$|a_n r^n| \leq nr$$

bulunur. Bu aşamada her iki tarafın $r \to 1$ durumunda limiti alınırsa istenen sonuç

$$\lim_{r \to 1} |a_n r^n| \leq \lim_{r \to 1} (nr)$$
$$|a_n| \leq n$$

elde edilir. Burada $r < 1$ keyfi sabit olduğu için, ispatı tamamlamak adına $r \to 1$ alınmıştır.

□

68 yıllık bir süreç içerisinde katsayı problemi ile ilgili olarak elde edilen sonuçlar sürekli olarak iyileştirilmiştir. Örneğin ilk zamanlar herhangi bir $f \in \mathcal{S}$ fonskiyonunu a_3 katsıyısının modülü üzerindeki tahmin $|a_3| \leq 16.63$ olarak kabul edilmiştir. Ancak elde edilen ilerlemelere bağlı olarak bu sonuç iyileştirlmiştir. Örnek olarak aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.1.1. Eğer $f \in \mathcal{S}$ ise bu durumda $|a_3| \leq 5$ dir.

Çözüm. Bu durumda

$$g(z) = \frac{1}{f(1/z)} = z - a_2 + \left(a_2^2 - a_3\right) z^{-1} + \ldots$$

fonskiyonu $\sum$ sınıfındadır (Bak, (3.15)). Bu durumda (3.1.10) Alan teoreminden $|b_1| = |a_2^2 - a_3| \leq 1$ dir. Dolayısıyla buradan $|a_3| \leq |a_2^2 - a_3| + |a_2|^2 \leq 1 + 4 = 5$ elde edilir. Ancak $|a_3| \leq 3$ olduğu 1923 yılında Çek matematikçi K. Lowner tarafından ispatlanmıştır. Aslında Katsayı problemi yani Bieberbach varsayımı üzerindeki ilerlemeler birkaç yönlü olmuştur:

(i) (Genel Durum)$f \in \mathcal{S}$ için $|a_n| \leq n, n = 2, 3, \ldots$

(ii) ($\mathcal{S}$ nin altsınıfları için) $|a_n| \leq n, n = 2, 3, \ldots$

(iii) (Yeterince büyük $\mathcal{C}$ için) $|a_n| \leq \mathcal{C}n, n = 2, 3, \ldots$

Buraya kadar verilen bilgilerden anlaşılıyor ki bir f fonksiyonun $\mathcal{S}$ sınıfına ait olması yani analitik, univalent ve normalize edilmiş olması $a_1 = 1$ olmak üzere $\{a_1 = 1, a_2, a_3 \ldots\}$ Taylor katsayıları dizisinin ne kadar hızlı büyüyebileceğini sınırlasa da herhangi bir belirli katsayı üzerinde başkaca bir sınırlama yoktur. Bilindiği üzere her bir polinom fonksiyon analitiktir ve katsayıları her hangi bir kompleks sayı olabilir. Analitik olması yukarıda verilen katsayı eşitsizliklerini sağladığını göstermeyebilir. Analitik olmanın yanında univalent olma gibi ilave şartlarında da gerekliliğ açıktır. Bu anlamda univalent olma Kompleks analizde Reel analizde olduğundan daha güçlü bir özellik olarak karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, reel eksen üzerinde $(-1, 1)$ aralğındaki tüm x ler için tanımlı bire-bir ve reel katsayılı bir $f(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonda $a_1 = 1$ olmak üzere $\{a_1, a_2, a_3 \ldots\}$ Taylor katsayıları için herhangi bir sınırlama yoktur. Örneğin $f(x) = x + a_3 x^3$ polinomu hem analitik hem de univalent olan bir polinom fonksiyondur. Ancak bu şartları sağlamasına rağmen f polinom fonksiyonu monoton artan bir fonsksiyon olduğu için a_3 katsayısı ile ilgili herhangi bir sınırlama getirilemez. Bu durumda doğal olarak Bieberbach varsayımının sadece bazı koşulları sağlayan kompleks değişkenli fonksiyonlar için geçerli olduğu sonucu çıkar. Reel değişkenli fonksiyonlarda bir karşılığı veya benzeri yoktur. Ancak bazı durumlarda kompleks değişkenli fonksiyonların Taylor katsayıları da hızlı bir şekilde büyüyebilir. Bu durumda tanım kümesi $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ yerine tümleyen $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ alınabilir. Bu anlamda genel bir fikir vermesi amacıyla aşağıdaki özellik verilebilir.

Özellik 3.1.2. Derecesi n olan bir $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ polinom fonksiyonu alınsın. Eğer f fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de univalent ise, bu durumda $|a_n| < 1/n$ dir.

İspat. f fonksiyonun f' türevi hesaplanırsa

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \Rightarrow f'(z) = 1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$$
$$= n a_n \left(\frac{1}{n a_n} + \cdots + z^{n-1} \right) \qquad (3.24)$$

elde edilir. Elde edilen parantez içerisindeki polinomun derecesi $n-1$ olduğuna göre Teorem (2.1.25) Cebirin temel teoreminden $c_1, \ldots, c_{n-1}$ kompleks köke sahip olur. Bu durumda (3.24) türevi çarpanlarına ayrılarak

$$f'(z) = na_n(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_{n-1})$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Öte yandan f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de univalent oduğundan Teorem (3.1.1) univalent olmanın işlemsel tanımından $\forall z \in \mathbb{D}$ için $f'(z) \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda bizim elde ettiğimiz $c_1, \ldots, c_{n-1}$ kompleks kökler $\mathbb{D}$ nin içerisinde değil dışında olmalıdır. Yani her bir j için $|c_j| \geq 1$ dir. Ayrıca $f \in \mathcal{S}$ olduğundan normalleştirme şartı gereği ve ilave olarak $|c_j| \geq 1$ olduğuna göre

$$\begin{aligned} f'(0) = 1 \Rightarrow |na_n| \leq 1 = |f'(0)| &= |na_n||c_1|\ldots|c_{n-1}| \\ \Rightarrow |na_n| &\leq 1 \\ \Rightarrow |a_n| &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da aranan sonuçtur. □

Ancak teoremde verilen hipotezin tersi doğru olmayabilir. Yani $|a_n| < 1/n$ şartının sağlanması f fonksiyonunun univalent olmasını garanti etmez. Bu durumu gösteren bir örnek vermemiz yeterli olacaktır. Bu anlamda $f(z) = z + \frac{3}{5}z^4$ fonksiyonunu alalım. Dikkat edilirse fonksiyonumuzda $a_4 = \frac{3}{5}$ ve $n = 4$ olup $|a_n| < 1/n$ şartı sağlanmaktadır. Ancak f fonksiyonu univalent değildir. Bu durum $z_1 = \frac{i}{2}$ ve $z_1 = \frac{-i}{2}$ alınarak $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) = f(z_2)$ olduğu gözlemlenerek doğrulanabilir.

Dikkat edilirse herhangi bir analitik dönüşüm aynı zamanda açık bir dönüşümdür (Bak, Teorem (2.1.28)). Yani, bir analitik dönüşüm altında herhangi bir açık kümenin görüntüsü açıktır. Özellikle bu ifade eder ki her bir $f \in \mathcal{S}$ için $f(\mathbb{D})$ görüntüsü, orijin merkezli ve pozitif yarıçaplı bazı ortak diskleri ihtiva eder. 1907 yılında, Alman matematikçi Paul Koebe (1882-1945), $\mathcal{S}$ sınıfına ait her bir dönüşümün $D(0,\rho)$ açık diskini ihtiva edecek şekilde bir $\rho > 0$ sabitini buldu. Koebe $0 < \rho \leq 1/4$ olduğunu ileri sürdü. Bu açık sebepten dolayı aşağıdaki teorem Koebe 1/4 teoremi olarak bilinir. Unutulmamalıdır ki bu teorem univalent fonksiyonlar için çok önemli sonuçlar üreten temel bir teoremdir.

Teorem 3.1.13. (**Koebe 1/4 Teoremi**) Her bir $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonunun $f(\mathbb{D})$ görüntüsü $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/4\}$ diskini kapsar(yani, $f(\mathbb{D}) \supseteq f(D(0,1/4)) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/4\}$).

Sezgisel olarak, $f(\mathbb{D})$ görüntü bölgesi oririjin merkezli ve $1/4$ yarıçaplı açık birim diski kapsar. Başka bir ifadeyle $f(\mathbb{D})$ görüntüsünün noktalarının $w = f(0) = 0$ orijine olan uzaklığı $1/4$ daha küçük olamaz.$1/4$ sabiti kesindir ve geliştirilemez.

İspat. $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonunu alalım. Teorem (3.1.11) Biberbach varsayım teoreminden biz biliyoruz ki $|a_2| \leq 2$ dir. Kabul edelim ki $w \notin f(\mathbb{D})$ olsun. Bu durumda Teorem(3.1.4) de verilen (v) seçeneğindeki alınmayan değer dönüşümünden

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{w}\right)z^2 + \cdots \in \mathcal{S} \tag{3.25}$$

elde ederiz. (3.25) den yine Bieberbach varsayımı ile

$$\left|a_2 + \frac{1}{w}\right| \leq 2 \tag{3.26}$$

yazılır. Elde edilen (3.26) eşitsizliği ile $|a_2| \leq 2$ varsayımı birleştirilirse

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{1}{w} + a_2 - a_2\right| \leq \left|\frac{1}{w} + a_2\right| + |a_2| \leq 2 + 2$$

$$\left|\frac{1}{w}\right| \leq 4 \text{ veya } |w| \geq \frac{1}{4}$$

sunucuna ulaşılır. Diğer bir ifadeyle, $f \in \mathcal{S}$ nin alınmayan değeri orijin merkezli $1/4$ yarıçaplı diskin dışındadır. □

Yukarıda verilen Teorem (3.1.13) Koebe 1/4 teoremi,anlaşılacağı üzere $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonları ile ilgilenmektedir. Yani teoremde verilen hipotezin doğru olabilmesi için f fonksiyonun açok birim disk $\mathbb{D}$ analitik univalent olma ve de (3.1) normalizasyon şartlarını sağlaması gerekir. Bu şartlar altında teorem $f(\mathbb{D})$ görüntüsünün orijin merkezli (dikkat, $f(0) = 0$) ve $1/4$ yarıçaplı diski ihtiva ettiğini ve sabit olan $1/4$ değerinin de mümkün olan en iyi değer olduğunu ifade etmektedir. Teorem (3.1.13) Koebe 1/4 teoreminin varsayımı altında aslında bir anlamda bir $w \notin f(\mathbb{D})$ fonksiyonu için $|w| = 1/4$ ekstremal durumunun da olabileceği ifade edilmektedir. Teoremin $k(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonuna ve onun Tanım (3.1.4) ile verilen k_α rotasyonlarına uygulanmasıyla sabit yarıçapın $1/4$ olduğu görülebilir. Yani söz konusu ekstremal özellik sadece Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir. Teorem (3.1.13)Koebe 1/4 teoreminde verilen $f(\mathbb{D}) \supseteq \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/4\}$ ifadesindeki $\supseteq$ sembolünde ki eşitlik bu ekstremal durumu karşılamaktadır. Ayrıca Teorem (3.1.13) Koebe 1/4 teoremi aynı zamanda her bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun

$$f^{-1}(f(z)) = z, z \in \mathbb{D}$$

ve

$$f^{-1}f((w)) = w, |w| < \rho, \rho(f) \geq 1/4$$

şartlarını sağlayan ve $f^{-1}(w) = w - a_2w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 + \dots$ ile verilen bir f^{-1} ters fonksiyonuna sahip olduğunuda ifade etmektedir. Bu durumda doğal olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.1.5. Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna bir U bölgesinde bi-univalent denir, eğer hem f ve hem de f^{-1} ters fonksiyonu U da univalent ise.

Birim disk $\mathbb{D}$ de bi-univalent olan fonksiyonların sınıfı genel olarak σ ile gösterilir. σ sınıf ilk olarak 1967 yılında Lewin tarafında tanıtıldı ve (3.6) formuna sahi bi-univalent $f \in \sigma$ fonksiyonlarının ikinci katasyılarının $|a_2| \leq 1.51$ eşitsizliğini sağladığını ispatladı. Daha sonra Bernard ve Clunie, Lewin'in varsayımını $|a_2| \leq \sqrt{2}$ olarak geliştirdiler. Devamında birçok araştırmacı bu alanda çalışmalar yaptılarve ve σ sınıfına ait fonksiyonlar için katsayı tahmini yaptılar. Bu anlamda Netanyahu ve arkadaşları $\max|a_2| = 4/3$ olduğunu isapatladılar. $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$ bölgesinde tanımlı olup (3.15) formuna sahip olan analitik univalent fonksiyonları $\sum$ sınıfına ait fonkksiyonlar için katsayı tahminleri de bu alanda yapılan çalışmalarda oldukça geniş yer almıştır. Schiffer, $g \in \sum$ fonksiyonları için $|b_n| \leq 2/3$ varsayımında bulunmuş ve ispatlamıştır. P. Duren, $1 \leq k < r/2$ için $b_k = 0$ olmak üzere $|b_n| \leq 2/(n+1)$ eşitsizliğini türetmiştir [26]. Öte yandan (3.15) ile verilen $g \in \sum$ fonksiyonu univalent olmak üzere Δ bölgesinde bi-univalent olan fonksiyonlar konusu ilk olarak Suzeini ve arkadaşları tarafından çalışıldı ve tanıtıldı. Tanım (3.1.5) de verildiği gibi bir $g \in \sum$ fonksiyonuna bi-univalent denir eğer $g^{-1} \in \sum$ ise. Bu fonksiyonların sınıf ise $\sum_{\mathcal{B}}$ ile verilebilir. $\frac{z}{1-z}, -\log(1-z)$ ve $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonları $\sum_{\mathcal{B}}$ sınıfının birere üyesi iken $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Keoebe fonksiyonu $\sum_{\mathcal{B}}$ sınıfının bir üyesi değildir. $z - \frac{1}{2}z^2$ ve $\frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonları ise $\mathcal{S}$ sınıfının birer üyesi iken $\sum_{\mathcal{B}}$ sınıfının birer üyesi değildirler.

Teorem 3.1.14. Kabul edelim ki $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ ve $g(z) = z + b_2z^2 + \dots$ fonksiyonları birim disk $\mathbb{D}$ de analitik olup $\forall z \in \mathbb{D}$ için $\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1$ olsun. Eğer g fonksiyonu $\mathbb{D}$ de univalent ise, bu şartlar altında f fonksiyonu $|z| < \frac{1}{3}$ alt diskinde univalent ve starliketır.

Teorem (3.1.14)'in hipotezinde belirtildiği üzere bazı dönüşümlerin genel anlamda verilen katsayı koşullarına veya geometrik karakterizasyon şartlarına rağmen birim disk $\mathbb{D}$ de ki univalentliği koruyamadığı anlaşılmaktadır. Bu tür dönüşümlerin herhangi bir altdisk $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\} \subset \mathbb{D}$ de univalentliği koruyup koruyamayacağını sormak veya düşünmek çok doğaldır.Bu tür problemler univalent fonksiyon teorisinde yarıçap problemleri olarak bilinir. Bu anlamda en geniş altdisk $\mathbb{D}_r$ nin r yarıçapının bulunması, bu bölgede tanımlı olan analitik fonksiyonun univalentliğini garanti eder. Dolayısıyla r univalentlik yarıçapı olarak bilinir. Bu durum aynı zamanda, bir $f \in \mathcal{A}$ nın $n \geq 2$, $|a_n| \leq n$ şartını sağlaması için $r \in (0,1)$ olmak üzere r nin en küçük üst sınırının bulunması anlamına da gelir. Ancak bu durumun sadece univalent olma ile sınırlı olmadığı yine Teorem (3.1.14)'in hipotezinden anlaşılmaktadır. Benzer durum diğer geometrik karekterizasyonlar için de geçerlidir. Örneğin $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ yi $\mathbb{C} - (-\infty, -1/4]$ bölgesine eşler ki, bu bölge starlike olup konveks değildir (Bak, Şekil (3.2)). Ancak iyi bilinir ki $r \leq 2 - \sqrt{3}$ için $k(z)$ Koebe fonksiyonu $\mathbb{D}_r$ yi konveks bir bölgeye eşler. Gavrilov, (3.6) formuna sahip $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun $n \geq 2$ olmak üzere $|a_n| \leq n$ şartını sağlayabilmesi için univalentlik yarıçapının, r ye bağlı olan $2(1-r)^3 - (1+r) = 0$ üçüncü derece denkleminin pozitif reel kökü olan $r \approx 0.164$ olduğunu ispatladı.Elde edilen bu sonuç, örneğin $f(z) = 2z - \frac{z}{(1-z)^2}$ için kesindir. Gavrilov bir başka çalışmasında univalentlik yarıçapının $M > 0$ ve $n \geq 2$ olmak üzere bir başka eşitsizlik olarak $|a_n| \leq M$ eşitsizliğini sağladığını ispatladı [30]. Yamashita ise, Gavrilov tarafından elde edilen univalentlik yarıçapının, $f \in \mathcal{A}$ olup (3.6) formuna sahip olan fonksiyonların yıldızıl olma (starlikeness) yarıçapı ile aynı olduğunu gösterdi. Yamashita, ayrıca $n \geq 2$ olmak üzere $|a_n| \leq n$(veya $|a_n| \leq M$) şartını sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun konevekslik yarıçapının ise r ye bağlı olan $2(1-r)^4 - (1+4r+r^2) = 0$ (veya hem r ye hem de M ye bağlı olan $(M+1)(1-r)^3 - M(1+r) = 0$) denkleminin $r \approx 0.90$ pozitif reel kökü olduğunu ispatladı [31].

Teorem (3.1.13) Koebe 1/4 teoreminin ispatı bize gösterdi ki, Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları $|w| < 1/4$ olmak üzere bir w değerini atlayan tek fonksiyonlardır. Böylece $\mathcal{S}$ içerisindeki başka bir fonksiyon daha büyük bir diski örtebilir. Öte yandan bir $f \in \mathcal{S}$

fonksiyonu altında $\mathbb{D}$ nin görüntü kümesindeki şekiller, $f'(z)$ türevindeki değişime göre bozulmaya uğrayabilirler(büyüme veya büzülme). Örneğin $|f'(z)|$ modülündeki hızlı değişmeler, aynı uzunluktaki yakın eğrilerin çok farklı uzunluktaki eğrilere eşlenmesine veya $\arg(f'(z))$ argümentindeki hızlı değişmeler ise düz doğru parçalarının keskin kıvrımları olan eğrilere eşlenmesine sebep olabilir. Bu anlamda $|a_2| \leq 2$ Bieberbach varsayımı eşitsizliğinin başka oldukça önemli sonuçları da vardır. Bu önemli sonuçlardan biri de Keobe bozulma teorimi olarak bilinir. Koebe bozulma teoremi, f dönüşümü $\mathcal{S}$ sınıfında bağımsız olarak değişirken $|f'(z)|$ modülünün alt ve üst sınırlarını garanti eder.Yani $|a_2| \leq 2$ Bieberbach varsayımının $\mathcal{S}$ sınıfındaki dönüşümden bağımsız olduğunu ifade eder. Aşağıdıki teorem, Keobe distortion teoremi ve onunla ilgili olan teoremler ve sonuçlar için temel oluşturur.

