T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİNİN ÜSTEL FONKSİYONLARI KORUYAN SZÁSZ-MIRAKYAN YAKINSAMA YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

NİHAL SEYYAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ MERVE İLKHAN

DÜZCE, 2020

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİNİN ÜSTEL FONKSİYONLARI KORUYAN SZÁSZ-MIRAKYAN YAKINSAMA YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Nihal SEYYAR tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Merve İLKHAN
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Merve İLKHAN
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT
Sakarya Üniversitesi

Doç. Dr. Fuat USTA
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 17/06/2020

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

17/06/2020

Nihal SEYYAR

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Merve İLKHAN'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Fuat USTA'ya şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

17/06/2020 **Nihal SEYYAR**

İÇİNDEKİLER

Sayfa No
SİMGELER vi
ÖZET vii
ABSTRACT viii
1. GİRİŞ 1
2. İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI 4
   2.1. VOLTERRA VE FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİ 4
      2.1.1. Fredholm İntegral Denklemi 4
      2.1.2. Volterra İntegral Denklemi 5
      2.1.3. Volterra-Fredholm İntegral Denklemi 6
   2.2. TEKİL VE TEKİL OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLER 6
   2.3. İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLER 7
      2.3.1. Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler 7
      2.3.2. Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler 8
      2.3.3. Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler 8
   2.4. LİNEER VE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLER 8
   2.5. HOMOJEN VE HOMOJEN OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLER 9
3. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER VE TEMEL KAVRAMLAR 11
   3.1. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKINSAKLIĞI 14
   3.2. AĞIRLIKLI UZAYLAR 15
4. SZÁSZ-MIRAKYAN OPERATÖRLERİ 16
5. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİNİ AYRIŞTIRMA 19
   5.1. İKİNCİ TİP VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİNİ AYRIŞTIRMA 20
   5.2. BİRİNCİ TİP VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİNİ AYRIŞTIRMA 21
6. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜNÜN HATA TAHMİNİ 23
   6.1. İKİNCİ TİP VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN HATA ANALİZİ 23
   6.2. BİRİNCİ TİP VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN HATA ANALİZİ 26
7. SONUÇ 29
8. KAYNAKLAR 30
ÖZGEÇMİŞ 32

SİMGELER

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\{0,1,2,3,...\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	$[0,+\infty)$ aralığı
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Öklid uzayı

ÖZET

VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİNİN ÜSTEL FONKSİYONLARI KORUYAN SZÁSZ-MIRAKYAN YAKINSAMA YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Nihal SEYYAR
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Merve İLKHAN
Haziran 2020, 31 sayfa

Bu tez çalışmasında, Szász-Mirakyan yaklaşım metodu yardımı ile birinci ve ikinci tip Volterra integral denkleminin nümerik çözüm yöntemleri verilecektir. Bu amaç doğrultusunda, üstel fonksiyonları koruyan, kapalı ve sınırlı aralıkta bilinmeyen fonksiyona yaklaşan Szász–Mirakyan operatörler kullanılacaktır.

Anahtar sözcükler: Nümerik çözüm, Szász- Mirakyan operatör, Volterra integral denklemi.

ABSTRACT

NUMERICAL COMPUTATION OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS WITH SZÁSZ-MIRAKYAN APPROXIMATION WHICH FIX EXPONENTIAL FUNCTIONS

Nihal SEYYAR
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Merve İLKHAN
June 2020, 31 pages

In this thesis, numerical solution methods will be given for the first and second kind of Volterra integral equations with the help of Szász-Mirakyan approximation method. For this purpose, Szász-Mirakyan operators preserving exponential functions, approaching the unknown function in a closed and bounded interval will be used.

Keywords: Numerical solution, Szász- Mirakyan operator, Volterra integral equation.

1. GİRİŞ

Fizik, kimya, biyoloji, tıp, ekonomi gibi çeşitli alanlarda ortaya atılan problemlerin matematiksel modellemesi sonucu denklemler ortaya çıkmaktadır. Bunlar integral denklemler, diferansiyel denklemler, integro-diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemler olarak sıralanabilir.

Bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerinden oluşan denklemler diferansiyel denklemler olarak adlandırılır. Diferansiyel denklemler tek başlarına bir problemi tanımlamaya yetmez. Diferansiyel denklem ile birlikte başlangıç veya sınır şartları verilmesi gerekir. Fakat integral denklemlerde bu durum söz konusu değildir. İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonunun integral operatörü altında bulunduğu denklem olarak tanımlanır. İntegral denklemler bir problemin tam tanımını verir. Ek şartlara gerek duyulmaz. Ancak diferansiyel denklem ile integral denklem yakından ilişkilidir. Çünkü diferansiyel denklemler temelde integral denklemler olarak da ifade edilebilir. Ayrıca bir integral denklem de bilinmeyen fonksiyonun hem türevi hem de integrali mevcut ise bu integral denkleme integro-diferansiyel denklem denir. Uygulamalı bilim dallarında bazı problemler tek bir denklem ile ifade edilemez. Bunun için bilinmeyen fonksiyon içeren diferansiyel, integral veya bunların lineer birleşiminden oluşan integro-diferansiyel denklemlerin bir bütünü olarak ifade edilir [1].

İntegral denklemlerle ilgili ilk uğraşlar 19.yüzyılın ilk yarısında başlamıştır [1]. Bundan çok önceden de birçok çalışma yapılmış olmasına rağmen hemen hepsi dağınık ve rastgele yapılmıştır. Abel'in 1823 yılında bir mekanik problemini incelediği esnada ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Aynı yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik çalışmalar yapılmış ve bazı sonuçlar alınmaya başlanmıştır [1]. İntegral denklem kavramını Du Bois Reymond' un 1888 yılında yayınlanan bir çalışmasında önerdiği bilinmektedir [2]. İntegral denklemler ile ısı transferi, akışkan dinamiği, oyun teorisi gibi bilimin birçok alanında karşılaşılmaktadır.

İntegral denklemler farklı şekillerde sınıflandırılabilir. Bunlar lineer ve lineer olmayan integral denklemler, tekil ve tekil olmayan integral denklemler, homojen ve homojen olmayan integral denklemlerdir. Ayrıca integral denklemler yapılarına göre sınıflandırılırsa Volterra ve Fredholm integral denklemleri ortaya çıkar.

1840 yılında Liouville başlangıç koşulları ile verilen ikinci derece lineer bir diferansiyel denklemin daha sonra ikinci tip Volterra integral denklemi olarak adlandırılacak bir denkleme denk olduğunu keşfetti [3]. Ancak 1895 yılında Volterra adı altında integral denklemler teorisi için yeni bir dönem başladı. Volterra bu denklemlerin çözümlerinin varlığı ve bu denklemlerin uygulamaları ile ilgilendi. Bu uygulamalardan en ilgi çekici olanı nüfus artış modelinin incelenmesi sırasında ortaya çıkan problem olmuştur [4]. Daha sonra Volterra integral denklemlerinin çeşitli uygulamaları geliştirilerek bu teorinin gelişimine birçok yazar tarafından katkıda bulunuldu [5].

Yaklaşım teorisi, herhangi bir fonksiyona daha basit fonksiyonlarla (türevlenebilen, polinom tipinde gibi) en iyi nasıl yaklaşılacağı ve çıkan hatanın nicel olarak karakterize edilişi ile ilgilenir. Yaklaşım teorisinin temeli Weierstrass'ın kapalı ve sınırlı aralık üzerinde sürekli her fonksiyona bu aralıkta düzgün yakınsayan bir polinom dizisinin bulunabileceğini ifade eden teoremine dayanır [6]. Birçok matematikçi bu teoremin daha basit anlaşılır ispatları üzerine çalışmıştır. 1912 yılında Bernstein, Weierstrass yaklaşım teoreminin basit bir kanıtını vermek amacıyla kendi adı ile bilinen Bernstein polinomlarını tanımlamıştır [7]. Bernstein polinomları lineer ve pozitif operatörler olduğundan matematikçiler tarafından bu konu üzerine birçok çalışma yapılmıştır [8, 9, 10, 11]. Korovkin [12] lineer pozitif operatörler dizisinin kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli bir fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şartın bu dizisinin $1,t,t^2$ fonksiyonlarını koruması gerektiğini ispat etmiştir.