Teorem 3.1.15. $|z| = r < 1$ olmak üzere her bir $f \in \mathcal{S}$ için

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

dir. Ayrıca, her bir $0 \neq z \in \mathbb{D}$ için eşitsizlikteki eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun $k(z)$ Koebe fonksiyonu veya onun uygun bir rotasyonu (Bak, Tanım (3.1.4)) olmasıdır.

İspat. $f \in \mathcal{S}$ ve $z \in \mathbb{D}$ verildiğinde Teorem (3.1.4) (iv) de verilen disk otomorfizmasından

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{f\left(\frac{w+z}{1+w\bar{z}}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} \\ &= w + \frac{1}{2}\left((1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right)w^2 + \dots \end{aligned} \tag{3.27}$$

dönüşümü oluşturulabilir. $f \in \mathcal{S}$ olduğu için Teorem (3.1.11) (Bieberbac Varsayımı) den yukarıda verilen (3.27) açılımındaki ikinci terim w^2 nin katsayısının mutlak değeri 2 den küçük veya eşit olmalıdır. Yani,

$$\left| \frac{1}{2}\left((1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right) \right| \leq 2$$

veya

$$\left| \left((1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right) \right| \leq 4 \tag{3.28}$$

elde edilir. Elde edilen (3.28) eşitliğinin her iki tarafı $\dfrac{|z|}{(1-|z|^2)}$ ile çarpılır ve $|z| = |\bar{z}| = r$ olduğu da kullanılırsa

$$\left|\left((1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right)\right| \leq 4 \Rightarrow \frac{|z|}{(1-|z|^2)}\left|\left((1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right)\right| \leq \frac{4|z|}{(1-|z|^2)}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{|z|f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|\bar{z}}{1-|z|^2}\right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

olur. Bu da arzu edilen sonuçtur. Bu eşitsizliği ortaya koyduktan sonra Koebe Distortion Teoreminin ifade ve ispat edebiliriz □

Teorem 3.1.16. (**Koebe Distortion (Bozulma) Teoremi**) $|z| = r < 1$ olmak üzere her bir $f \in \mathcal{S}$ için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

dir. Ayrıca her bir $0 \neq z \in \mathbb{D}$ için eşitsizlikteki eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun $k(z)$ Koebe fonksiyonu veya onun uygun bir rotasyonu (Bak, Tanım (3.1.4)) olmasıdır.

İspat. $0 < u < 1$ olmak üzere, birim disk $\mathbb{D}$ de $\varphi(z) = f\left(\dfrac{z+u}{1+z\bar{u}}\right)$ dönşümünü tanımlansın. Öncelikle tanımlanan $\varphi(z)$ dönüşümünün univalent olduğu gösterilmelidir. Bunun için $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ ve $\varphi(z_1) - \varphi(z_2) \neq 0$ iken $z_1 - z_2 \neq 0$ olduğunu göstermek gerekir.

$$\varphi(z_1) - \varphi(z_2) \neq 0 \Rightarrow f\left(\frac{z_1+u}{1+z_1\bar{u}}\right) - f\left(\frac{z_2+u}{1+z_2\bar{u}}\right) \neq 0$$
$$\Rightarrow \frac{z_1+u}{1+z_1\bar{u}} - \frac{z_2+u}{1+z_2\bar{u}} \neq 0$$
$$\Rightarrow (z_1-z_2)(1-u\bar{u}) \neq 0 \tag{3.29}$$

dir. $0 < u < 1$ olarak kabul edildiğinden $1 - u\bar{u} \neq 0$ olduğu açıktır. Bu durumda (3.29) da $z_1 - z_2 \neq 0$ olmalıdır. Bu da bize $\varphi(z)$ nin univalent olduğunu verir.

Yine Teorem (3.1.4) (iv) de verilen disk otomorfizmasından $|u| < 1$ ve $\varphi(z) \in \mathcal{S}$ olmak üzere

$$F(z) = \frac{\varphi(z) - f(u)}{f'(u)(1-|u|^2)} \tag{3.30}$$

olarak tanımlanabilen dönüşümün $\mathcal{S}$ sınıfının bir elemanı olduğunu biliyoruz (Bak, Teorem (3.1.4), ispat (iv)). Bu durumda $F(0) = F'(0) - 1 = 0$ normalleştirme şartları da doğal olarak sağlandığına göre (3.30) ile verilen $F(z)$ dönüşümü

$$\begin{aligned} F(z) &= F(0) + \frac{F'(0)}{1!}z + \frac{F''(0)}{2!}z^2 + \ldots, F(0) = 0, F'(0) = 1 \\ &= z + \frac{1}{2!}F''(0)z^2 + \ldots \end{aligned} \tag{3.31}$$

şeklinde verilen bir Taylor serisine sahip olur. Bu durumda Teorem (3.1.11) (Bieberbac Varsayımı) ye göre $|a_2| \leq 2$ olmalıdır. Bu durumda yapılması gereken öncelikle a_2 katsayısını kullanarak $F''(0)$ yi bulmaktır. Elde edilen (3.31) den $a_2 = \dfrac{F''(0)}{2!}$ olduğu açıktır. Bu durumda $F''(0)$ yi bulmak için yapılması gereken cebirsel işlemlerin detayı şu şekilde olur:

$$\begin{aligned} F(z) = \frac{\varphi(z) - f(u)}{f'(u)(1-|u|^2)} &\Rightarrow F'(z) = \frac{\varphi'(z)}{f'(u)(1-|u|^2)} \\ &\Rightarrow F''(z) = \frac{\varphi''(z)}{f'(u)(1-|u|^2)}, z = 0 \\ &\Rightarrow F''(0) = \frac{\varphi''(0)}{f'(u)(1-|u|^2)} \end{aligned} \tag{3.32}$$

Şimdi bu aşamada yapılması gereken $\varphi''(0)$ değerini bulmak ve (3.32) de yerine yazmaktır.

$$\begin{aligned} \varphi(z) = f\left(\frac{z+u}{1+z\bar{u}}\right) &\Rightarrow \varphi'(z) = \frac{1-u\bar{u}}{(1+z\bar{u})^2} f'\left(\frac{z+u}{1+z\bar{u}}\right) \\ &\Rightarrow \varphi''(z) = \frac{(1-u\bar{u})^2}{(1+z\bar{u})^4} f''\left(\frac{z+u}{1+z\bar{u}}\right), z = 0 \\ &\Rightarrow \varphi''(0) = \frac{((1-u^2)^2}{(1)^4} f''\left(\frac{u}{1}\right) \\ &\Rightarrow \varphi''(0) = \left(1-|u|^2\right)^2 f''(u) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu sonuç (3.32) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} F''(0) = \frac{\varphi''(0)}{f'(u)(1-|u|^2)} &= \frac{\left(1-|u|^2\right)^2 f''(u)}{f'(u)(1-|u|^2)} \\ &= \frac{\left(1-|u|^2\right) f''(u)}{f'(u)} \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre,

$$|a_2| = \left|\frac{F''(0)}{2!}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\left(1-|u|^2\right)f''(u)}{f'(u)} - 2\bar{u}\right| \leq 2$$
$$\left|\frac{\left(1-|u|^2\right)f''(u)}{f'(u)} - 2\bar{u}\right| \leq 4 \tag{3.33}$$

bulunur. (3.33) de $u = z$ alınırsa,

$$\left|\frac{\left(1-|z|^2\right)f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right| \leq 4 \tag{3.34}$$

elde edilir. Elde edilen bu son (3.34) eşitliğinin her iki yanı $\frac{|z|}{1-|z|^2}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\left(1-|z|^2\right)f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right| \leq 4 &\Rightarrow \frac{|z|}{(1-|z|^2)}\left|\frac{\left(1-|z|^2\right)f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right| \leq \frac{|z|}{(1-|z|^2)}4 \\
&\Rightarrow \left|\frac{|z|f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\bar{z}|z|}{(1-|z|^2)}\right| \leq \frac{4|z|}{(1-|z|^2)}, |z| = r, z\bar{z} = r^2 \\
&\Rightarrow \left|\frac{rf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{(1-r^2)}\right| \leq \frac{4r}{(1-r^2)} \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

şekline dönüşür. Bu aşamda (3.35) eşitsizliğinin her iki tarafının reel kısımları düşünülürse

$$\begin{aligned}
\left|\frac{rf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{(1-r^2)}\right| \leq \frac{4r}{(1-r^2)} &\Rightarrow \Re\left\{\left|\frac{rf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{(1-r^2)}\right|\right\} \leq \Re\left\{\frac{4r}{(1-r^2)}\right\} \\
&\Rightarrow \left|\Re\left(\frac{rf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right)\right| \leq \frac{4r}{1-r^2} \\
&\Rightarrow \left|\Re\left(\frac{rf''(z)}{f'(z)}\right) - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{4r}{1-r^2} \\
&\Rightarrow -\frac{4r}{1-r^2} \leq r\Re\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) - \frac{2r^2}{1-r^2} \leq \frac{4r}{1-r^2} \\
&\Rightarrow \frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq r\Re\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2} \\
&\Rightarrow \frac{2r-4}{1-r^2} \leq \Re\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \leq \frac{2r+4}{1-r^2} \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

olur. İşlem kolaylığı sağlamak amacıyla $z = re^{i\theta}$ olmak üzere $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ alınabilir. Bu durumda,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}$$
$$\Rightarrow f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\frac{f''(z)}{f'(z)} &= \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + i\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}}{\dfrac{\partial u}{\partial r} + i\dfrac{\partial v}{\partial r}} = \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + i\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}}{\dfrac{\partial u}{\partial r} + i\dfrac{\partial v}{\partial r}}\,\frac{\dfrac{\partial u}{\partial r} - i\dfrac{\partial v}{\partial r}}{\dfrac{\partial u}{\partial r} - i\dfrac{\partial v}{\partial r}} \\ &= \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\dfrac{\partial u}{\partial r} - i\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\dfrac{\partial v}{\partial r} + i\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}\dfrac{\partial v}{\partial r}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)^2} \\ &= \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}\dfrac{\partial v}{\partial r}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)^2}\end{aligned} \tag{3.37}$$

bulunur. Elde edilen (3.37) eşitliğinin her iki tarafının reel kısımları düşünülürse

$$\Re\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\log\left(\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2\right)^{1/2} \tag{3.38}$$

dir. Öte yandan

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r} \Rightarrow |f'(z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2} \tag{3.39}$$

dir. Elde edilen (3.39) sonucu (3.38) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\Re\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|$$

olur. Bu ifade de (3.36) eşitsizliğinde yerine yazılır ve 0 dan r ye integrali alınırsa

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \Re\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \leq \frac{2r+4}{1-r^2} \Rightarrow \frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^r \frac{2r-4}{1-r^2}dr \leq \int_0^r \log|f'(z)|dr \leq \frac{2r+4}{1-r^2} \leq \int_0^r \frac{2r+4}{1-r^2}dr$$
$$\Rightarrow \log(1-r) - 3\log(1+r) \leq \log|f'(z)| \leq \log(1+r) - 3\log(1-r)$$
$$\Rightarrow \log\frac{(1-r)}{(1+r)^3} \leq \log|f'(z)| \leq \log\frac{(1+r)}{(1+r)^3}$$
$$\Rightarrow \frac{(1-r)}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{(1+r)}{(1+r)^3}$$

elde edilir. Bu da teoremde ifade edilen eşitsizliktir. Teorem (3.1.15) de verilen eşitsizlikte, işlem kolaylığı sağlaması açısından z yerine $re^{i\theta}$ değişken dönüşümü yapılarak direkt bir hesaplamayla aynı sonuç elde edilebilir. □

Şimdi (3.1.16) Koebe Distortion teoreminin direkt bir sonucu olan Growth teoremi verilebilir.

Teorem 3.1.17. **(Growth Teoremi**) $|z| = r < 1$ olmak üzere her bir $f \in \mathcal{S}$ için

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

dir. Ayrıca her bir $0 \neq z \in \mathbb{D}$ için eşitsizlikteki eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun $k(z)$ Koebe fonksiyonu veya onun uygun bir rotasyonu (Bak, Tanım (3.1.4)) olmasıdır.

İspat. Bu teoremin ispatında Teorem (3.1.16) Koebe Distortion (Bozulma) Teoremi ve Teorem (3.1.13) Koebe 1/4 teoremi birlikte kullanılır. Distortion (Bozulma) teoreminde olduğu gibi $|f'(z)|$ üzerindeki bir üst sınır $|f(z)|$ üzerinde de bir üst sınırı verir. Yani $f \in \mathcal{S}$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ olarak seçilirse,

$$f(z) = \int_0^r f'(\rho e^{i\theta})e^{i\theta}d\rho, 0 \leq \rho \leq 1$$

olur. Bu durumda, Teorem(3.1.16) Koebe Distortion(Bozulma) Teoremi uygulanırsa,

$$f(z) = \int_0^r f'(\rho e^{i\theta})e^{i\theta}d\rho \Rightarrow |f(z)| \leq \left|\int_0^r f'(\rho e^{i\theta})e^{i\theta}d\rho\right| \leq \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}d\rho, |e^{i\theta}| = 1$$
$$\Rightarrow |f(z)| \leq \int_0^r \left|f'(\rho e^{i\theta})e^{i\theta}\right|d\rho \leq \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}d\rho$$
$$\Rightarrow |f(z)| \leq \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}d\rho = \frac{r}{(1-r)^2}$$
$$\Rightarrow |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \qquad (3.40)$$

elde edilir. Görüldüğü üzere (3.40) eşitsizliği (3.1.17) Growth teoreminde verilen eşitsizliğin sağ tarafıdır. Şimdi de birinci kısmı, yani

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)|$$

olduğu gösterlebilir. Ancak ikinci kısım için, $|f'(z)|$ üzerindeki bir alt sınır $|f(z)|$ üzerinde bir alt sınır vermez. Bu olumsuz durumu aşmak için keyfi bir $z \in \mathbb{D}$ için aşağıda verilen iki durumun düşünülmesi yeterli olacaktır.

(i) $|f(z)| \geq 1/4$
(ii) $|f(z)| < 1/4$

$(i) \Rightarrow$ Bu durumda $0 < r < 1$ için $\dfrac{r}{(1+r)^2} \leq \dfrac{1}{4}$ olduğundan açıktır ki

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)|$$

dir.

$(ii) \Rightarrow$ Bu durumda Teorem (3.1.13) Koebe 1/4 teoremi, $0 \leq r < 1$ için, orijini $f(z)$ ye bağlayan doğru parçasının tamamen $f(\mathbb{D})$ görüntüsünde bulunduğunu garanti eder. f bire-bir olduğundan bu doğru parçasının orijinal hali $\mathbb{D}$ de bulunur ve orijini z ye bağlayan basit düz bir eğridir. Bu eğri γ ile gösterilebilir. Buna göre,

$$w = f(z) = \int_{\gamma} f'(w)dw$$

olur. γ nın tanımından, üzerindeki herhangi bir w noktası için, $f'(w)dw$ ifadesi ile z aynı argümente sahiptir. Böylece,

$$\begin{aligned} w = f(z) = \int_{\gamma} f'(w)dw &\Rightarrow |f(z)| = \Big|\int_{\gamma} f'(w)dw\Big| \\ &\Rightarrow |f(z)| = \int_{\gamma} \Big|f'(w)dw\Big| \\ &\Rightarrow |f(z)| = \int_{\gamma} \Big|f'(w)\Big||dw| \geq \int_0^r \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} d\rho \\ &\Rightarrow |f(z)| \geq \frac{r}{(1-r)^2} \end{aligned} \tag{3.41}$$

bulunur. Dolyısıyla (3.40) ve (3.41) eşitsizlikleri birleştirilirse

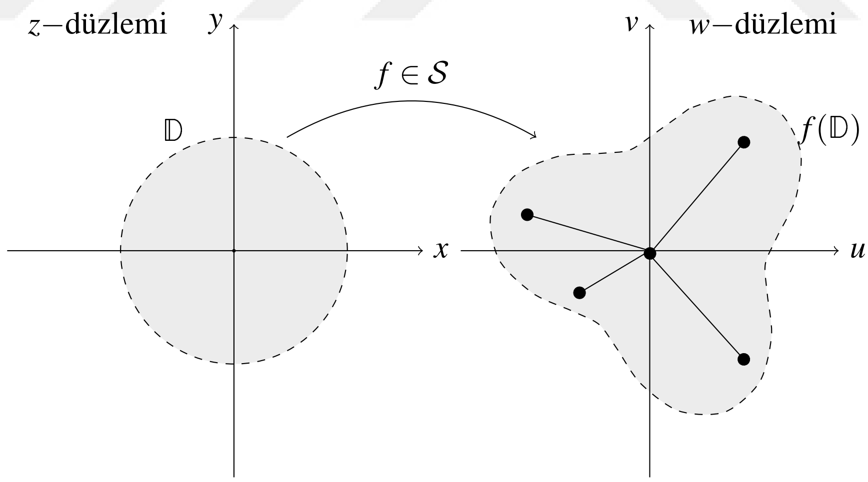
$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

elde edilmiştir. Bu da teoremin ispatını bitirir. $\square$

$\mathcal{S}$ sınıfının iyi bilinen başka bazı altsınıfları da vardır. Bu sınıflar sırasıyla starlike(yıldızıl), konveks ve konvekse yakın fonksiyonların oluşturduğu sınıflardır. Bu altsınıflara ait olan fonksiyonlar temelde geometrik düşünceyle tanımlanırlar ve yorumlanırlar. Ancak analitik fonksiyonların sınıflandırılmasında oldukça yararlı olan bu sınıflar analitik olarak da karakterize edilebilirler.

3.2. Starlike (Yıldızıl) Fonksiyonlar

Tanım 3.2.1. f fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına ait herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu altında $\mathbb{D}$ birim diskin $f(\mathbb{D})$ görüntüsü orijine göre starlike bir bölge (Bak, Tanım (2.1.16)) ise, f fonksiyonuna bir starlike fonksiyon denir.



Şekil 3.6. Starlike (Yıldızıl) Fonksiyon.

Starlike fonksiyon kavramı ilk olarak 1915 yılında, ağırlıklı olarak Topoloji alanında çalışmalar yapan Amerikalı matematikçi James Waddel Alexander (1888-1971) tarafından tanıtıldı [32]. Alexander, Annals of Mathematics'de de yayımlanan "Birim diski basit bağlantılı bölgelere eşleyen fonksiyonlar" adlı çalışmasında Univalent fonksiyonların birkaç sınıfını geliştirmiş ve Taylor katsayılarını ve sıfırları ve kritik noktaların konumunu da kullanarak univalentliği garanti eden bazı analitik yeterlilik şartları da geliştirmiştir. Bu şartların Koebe'nin ortaya koyduğu her bir $z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ olmak üzere $f(z_1) - f(z_2 \neq 0$ şartı veya eşdeğer olarak

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{(z_1 - z_2)} \neq 0$$

univalentlik şartından daha kolay uygulanabilir olduğu ve sonuç olarak Univalent fonksiyon teoerisinde dolayısıyla da Geometrik fonksiyon teorisinde yeni araştırma alanları açtığı kabul edilmektedir. 1915 yılında yaptığı bu çalışma ile Alexander doktora dercesi almıştır.

Bir starlike fonksiyon öğle bir fonksiyondur ki birim diski orjine göre starlike olan bir bölge üzerine konformal olarak eşler. Starlike fonksiyonların sınıfı genel olarak $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir. Bu sınıf

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \in \mathcal{S} \text{ ve } f(\mathbb{D}) \text{ starlik(yıldızıl) bölge} \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Aşağıda verilen teorem starlike fonksiyonlar için bir analitik açıklama verir.