İlerleyen yıllarda Bernstein polinomlarının sonsuz aralığa genişlemesi yaygın bir şekilde çalışıldı. Szász-Mirakyan operatörleri 1950 yılında Szász [13] ve 1941 yılında Mirakyan [14] tarafından tanıtılan kapalı ve sınırlı olmayan aralıklara Bernstein polinomlarının genellemesidir. Szász-Mirakyan operatörlerini geliştirmek amaçlı yapılan çalışmalarda yeni operatörlerin klasik operatörlerle benzer yaklaşım özelliklerine sahip olduğu görüldü. Ayrıca, Szász-Mirakyan operatörlerinin King tipli modifikasyonları, Duman ve Özarslan

[15], Aral ve ark. [16] tarafından çalışıldı. Duman ve Özarslan [15] $\{1,t^2\}$ fonksiyonlarını koruyan Szász-Mirakyan tipli operatörleri tanımladılar. Daha sonra Acar ve ark. [17] $\{1,e^{2\lambda t}\}$ fonksiyonlarını koruyan Szász-Mirakyan tipli operatörleri tanımlayarak bu yeni operatörlerin klasik Szász-Mirakyan operatörlerinden daha iyi sonuç vermesi için bir yeter şart formule ettiler. Çok geçmeden Acar ve ark. [17] bilinen polinomlar yerine $\{e^{\lambda t},e^{2\lambda t}\}$ $(\lambda > 0)$ üstel fonksiyonlarını koruyan Szász-Mirakyan baz fonksiyonuna sahip lineer pozitif operatörlerin belli bazı fonksiyonlara yaklaşım davranışını inceledi. Szász-Mirakyan operatörleri yalnızca bir fonksiyona yaklaşım amaçlı kullanılmaz aynı zamanda nümerik integralleme, integral ve diferansiyel denklemlerin çözümü için de kullanılır.

Bu tez çalışmasındaki amaç üstel fonksiyonları koruyan Szász–Mirakyan operatörler dizisi yardımıyla Volterra integral denklemlerinin nümerik çözümlerini geliştirmek, uygulamak ve önemli özelliklerini ortaya çıkarmaktır.

2. İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

İntegral denklemler farklı özelliklerine göre birçok şekilde sınıflandırılır. İntegral denklemlerin sınıflandırılması esas olarak integral sınırlarına ve denklemin çekirdeğine bağlı olarak yapılır. Fredholm integral denklemi, Volterra integral denklemi, Volterra-Fredholm integral denklemi, tekil (singüler) integral denklemler bu sınıflandırmaya girer. Ayrıca integral denklemler ve integro-diferansiyel denklemler lineerlik ve homojenlik kavramlarına göre de iki tipte sınıflandırılır. Bu bölümde verilecek tüm kavramlar için bkz. [5].

μ bir bilinmeyen fonksiyon olmak üzere en genel haliyle bir integral denklem

$$\mu(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \mathcal{K}(x,t)\mu(t)dt \tag{2.1}$$

dir. Burada $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ integral sınırları, λ bir sabit, $\mathcal{K}(x,t)$ ise iki değişkene bağlı bir fonksiyon olup integral denklemin çekirdeği (kernel) olarak adlandırılır.

2.1. VOLTERRA VE FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİ

İntegral denklemler integral sınırlarının değişken veya sabit olmasına göre sınıflandırılır.

2.1.1. Fredholm İntegral Denklemi

Eğer (2.1) denkleminde integral sınırları sabit ve bilinmeyen fonksiyon μ sadece integral operatörü içinde, yani denklem

$$f(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x,t)\mu(t)dt$$

şeklinde ise bu integral denkleme birinci tip Fredholm integral denklemi denir. Eğer (2.1) integral denkleminde integral sınırları sabit ve bilinmeyen fonksiyon μ hem integral operatörü içinde hem de dışında, yani denklem

$$\mu(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x,t)\mu(t)dt$$

şeklinde ise bu integral denkleme ikinci tip Fredholm integral denklemi denir.

Birinci tip Fredholm integral denklemine örnek olarak

$$\frac{\tan x}{x^2} = \int_0^1 \sin(xt)\mu(t)dt$$

verilebilir. İkinci tip Fredholm integral denklemine örnek olarak

$$\mu(x) = x^2 + \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (x-t)^2\mu(t)dt$$

verilebilir.

2.1.2. Volterra İntegral Denklemi

Eğer (2.1) integral denkleminde integral sınırlarından en az biri değişken ve bilinmeyen fonksiyon μ sadece integral operatörü içinde, yani denklem

$$f(x) = \int_a^x \mathcal{K}(x,t)\mu(t)dt$$

şeklinde ise integral denkleme birinci tip Volterra integral denklemi denir. Eğer (2.1) integral denkleminde sınırlardan en az biri değişken ve bilinmeyen fonksiyon μ hem integral operatörü içinde hem de dışında, yani denklem

$$\mu(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \mathcal{K}(x,t)\mu(t)dt$$

şeklinde ise integral denkleme ikinci tip Volterra integral denklemi denir.

Birinci tip Volterra integral denklemine örnek olarak

$$x^2 = \int_0^{-x} \sin x\mu(t)dt$$

ve

$$5x^2+x^3=\int_0^x (5+3x-3t)\mu(t)dt$$

integral denklemleri verilebilir. İkinci tip Volterra integral denklemine ise

$$\mu(x)=1-\int_0^x \mu(t)dt$$

ve

$$\mu(x)=x+\int_0^x (x-t)\mu(t)dt$$

integral denklemleri örnek olarak verilebilir.

2.1.3. Volterra-Fredholm İntegral Denklemi

Volterra-Fredholm integral denklemleri parabolik sınır değer problemleri, bir salgının mekan-zamansal gelişiminin matematiksel modellemesi, çeşitli fiziksel ve biyolojik modeller sonucu ortaya çıkmıştır. Eğer bir integral denklem hem Volterra integral denklemi hem de Fredholm integral denklemini içeriyorsa bu integral denkleme Volterra-Fredholm integral denklemi denir. En genel haliyle bir Volterra-Fredholm integral denklemi

$$\mu(x)=f(x)+\lambda_1\int_a^x \mathcal{K}_1(x,t)\mu(t)dt+\lambda_2\int_a^b \mathcal{K}_2(x,t)\mu(t)dt$$

şeklinde verilebilir. Volterra-Fredholm integral denlemine örnek olarak

$$\mu(x)=8x+3x^2+2-\int_0^x x\mu(t)dt-\int_0^1 t\mu(t)dt$$

integral denklemi verilebilir.

2.2. TEKİL VE TEKİL OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLER

Eğer

$$f(x)=\lambda\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \mathcal{K}(x,t)\mu(t)dt$$

ve

$$\mu(x)=f(x)+\lambda\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \mathcal{K}(x,t)\mu(t)dt$$

şeklindeki integral denklemlerde integral sınırlarından biri veya ikiside sonsuz ise tekil (singüler) integral denklem olarak adlandırılır. Ayrıca, eğer çekirdek $\mathcal{K}$ integrasyon aralığında bir veya daha fazla noktada sınırsız oluyorsa da bu denklemlere tekil integral denklem denir. Aksi taktirde tekil olmayan integral denklem denir.

$$f(x) = \lambda \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} \mu(t)dt, \;\; 0 < \alpha < 1$$

ve

$$\mu(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} \mu(t)dt, \;\; 0 < \alpha < 1$$

integral denklemleri tekil integral denklemlere örnek olarak verilebilir.