Teorem 3.2.1. (**Sratlike Fonksiyon Olmanın İşlemsel Tanımı**) Bir $f \in \mathcal{A}$ alalım. Bu durumda $f \in \mathcal{S}^*$ olması için gerek ve yeter şart

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, (z \in \mathbb{D}) \text{ (Alexander,1915)}$$

olmasıdır.

İspat. $'' \Rightarrow ''$ İlk olarak kabul edelim ki $f \in \mathcal{S}^*$ dir. Bu durumda iddiamız f fonksiyonunun her bir $|z| = \rho < 1$ alt diskin bir starlike bölge üzerine eşlediğidir. Buna eşit bir iddia odur ki $g(z) = f(\rho z)$ fonksiyonun birim disk $\mathbb{D}$ de starliketır. Diğer bir ifadeyle, göstermeliyiz ki seçilen her bir $t \in (0,1)$ ve $z \in \mathbb{D}$ için $tg(z)$ noktası g fonksiyonunun görüntüsündedir.$f \in \mathcal{S}^*$ olarak kabul edildiği için birim disk $\mathbb{D}$ içerisindeki bazı $w : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonları için (2.1.2) Schwarz Lemmasının bir uygulaması olarak $tf(z) = f(w(z))$ elde edilir. Bu durumda, $z = 0$ için $|w(z)| \leq 1$, $0 = tf(0) = f(w(0))$ olup $w(0) = 0$ dır. Dolayısıyla, $w(z) = w(\rho z)/\rho$ ve $|w(z)| \leq |z|$ olarak tanımlanırsa

$$tg(z) = tf(\rho z) = f(w(\rho z)) = f\left(\rho \frac{1}{\rho} w(g(z))\right) = g(w(z))$$

dir. Verilen bilgilerden $w(z) = w(\rho z)/\rho$ olup,

$$|w(z)| \leq \left|\frac{\rho z}{\rho}\right| = |z|$$

elde edilir.Bu da bize, f nin her bir $|z| = \rho < 1$ diskini bir starlike bölgeninin sınırı olan γ_ρ eğrisi üzerine eşlediğini ifade eder. Dolayısyla bu da z nin $|z| = \rho < 1$ etrafında pozitif yönde hareket etmesi durumunda $\arg f(z)$ nin arttığını doğrular. Diğer bir ifadeyle,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\arg f(\rho e^{i\theta})\right\} \geq 0 \tag{3.42}$$

dir.

Öncelikle $\Im\left\{\frac{izf'(z)}{f(z)}\right\} = \Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}$ olduğunun bilinmesinde fayda vardır. Bu aşamada $z = e^{i\theta}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\arg f(\rho e^{i\theta})\right\} &= \Im\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\arg f(\rho e^{i\theta})\right\}\\ &= \Im\left\{\frac{izf'(z)}{f(z)}\right\}\\ &= \Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\end{aligned} \tag{3.43}$$

olduğu görülür. (3.42) nin kesin olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz. Bunun için $u(z) = -\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $u(z)$ nin analitik olduğu açık olup, aynı zamanda $u(z) \leq 0$ dır. Öte yandan analitik fonksiyonlar için Teorem (2.1.27) maksimum modül prensibine göre $\max\limits_{z\in\partial\mathbb{D}} u(z) \leq 0$ dır. Ayrıca u nun sabit olmamamsı herhangi bir $z \in \mathbb{D}$ için $u(z) < 0$ olduğunu da gösterir.Bütün verilenlere göre

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \tag{3.44}$$

elde edilir. Şimdi tersini gösterelim.

$'' \Leftarrow ''$ Kabul edelim ki f fonksiyonu (3.44) eşitsizliğini sağlayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu normalize edilmiş ((3.1) normalize şartlarını sağlayan) analiti bir fonksiyon olur. Bu durumda f fonksiyonu orijinde basit bir sıfıra sahiptir ve birim disk $\mathbb{D}$ içerisinde başka hiç bir yerde sıfır değildir. Dolayısıyla birinci bölümde de ifade edildiği üzere $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olmak üzere her bir $|z| = \rho < 1$ için (3.42) eşitsizliği sağlanır.Bu durumda $z \in \mathbb{D}$ noktasının, $|z| = \rho < 1$ diski etrafında pozitif yönde hareket etmesi durumunda f fonksiyonu artan argümentla birlikte kapalı bir γ_ρ eğrisinden geçer. Ayrıca f fonksiyonu $|z| = \rho < 1$ diski içerisinde tam olarak bir sıfıra sahip olduğundan, argüment prensibi bize γ_ρ nin orijini tam olarak bir kez çevrelediğini söyler. Ancak, γ_ρ artan argümentli olduğundan kendi kesmez. Böylece γ_ρ, sınırları bir starlike D_ρ bölgesi olan basit kapalı bir eğridir. Dolayısıyla bu durumda kabul edilebilir ki, her bir f fonksiyonu için $|z| = \rho < 1$ olmak üzere $w \in \Delta_\rho$ dir. Bu durum her bir $\rho < 1$ için doğru olduğundan f fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ univalent ve starliketır. Dolayısıyla $\Rightarrow$ ve $\Leftarrow$ teoremin ispatını tamamalar. $\square$

Teorem (3.2.1) starlike olmanın işlemsel tanımından yararlanarak, starlike fonksiyonların $\mathcal{S}^*$ sınıfı analitik olarak

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, z \in \mathbb{D} \right\}$$

şeklinde de verilebilir. Daha genel anlamda ise aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.2.2. $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere α dereceden starlike fonksiyonların sınıfı

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha, z \in \mathbb{D} \right\}$$

olarak tanımlanır. Dikkat edilirse $\alpha = 0$ için $\mathcal{S}^*(0) = \mathcal{S}^*$ dir. Bu durumda $\mathcal{S}^* \supset \mathcal{S}^*(\alpha)$ olduğu açıktır.

Örnek 3.2.1. (3.44) eşitsizliğini kullanarak $\mathcal{A}$ sınıfının bir elamnı olan $k(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonunun $\mathcal{S}^*$ sınıfının bir elemanı olduğunu gösterelim.

Çözüm.

$$\begin{aligned} k(z) = z(1-z)^{-2} \Rightarrow \Re\left(\frac{zk'(z)}{k(z)}\right) &= \Re\left(\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}\frac{(1-z)^2}{z}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{\overline{(1+z)}}{\overline{(1-z)}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\right) \\ &= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $k(z) \in \mathcal{S}^*$ elde edilir.

Buraya kadar verilen bilgilerden de anlaşılacağı üzere bir $f \in \mathcal{A}$ fonskiyonunu starlike olmasıiçin gerek ve yeter şart herbir $|z| = \rho < 1$ diskini orijine göre starlike bir bölgeye eşlemesidir. Bu ise $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ve $z = \rho e^{i\theta}$ olmak üzere $\arg f\left(\rho e^{i\theta}\right)$ nın θ nın artan bir fonksiyonu olmasıdır. Böylece $\mathcal{S}^*$ sınıfın ait fonksiyon

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\arg f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right\} = \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

Dikkat edilirse bu şart f nin starlike olduğunu ifade etmektedir. Bu şart f nin univalet olduğunu göstermez. Örneğin, $f(z) = z^2$ fonksiyonu $|z| < 1$ diskini $|z| < 1$ diskine eşlediği ve

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\arg f\left(z^2\right)\right\} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{2\theta\right\} = 2 > 0$$

eşitsizliğini de sağlanmaktadır. Ancak türevi olan $f'(z) = 2z$ fonksiyonu orijinde sıfır olup, Teorem (3.1.1) Univalent olmanın işlemsel tanımı gereğince orijinde univalent değildir.

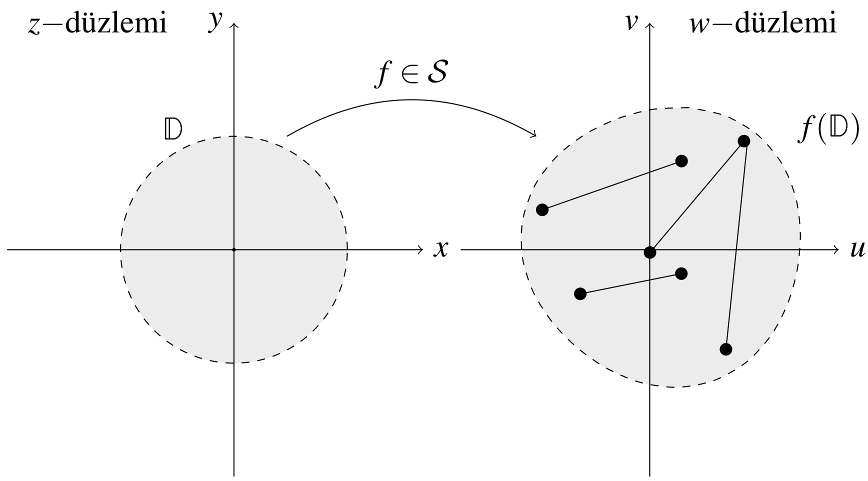
3.3. Konveks Fonksiyonlar

Tanım 3.3.1. f fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına ait herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu altında, $\mathbb{D}$ birim diskinin $f(\mathbb{D})$ görüntüsü konveks bir bölge (Bak, Tanım (2.1.15)) ise f fonksiyonuna bir konveks fonksiyon denir.

Konveks fonksiyon öğle bir fonksiyondur ki, birim diski konveks bir bölge üzerine konformal olarak eşler. Konveks fonksiyonların sınıfı genel olarak $\mathcal{C}$ ile gösterilir. Bu sınıf

$$\mathcal{C} = \left\{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \in \mathcal{S} \text{ ve } f(\mathbb{D}) \text{ konveks bölge}\right\}$$

şeklinde verilebilir. Daha öncede ifade edildiği üzere konveks bölge her noktasına göre starlike olan bir bölgedir. Buna göre her konveks bölgenin aynı zamanda bir starlike bölge olduğu ifade edilebilir. Ama bu ifadenin tersi doğru olmayabilir. Bunun için en güzel örnek $k(z)$ Koebe fonksiyonudur. Koebe fonksiyonu orijine göre starlike olduğu halde konveks bir bölge değildir. Bu durumda kümelerde kapsama ilişkisine göre $\mathcal{A} \supset \mathcal{S} \supset \mathcal{S}^* \supset \mathcal{C}$ yazılabilir.



Şekil 3.7. Konveks Fonksiyon.

Konveks fonksiyon kavramı, 1913 yılında Alman matematikçi Edward Study (1862-1930) tarafından tanıtıldı [33]. Bilindiği üzere konvekslik kavramı, geometride temel bir kavramdır. Konveks küme kavramının ilk formal tanımı Arşimed (287-212 B.C)'ye dayanmaktadır. Daha sonra 17. yüzyıl matematikçilerinden Fransız Augustin Louis Cauchy (1789-1857) bu alanda da çok önemli çalışmalar ortaya koymuştur. Cauchy eğrileri ve yüzeyleri olarak bilinen bu çalışmalar, adeta belirli bir dönem yetersiz kalan konvekslik kavramını ve dolayısıyla konveks fonksiyon kavramının gelişimini oldukça etkilemiştir. Cauchy'nin tanımları ve teoremleri sayesinde matematiğin bir çok alanında ve fizik, kimya, biyoloji ve de mühendislik gibi alanlarda da bir dizi uygun özellikle beraber önemli bir rol oynamaktadır. Konveks bölge kavramıyla yakından ilgili olan konveks fonksiyon kavramı Geometrik fonksiyon teorisinde de oldukça önemlidir. Bu alanda kompleks analitik fonksiyonlarla çalıştığımıza göre doğal olarak şu soruyu sormalıyız: konvekslik kompleks analitik fonksiyonlar altında korunur mu? Bilindiği üzere konvekslik kompleks analitik dönüşümler altında korunmaz. Ancak normalize edilmiş ve univalent olma gibi bazı ilave şartlar altında ancak korunabilir. Bu anlamda (3.6) ile verilen analitik univalent fonksiyon birim diski $\mathbb{D}$ yi bazı konveks bölgelere eşler. Başka bir ifadeyle $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun konevks olması için gerek ve yeter şart $|z| = \rho < 1$ diskinin konveks bir bölgeye eşlemesidir. Geometrik olarak ise bu, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olmak üzere $w = f(z)$ fonksiyonunun $|z| = \rho < 1$ diskini basit kapalı bir bölgeye dönüştürmesi demektir, öyle ki θ arttıkça görüntü teğetinin $w-$düzleminde reel eksenle yaptığı açının, yani $\arg f'\left(\rho e^{i\theta}\right)$

nın da artması demektir. Doayısıyla konveks fonksiyonlar

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(re^{i\theta})\right\}\right\} > 0$$

şartı ile analitik olarak karakterize edilebilir. Aşağıda verilen teorem konveks fonksiyonlar için bir analitik tanım verir.

Teorem 3.3.1. (**Konveks Fonksiyon Olmanın İşlemsel Tanımı**) Bir $f \in \mathcal{A}$ alalım. Bu durumda $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0, (z \in \mathbb{D}) \tag{3.45}$$

olmasıdır.

İspat. $'' \Rightarrow''$ İlk olarak kabul edelim ki $f \in \mathcal{C}$ olsun. Bu durumda iddiamız f fonksiyonunun her bir $|z| = r < 1$ alt diskini bir konveks bölge üzerine eşlediğidir. Bunu göstermek için $|z_1| \leq |z_2| < r$ olacak şekilde z_1 ve z_2 noktalarını seçelim. Öte yandan $f(z_1) = w_1$ ve $f(z_2) = w_2$ olmak üzere

$$w_0 = tw_1 + (1-t)w_2, t \in (0,1)$$

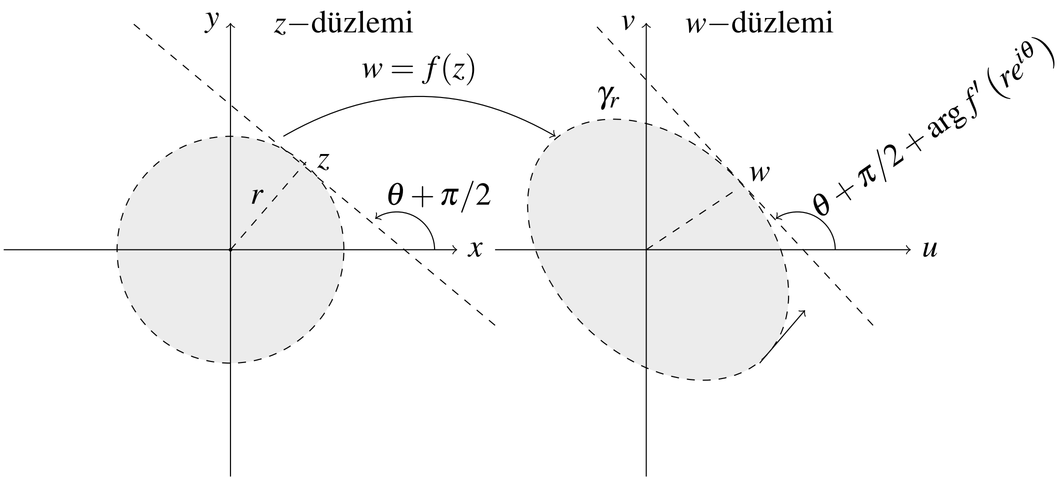
yazılabilir. Bu durumda f konveks bir fonksiyon olduğundan $f(z_0) = w_0$ olacak şekilde bir tek $z_0 \in \mathbb{D}$ noktası vardır. Bu durumda $|z_0| \leq 1$ olduğunu göstermek zorundayız. Bunun için, birim disk $\mathbb{D}$ de analitik ve $g(0) = 0$, $g(z_2) = w_0$ olmak üzere

$$g(z) = tf\left(\frac{z_1 z}{z_2}\right) + (1-t)f(z)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Öte yanda $f \in \mathcal{C}$ olduğundan $h(z) = f^{-1}(g(z))$ bileşke fonksiyonu iyi tanımlıdır. Ayrıca $h(0) = 0$ ve $|h(z)| \leq 1$ olduğunda (2.1.2) Schwarz Lemmasına göre $|h(z)| \leq |z|$ dir. Böylece

$$|z_0| = |h(z_2)| \leq |z_2| < r$$

olduğunu göstermiş olduk.Bu durumda, f nin her bir $|z| = r < 1$ çemberini bir konveks bölgenin sınırı olan bir γ_r eğrisi üzerine eşlediğini ifade eder. Konveks olma gereği, eğri pozitif yönde hareket ettiğinde γ_r eğrisi eğimi azalmayan bir eğridir.



Şekil 3.8. Teğet vektörün argümenti θ nın azalmayan bir fonksiyonu.

Analitik olarak bu durum

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\theta+\frac{\pi}{2}+\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(re^{i\theta})\right\}\right\}>0$$

veya

$$\Im\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log\left\{ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})\right\}\right\}>0$$

şartı ile karakterize edilebilir. Bu şart ise $|z|=r$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(re^{i\theta})\right\}\right\} &= Im\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log\left\{ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})\right\}\right\}>0\\ &\Im\left\{\frac{i^2re^{i\theta}f'\left(re^{i\theta}\right)+\left(ire^{i\theta}\right)^2f''\left(re^{i\theta}\right)}{ire^{i\theta}f'\left(re^{i\theta}\right)}\right\}>0\\ &\Im\left\{i+\frac{ire^{i\theta}f''\left(re^{i\theta}\right)}{f'\left(re^{i\theta}\right)}\right\}>0\end{aligned}$$

ve

$$\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0$$

şartına indirgenmiş olur.

$'' \Leftarrow''$ Tersine kabul edelim ki f fonksiyonu

$$\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0$$

ile normalize edilmiş bir analitik fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki cebirsel hesaplama gösterir ki γ_r eğrisinin teğet eğimi monoton olarak artar. Fakat bir nokta γ_r eğrisi üzerinde tam bir tur yaptığında teğet vektörünün argümenti, $z = re^{i\theta}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(re^{i\theta})\right\}\right\} \geq 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(re^{i\theta})\right\}\right\}d\theta &= \\
= \int_0^{2\pi}\Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}d\theta& \\
= \Re\left\{\int_{|z|=r}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\frac{dz}{iz}\right\} &= 2\pi
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da gösterir ki, γ_r konveks bir bölgeyi sınırlayan basit kapalı bir eğridir. Yani keyfi bir $r < 1$ için f nin konveks görüntü kümesine sahip bir univalent fonksiyon olduğunu ifade eder. Dolayısıyla $\Rightarrow$ ve $\Leftarrow$ teoremin ispatını tamamalar. $\square$

Bu teoremin ışığı altında $\mathcal{C}$ sınıfı

$$\mathcal{C} = \left\{f \in \mathcal{A} : \Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0, z \in \mathbb{D}\right\}$$

şeklinde de verilebilir. Daha genel anlamda ise aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.3.2. $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere α dereceden konveks fonksiyonların sınıfı

$$\mathcal{C}(\alpha) = \left\{f \in \mathcal{A} : \Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha, z \in \mathbb{D}\right\}$$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilirse $\alpha = 0$ için $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}$ dir. Bu durumda $\mathcal{C} \supset \mathcal{C}(\alpha)$ olduğu açıktır. $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}^*(\alpha)$ sınıfları sırasıyla $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{C}$ sınıflarının parametrelendirilmiş versiyonlarıdır. $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}^*(\alpha)$ sınıfları sırasıyla $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{C}$ sınıflarının parametrelendirilmiş versiyonlarıdır. Ayrıca,

$$\left.\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|_{z=0} = 1+\left.\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|_{z=0} = 1$$

olması $0 \leq \alpha \leq 1$ olmasını gerektirir. Aksi takdirde $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfları boş olur. Ayrıca $\alpha = 1$ olması durumunda $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıflarının sadece birer üyesi olur ki o da $f(z) = z$ birim fonksiyonudur. Bu anlamda genel olarak $0 \leq \alpha < 1$ olarak kabul edilmektedir.

Örnek 3.3.1. (3.45) eşitsizliğini kullanarak $\mathcal{A}$ sınıfının bir üyesi olan $f(z) = z(1-z)^{-1}$ fonksiyonunun $\mathcal{C}$ sınıfının bir üyesi olduğunu gösterelim.

Çözüm.

$$
\begin{aligned}
&f(z) = z(1-z)^{-1} \Rightarrow f(0) = 0 \\
&f(z) = z(1-z)^{-1} \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{(1-z)^{-2}} \Rightarrow f'(0) = 1 \\
&f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \Rightarrow f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3}
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) &= \Re\left(1 + \frac{2z(1-z)^2}{(1-z)^3}\right) \\
&= \Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \\
&= \Re\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right) > 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bütün verilenlere göre $f \in \mathcal{C}$ dir.

Örnek 3.3.2. (3.3.2) tanımını kullanarak $\mathcal{A}$ sınıfının bir üyesi olan $f(z) = -\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ fonksiyonunun $\mathcal{C}(1/2)$ sınıfının bir üyesi olduğunu gösterelim.

Çözüm. Verilen f fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de kompleks anlamda türevlenebildiğinden analtik olup, her dereceden türevlere de sahiptir. Ayrıca $f(0) = 0$ olup, $f'(z) = (1-z)^{-2}$ olması da $f'(0) = 1$ olmasını gerektirir.Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
f(z) = -\log(1-z) \Rightarrow \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) &= \Re\left(\frac{z}{(1-z)^2}\frac{(1-z)}{z}\right) \\
&= \Re\left(\frac{1}{1-z}\right) > \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

dir(Bak, Örnek (3.2.2) çözüm). Dolayısıyla $f(z) \in \mathcal{C}(1/2)$ elde edilir.

Teorem (3.2.1)'de verilen Starlike olmanın işlemsel tanımı ile Teorem (3.3.1)'de verilen Konveks olmanın işlemsel tanımı arasında oldukça yakın ve bir o kadarda ilginç bir ilişki ortaya çıkmaktadır. Bu ilişki ilk olarak 1915 yılında Alexander tarafından elde edildi ve günümüzde de Alexander teoremi olarak bilinmektedir [32].

Teorem 3.3.2. (**Alexander Dualtity Theorem**) Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de konvekstir ancak ve ancak, yine birim disk $\mathbb{D}$ de $g(z) = zf'(z)$ ile tanımlı g fonksiyonu starlike ise. Yani,

$$f \in \mathcal{C} \Leftrightarrow g(z) = zf'(z) \in \mathcal{S}^* \tag{3.46}$$

dir.

İspat. $g(z) = zf'(z)$ olarak verildiğine göre,

$$\begin{aligned}\frac{zg'(z)}{g(z)} = \frac{z\left(zf'(z)\right)'}{zf'(z)} &= \frac{z(zf''(z)) + f'(z)}{zf'(z)} \\ &= 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer f fonksiyonu konveks ise, Teorem(3.3.1) den $\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0$ dır. Dolayısıyla

$$\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = \Re\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > 0$$

elde edilir.Bu da bize Teorem (3.2.1)'e göre g fonksiyonunun starlike yani $g \in \mathcal{S}^*$ olduğunu verir. Teoremin ikinci kısmının ispatı benzer şekilde yapılır. □

En kolay örnek olarak $f(z) = z$ birim fonksiyonunu alalım. Birim fonksiyon tanımından $z \in \mathbb{D}$ için $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ olup, f fonksiyonu konvekstir. Bu durumda $g(z) = zf'(z) = z.1 = z$ olup,

$$\Re\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) = \Re\left(\frac{z.1}{z}\right) = 1 > 0$$

dir. Dolayısıyla Teorem (3.2.1)'e göre $f \in \mathcal{S}^*$ dir. Yani $f(\mathbb{D})$ starlike bir bölgedir.

Sonuç olarak $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere (3.46) yerine daha genel olarak

$$f \in \mathcal{C}(\alpha) \Leftrightarrow g(z) = zf'(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$$

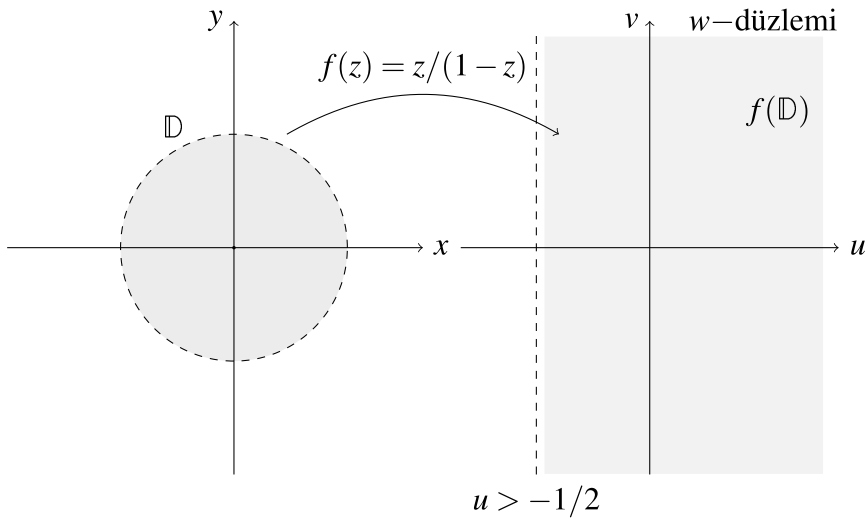
Daha komplike bir örnek üzerinde buraya kadar verilen geometrik bilgileri ve analitik şartları uygulayalım.

Örnek 3.3.3. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ olmak üzere $w = f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonunu alalım.

Çözüm. Öncelikle geometrik olarak $f(\mathbb{D})$ nin hem starlike ve hem de konveks bir bölge olduğunu cebirsel yöntemleri kullanarak görelim. Bunun için ilk adım olarak $w = f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ eşitliğinden z çekilir ve $z \in \mathbb{D}$ olduğu için $|z| < 1$ de yerine yazılır.

$$\begin{aligned}
w = f(z) = \frac{z}{1-z} &\Rightarrow w = \frac{z}{1-z} \\
&\Rightarrow z = \frac{w}{1+w}, |z| < 1 \\
&\Rightarrow \left|\frac{w}{1+w}\right| < 1 \\
&\Rightarrow |w| < |1+w|, w = u + iv \\
&\Rightarrow |u+iv| < |(u+1)+iv| \\
&\Rightarrow u > \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buda bize $|z| < 1$ in yani birim disk $\mathbb{D}$ nin $w = f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonunu altındaki görüntüsünün $u > -1/2$ yarı düzlemi olduğunu verir. Bu durum aşağıda geometrik olarak verilmiştir.



Şekil 3.9. Birim disk $\mathbb{D}$ nin $f(z) = z/(1-z)$ dönüşümü altındaki görüntüsü.

Şekle göre $f(\mathbb{D})$ hem starlike ve hem de konveks bir bölgedir. Dolayısıyla $f \in \mathcal{S}^*$ ve $f \in \mathcal{C}$ dir.Şimdi de analitik olarak $f \in \mathcal{S}^*$ ve $f \in \mathcal{C}$ olduğunu inceleyelim. Bunun için öncelikle f

dönüşümünün birim disk $|z| < 1$ de temsil eden Taylor açılımını hatırlayalım:

$$\begin{aligned} w = f(z) = \frac{z}{(1-z)} &= z(1+z+z^2+\dots) \\ &= z+z^2+z^3+\dots \\ &= z+\sum_{n=2}^{\infty} z^n \end{aligned}$$

dir. Öte yandan $w = f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ dönüşümü $|z| < 1$ olduğu için birim disk $\mathbb{D}$ de analitik olup $f \in \mathcal{A}$ dir. Bu aşamada $\Re\left(\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} w = f(z) = z+z^2+z^3+\dots &\Rightarrow f'(z) = 1+2z+3z^2+\dots \\ &\Rightarrow zf'(z) = z+2z^2+3z^3+\dots \\ &\Rightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} = 1+z+z^2+z^3+\dots, |z| < 1 \\ &\Rightarrow \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $f \in \mathcal{S}^*$ dir. Yine yukarıda yapılan cebirsel hesaplamalardan kolayca

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} = 1+2z(1+z+z^2+\dots), |z| < 1$$
$$\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

elde edilir. Bu durumda $f \in \mathcal{C}$ olduğu açıktır.

Sonuç olarak $w = f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de hem starlike ve hem de konvekstir.

Son olarak f fonksiyonununa Teorem (3.3.2) Alexander Dualtity Teoremini uygulayalım:

$$\begin{aligned} w = f(z) = \frac{z}{1-z} \Rightarrow g(z) = zf'(z) &= \frac{z[(1-z)-z(-1)]}{(1-z)^2} \\ &= \frac{z}{(1-z)^2} \end{aligned}$$

fonksiyonu elde edilir. Elde edilen bu fonksiyon ünlü $k(z)$ Koebe fonksiyonudur. Örnek (3.2.1) den biliyoruz ki $k(z)$ Koebe fonksiyonu starliketır. Dolayıyla (3.3.2) Alexander Dualtity Theoremine göre verilen f fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de konvekstir.

Daha önce $k(z)$ Koebe fonksiyonun geometrik olarak Şekil (3.2) de starlike olduğu ancak konvesk olmadığı gösterildi. Bir sonraki örneğe hazırlık olması açısından burada Koebe fonksiyonunun sahip olduğu geometrsik karakterizisyanları analitik olarak da vermek yararlı olacaktır. Öncelikle $k(z) \in \mathcal{S}^*$ olduğunu gösterelim.

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \Rightarrow k'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\Re\left(\frac{zk'(z)}{k(z)}\right) =& \Re\left(\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}\frac{(1-z)^2}{z}\right)\\ =& \Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\end{aligned}$$

olur. Her hangi bir $z \in \mathbb{C}$ için $\Re(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ olduğuna göre

$$\begin{aligned}\Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(1+z)(1-\bar{z})+(1+\bar{z})(1-z)}{(1-z)(1-\bar{z})}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2-2z\bar{z}}{|1-z|^2}\right)\\ &= \frac{1-z\bar{z}}{|1-z|^2}, |z| < 1\\ &> 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bize Teorem (3.2.1)'e göre $k(z) \in \mathcal{S}^*$ olduğunu verir. Şimdi de $k(z) \notin \mathcal{C}$ olduğunu analitik olarak görelim.

$$k'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3} \Rightarrow k''(z) = \frac{2(2+z)}{(1-z)^4}$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned}\Re\left(1+\frac{zk''(z)}{k'(z)}\right) =&\Re\left(1+\frac{2z(2+z)}{(1-z)^4}\frac{(1-z)^3}{(1+z)}\right)\\ =&\Re\left(1+\frac{2z^2+4z}{1-z^2}\right)\\ =&\Re\left(\frac{z^2+4z+1}{1-z^2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $z=\dfrac{-1}{2}\in\mathbb{D}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\Re\left(1+\frac{zk''(z)}{k'(z)}\right) =&\Re\left(\frac{z^2+4z+1}{1-z^2}\right)\\ =&\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+4\left(\frac{-1}{2}\right)+1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^2}\\ =&\frac{\frac{-3}{4}}{\frac{3}{4}}\\ =&-1<0\end{aligned}$$

olur. Bu da bize Teorem (3.3.1)'e göre konveks olmadığını yani $k(z)\notin\mathcal{C}$ olduğunu gösterir.

Örnek 3.3.4. $k_\alpha:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ ve $0\leq\alpha<1$ olmak üzere $k_\alpha(z)=\dfrac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}$ analitik ve univalent fonksiyonunu alalım. Bu durumda sırasıyla $k_\alpha(z)\in\mathcal{A}$,$k_\alpha\in\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $k_{1/2}(z)\in\mathcal{S}^*(1/2)$ olduğunu gösterelim [34].

Çözüm. Verilen k_α fonksiyonunun birim disk $\mathbb{D}$ de analitik olup dolayısıyla her dereceden türevlere sahiptir. Bu durumda $k_\alpha(z)\in\mathcal{A}$ olduğu açıktır. Ayrıca $k_\alpha(0)=0$ ve $k'_\alpha(z)=\dfrac{1+(1-2\alpha)z}{(1-z)^{3-2\alpha}}$ olduğu için $k'_\alpha(0)=1$ dir. Yani k_α fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de normalleştirilmiş bir fonksiyondur. Bu durumda $k_\alpha\in\mathcal{S}$ dir. Bu aşamada $k_\alpha\in\mathcal{S}^*(\alpha)$ olduğunu göstermek için Tanım (3.2.2) de verilen eşitsizlik şartını sağlayıp sağlamadığını kontrol etmeliyiz.

$$\begin{aligned}\Re\left(\frac{zk'(z)_\alpha}{k(z)_\alpha}\right) =&\Re\left(\frac{z(1+(1-2\alpha)z)}{(1-z)^{3-2\alpha}}\frac{(1-z)^{2(1-\alpha)}}{z}\right)\\ =&\Re\left(\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right)\\ =&\Re\left((1-\alpha)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\alpha\right)\end{aligned}$$

$$= (1-\alpha)\Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \alpha, \Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) > 0$$
$$> \alpha$$

dir. Dolayısıyla $k_\alpha(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ dir.

Verilen $k(z)_\alpha$ fonksiyonunda $\alpha = 0$ alınırsa $k_0(z) = k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu elde edilir.

Ayrıca $\alpha = 1/2$ alınırsa $k_{1/2}(z) = \dfrac{z}{(1-z)}$ fonksiyonu elde edilir. Bu durumda $k'_{1/2}(z) = (1-z)^{-2}$ olup $k_{1/2}(0) = 0$ ve $k'_{1/2}(0) = 1$ dir. O halde $k_{1/2}(z) \in \mathcal{A}$ dir. Öte yandan

$$\Re\left(\frac{zk'_{1/2}}{k_{1/2}}\right) = \Re\left(\frac{1}{(1-z)^2}\frac{1-z}{z}\right)$$
$$= \Re\left(\frac{1}{1-z}\right) > \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu da bize $k_{1/2}(z) \in \mathcal{S}^*(1/2)$ olduğunu verir.

Dikkat edilirse $\alpha = 1/2$ alındığında $1/2$. derceden starlike fonksiyonların sınıfı elde edilmiştir. Yani

$$\mathcal{S}^*(1/2) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \frac{1}{2} \right\}$$

yazılır.

Örnek 3.3.5. $\sqrt{z}$ nin esas değeri için birim disk $\mathbb{D}$ de analitik olan $w = f(z) = \dfrac{z}{(1-\sqrt{z})^2}$ fonksiyonu için $f \in \mathcal{S}^*(1/2)$ olduğunu gösterelim [34].

Çözüm. $f(z) = \dfrac{z}{(1-\sqrt{z})^2}$ ve $f'(z) = \dfrac{1}{(1-\sqrt{z})^3}$ olduğuna göre gerekli olan cebirsel işlemler yapıldığında $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ olduğu görülecektir. Bu durumda $f \in \mathcal{A}$ olduğu açıktır. Bu durumda yapılması gereken $f \in \mathcal{S}^*(1/2)$ olduğunu göstermek için f fonksiyonunun Tanım(3.2.2) de verilen eşitsizlik şartını sağlayıp sağlamadığını kontrol etmektir.

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = \Re\left(\frac{z}{(1-\sqrt{z})^3}\frac{(1-\sqrt{z})^2}{z}\right)$$
$$= \Re\left(\frac{1}{1-\sqrt{z}}\right)$$

$$= \Re\left(\frac{1+\left(1-2\frac{1}{2}\right)\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right) > \frac{1}{2}$$

dir. Bu da bize $f \in \mathcal{S}^*(1/2)$ olduğunu gösterir. Bu örnekten yararlanarak $\alpha = 1/2$. dereceden starlike fonksiyonları sınıfı da

$$\mathcal{S}^*(1/2) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \frac{1}{2} \right\}$$

şeklinde yazılabilir.

Marx ve Strohhacker bir birlerinden bağımsız olarak $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{S}^*(1/2)$ sınıfları arasındaki yakın ilişkiyi kurmuşlardır [35], [36]. Aşağıdaki teorem bu anlamda verilmiştir.

Teorem 3.3.3. (**Marx ve Strohhacker Teoremi**) Eğer $f \in \mathcal{C}$ ise, bu durumda $f \in \mathcal{S}^*(1/2)$ dir. Bu sonuç kesindir, yani $1/2$ değeri daha büyük bir sabitle değiştirilemez.

Öte yandan Teorem (3.3.2) Alexaner duality teoremi kullanılarak $\mathcal{C}$ sınıfındaki konveks fonksiyonlar içinde Taylor katsayısı sınırlaması kolayca elde edilebilir. 1917 yılında Löwner tarafından eğer $f \in \mathcal{C}$ ise $n = 2, 3, \ldots$ için $|a_n| \leq 1$ olduğunu ispatlamıştır [37].Burada Biberbach varsayımının starlike fonksiyonların $\mathcal{S}^*$ sınıfı için de geçerli olduğunun 1921 yılında Nevanlinna tarafından ispatlandığını hatırlatarak [38], birçok üst düzey problem ve teoremin ispatında kullanılan fonksiyona alt yapı hazırlayan aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.3.3. $z \in \mathbb{D}, \Re(z) > 0$ ve $h(0) = 0, h(\bar{z}) = \overline{h(z)}$ olmak üzere $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ konveks fonksiyonunu alalım. Ayrıca kabul edelim ki h fonksiyonu $|z| = r \in (0,1)$ için

$$\begin{cases} \min\limits_{|z|=r} |h(z)| & = \min\{h(r), h(-r)\} \\ \max\limits_{|z|=r} |h(z)| & = \max\{h(r), h(-r)\} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda h fonksiyonunun, analitik fonksiyonların bazı alt sınıflarını sağlayacak birçok seçimi vardır.

Örneğin, $\alpha \in [0,1)$ olmak izere

$$h(z) = \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}$$

olarak seçilirse $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ nin konveks olduğunu göstermek için Tanım (3.3.2) de verilen eşitsizliği sağladığını göstermek kolay olacaktır. Bu durumda

$$\Re(h(z)) = \Re\left(\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right) > \alpha$$

dır. $h(z)$ fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ yi konformal olarak üst yarı düzlem $\Re(w) > 0$ a eşler.Ayrıca iyi bilinir ki, $w(0) = 0$ olmak üzere $w(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de analitik ise bu durumda

$$\Re(h(z)) = \Re\left(\frac{1+(1-2\alpha)w(z)}{1-w(z)}\right) > \alpha$$

olur ancak ve ancak $w(z)$ fonksiyonu bir Schwarz fonksiyonu ise, yani $w(0) = 0$ olmak üzere her $z \in \mathbb{D}$ için $|w(z)| < 1$ dir.