2.3. İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Eğer bir integral denklem bilinmeyen fonksiyon $\mu(x)$ in hem türevi hem de integrali mevcut ise bu integral denkleme integro-diferansiyel denklem denir.

2.3.1. Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler

Eğer bir integro-diferansiyel denklemde integral sınırları sabit ise buna Fredholm-integro diferansiyel denklem denir. Bu denklem genel olarak

$$\mu^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x,t)\mu(t)dt, \;\; \mu^{(n)} = \frac{d^n\mu}{dx^n}$$

şeklinde gösterilir. Bu denkleme

$$\mu^{'}(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \lambda \int_0^1 x^2 \mu(t)dt$$

ve

$$\mu^{''}(x) + \mu'(x) = x^2 - tanx - \lambda \int_0^2 xt\mu(t)dt, \quad \mu(0) = 0 \quad \mu^{'}(0) = 0$$

örnekleri verilebilir.

2.3.2. Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler

Eğer bir integro diferansiyel denklemde sınırlardan en az biri değişken ise buna Volterra-integro diferansiyel denklem denir. Genel olarak

$$\mu^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \mathcal{K}(x,t)\mu(t)dt, \;\; \mu^{(n)} = \frac{d^n \mu}{dx^n}$$

olarak gösterilir. Örnek olarak

$$\mu^{'}(x) = -2 + \frac{1}{6}x^2 - x^3 + \lambda \int_0^{x^2} t^3 \mu(t)dt, \quad \mu(0) = 0$$

ve

$$\mu^{''}(x) + \mu^{'}(x) = -3 + xtanx - cotx^2 + \lambda \int_0^x t\mu(t)dt, \quad \mu(0) = -1, \quad \mu^{'}(0) = 1$$

verilebilir.

2.3.3. Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler

$\mu^{(n)} = \frac{d^n\mu}{dx^n}$ olmak üzere

$$\mu^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x \mathcal{K}_1(x,t)\mu(t)dt + \lambda_2 \int_a^b \mathcal{K}_2(x,t)\mu(t)dt$$

şeklindeki integral denkleme Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem denir.

Örnek olarak

$$\mu^{'}(x) = 42x + x^6 - 3 + \int_0^x (x-t)^4 \mu(t)dt - \int_0^1 t^2 \mu(t)dt \quad \mu(0) = 0$$

integral denklemi verilebilir.

2.4. LİNEER VE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLER

İntegral denklemler lineer ve lineer olmayan şeklinde sınıflandırılır. μ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$\mu(x) = f(x) + \int_a^x \mathcal{K}(x,t)\mu(t)dt$$

integral denkleminde integral operatörünün içinde bulunan μ fonksiyonunun kuvvetinin bir olması halinde denklem lineer integral denklem adını alır. Eğer μ fonksiyonunun kuvveti birden büyükse veya denklem e^{μ}, $\cos\mu$, $\ln\mu$ gibi lineer olmayan fonksiyon içeriyorsa integral denklem lineer değildir. Örneğin

$$\mu(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\mu(t)dt,$$

$$\mu(x) = 1 - \int_0^1 \mu(t)dt$$

integral denklemleri lineerdir. Lineer olmayan integral denklemlere örnek olarak

$$\mu(x) = 1 + \int_0^x (1+x-t)\mu^4(t)dt$$

$$\mu'(x) = 1 + \int_0^1 xte^{\mu(t)}dt, \; u(0) = 1$$

verilebilir.

Genelde lineer denklemlerin tek bir çözümü olurken lineer olmayan denklemlerde çözüm birden çok olabilir.

2.5. HOMOJEN VE HOMOJEN OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLER

Eğer bir integral denklem, $f(x)$ fonksiyonunu içeriyorsa bu denklem homojen olmayan integral denklemdir. Örneğin

$$\mu(x) = f(x) + \int_a^b \mathcal{K}(x,t)\mu(t)dt$$

integral denklemi homojen olmayan bir integral denklemdir.

Bir integral denklem $f(x)$ fonksiyonunu içermiyorsa yani $f(x) = 0$ ise bu integral denkleme homojen integral denklem denir. Örneğin

$$\mu(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x,t)\mu(t)dt$$

integral denklemi homojen bir integral denklemidir.

$$\mu(x) = \tan x + \int_0^x x^3 t^2 \mu(t) dt$$

$$\mu(x) = x + \int_0^1 (x-t)^2 \mu(t) dt$$

integral denklemleri homojen olmayan integral denklemlere örnektir.

$$\mu(x) = \int_0^x (1+x-t)^3 \mu^4(t) dt$$

$$\mu(x) = \lambda \int_0^2 t^2 \mu(t) dt$$

integral denklemleri ise homojen integral denklemlere örnek olarak verilebilir.

3. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 3.1. [18] X boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{F}$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X'e $\mathbb{F}$ üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

$$\begin{array}{rrcl} +: & X \times X & \to & X \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

olmak üzere

L1) Her $x,y,z \in X$ için $x+(y+z)=(x+y)+z \in X$ dir.

L2) Her $x \in X$ için $x+\theta = x = \theta + x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.

L3) Her $x \in X$ için $x+(-x)=\theta=(-x)+x$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır.

L4) Her $x,y \in X$ için $x+y=y+x$ dir.

$$\begin{array}{rrcl} \cdot: & \mathbb{F} \times X & \to & X \\ & (\alpha,x) & \mapsto & \alpha \cdot x \end{array}$$

olmak üzere

L5) Her $x,y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ dir.

L6) Her $x \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ dir.

L7) Her $x \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için $(\alpha\beta)\cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ dir.

L8) Her $x \in X$ için $1 \cdot x = x$ dir ($1 \in \mathbb{F}$).

Tanım 3.2. [19] X bir lineer uzay olsun.

$$\begin{array}{rrcl} \|\cdot\|: & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$

fonksiyonu için

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

N2) Her $x \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

N3) Her $x,y \in X$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine normlu uzay denir.

Örnek 3.3. [19] (*Sürekli fonksiyonların uzayı*) $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı $C[a,b]$ ile gösterilir. $f,g \in C[a,b]$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \text{ ve } (\alpha f)(t) = \alpha f(t)$$

işlemleri ile $C[a,b]$ bir lineer uzaydır. $f \in C[a,b]$ için

$$\|f\| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

ile tanımlı fonksiyon $C[a,b]$ üzerinde bir normdur.

Tanım 3.4. [20] Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için $n \geq N$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $N = N(\varepsilon, x) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsakatır denir ve $f_n \to f$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.5. [20] Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq N$ ve $x \in X$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $N = N(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsakatır denir ve $f_n \rightrightarrows f$ şeklinde gösterilir.

$C[a,b]$ uzayı üzerindeki yakınsama düzgün yakınsamadır.

Tanım 3.6. [21] X ve Y aynı $\mathbb{F}$ skaler cismi üzerinde lineer uzaylar olsun. $T : X \to Y$ operatörü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

şartlarını sağlıyorsa T ye lineer operatör denir.

Tanım 3.7. [21] $(X,\|\|_1)$ ve $(Y,\|\|_2)$ aynı $\mathbb{F}$ skaler cismi üzerinde normlu uzaylar ve $T: X \to Y$ lineer operatör olsun. Her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_2 \leq c\|x\|_1$$

olacak şekilde $c > 0$ sayısı varsa T ye sınırlı lineer operatör denir. T sınırlı lineer operatör olmak üzere

$$\|T\| = \sup_{x \in X, x \neq \theta} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}$$

fonksiyonuna T nin operatör normu denir.