3.4. Konvekse Yakın Fonksiyonlar

Univalent analitik fonksiyonların bir diğer önemli bir altsınıfı ise Amerikalı matematikçi Wilfred Kaplan (1915-2007) tarafından tanıtılan konvekse yakın fonksiyonlar ve sınıfıdır [39]. Kaplan'ın $|z| < r$ olmak üzere konvekse yakın fonksiyonu karkterize eden tanım aşağıdaki gibidir.

Tanım 3.4.1. $|z| < r$ olmak üzere analitik bir $f(z)$ fonksiyonu alalım. Bu durumda $|z| < r$ için $f'(z)/\varphi'(z)$ ifadesi pozif reel kısımlı olacak şekide bir konveks $\varphi(z)$ fonksiyonu varsa $f(z)$ fonksiyonuna bir konvekse yakın fonksiyon denir.

Genelliği bozmadan $r = 1$ alınırsa tanım kümesi birim disk $\mathbb{D}$ ye indirgenmiş olur ki bu birçok komplike durumun önüne geçmesi adına oldukça uygun olmaktadır. Ayrıca konvekse yakın fonksiyonların sınıfının diğer iyi bilinen univalent fonksiyon sınıflarının bazılarını içerdiğini gösterebilme açısından da oldukça yararlı olmaktadır. Bu anlamda aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.4.2. $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna konvekse yakındır denir eğer

$$\Re\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0, z \in \mathbb{D} \tag{3.47}$$

olacak şekilde, $\mathbb{D}$ de bir konveks g fonksiyonu varsa. Birim disk $\mathbb{D}$ de konvekse yakın fonksiyonların sınıfı $\mathcal{CC}$ ile gösterilebilir. Bu durumda konvekse yakın fonksiyonların $\mathcal{CC}$

sınıfı

$$\mathcal{CC} = \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0, g : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \text{ konveks}, z \in \mathbb{D} \right\}$$

şeklinde analitik olarak verilebilir.

Yukarıda verilen Kaplan'ın konvekse yakın fonksiyon tanımı dikkatli bir şekilde incelendiğinde g nin normalize edilmiş olmasını gerektirmez. Ancak konvekse yakın fonksiyonlar için elde edilen önemli sonuçlar ancak g nin normalize edilmiş olduğu varsayımı altında elde edilebilmektedir. Yine dikkat edilirse, bu tanım öncelikli olarak f nin univalent olmasını da gerektirmez. Ancak gösterilebilir ki, (3.47) eşitsizliği doğruysa f nin univalent olması gerekir.

Her bir konveks fonksiyon doğaldır ki $\mathbb{D}$ de konvekse yakındır. Bunu göre bilmek için (3.47) eşitsizliğinde $f = g$ almak yeterli olacaktır. Bu durumda

$$\Re\left(\frac{f'(z)}{f'(z)}\right) = 1 > 0, z \in \mathbb{D}$$

elde edilir. (3.47) ye eşit bir koşul olarak, $h(z) = zg'(z)$ fonksiyonu Teorem (3.3.2) Alexander Dualtity teoreminde verilen $\mathbb{D}$ üzerinde bir starlike fonksiyon olmak üzere,

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{h(z)}\right) > 0, z \in \mathbb{D} \tag{3.48}$$

olarak yazılabilir. Diğer bir ifadeyle, birim disk $\mathbb{D}$ de bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna konvekse yakındır denir eğer (3.48) eşitsizliğinin sağlayacak şekilde bir h starlike fonksiyonu varsa. Kabul edelim ki f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de bir starlike fonksiyon olsun. Bu durumda (3.48) eşitsizliğinde bu sefer $f = h$ olarak seçilirse

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{h(z)}\right) = \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, z \in \mathbb{D} \tag{3.49}$$

elde edilir. Buradan da her bir starlike fonksiyonun $\mathbb{D}$ de konvekse yakın olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla kümelerdeki kapsama bağıntısına göre $\mathcal{CC} \supset \mathcal{S}^* \supset \mathcal{C}$ olarak yazılabilir. Örnek olarak vermek gerekirse birim disk $\mathbb{D}$ de $f(z) = z/(1-z)$ ve $k(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonu birer konvekse yakın fonksiyonlardır. Bütün bu verilenlerden sonra doğal olarak acaba konvekse yakın fonksiyonlar univalent midir? sorusunu sormak gerekir. Bu sorunun cevabının evet olduğu Kaplan tarafından ispatlanmıştır [39].

Teorem 3.4.1. Her konvekse yakın fonksiyon univalenttir.

İspat. Teorem (3.1.2) Noshiro-Warschawski teoreminden yararlanarak verilen teoremin ispatını yapmak oldukça kolaydır. Kabul edelim ki bir f fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de konvekse yakın olsun. Konvekse yakın fonksiyon tanımından (3.47) eşitsizliğini sağlayacak şekilde birim disk $\mathbb{D}$ de konveks bir g fonksiyonu vardır. g konveks olduğuna göre birim disk $\mathbb{D}$ yi bire-bir ve örten olarak konveks $f(\mathbb{D})$ bölgesine eşler. Dolayısıyla birim disk $\mathbb{D}$ de g^{-1} ters fonksiyonu vardır. Bu durumda

$$h(w) = f\left(g^{-1}(w)\right), w \in g(\mathbb{D}) \tag{3.50}$$

fonksiyonunu düşünebiliriz. Öte yandan g fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de analitik olduğundan g^{-1} de $g(\mathbb{D})$ bölgesinde analitiktir.Bu aşamada iki analitik fonksiyonun bileşkesinin de analitik olduğu gerçeği kullanılırsa, (3.50) ile tanımlanan h fonksiyonuda birim disk $\mathbb{D}$ de analitik olur. Bu durumda

$$h'(w) = \frac{f'\left(g^{-1}(w)\right)}{g'\left(g^{-1}(w)\right)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}, w \in g(\mathbb{D}), z \in \mathbb{D} \tag{3.51}$$

elde edilir ki bu da bize $g(\mathbb{D})$ de $\Re(h'(w)) = \Re\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0$ olduğunu gösterir.Dolayısıyla Teorem (3.1.2) Noshiro-Warschawski teoremine göre h fonksiyonu $g(\mathbb{D})$ de univalenttir. Öte yandan $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere $f(z) = h(g(z))$ oarak yeniden yazılabilir. İki univalent fonksiyonun bileşkesi de univalent olduğuna göre f fonksiyonu birim disk $\mathbb{D}$ de univalenttir.Buda aranan sonuçtur. $\square$

Bu teoremle birlikte $\mathcal{A} \supset \mathcal{S} \supset \mathcal{CC} \supset \mathcal{S}^* \supset \mathcal{C}$ kapsama bağıntısı olma bağıntısı elde edilir. Birim disk $\mathbb{D}$ de her bir starlike fonksiyonun konvekse yakın olduğu, ancak tersinin mutlaka doğru olması gerekmediğine dikkat edilmelidir. Yani starlike olmayan konvekse yakın fonksiyonlar da vardır. Genel olarak $0 \leq \alpha < 1$ için $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonların $\mathbb{D}$ de univalent olması gerekmez. Ayrıca $0 \leq \alpha \leq \beta < 0$ için $\mathcal{S}^*(\alpha) \supset \mathcal{S}^*(\beta)$ olduğu da tanımda kolayca elde edilir.

Kompleks analizde geometrik fonksiyon teorisi literatüründe univalent fonksiyonlar, starlike fonksiyonlar, konveks fonksiyonlar ve konvekse yakın fonksiyonlar ilgili pek çok ilginç sonuç vardır. Bunlardan birtanesi de konvekse yakın fonksiyonları bir konveks

g fonksiyonuna atıf yapmadan karakterize edebilmektir. θ nın monoton bir $P(e^{i\theta})$ fonksiyonunun terimleri içerisinde bir Poisson integral gösterimine sahip f fonksiyonu alındığında $\theta_1 < \theta_2$, $z = re^{i\theta}$ ve $r < 1$ olmak üzere f fonksiyonu konvekse yakındır ancak ve ancak

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) d\theta > -\pi$$

ise.

Bu alanda yapılan çalışmalarda oldukça yaygın olarak kullanılan ve iyi bilinen aşağıdaki Lemmayı çalışmamızda kullancağız. 1971 yılında S. Jack tarafından tanıtılan bu lemma Jack lemması veya Clunie-Jack lemması olarak bilinmektedir [40].

Lemma 3.4.1. (**Clunie-Jack Lemması**) $w(0) = 0$ olmak üzere birim disk $\mathbb{D}$ de sabit olmayan analitik bir $w(z)$ fonksiyonunu alalım. Eğer $|w(z)|$, maksimum değerini $|z| = r < 1$ çemberi üzerindeki bir $z_0 \in \mathbb{D}$ noktasında alıyorsa, $z_0 w'(z_0) = kw(z_0)$ olacak şekilde bir $k \geq 1$ reel sayısı vardır.

4. HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde kısa bir literatür taramasıyla birlikte, tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılacak tanım ve teoremlerin yanı sıra konuların daha iyi anlaşılması için bazı örnekler verilmiştir. Gamma ve Hipergeometrik fonksiyonları içeren denklemlere matematikçiler ve bilim adamları büyük ilgi göstermektedir. Gamma fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlarla ilgili birçok eşitliği ve dönüşümleri ispatlamada ve sadeleştirmede merkezi bir rol oynamaktadır. Ayrıca, Gamma fonksiyonu her biri farklı uygulamalarda kendine özel avantajlar sunan seri, limit ve integral gösterimleri dahil olmak üzere çok sayıda gösterime sahiptir. Gamma fonksiyonu saf matematikteki merkezi rolünün yanısıra akışkanlar mekaniği, astrofizik, kuantum fiziği, istatistik ve depremler arasındaki sürenin modellenmesi gibi alanlarda da yoğun olarak kullanılmaktadır. Gamma fonksiyonu, Yunan alfabesinde kullanılan büyük gamma harfi yani Γ sembolüyle gösterilmektedir. Bu gösterim ilk defa 1809 yılında Fransız matematikçi Adrien-Marie Legendre (1752-1833) tarafından kullanılmıştır. Gamma fonksiyonu, pozitif olmayan tam sayılar hariç tüm kompleks düzlem için tanımlı ve analitiktir. Bu anlamda faktöryel fonksiyonun tüm kopleks düzleme bir analitik devamı olarak düşünülebilir. Bazı bilinmesinde yara olan ön bilgileri verdikten sonra Gamma fonksiyonunun tanımını verilebilir.

4.1. Gamma Fonksiyonu ve Özellikleri

Tanım 4.1.1. (**Gamma Fonksiyonu**) $\Re(z) > 0$ yani $z \in \mathbb{C}, z \neq 0, -1, -2, \ldots$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = (z-1)! = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{4.1}$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir [41].

İsviçreli matematikçi ve fizikçi Daniel Bernoulli (1700-1782) tarafından tanıtılan ve Gamma fonksiyonunun integral gösterimi olarak da bilinen bu gösterim, kullanım sıklığı ve sadeliği ile diğerlerine göre bazı avantajlara sahip olup, diğer bir çok yararlı integral gösterimi bu gösterimden elde edilmektedir. Yukarıda sözü edilen alternatif gösterimler de şöyledir;

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!z^n}{z(z+1)\ldots(z+n)}, z \neq 0,-1,-2,\ldots \text{ (Gauss limit gösterimi)}$$
$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, z \neq 0,-1,-2,\ldots \text{ (Weierstrass seri gösterimi).}$$

Burada $\gamma = \lim_{n\to\infty}\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots++\frac{1}{n}-\ln n\} \approx 0.577216$ Euler–Mascheroni sabitidir.

Gamma fonksiyonu, $n!$ hesaplamasındaki n sayısının tam sayı olmayan sayılara ve hatta mompleks sayıları da içerecek şekilde genişletir. Yani Gamma fonksiyonu matematikte faktöryel fonksiyonunu tam sayı olmayan reel sayılara ve hatta karmaşık sayılar için genellemiş olan bir fonksiyondur. Başka bir ifadeylen faktöryel fonksiyonu aslında Gamma fonksiyonunun doğal sayılara indirgenmiş halidir. Gamma fonksiyonu kullanılarak $\pi, -3/2, \ldots$ gibi sayıların faktöryelleri hesaplanabilir. Bu hesaplamalar ilk defa 1729 yılında 18. yüzyılın en önemli matematikçilerinden biri olarak kabul edilen bir başka İsviçreli matematikçi ve fizikçi Leonard Euler (1707-1783) tarafından tanıtılmıştır [41]. Bu nedenle $\Gamma(z)$ fonksiyonu Euler Gamma fonksiyonu olarak da bilinmektedir. Aşağıda bazı sayıların faktöryelleri ispatlarıyla birlikte verilmiştir:

$$\Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \approx 2.363$$
$$\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \approx -3.545$$
$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 0! = 1$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}dt = 2\Gamma(1) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \approx 1.772$$
$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.866$$

Gamma fonksiyonunun bazı temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

(i) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ veya $\frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z)$, (Lebedev, 1966)

(ii) $\Gamma(n+1) = n!$, (Lebedev, 1966)

İspat. (i) (4.1) eşitliğinde z yerine $z+1$ alınıp kısmi integrasyon alma metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^{z+1-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty t^z e^{-t}dt \\ &= \left[-e^t t^z\right]_{t=0}^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \\ &= z\int_0^\infty dt \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Eğer n pozitif bir tamsayı ise, (i) de elde edilen formül n defa arka arkaya uygulanırsa,

$$\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$$

elde edilir. Bu da bize Gamma fonksiyonunun faktöryel fonksiyonunun bir genellemesi olduğunu gösterir. □

Gamma fonksiyonu, sayısız nokta haricinde yani fonksiyonun basit kutup noktasına sahip olduğu 0 (sıfır) noktası ve pozitif olmayan tam sayılar hariç tüm kompleks düzlemde analitik olan (aynı zamanda meromorf olarak da adlandırılan) bir fonksiyondur. Bu anlamda aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 4.1.1. $\Gamma(z)$ Gamma fonksiyonu $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ de analitik bir fonksiyon tanımlar.

Gamma fonksiyonu özel fonksiyon teorisinin köşe taşı olup, çeşitli kombinasyonel ve hipergeometrik denklemleri basitleştirmek için güçlü bir araç haline getiren çok çeşitli ve aynı zamanda kullanışlı özelliklere sahiptir. Binom katsayılarına benzer olarak, Pochhammer sembolü kombinasyonel problemlerde, olasılık teorisinde ve algortima geliştirmede çok önemli bir rol oynamaktadır. Belirli bazı bağıntıların geliştirilmesinde ve Hipergemotrik serilerin sadeleştirilmesinde Pochammer sembolünü kullanmak Binom katsayılarını kullanmaktan daha yararlı olabilmektedir. Pochammer sembolü ilk olarak Alman matematikçi Leo August Pochhammer (1841-1920) tarafından tanıtılmıştır [42]. A. L. Crelle 1831 yılında benzer bir bir sembolü kullanmıştır.1880 yılında P.E. Appel ilk kez Pochhammer sembolü adını kullanmıştır. $\Gamma(z)$ fonksiyonunun terimleri içerisinde ve matematikte yaygın olarak kullanılan Pochhammer sembolünün tanımı şöyledir.

Tanım 4.1.2. (**Pochhammer (veya Apell-Pochhammer)Sembolü**) Γ Gamma fonksiyonu olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ ve $a \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ için Pochhammer sembolü

$$(a)_n := \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} a(a+1)\dots(a+n-1), & n \neq 0 \text{ ise} \\ 1, & n = 0 \text{ ise} \end{cases} \tag{4.2}$$

olarak tanımlanır.

Özel olarak $a = 1$ alnırsa

$$\begin{aligned}(1)_n &= 1.(1+1)...(1+n-1)\\ &= 1.2\dots n\\ &= n!\\ &= \Gamma(n+1)\end{aligned}$$

olur. Bu nedenden dolayıdır ki $(a)_n$ sembolü temel faktöryel fonksiyonu olarak da adlandırılır. Öte yandan

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

ifadesinde $z+1$ yerine $a+n$ yazılır ve bu işlem n kez tekrarlanırsa

$$\begin{aligned}\Gamma(a+n) &= (a+n-1)\Gamma(a+n-1)\\ &= (a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2)\\ &= (a+n-1)(a+n-2)\dots(a+1)a\Gamma(a)\\ &= (a)_n\Gamma(a)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak Pochhammer sembolü Gamma fonksiyonu türünden ifade edilebilir. Yani,

$$\Gamma(a+n) = (a)_n\Gamma(a) \Rightarrow (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \tag{4.3}$$

olup buradan da

$$(a)_n = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a+n-1} e^{-t} dt$$

elde edilir.

Lemma 4.1.2. a kompleks ya da reel sayı, m ve n doğal sayılar olmak üzere,

(i) $(a)_{n+1} = a(a+1)_n$

(ii) $(a)_{m+n} = (a)_m (a+m)_n$

İspat.

(i) (4.3) eşitliğinde n yerine $n+1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}(a)_{n+1} = \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a)} &= \frac{a\Gamma(a+n+1)}{a\Gamma(a)} \\ &= \frac{a\Gamma((a+1)+n)}{\Gamma(a+1)} \\ &= \frac{a(a+1)_n\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1)} \\ &= a\,(a+1)_n\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii)

$$\begin{aligned}\frac{(a)_{m+n}}{(a)_n} &= \frac{(a)(a+1)(a+2)\ldots(a+m-1)(a+m)(a+m+1)(a+m+n-1)}{(a)(a+1)(a+2)\ldots(a+m-1)} \\ &= (a+m)(a+m+1)\ldots(a+m+n-1) \\ &= (a+m)_n\end{aligned}$$

elde edilir. □

Bir diğer özel fonksiyonda Beta fonksiyonudur. Birçok durumda bilindiği üzere Gamma fonksiyonunun kombinasyonları kullanılır. Ancak bazı durumlarda bu kombinasyonlar yerine Beta fonksiyonunun kulanılması daha uygun olmaktadır. Olasılık teorisi ve istatitikte Beta dağılımı $[0,1]$ aralığında iki pozitif şekil parametresi (tipik olarak a ve b) ile normalize edilmiş bir sürekli olasılık dağılımlarının bir ailesidir. Beta dağılımı çok çeşitli disiplinlerde sınırlı sonlu aralıkta sınırlandırlımış rastgele değişkenlerin davranışını modellemek için uygulanmaktadır. Popülasyon genetiğinde alel frekanslarının istatistiksel bir açıklaması örnek olarak verilebilir. Bayesci çıkarımda Beta dağılımı Bernoulli, Binom ve Geometri için aynı türden eşlenik olasılık dağılımlarıdır. Örneğin Beta dağılımı Bayesci analizde, bir uzay aracının belirli bir görevi başarıyla tamamlama olasılığı ile ilgili bilgileri tanımlamak için kullanılabilir.

Beta ve Gamma fonksiyonları arasındaki ilişki Hipergeometrik fonksiyonlarla ilgili birçok eşitlik için bir temel oluşturur. Beta fonksiyonu, Euler Legendre'nin 'Exercises de Calculus Integral', Vol.I(1881) adlı eserinde Euler'in birinci tip Euler integrali olarak adlandırıldığı $\int x^e(1-x)^n dx$ formundaki integralden ortaya çıkmıştır [43]. Klasik anlamda Beta fonksiyonunun tanımı aşağıda gibidir.