Örnek 3.8. [21] m satırlı, n sütunlu, reel bir

$$A = (a_{ik}), \;\; i = 1,...,m, \;\; k = 1,...,n$$

matrisi ve $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1,...,y_m) \in \mathbb{R}^m$ elemanları verilsin. $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$, $(i = 1,...,m)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

şeklinde matris çarpımı ile $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $y = Ax$ dönüşümü lineer operatör tanımlar. $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m$ de normlar sırasıyla $\|x\| = \max\{|x_k| : k = 1,...,n\}$ ve $\|y\| = \max\{|y_i| : i = 1,...,m\}$ olmak üzere A sınırlı lineer operatördür ve A nın operatör normu $\|A\| = \max\left\{\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| : i = 1,...,m\right\}$ dır.

Tanım 3.9. [19] $(X,\|\|_1)$ ve $(Y,\|\|_2)$ aynı $\mathbb{F}$ skaler cismi üzerinde normlu uzaylar ve $T: X \to Y$ bir operatör olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\|x - x_0\|_1 < \delta$ olan her $x \in X$ için $\|T(x) - T(x_0)\|_2 < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı varsa T ye $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir.

Teorem 3.10. [19] $(X,\|\|_1)$ ve $(Y,\|\|_2)$ aynı $\mathbb{F}$ skaler cismi üzerinde normlu uzaylar ve $T: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. T operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart T operatörünün sürekli olmasıdır.

Tanım 3.11. [22] X ve Y normlu fonksiyon uzayları olmak üzere $T: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. $f \geq 0$ olan her $f \in X$ için $T(f) \geq 0$ oluyor ise T operatörüne lineer pozitif operatör denir.

Tanım 3.12. [22] X ve Y normlu fonksiyon uzayları olmak üzere $T: X \to Y$ bir operatör olsun. Her $f, g \in X$ ve her $t \in \mathbb{R}$ için

$$f(t) \leq g(t) \Rightarrow T(f,t) \leq T(g,t)$$

oluyor ise T operatörü monotonluk özelliğine sahiptir denir.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(T_n(f,t))$ dizisine operatör dizisi denir.

3.1. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKINSAKLIĞI

Yaklaşım teorisinin asıl amacı, herhangi bir fonksiyonun daha işe yarar ve basit bir fonksiyon cinsinden gösterimini oluşturmaktır. Bu amaç için verilen ilk teorem Weierstrass tarafından 1885'de ifade edilmiştir.

Teorem 3.13. [6](Weierstrass Yaklaşım Teoremi) $f \in C[a,b]$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve her $t \in [a,b]$ için $|f(t) - p_n(t)| < \varepsilon$ olacak şekilde n. dereceden bir $(p_n(t))$ polinom dizisi vardır.

Weierstrass sadece bu polinom dizisinin varlığını ispat etmiştir. S.N. Bernstein ise Bernstein polinomu olarak bilinen bu polinomlar dizisini

$$B_n(f,t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

şeklinde tanımlamıştır.

H. Bohman tarafından 1951 yılında

$$T_n(f,t) = \sum_{k=0}^{n} f(a_{k,n}) P_{k,n}(t), \quad P_{k,n}(t) \geq 0$$

şeklinde tanımlı lineer pozitif operatörler dizisinin $f \in C[0,1]$ fonksiyonuna yaklaşma problemi çalışılmıştır. $(T_n(f,t))$ dizisini f fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerek ve yeter şartları bulmuştur. P.P. Korovkin ise bu sonucu genellemiştir. Sürekli fonksiyonlara sonlu aralıkta lineer pozitif operatörlerin yardımıyla yaklaşılmasına ilişkin olan bu teorem bu konuda yapılan tüm çalışmalara çok büyük katkı sağlamaktadır.