Tanım 4.1.3. (**Beta Fonksiyonu**)Birinci tip Euler integrali olarak da adlandırlan Beta fonksiyonu $\Re(x) > 0$ ve $\Re(y) > 0$ olmak üzere

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Beta fonksiyonu yukarıdaki tanıma eşdeğer olarak eğer (4.4) eşitliğinde $t = sin^2\theta$ dönüşümü yapılırsa,

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (sin\theta)^{2x-1}(cos\theta)^{2y-1} dt$$

olur ki, burada $t = \frac{u}{u+1}$ alınırsa

$$B(x,y) = 2\int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Beta fonksiyonunun simetrikliği (4.4) Beta fonksiyonunun tanımından direkt olarak elde edilir. Beta fonksiyonuna ait birçok özellik arasında en belirgin olanı $x > 0$ ve $y > 0$ olmak üzere,

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y,x) \tag{4.5}$$

şeklinde verilebilir. Bu eşitlik Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasındaki ilişkiyi verir. Ayrıca klasik $B(x,y)$ Beta fonksiyonu matematik, fizik, mühendislik ve istatistik bilimlerindeki çeşitli alanlardaki önemli rolü nedeniyle en temel özel fonksiyonlardan biridir. Bu ilişki kullanılarak Beta fonksiyonunun (4.5) ile verilen simetriklik özelliği kolayca gösterilebilir. Bunun için (4.1) ifadesinde $t = s^2$ dönüşümü yapılırsa

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty \left(s^2\right)^{x-1} e^{-s^2}dt$$
$$= 2\int_0^\infty s^{2x-1}e^{-s^2}dt \tag{4.6}$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\Gamma(y) = 2\int_0^\infty s^{2y-1}e^{-t^2}dt \tag{4.7}$$

yazılabilir. Bu aşamada (4.6) ve (4.7) eşitlikleri taraf tarafa çarpılıp, $s = rcos\theta$ ve $t = rsin\theta$ kutupsal koordinatlarına geçiş yapılırsa,

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty r^{2x+2y-2}(cos\theta)^{2x-1}(sin\theta)^{2y-1}e^{-r^2}drd\theta \\ &= \left[2\int_0^{\pi/2}(cos\theta)^{2x-1}(sin\theta)^{2y-1}d\theta\right]\left[2\int_0^\infty r^{2x+2y-2}e^{-r^2}dr\right] \\ &= B(x,y)\Gamma(x+y)\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da istenen sonuçtur.

Tüm özel fonksiyonlar hipergeometrik fonksiyonların terimleri içerisinde ifade edilebildiklerinden, hipergeometrik fonksiyonlar özel tanımlı fonksiyonlar alanında merkezi bir rol oynamaktadır. Bu nedenle birçok alanda sıkça kullanılır ve parametrik yapısı çeşitli uygulamalı problemlerin çözümleri için güçlü bir matematiksel araç sağlar. Hipergeometrik seri ilk olarak 1656 yılında İngiliz matematikçi J. Wallis (1616-1703) tarafından Arithmetica infinitorum'da $1+a+a(a+1)+a(a+1)(a+2)+\dots$ şeklindeki sonsuz serileri tanımlamak için kullandı [44]. Arithmetica infinitorum ve De sectionibus conicis adlı yayınlarıyla matematik ve geometri adınına oldukça önemli katkı sağlayan Wallis, hipergeometrik terimini geometriklikten daha fazlasını ifade etmek için kullanan ilk kişiydi. 1836 yılında hipergeometrik terimi Ernst Eduard Kummer (1810-1898) tarafından mevcut hali $1+\frac{a.b}{c.1}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1).1.2}x^2+\dots$ şeklinde olan hipergeometrik serisi için kullandı. Hipergeometrik seriler teorisinin büyük bir bölümüm, Gauss tarafından 1812 yılının ilk dönemlerinde 'Disquisitiones generales circa seriem infinitam' adlı yayınlarında sunduğu ilk çalışmalarının bir sonucudur [45].

4.2. Hipergeometrik Fonksiyon ve Özellikleri

Tanım 4.2.1. (**Gauss Hipergeometrik Seri**) a, b ve c reel ya da kompleks parametreler ve $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ olmak üzere $|z| < 1, z \in \mathbb{C}$ için Gauss hipergeometrik serisi

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = 1 + \frac{ab}{c1!}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}z^2 + \cdots \tag{4.8}$$

ile verilir. ${}_2F_1(a,b;c;z)$ gösteriminde kullanılan 2 sayısı payda buluna ve a, b ile verilen parametrelerinin sayısını, 1 ise paydada bulunan ve c ile verilen parametre sayısını gösterir. Uygulamalarda yazım kolaylığı sağlamak adına bazen ${}_2F_1(a,b;c;z)$ yerine $F(a,b;c;z)$(Gauss gösterimi) bazen de kısaca $F(z)$ kullanılabilmektedir. Ayrıca $a = c$ ve $b = 1$ alındığında (4.8) ile verilen seri termonolojide bilinen geometrik seri haline gelir ki ismini bu gerçekten almaktadır. Hipergeometrik seriler payda parametrelerinde 0 veya negatif bir tamsayı olduğunda tanımlanamaz, çünkü bu sıfıra bölüm ile sonuçlanır. Öte yandan ${}_2F_1(a,b;c;z) = {}_2F_1(b,a;c;z) =$ olduğu için Gauss hipergeometrik serisi pay parametrelerine göre simetriktir.

Teorem 4.2.1. $\Re(c-a-b) > 0$ için ${}_2F_1(a,b;c;z)$ Gauss hipergeometrik serisi

(i) Eğer $|z| < 1$ ise bu durumda bütün z ler için mutlak yakınsak,

(ii) Eğer $|z| > 1$ ise bu durumda bütün z ler için ıraksak,

(iii) Eğer $|z| = 1$ ise bu durumda bütün z ler için sınırda yakınsaktır.

İspat. ${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k$ alalım. $\dfrac{(a)_{n+1}}{(a)_n} = a + n$ olduğundan Gauss hipergeometrik serisi tanımında verilen (4.8) den

$$\left| \frac{t_{n+1}}{t^n} \right| = \frac{|z| \left(1 + \frac{|a|}{n}\right) \left(1 + \frac{|a|}{n}\right)}{\left(1 + \frac{|c|}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

elde edilir. Bu durumda oran testi $|z| < 1$ için mutlak yaknsaklığı, $|z| > 1$ için ise ıraksaklığı verir. $|z| = 1$ olması durumunu incelemek için Gamma fonksiyonunun $a \neq 0, -1, -2, \ldots$

ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\Gamma(a) = \dfrac{(n-1)!n^a}{(a)_n}$ özelliği kullanılarak,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{n^{1+\delta}(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(a)_n}{(n-1)!n^a}\frac{(b)_n}{(n-1)!n^b}\frac{(n-1)!n^c}{(c)_n}\frac{(n-1)!n^{1+\delta}}{n!n^{c-a-b}}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{\Gamma(a)}\frac{1}{\Gamma(b)}\Gamma(c)\right|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{n^{c-a-b-\delta}}\right| \tag{4.9}$$

elde edilir. $\Re(a-b-c-\delta) = 2\delta - \delta = \delta > 0$ olduğu için elde edilen (4.9) ifadesindeki limiti sıfırdır ve böylece $\sum_{k=0}^{\infty} t_k$ serisinin yakınsaklığından $\Re(c-a-b) > 0$ olması durumunda ${}_2F_1(a,b;c;z)$ hipergeometrik serisi $|z| = 1$ sınırında yakınsaktır. $\square$

Tanım 4.2.2. (**Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu**) a, b ve c reel ya da kompleks parametreler ve $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ olmak üzere $|z| < 1, z \in \mathbb{C}$ için (4.8) ile verilen Gauss hipergeometrik serisinin

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}z^n \tag{4.10}$$

toplamı Gauss hipergeometrik fonksiyonu olarak adlandırılır.

Gauss hiprgeometrik fonksiyonu heryerde sürekli olup ${}_2F_1(z)$ veya ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a \quad , \quad b \\ c \end{matrix}\middle| z\right)$ ve $\dfrac{{}_2F_1(a,b;c;z)}{\Gamma(c)} ={}_2 F_1(a,b;c;z)$ gibi alternatif gösterimlere de sahiptir. Hipergeometrik fonksiyonlar sadece z nin değil dört kompleks seğişkeninin bir fonksiyonu olarak kabul edilebilir. Hipergeometrik fonksiyonun gücü onun birçok standart fonksiyonu temsil etme yeteneğinden kaynaklanmaktadır. Bu anlamda aşağıda bazı örnekler verilmiştir.

$$\log(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1} = -z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n(1)_n}{(2)_n n!} = -zF(1,1;2;z), |\arg(1-z)| < 1$$
$$(1-z)^{-a} = F(a,b;b;z), |z| < 1$$
$$cosz = F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; sin^2 zx\right)$$
$$arcsinz = zF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right), |\arg(1 \mp iz)| < \pi$$
$$coshz = \lim_{a,b\to\infty} F\left(a, b; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4ab}\right)$$
$$e^z = \lim_{a\to\infty} F\left(a, b; b; \frac{z}{a}\right)$$

Hipergeometrik fonksiyonlar aynı zamanda üstel fonksiyonların bir genellemesidir. Analitik anlamda istenilen amaçlar doğrultusunda cebirsel olarak manipüle edilebilen ve kolayca hesaplanabilir bir fonksiyondur. Bu yönüyle saf matematik ve uygulamalı matematik alnında kullanılabilen oldukça öneli bir matematiksel araçtır. Bu fonksiyonları kullanmanın en büyük yararı, belkide çok çeşitli genel sonuçlara özel çözümler sunmalarıdır. Hipergeometrik fonksiyonlar matematikte olduğu gibi fizik, biyoloji ve mühendislik alanlarında kullanılan birçok klasik tekniğin yeniden canlanmasına da katkıda sağlamıştır. Univalent fonksiyon teorisinde de belirli bir dönem hareketsiz kalan çalışmaları tetiklemiştir. Univalent fonksiyonlar da hipergeometrik fonksiyonların terimleri içerisinde ifade edilebilirler. Bazı iyi bilinen örnekler aşağıda verilmiştir.

$$z_2F_1(1,b;b;z) = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n(b)_n}{(b)_n(1)_n} = \frac{z}{1-z}$$
$$z_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};z^2\right) = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_2(1)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n(1)_n}(z^2)^n = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

elde edilirki bu iki fonksiyon $\mathcal{S}^*$ sınıfının ve $\mathcal{C}$ sınıfının en önemli iki üyesidir. Öte yandan $a=c=1$ ve $b=2$ alınırsa

$$z_2F_1(1,2;1;z) = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n(2)_n}{(1)_n(1)_n} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

elde edilir ki bu fonksiyon da univalent fonksiyon teorisinde ekstremal fonksiyon olarak bilinen Koebe fonksiyonudur.

Gauss hipergeometrik fonksiyonun çok sayıda özelliği ve bağıntısı üzerine birçok çalışma yapılmıştır (Bak, [10],[46],[47],[48],[49],[50],[51],[52],[53]). Bu çalışma kapsamında mevcut özelliklerin bir özeti olmasa bile, bu bölümde çalışmamızla ilgili olanlar şöyledir.

Teorem 4.2.2. $|z|<1$ için ${}_2F_1(1,2;1;z)$ fonksiyonu, $c=0,-1,-2,\dots$ basit kutup noktları hariç a,b ve c için analitiktir.

İspat. Sıfır ile bölünme ihtimali olmayan $\dfrac{{}_2F_1(a,b;c;z)}{\Gamma(c)} == \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{\Gamma(c^n)(1)_n}z^n$ tam fonksiyonunu düşünelim.teorem (4.2.1)'in ispatında olduğu gibi $\Gamma(a) = \dfrac{(n-1)!n^a}{(a)_n}$

özzelliği kullanılırsa $|z|<1$ için

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(a)_n(b)_n z^{1/2}}{\Gamma(c+n)n!}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(a)_n}{(n-1)!n^a}\frac{(b)_n}{(n-1)!n^b}\frac{(n-1)!n^c}{\Gamma(c+n)}\frac{z^{k/2}}{n^{1-c-a-b}}\right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)}\frac{1}{\Gamma(b)}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{z^{k/2}}{n^{1-c-a-b}}\right|\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $|z|<1$ için $\left|\frac{(a)_n(b)_n z^n}{\Gamma(c+n)n!}\right| < M|z|^{k/2}$ olacak şekilde a,b ve c den bağımsız bir M sabiti vardır. Bu da bize karşılaştırma testine göre $\frac{1}{\Gamma(c)}{}_2F_1(a,b;c;z)$ serisinin mutlak ve düzgün yakınsak olduğunu verir. Elde edilen sonuç $\Gamma(c)$ nin kutup noktalarının yerinden kaynaklanmaktadır. □

Öte yandan, hipergeometrik fonksiyon teorisinde parametrelerden birinin ∓ 1 ötelenmesiyle bitişik hipergeometrik terimi tanıtıldı.Bu anlamda, örneğin ${}_2F_1(a+1,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonu ${}_2F_1(a,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonuna bitişiktir. Bu terim ilk olarak Gauss taraffından tanıtılmıştır.

Tanım 4.2.3. (**Gauss Bitişik Hipergeometrik Fonksiyon**) Verilen iki hipergeometrik fonksiyon aynı kuvvet serisi parametrelerine sahipler ve parametrelerden iki çift eşitse ve üçüncü çift ∓ 1 farklıysa bu iki geometrik fonksiyona bitişik geometrik fonksiyonlar denir. ${}_2F_1(a+1,b;c;z)$ ye bitişik hipergeometrik fonksiyonlar sırasıyla ${}_2F_1(a\mp 1,b;c;z)$,${}_2F_1(a,b\mp 1;c;z)$ ve ${}_2F_1(a,b;c\mp 1;z)$ dir.

Bitişik hipergeometrik fonksiyon uygulamaları, hipergeometrik serilerin değerlendirilmesinde, bu tür seriler için toplam ve dönüştürme formüllerinin türetilmesinde ve bir hipergeometrik fonksiyon için bitişik hipergeometrik fonkksiyon bulmak için kullanılabilir. Gauss, ${}_2F_1(a+1,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonunun herhangi iki bitişik hipergeometrik fonksiyonunun bir lineer kombinasyonu olarak, a,b,c parametrelerinin ve z nin rasyonel katsayıları cinsinden yazılabileceğini göstermiştir. Toplamda bu tür 15 tekrarlama ilişkisi kurulabilir ve bunlar da bulunabilir.

Hipergeometrik fonksiyonlar uygulamalı bilimlerde, örneğin ısı iletimi, radyasyon ve madde arasındaki etkileşim, elektromanyetik veya akustik dalgaların yayılması, nükleer reaktör teorisi, yıldızların iç yapısı, atomlardan foton saçılması, sinir ağları ile bağlantılı olarak oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu anlamda hipergeometrik fonksiyonların türevleri de sık sık kullanılabilmektedir.

Teorem 4.2.3. $c = 0, -1, -2, \ldots$ basit kutup noktları hariç a, b ve c için

$$\frac{d}{dz} {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1,b+1;c+1;z)$$

dir.

Bu sunucun ard arda uygulanmasıyla aşağıdaki genelleştirilmiş türev formülü elde edilir.

$$\frac{d^m}{dz^m} {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{(a)_m (b)_m}{(m)_m} {}_2F_1(a+m,b+m;c+m;z), m \in \mathbb{N}$$

Hipergeometrik serinin temel özelliklerinden bir diğeri de Gauss hipergeometrik diferansiyel denklemlerin çözümü olmasıdır [54].Bir Gauss hipergeometrik diferansiyel denklem, $w = f(z)$ ve $a, b, c \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{dw}{dz} - abw = 0 \tag{4.11}$$

biçiminde ifade edilir. Bu denklem ilk olarak 1769 yılında Euler tarafından kurulumuş olup, Gauss ve Kummer tarafından da yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Bernard Riemann tarafından daha soyut bir işlem haline getirilmiştir. (4.11) ile verilen denklem $|z| < 1$ olmak üzere $z(1-z)$ ile bölünürse $0, 1$ ve ∞ (z yerine $1/z$ yazılırsa) noktalarının hipergeometrik denklemin düzgün tekil noktaları olduğu görülür. Öte yandan lineer diferansiyel denklemler teorisinden hatırlanacağı üzere $c_0 \neq 0$ olmak üzere s uygun bir şekilde seçilir ve $|z| < 1$ için kuvvet serisi yakınsak olmak üzere (4.11) ile verilen hipergeometrik denklem $u = z^s \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ şeklinde bir özel seri çözümüne sahip olur. (4.11) ile verilen hipergeometrik serisinin (4.11) ile verilen Gauss hipergeometrik denklemini sağladığını direkt yerine koyma suretiyle gösterebiliriz.

Gauss hipergeometrik fonksiyonunun integral gösterimleri, diğer hipergeometrik özdeşlikleri geliştirmek için güçlü bir matematiksel araç sağlar.Bu gösterimler sadece $|z| < 1$ için doğru olan durumlarda seri açılımlarından daha yararlı bir yaklaşım sunarlar. Ayrıca integral gösterimleri hipergeometrik ve Gauss fonksiyonları arasında var olan yakın ilişkiyide açık olarak gösterirler. 1784 yılında Euler, Gauss hipergeometrik fonksiyonlar için bazen Pochhammer integrali olarak da adlandırılan ünlü integral gösterimini geliştirdi. İlginç bir gözlem olarak, hipergeometrik fonksiyonlar pay paremetrelerine göre açıkça simetrik olmalarına rağmen, bu durum Euler integralinden hemen belli değildir.

Teorem 4.2.4. (**Hipergeometrik Fonksiyonlar İçin Euler İntegral Gösterimi**) 1 den ∞ ye kadar reel eksen boyunca kesilmiş kompleks düzlemdeki bütün z ler ve $\Re(c) > \Re(b) > 0$ için

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt $$

olup, burada $\arg t = \arg(1-t) = 0$ olup $(1-zt)^{-a}$ nın esasa argüment değerine eşit olduğu anlaşılmalıdır.

İspat. İlk oarak

$$ \frac{(b)_n}{(c)_n} = \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)\Gamma(b)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)} \tag{4.12} $$

olarak yazalım.Bu durmda eğer $\Re(b-c) > 0$ ise (4.4) ile verilen Beta-Gamma fonksiyonu ilişkisinden (4.12) ifadesi yeniden düzenlenirse

$$ \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)} = B(b+n, c-b) = \int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}dt $$

elde edilir. Bu sonuç Gauss hipergeometrik fonksiyon tanımında yerine yazılır ve ardından da toplam ve integral sırası değiştirilirse

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (zt)^{tn}}{n!} dt $$

elde edilir. Sonuç olarak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (zt)^{tn}}{n!} = (1-zt)^a$ olduğuna göre bu da bize $|r| < 1$ ve $\mathbb{R}(c) > \Re(b) > 0$ için teoremin ispatını verir. $\square$

Uzun yıllar boyunca, z nin özel değerleri için hipergeometrik fonksiyonu hesaplamak için birçok yararlı formül geliştirilmiştir. Berndt Ramanujan'ın çalışmalarını özetleyen bir çalışmasında böyle birçok hesaplama sağladı [55]. Wilfred N. Bailey (1893-1961) de böyle toplam formüllerinin yoğun bir listesini verdi [49]. Bu çalışma hipergeometrik özdeşlikler için standart bir referans olmuştur. 1812 yılında Gauss, $z = 1$ olduğunda hipergeometrik serileri hesaplayan temel özdeşlikler verdi.

Teorem 4.2.5. (**Gauss Toplam Teoremi**) $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, $\Re(c) > \Re(b) > 0$ ve $\Re(c - a - b) > 0$ için

$$ {}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \tag{4.13}$$

dir.

İspat. Teorem (4.2.4) ile verilen Euler integral gösterimi içerisinde $\Re(c) > \Re(b) > 0$ iken $z \to 1^+$ alınır ve (4.4) ile verilen Beta-Gamma fonksiyonu ilişkisi de kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;1) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-a-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)} \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \end{aligned}$$

elde edilir. Buda istenen sonuçtur. □

Gauss hipergeometrik fonksiyonu, herhangi bir sayıda pay ve payda parametresi içerebilen genel hipergeometrik fonksiyonu oluşturmak için genişletilebilir. Slate'e göre, bu genişletme ilk olarak 1828 yılında Thomas Clausen (1801-1885) tarafından bir anlamda üç pay ve iki payda parametresi kullanılarak yapılmıştır [56]. Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon, matematik ve fiziğin tüm özel fonksiyonları bu fonksiyonun terimleri içerisinde ifade edilebildiğinde, parametre sayısı arttıkça işlevselliği de arttığı için özellikle yararlıdır. Genelleştirilmiş ${}_pF_q$ hipergeometrik fonksiyonu p pay parametresi ve q payda parametresi içeren bir toplamdır.

Tanım 4.2.4. $p, q \in \mathbb{N}^+$ ve $b_j \neq 0, -1, -2, \ldots$ olmak üzere, ${}_pF_q$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon

$$ {}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;(b_1,\ldots,b_q;z) = {}_pF_q \begin{pmatrix} a_1 & ,\ldots, & a_p \\ & & ;z \\ b_1 & ,\ldots, & b_q \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n n!} z^n \tag{4.14}$$

şeklinde tanımlanır.

Yerine koyma metodu kullanılarak (4.14) ile verilen ${}_pF_q(z)$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonunun

$$\left[z\frac{d}{dz}\left[\left(z\frac{d}{dz}+b_1-1\right)\dots\left(z\frac{d}{dz}+b_q-1\right)\right]-z\left(z\frac{d}{dz}+a_1\right)\dots\left(z\frac{d}{dz}+a_p\right)\right]w=0$$

diferensiyel denklemini sağladığı gösterilebilir.

Gauss hipergeometrik fonksiyonunda olduğu gibi, hiçbir payda parametresinin sıfır ya da negatif tamsayı olmadığı kabul edilir. Eğere herhangi bir pay parametresi sıfır veya negatif bir tamsayı ise fonksiyon bir hipergeometrik polinom üretir. Öte yandan (4.14) eşitliğinde $p=2$ ve $q=1$ alınırsa ${}_2F_1(a,b;c;z)$ Gauss hipergeometrik fonksiyonu elde edilir. ${}_0F_1(-,b;z)$ de olduğu gibi pay veya paydada paramter olmadığını göstermek için bir çizgi kullanılır. Standart matematiksel fonksiyonların birçoğunun hipergeometrik fonksiyonlarla ifade edilebildiğini biliyoruz. Bu fonksiyonların bir listesi [46], [47], [57], [58] ve [59] de bulunabilir. Aşağıda ${}_pF_q$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların temelleri içerisinde ifade edilen bazı matematiksil fonksiyon örnekleri verilmiştir.

$$\begin{aligned}
{}_0F_0(-,-;z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z\\
{}_0F_1(-,\frac{3}{2};\frac{-z^2}{4}) &= sinz\\
{}_0F_1(-,\frac{1}{2};\frac{-z^2}{4}) &= cosz\\
{}_1F_0(a,-;z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_nz^n}{n!}=(1-z)^{-a}.
\end{aligned}$$

Gauss hipergeometrk fonksiyonunda olduğu gibi, genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonunun da yakınsama koşullarını göz önünde bulundurmamız gerekir.

Teorem 4.2.6. ${}_pF_q(a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;z)$ genelleştirlimiş hipergeometrik serisi, eğer $p\le q$ ise bütün z ler için yakınsa,eğer $p=q+1$ ise $|z|<1$ için yakınsak ve $|z|>1$ için ise ıraksak, eğer $p>q+1$ ise $z\neq 0$ için ıraksaktır ve seri sonuç üretmez.

İspat. Faktöryel özelliklerinden,

$$\left|\frac{t_{n+1}}{t_n}\right|=\frac{|z|n^{p-q-1}\left(1+\frac{|a_1|}{n}\right)\dots\left(1+\frac{|a_p|}{n}\right)}{\left(1+\frac{|b_1|}{n}\right)\dots\left(1+\frac{|b_q|}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} \tag{4.15}$$

elde edilir. Bu aşamada, oran testi kullanılarak ifade edilen yakınsaklık koşulları $|z|$ ve n^{p-q-1} deki $p-q-1=0$, $p-q-1<0$ veya $p-q-1>0$ bağıntıları dikkate alınarak doğrulanır. $\square$

Ayrıca $p=q+1$ olmak üzere ${}_{q+1}F_q(z)$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki şart altında $|z|<1$ için yakınsaktır. Burada parametretrik fazlalık $\sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{q+1} a_j$ ile tanımlanır. Bu durumda Teorem (4.2.6) da verilenlere ilave olarak, eğer $p=q+1$ olmak üzere eğer$|z|=1$ için $\Re\left(\sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{q+1} a_j\right)>0$ ise ${}_{q+1}F_q(z)$ genelleştirilmiş hipergeometrik serisi mutlak yakınsaktır; eğer $|z|=1$ ve $z\neq 1$ için $-1<\Re\left(\sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{q+1} a_j\right)\leq 0$ ise ${}_{q+1}F_q(z)$ genelleştirilmiş hipergeometrik serisi şartlı yakınsaktır ve nihayetinde $|z|=1$ ve $z\neq 1$ için $\Re\left(\sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{q+1} a_j\right)\leq -1$ ise ıraksaktır.

Hipergeometrik fonksiyonlar için en iyi bilinen klasik sonuçlardan bazılarını verdikten sonra esas çalışma alanımıza geçmeden önce çok özel bir hipergeometrik fonksiyonu hatırlayalım. Yukarıda $p\leq q+1$ olması durumunda ${}_pF_q(z)$ genelleştirilmiş hipergeometrik serisinin yakınsaklık durumları inceledik. Bu durumda $q\in\{0,1\}$ için ${}_0F_0(-;-z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$ üstel fonksiyonu, ${}_1F_0(a;-;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n$ Binom fonksiyonu, ${}_0F_1(-;c;;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(c)_n n!}z^n$ Bassel fonksiyonu ve ${}_2F_1(z)$ Gauss fonksiyonuyla ve nihayetinde de ${}_1F_1(z)$ fonksiyonuyla karşılaşırız.${}_1F_1(z)$ fonksiyonu konfluent hipergeometrik fonksiyon olarak adlandırlır. Ayrıca bu fonksiyon Pochhammer-Barnes fonksiyonu veya Kummer serisi olarak adlandırılmaktadır. Bu fonksiyondan uygun parametre seçimiyle birçok özel fonksiyon elde edilebildiğinden matematiksel analizde oldukça kullanılışlıdır. Bazı durumlarda Üstel integral, Hata fonksiyonları, Hermite ve Bassel fonksiyonlarıdır. Konfluent hipergeometrik fonksiyonlar bu nedenle dalga mekaniği, kuantum teorisi, hidrodinamik, akustik, optik ve istatistik gibi alanlarda oldukça geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu fonksiyonun temel özellikleri 1836 yılında Kummer tarafından verildi [60]. ${}_1F_1(z)$ konfluent hipargeometrik fonksiyonu yaygın olarak Hummer'in $\phi(a;c;z)$ sembolüyle veya $M(a;c;z)$ ile de gösterilmektedir. Burada verilen bilgiler ışığı altında aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 4.2.5. $|z| < 1$ ve $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ için konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$\phi(a;c;z) = M(a;c;z) = {}_1F_1(a;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n (1)_n} z^n \tag{4.16}$$

olarak tanımlanır.

Yerine yazma metoduyla (4.16) ile verilen konfluent hipergeometrik fonksiyonunun Kummer'in

$$z\frac{d^2w}{dz^2} + (b-z)\frac{dw}{dz} - aw = 0$$

diferensiyel denkleminin bir çözümü oduğu gösterilebilir. Bazı konfluent hipergeometrik fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
{}_1F_1(a,a;z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_n)}{a_n n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = {}_0F_0(-,-;z) = e^z \\
{}_1F_1(1;2;z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n = \frac{e^z - 1}{z}.
\end{aligned}$$

Gauss hipergeometrik fonksiyonlar için ispatlarıyla birlikte incelediğimiz çeşitli temel özellikler konfulent hipergeometrik fonksiyonlar için de verilebilir (daha geniş bir liste için bak, [15], [59], [12]). Bu özelikler aşağıda listelenmiştir.

$$\frac{d}{dz}\phi(a;c;z) = \frac{a}{c}\phi(a+1;c+1;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\phi(a;c;z) = \frac{(a)_n}{(c)_n}\phi(a+n;c+n;z), n \in \mathbb{N}$$

$$\phi(a;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a\Gamma(c-a))} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \Re(c) > \Re(a) > 0.$$

5. HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARIN STARLIKE VE KONVEKS OLMASI

Tezimizin bu bölümünde $zF(a,b;c;z)$ şeklindeki Gauss hipergeometrik fonksiyonların starlike (yıldızıl) ve konveks fonksiyonların muhtelif altsınıflarında olması için a,b,c parametreleri üzerinde bazı şartlar verildi. 1986 yılında St. Ruscheweyh ve V. Singh hipergeometrik fonksiyonların yıldızllık derecelerini araştırdılar [61]. Merkes ve Scott, $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzer $zF(a,b;c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfında olması için yeterlilik şartlarını araştırdılar [62]. Birçok bilim adamı tamamen farklı yaklaşımları kullanarak son dönemlerde Gauss ve Konfluent hipergeometrik fonksiyonların univalent fonksiyonların belirli altsınıflarında olabilmeleri için yeterlilik şartlarını olabildiğince geliştirdiler [63], [64], [65], [66], [67], [68] . Tezin bu kısmıyla ilgili olarak İsmet Yıldız, Alaattin Akyar ve Oya Mert tarafından hazırlanan ’On Sufficient Condition for Starlikeness of Confluent Hypergeometric Functions’ adlı bildiri benim tarafımdan Yıldız Teknik Üniversitesi tarafından düzenlenen konferansta sunulmuş olup Sigma dergisinde tam metin olarak yayımlanmıştır [69]. Ayrıca tezimizin konusuyla ilgili olarak hazırladığımız makale Turkish journal of mathematics adlı dergide basılmıştır [70].

$0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere, üçüncü bölümde verilen $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfının bir alt sınıfı olup $z \in \mathbb{D}$ için $\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < 1 - \alpha$ eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{S}_1^*(\alpha)$ ile gösterilir. $\mathcal{S}_1^*(\alpha)$ sınıfı için Taylor katsayısı sınırlamaları ve diğer özellikler [71], [72], [73], [74], [75] de bulunabilir. Bu çalışmada öncelikle biz $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $zF(a,b;c;z)$ nin $\mathcal{S}_1^*(2^{-r})$ sınıfının bir elemanı olabilmesi için a,b,c parametreleri üzerinde bir yeterlilik şartı belirledik. Ayrıca $zF(a,b;c;z)$ nin $\mathcal{S}_1^*(2^{-r})$ ve $\mathcal{S}^*(2^{-r})$ nin bir elemanı olması için a,b,c parametreleri üzerinde bir gerek ve yeter şart belirledik. Öte yandan Teorem (3.3.2) Alexander Duality teoreminden biliyoruz ki, bir f fonksiyonuna $\alpha \in [0,1)$ derceden konveks fonksiyonların oluşturduğu $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfındadır denir eğer $zf'(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ ise. Bu durumda $\mathcal{C}_1(\alpha)$ altsınıfındadır denir, eğer $zf'(z) \in \mathcal{S}_1^*(\alpha)$ ise. Yani $zf'(z) \in \mathcal{S}_1^*(\alpha)$ şartını sağlayan $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{C}_1(\alpha)$ ile gösterilir. Son olarak çalışmamızda $zF(a,b;c;z)$ Gauss Hipergeometrik fonksiyonunun $\mathcal{C}(\alpha)$ ve $\mathcal{C}_1(\alpha)$ sınıfının bir elemanı olabilmesi için a, b, c parametreleri üzerinde bir yeterlilik şartı verildi. Bu anlamda çalışmamızın ana eksenin oluşturan teoremler aşağıda verimiştir [71].

Teorem 5.0.1. (3.6) ile verilen bir f fonksiyonun $\mathcal{S}_1^*(\alpha)(\mathcal{C}_1(\alpha))$ sınıfının bir elemanı olması için bir yeterlilik şartı

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha) \mid a_n \mid\leq (1-\alpha) \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha) \mid a_n \mid\leq 1-\alpha\right) \tag{5.1}$$

olmasıdır.

Teorem 5.0.2. Kabul edelim ki $f(z) = z - \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ve $a_n \geq 0$ olsun. Bu durumda f nin $\mathcal{S}_1^*(\alpha)(\mathcal{C}_1(\alpha))$ sınıfının bir elemanı olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)a_n \leq (1-\alpha) \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)a_n \leq 1-\alpha\right) \tag{5.2}$$

dir.

İlave olarak, $f \in \mathcal{S}_1^*(\alpha) \Longleftrightarrow f \in \mathcal{S}^*(\alpha)$,$f \in \mathcal{C}_1(\alpha) \Longleftrightarrow f \in \mathcal{C}(\alpha)$, and $f \in \mathcal{S}^* \Longleftrightarrow f \in \mathcal{S}$.

Bu aşamada ise, çalışmamızın ana amacını oluşturan Gauss hipergeometrik fonksiyonlarının, starlike ve konveks fonksiyonların muhtelif alsınıflarında olması ile ilgili olarak teoremler ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Teorem 5.0.3. Eğer $a, b > 0$ ve $c > a+b+1$ ise, bu durumda $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $zF(a,b;c;z)$ fonksiyonunun $S_1^*(2^{-r})$ sınfının bir elemanı olması için bir yeterlilik şartı

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[1+\frac{ab}{(1-2^{-r})(c-a-b-1)}\right] \leq 2. \tag{5.3}$$

olmasıdır.

Aynı zamanda (5.3) şartı ${}_2F_1(a,b;c;z) = z(2-F(a,b;c;z))$ olarak tanımlanan Gauss hipergeometrik fonksiyonunun $\mathcal{S}^*(2^{-r})(\mathcal{S}_1^*(2^{-r}))$ sınıfında olması için bir gerek ve yeter şarttır.

İspat. Gerekli olan cebirsel işlemler yapıldığında

$$
\begin{aligned}
zF(a,b;c;z) &= z\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}z^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}z^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}}z^n \\
&= \frac{(a)_0(b)_0}{(c)_0(1)_0}z+\frac{(a)_1(b)_1}{(c)_1(1)_1}z^2+\ldots \\
&= \frac{1.1}{1.1!}z+\frac{a.b}{c.1!}z^2+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}z^3+\ldots \\
&= z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}}z^n
\end{aligned}
$$

olduğundan Teorem (5.0.1) ’e göre

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-2^{-r})\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}} \leq (1-2^{-r}).$$

olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Öte yandan

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}(n-2^{-r})\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty}(n+1-2^{-r})\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_{n-1}}+(1-2^{-r})\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $(a)_n = a(a+1)_{n-1}$ olmasına dikkat edilir ve (5.4) ye uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)_{n-1}b(b+1)_{n-1}}{c(c+1)_{n-1}(1)_{n-1}}+(1-2^{-r})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n} \\
&= \frac{ab}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}}{(c+1)_{n-1}(1)_{n-1}}+(1-2^{-r})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}) \\
&= \frac{ab}{c}\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}+(1-2^{-r})\left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}-1\right] \\
&= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[\frac{ab}{c-a-b-1}+(1-2^{-r})\right]-(1-2^{-r}) \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

şeklini alır. Ancak elde edilen (5.5) eştliği $(1-2^{-r})$ ile üsten sınırlıdır ancak ve ancak Teorem (5.0.3) de verilen (5.3) eşitsizliği doğruysa. Bu da ispatı bitirir. Öte yandan

$${}_2F_1(a,b;c;z) = z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}}z^n,$$

olduğunda ${}_2F_1\,(a,b;c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}_1^*(2^{-r})$ ve $\mathcal{S}^*(2^{-r})$ sınıfında olması için (5.3)'in gerekliliği Teorem (5.0.2) den sağlanmış olur. □

Uyarı 5.0.1. Şart (5.3), $r \to \infty$ iken ${}_2F_1(a,b;c;z)$ Gauss hipergeometrik fonksiyonunun $\mathcal{S}$ sınıfında olması için bir gerek ve yeter şarttır.

Şimdi vereceğimiz teoremde, $zF(a,b;c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}^*(2^{-r})$ sınıfında olması için bir gerek ve yeterlilik şartını oluşturabilmek adına a,b ve c parametreleri üzerindeki bir sınırlamaya öncülük eder.

Teorem 5.0.4. Eğer $a,b > -1$, $c > 0$, ve $ab < 0$ ise, bu durumda $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $zF(a,b;c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}^*(2^{-r})(\mathcal{S}_1^*(2^{-r}))$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart $c \geq a+b+1-ab/(1-2^{-r})$ dır. Öte yandan $r \to \infty$ olmak üzere $c \geq a+b+1-ab$ şartı ise $zF(a,b;c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}$ sınıfında olması bir gerek ve yeter şarttır.

İspat. Gerekli olan cebirsel işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
z_F(a,b;c;z) &= z\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}z^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}z^{n+1} \\
&= z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}}z^n \\
&= z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a(a+1)_{n-2}b(b+1)_{n-2}}{c(c+1)_{n-2}(1)_{n-1}}z^n \\
&= z + \frac{ab}{c}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a+1)_{n-2}(b+1)_{n-2}}{(c+1)_{n-2}(1)_{n-1}}z^n \\
&= z - \mid\frac{ab}{c}\mid\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a+1)_{n-2}(b+1)_{n-2}}{(c+1)_{n-2}(1)_{n-1}}z^n
\end{aligned}$$

olduğundan Teorem (5.0.2) 'e göre

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-2^{-r})\frac{(a+1)_{n-2}(b+1)_{n-2}}{(c)_{n-2}(1)_{n-1}} \leq \mid\frac{c}{ab}\mid(1-2^{-r}) \tag{5.6}$$

olduğunu göstermeliyiz. Dikkat edilirse elde edilen (5.6) eşitsizliğinin sol tarafında eğer $c \leq a+b+1$ ise ıraksaktır. Bu aşamada, gerekli olan cebirsel işmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}(n-2^{-r})\frac{(a+1)_{n-2}(b)_{n-2}}{(c+1)_{n-2}(1)_{n-1}} &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2-2^{-r})\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_{n+1}} \\
= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_{n+1}} &+ \sum_{n=0}^{\infty}(1-2^{-r})\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_{n+1}}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_n} + \frac{c}{ab}(1-2^{-r}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}$$
$$= \frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + (1-2^{-r})\frac{c}{ab}\left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} - 1\right].$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (5.6) eşitsizliği

$$\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[1+(1-2^{-r})\frac{c-a-b-1}{ab}\right] \leq (1-2^{-r})\left[\frac{c}{|\,ab\,|} + \frac{c}{ab}\right] = 0 \tag{5.7}$$

eşitsizliğine denk olur.Bu durumda (5.7) doğrudur ancak ve ancak $1+(1-2^{-r})(c-a-b-1)/ab \leq 0$ veya eşiti olarak $c \geq a+b+1-ab/(1-2^{-r})$ ise.Bu da ispatı tamamlar.

□

Öte yandan $r \to \infty$ olduğu zaman Teorem (5.0.2) nin başka bir uygulaması olur. Son iki teorem ise konvekslik durumu için Teorem (5.0.3) ve Teorem (5.0.4) ye paralel olacaktır.

Teorem 5.0.5. Eğer $a,b > 0$ ve $c > a+b+2$ ise, bu duruda $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $z_2F_1(a,b;c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{C}_1(2^{-r})$ sınıfında olması için bir yeterlilik şartı

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[1+\left(\frac{3-2^{-r}}{1-2^{-r}}\right)\left(\frac{ab}{c-a-b-1}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{(a)_2(b)_2}{(1-2^{-r})(c-a-b-2)_2}\right] \leq 2. \tag{5.8}$$

dır. (5.8) şartı aynı zamanda ${}_2F_1(a,b;c;z) = z(2-F(a,b;c;z))$ fonksiyonunun $\mathcal{C}(2^{-r})(\mathcal{C}_1(2^{-r}))$ sınıfında olması için bir gerek ve yeter şarttır.

İspat. Teorem (5.0.1) 'e göre sadece

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-2^{-r})\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}} \leq 1-2^{-r}.$$

olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda gerekli olan cebirsel işlemler yapılırsa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-2^{-r})\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+2-2^{-r})\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}}$$
$$= (n+2)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}} - (2^{-r})\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}} \tag{5.9}$$

elde edilir. Burada da $n+2=(n+1)+1$ alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}} \end{aligned} \tag{5.10}$$

ve

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)^2\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)+1)^2\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}}+2(n+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}}+2(n+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n}}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n-1}}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_{n}(b)_{n}}{(c)_{n}(1)_{n}} \end{aligned} \tag{5.11}$$

elde edilir. Elde edilen bu (5.11) eşitliği ve (5.10) eşitliği (5.9) un sağ tarafında yerine yazlırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+2}(b)_{n+2}}{(c)_{n+2}(1)_{n}}+(3-2^{-r})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n}}+(1-2^{-r})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_{n}(b)_{n}}{(c)_{n}(1)_{n}}. \tag{5.12}$$

sonucu elde edilir. Pochhammer sembolünün $(a)_{n+k}=(a)_k(a+k)_n$ özelliği, (5.12) de kullanılırsa,

$$\frac{(a)_2(b)_2}{(c)_2}\frac{\Gamma(c+2)\Gamma(c-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}+(3-2^{-r})\frac{ab}{c}\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}+$$

$$(1-2^{-r})\left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}-1\right].$$

olarak yeniden yazabilir. Yapılacak bir cebirsel basitleştirme üzerine biz elde edilen bu son eşitlik $(1-2^{-r})$ ile üsten sınırlıdır ancak ve ancak (5.8) eşitsizliği doğruysa. Keza (5.8) eşitsizliği Teorem(5.0.2) den ${}_2F_1(a,b;c;z)=z(2-F(a,b,;c;z))$ fonksiyonunun $\mathcal{C}(2^{-r})(\mathcal{C}_1(2^{-r}))$ sınıfında olması için bir gerek şarttır. □

Teorem 5.0.6. Eğer $a,b > -1$, $ab < 0$ ve $c > a+b+2$ ise, bu durumda $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $zF(a,b;c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{C}(2^{-r})(\mathcal{C}_1(2^{-r}))$ sınıfında olması için bir gerek ve yeter şart

$$(a)_2(b)_2 + (3-2^{-r})ab(c-a-b-2) + (1-2^{-r})(c-a-b-1)_2 \geq 0. \tag{5.13}$$

olmasıdır.

İspat. $zF(a,b;c;z)$ fonksiyonu (5.6) formuna sahip olduğu için, Teorem (5.0.2) den görürüz ki bizim sonucumuz

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-2^{-r})\frac{(a+1)_{n-2}(b+1)_{n-2}}{(c+1)_{n-2}(1)_{n-1}} \leq \left| \frac{c}{ab} \right| (1-2^{-r}). \tag{5.14}$$

ye eşittir. Dikkat edilirse eğer bu son (5.14) eşitsizliğin sol tarafı yakınsak ise $c > a+b+2$ dir. Öte yandan,

$$\begin{aligned}
(n+2)(n+2-2^{-r}) &= (n+2)^2 - (n+2)2^{-r} \\
&= ((n+1)+1)^2 - ((n+1)+1)2^{-r} \\
&= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 - (n+1)2^{-r} - 2^{-r} \\
&= (n+1)^2 + (2-2^{-r})(n+1) + (1-2^{-r})
\end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-2^{-r})\frac{(a+1)_{n-2}(b+1)_{n-2}}{(c)_{n-2}(1)_{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+2-2^{-r})\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_n} + (2-2^{-r})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+2)_n(b+2)_n}{(c+2)_n(1)_n} +$$

$$(1-2^{-r})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_{n+1}}$$

$$= \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+2)_n(b+2)_n}{(c+2)_n(1)_n} + (3-2^{-r})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_n}$$

$$+(1-2^{-r})\frac{c}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}$$

$$= \frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\Big[(a+1)(b+1)$$

$$+(3-2^{-r})(c-a-b-2)+\frac{(1-2^{-r})}{ab}(c-a-b-1)_2\Big]-\frac{c(1-2^{-r})}{ab}$$

elde edilir. Elde edilen bu son eşitlik $(a+1)(b+1)+(3-2^{-r})(c-a-b-2)+((1-2^{-r})/ab)(c-a-b-1)_2 \leq 0$ ise $\mid c/ab \mid (1-2^{-r})$ ile üsten sınırlıdır ki o da Teorem (5.0.6) de verilen (5.13) eşitsizliğine denktir. Bu da teoremin ispatını bitirir. □

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında $zF(a,b;c;z)$ Gauss hipergeometrik fonksiyonlarının $r \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere $\alpha = 2^{-r}$ derceden starlike ve konveks fonksiyonların belirli altsınıflarında olabilmeleri için a,b ve c parametreleri üzerinde bazı şartlar incelenmitir. Benzer şekilde tezimin kapsamında elde edilen şartlar ${}_1F_1(a;c;z)$ şeklinedi Konfluent hipergeometrik fonksiyonların $r \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere $\alpha = 2^{-r}$ derceden starlike ve konveks fonksiyonların belirli altsınıflarında olabilmeleri için a ve c parametreleri şartların incelenmesine indirgenebilir. Yine bu çalışmanın devamında $zF(a,b;c;z)$ Gauss hipergeometrik fonksiyonlarının $r \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere $\alpha = 2^{-r}$ derceden starlike ve konveks fonksiyonların belirli altsınıflarında olabilmeleri için tez kapsamında a,b ve c parametreleri üzerinde elde edilen şartları oluşturan eşitsizliklere paralel eşitsizlikler elde edilebilir.

Bu tez pasamında elde edilen sonuçlar bilimsel kongrelerde sunulmuş ve makale formatına getirilerek alan indeksli dergide yayınlanmıştır.

7. KAYNAKLAR

[1] L. Bieberbach, “Uber die koeffizienten derjenigen potenzreihen, welche eine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteln,” *Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften*, vol. 138, pp. 940–955, 1916.

[2] P. Koebe, “Uber die uniformisierung beliebiger analytischer kurven,” *Gottinger Nachr.*, vol. 191, no. 210, p. 633–669, 1907.

[3] B. Riemann, *Theorie der Abel'schen functionen*. Georg Reimer, 1857.

[4] K. Löwner, “Untersuchungen tiber schlichte konforme abbildungen des einheitskreises,” *Math. Ann.*, no. 89, pp. 102–121, 1923.

[5] P. R. Garabedian and M. Schiffer, “A proof of the bieberbach conjecture for the fourth coefficient,” *J. Rati. Mech. Anal.*, no. 4, p. 427, 1955.

[6] M. Ozawa, “An elementary proof of the bieberbach conjecture for the sixth coefficient,” *Kodai Math. Sem. Rep.*, no. 21, pp. 129–132, 1969.

[7] R. Pederson and M. Schiffer, “A proof of the bieberbach conjecture of the fifth coefficient,” *Arch. Rational Mech. Anal.*, no. 45, pp. 161–193, 1972.

[8] L. D. Branges, “A proof of the bieberbach conjecture,” *Acta Math.*, no. 154, pp. 137–152, 1984.

[9] A. W. Goodman, “Univalent functions,” *Mariner Comp.*, 1983.

[10] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special Functions*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[11] W. W. Bell, *Special functions for scientists and engineers*, ser. Dover Books on Mathematics. London: Van Nostrand, 1968.

[12] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*. London: Cambridge Univ. Press, 1966.

[13] E. P. Merkes and W. T. Scott, “Starlike hypergeometric functions,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 12, no. 6, pp. 885–888, 1961.

[14] S. Miller and P. T. Mocanu, “Differential subordinations and inequalities in the complex plane,” *Journal of Differential Equations*, vol. 67, no. 2, pp. 199–211, 1987.

[15] S.Ruscheweyh and V. Singh, “On the order of starlikeness of hypergeometric functions,” *Journal of mathematical analysis and applications*, no. 113, pp. 1–1, 1986.

[16] G. Sansone and J. Gerretsen, *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable*. Wolters-Noordhoff, 1969.

[17] H. Silverman, "Starlike and convexity properties for hypergeometric functions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 172, no. 2, pp. 574 – 581, 1993.

[18] S. S. Miller and P. T. Mocanu, "Univalence of gaussian and confluent hypergeometric functions," *Proceedings of the American Mathematical Society*, pp. 333–342, 1990.

[19] W. Dunham, *Euler: The master of us all*. American Mathematical Soc., 2020, vol. 22.

[20] L. Euler, "1748. introductio in analysin infinitorum," *Opera (1)*, vol. 8, 1988.

[21] B. Taylor, *Methodus incrementorum directa & inversa. Auctore Brook Taylor, LL. D. & Regiae Societatis Secretario*. typis Pearsonianis: prostant apud Gul. Innys ad Insignia Principis in . . . , 1715.

[22] E. Sageng, "Colin maclaurin, a treatise of fluxions (1742)," in *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*. Elsevier, 2005, pp. 143–158.

[23] P. Montel, *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes*. Paris, 1933.

[24] K. Noshiro, "On the theory of schlicht functions," *Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics*, vol. 2, no. 3, pp. 129–155, 1934.

[25] S. E. Warschawski, "On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 38, no. 2, pp. 310–340, 1935.

[26] P. L. Duren, *Univalent functions*. Springer Science & Business Media, 2001, vol. 259.

[27] H. Prawitz, *Über mittelwerte analytischer funktionen*. Almqvist & Wiksell, 1927.

[28] B. Friedman *et al.*, "Two theorems on schlicht functions," *Duke Mathematical Journal*, vol. 13, no. 2, pp. 171–177, 1946.

[29] H. M. Srivastava, A. K. Mishra, and P. Gochhayat, "Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions," *Applied mathematics letters*, vol. 23, no. 10, pp. 1188–1192, 2010.

[30] V. I. Gavrilov, "Radius of univalence of holomorphic functions," *Matematicheskie Zametki*, vol. 7, no. 3, pp. 295–298, 1970.

[31] S. Yamashita, "Radii of univalence, starlikeness, and convexity," *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 25, no. 3, pp. 453–457, 1982.

[32] J. W. Alexander, "Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions," *The Annals of Mathematics*, vol. 17, no. 1, pp. 12–22, 1915.

[33] A. Emch *et al.*, "E. study, vorlesungen über ausgewählte gegenstände der geometrie," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 19, no. 1, pp. 15–18, 1912.

[34] C. Y. Liang, “Starlikeness of certain İntegral operatörs and properties of a subclass of close-to-convex funtions,” Master’s thesis, Universiti Sains-Malaysia, Malaysia, 2017.

[35] A. Marx, “Untersuchungen uber schlichte funktionen,” *Math. Ann.*, vol. 107, pp. 40–67, 1932.

[36] E. Strohhäcker, “Beiträge zur theorie der schlichten funktionen,” *Mathematische Zeitschrift*, vol. 37, no. 1, pp. 356–380, 1933.

[37] K. Löwner, “Untersuchungen über die verzerrung bei konformen abbildungen des einheitskreises| z|< 1, die durch funktionen mit nicht verschwindender ableitung geliefert werden,” *Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig*, vol. 69, pp. 89–106, 1917.

[38] R. Nevanlinna, “Über die konforme abbildung von sterngebieten, öfversigt av,” *Finska Vetenskaps-Societetens Förhandinger*, vol. 53, 1921.

[39] W. Kaplan *et al.*, “Close-to-convex schlicht functions.” *The Michigan Mathematical Journal*, vol. 1, no. 2, pp. 169–185, 1952.

[40] I. Jack, “Functions starlike and convex of order α,” *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 2, no. 3, pp. 469–474, 1971.

[41] L. Euler, “De valoribus integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum,” *Institutionum calculi integralis*, pp. 337–345, 1794.

[42] L. Pochhammer, “Zum problem der willensfreiheit: eine betrachtung aus dem grenzgebiet von naturwissenschaft und philosophie,” 1908.

[43] A. M. Legendre, *Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures*. Courcier, 1816, vol. 3.

[44] J. Wallis, *The arithmetic of infinitesimals: John Wallis 1656*. Springer Science & Business Media, 2004.

[45] C. F. Gauss, “Disquisitiones generales circa seriem infinitam 1+ x+,” *Werke*, vol. 3, pp. 125–16.

[46] J. Wimp, “Special functions and their applications (nn lebedev),” *SIAM Review*, vol. 7, no. 4, pp. 577–580, 1965.

[47] L. J. Slater, “Generalized hypergeometric functions,” 1966.

[48] A. Prudnikov, Y. A. Brychkov, and O. Marichev, “Integrals and series, vol. 3, chapter 7,” 1990.

[49] W. N. Bailey, “Generalized hypergeometric series,” 1964.

[50] I. Rainville and E. S. Functions, “Chelsea publishing company,” *Bronz, New York*, vol. 211, 1960.

[51] J. B. Seaborn, *Hypergeometric functions and their applications*. Springer Science & Business Media, 2013, vol. 8.

[52] I. N. Sneddon, "Special functions of mathematics," *Physics, and Chemistry (Oliver and Boyd, Edinburgh, 1961)*, p. 105, 1956.

[53] N. M. Temme, *Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics*. John Wiley & Sons, 2011.

[54] L. Euler, A. Diener, and A. Aycock, "Specimen transformationis singularis serierum," 2012.

[55] B. C. Berndt, *Ramanujan's notebooks: Part III*. Springer Science & Business Media, 2012.

[56] T. Clausen, "Ueber die fälle wenn die reihe y= 1+ $\alpha\beta$ 1· γ x+... ein quadrat von der form y= 1+ α'β'γ'1· δ'*ε'x+... hat," *J. für Math*, vol. 3, pp. 89–95, 1828.

[57] W. Koepf, "Hypergeometric summation," *Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden*, vol. 5, p. 6, 1998.

[58] S. Lewanowicz, "Generalized watson's summation formula for 3f2 (1)," *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 86, no. 2, pp. 375–386, 1997.

[59] L. J. Slater, "Confluent hypergeometric functions," 1960.

[60] E. E. Kummer, "Über die hypergeometrische reihe." *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 1836, no. 15, pp. 39–83, 1836.

[61] S. Ruscheweyh and V. Singh, "On the order of starlikeness of hypergeometric functions," *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 113, no. 1, pp. 1–11, 1986.

[62] E. Merkes and W. Scott, "Starlike hypergeometric functions," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 12, no. 6, pp. 885–888, 1961.

[63] L. Trojnar-Spelina, "Univalence of certain analytic functions," *Demonstratio Mathematica*, vol. 31, no. 2, pp. 467–476, 1998.

[64] S. S. Miller and P. T. Mocanu, "Univalence of gaussian and confluent hypergeometric functions," *Proceedings of the American Mathematical Society*, pp. 333–342, 1990.

[65] S. Ruscheweyh, "Convolution in geometric function theory, les presse," *De universite de Montreal, Montreal*, 1982.

[66] S. Ponnusamy, "Univalence of alexander transform under new mapping properties," *Complex Variables and Elliptic Equations*, vol. 30, no. 1, pp. 55–58, 1996.

[67] S. Ponnusamy and F. Rønning, "Geometric properties for convolutions of hypergeometric functions and functions with the derivative in a halfplane," *Integral Transforms and Special Functions*, vol. 8, no. 1-2, pp. 121–138, 1999.

[68] S. Ponnusamy and M. Vuorinen, "Asymptotic expansions and inequalities for hypergeometric function," *Mathematika*, vol. 44, no. 2, pp. 278–301, 1997.

[69] I. Yildiz, A. Akyar, and O. Mert, "On sufficient condition for starlikeness of confluent hypergeometric functions," *Sigma Journal of Enginering and Natural Sciences-Sigma Mühendislik Fen Bilimleri Dergisi*, vol. 9, no. 3, pp. 331–340, 2018.

[70] I. Yildiz and A. Akyar, “An analytical investigatıon on starlikeness and convexity properties for hypergeometric functions,” *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 44, no. 4, pp. 1453–1465, 2020.

[71] P. Eenigenburg, “A class of starlike mappings of the unit disk,” *Compositio Mathematica*, vol. 24, no. 2, pp. 235–238, 1972.

[72] H. Silverman, “Univalent functions with negative coefficients,” *Proceedings of the American mathematical society*, vol. 51, no. 1, pp. 109–116, 1975.

[73] H. Silverman and E. M. Silvia, “Subclasses of starlike functions subordinate to convex functions,” *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 37, no. 1, p. 48–61, 1985.

[74] P. J. Eenigenburg, “A class of starlike mappings of the unit disk,” *Compositio Mathematica*, vol. 24, no. 2, pp. 235–238, 1972.

[75] D. J. Wright, “On a class of starlike functions,” *Compositio Mathematica*, vol. 21, no. 2, pp. 122–124, 1969.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Alaattin AKYAR

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Doktora	Matematik	Düzce Üniversitesi	2021
Y. Lisans	Matematik	Abant İzzet Baysal Üniversitesi	2011

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A1. İ. Yıldız and A. Akyar, “An analytical investigatıon on starlikeness and convexity properties for hypergeometric functions,” *TÜBİTAK-Turkish Journal of Mathematics,* no. 444, pp. 1453-1465, 2020.

A2. İ. Yıldız, A. Akyar, and Oya Mert, “On sufficient condition for starlikeness of confluent hypergeometric functions,” *Yıldız Technical University-open access journals,* vol. 9,Issue. 3, pp. 331-340, 2018.

A3. İ. Yıldız, A. Akyar, and Oya Mert, “On sufficient conditions for close-to-convexity of order 2^{-r} ,” *Yıldız Technical University-open access journals,* vol. 9,Issue. 3, pp.341-348, 2018.