Teorem 3.14. [12](Korovkin Teoremi) $f \in C[a,b]$ ve f tüm reel eksende sınırlı olmak üzere $(T_n(f,t))$ lineer pozitif operatörler dizisi her $t \in [a,b]$ için

$$T_n(1,t) \rightrightarrows 1$$

$$T_n(x,t) \rightrightarrows t$$

$$T_n(x^2,t) \rightrightarrows t^2$$

şartlarını sağlıyorsa $(T_n(f,t))$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

3.2. AĞIRLIKLI UZAYLAR

$t \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\varphi(t) = 1 + e^{2\lambda t}$ fonksiyonu tanımlansın. φ ağırlık fonksiyonuna karşılık gelen ağırlıklı uzaylar

$$B_\varphi(\mathbb{R}^+) = \{f | f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ ve } |f(t)| \leq C_f \varphi(t)\}$$

$$C_\varphi(\mathbb{R}^+) = B_\varphi(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+)$$

şeklinde tanımlanır. Burada C_f, f fonksiyonuna bağlı bir sabittir. $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ve $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayları

$$\|f\|_\varphi = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{|f(t)|}{\varphi(t)}$$

şeklinde tanımlı norm ile birer lineer normlu uzaydır.

4. SZÁSZ-MIRAKYAN OPERATÖRLERİ

Bernstein polinomlarının sonsuz aralığa genişlemesi olarak bilinen Szász-Mirakyan operatörleri $f \in C[0,\infty)$ olmak üzere

$$S_n(f,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-nt} \frac{(nt)^k}{k!}, \quad (n \in \mathbb{N}, t \in [0,\infty))$$

şeklinde tanımlı operatörlerdir.

$S_n(f,t)$ lineer bir operatördür. Gerçekten, $\eta, \mu \in \mathbb{R}$ ve $f,g \in C[0,r]$ için

$$\begin{aligned} S_n(\mu f + \eta g, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\mu f\left(\frac{k}{n}\right) + \eta g\left(\frac{k}{n}\right)\right] e^{-nt} \frac{(nt)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-nt} \frac{(nt)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \eta g\left(\frac{k}{n}\right) e^{-nt} \frac{(nt)^k}{k!} \\ &= \mu \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-nt} \frac{(nt)^k}{k!} + \eta \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) e^{-nt} \frac{(nt)^k}{k!} \\ &= \mu S_n(f,t) + \eta S_n(g,t) \end{aligned}$$

olduğundan Szász-Mirakyan operatörleri lineerdir.

Ayrıca $S_n(f,t)$ pozitif bir operatördür. Gerçekten,

$$e^{-nt} \frac{(nt)^k}{k!} \geq 0$$

olduğundan $f \geq 0$ ise $S_n(f,t) \geq 0$ olur.

Szász-Mirakyan operatörler dizisinin yakınsaklığı ile ilgili teorem Korovkin Teoremi yardımıyla ispat edilir.

Teorem 4.1. [13] Szász-Mirakyan operatörler dizisi $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0,r]$ kapalı aralığında sürekli ve $\mathbb{R}^+$ üzerinde sınırlı bir f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

İspat.
$$S_n(1,t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-nt}\frac{(nt)^k}{k!}=e^{-nt}e^{nt}=1$$

olduğundan $S_n(1,t)\rightrightarrows 1$ dir.

$$\begin{aligned}
S_n(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}e^{-nt}\frac{(nt)^k}{k!}\\
&= e^{-nt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^kt^k}{(k)!}\\
&= e^{-nt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}t^{k-1}t}{(k-1)!}\\
&= te^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^kt^k}{(k)!}=te^{-nt}e^{nt}=t
\end{aligned}$$

olduğundan $S_n(x,t)\rightrightarrows t$ dir.

$$\begin{aligned}
S_n(x^2,t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}e^{-nt}\frac{(nt)^k}{k!}\\
&= e^{-nt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^{k-1}t^{k-1}t}{(k-1)!}\\
&= e^{-nt}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{n}+\frac{1}{n}\right)\frac{n^{k-1}t^{k-1}t}{(k-1)!}\\
&= e^{-nt}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{n}\frac{n^{k-1}t^{k-1}t}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}t^{k-1}t}{(k-1)!}\right)\\
&= e^{-nt}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{n}\frac{n^{k-1}t^{k-1}t}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}t^{k-1}t}{(k-1)!}\right)\\
&= e^{-nt}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n^{k-2}t^{k-2}t^2}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}t^{k-1}t}{(k-1)!}\right)\\
&= e^{-nt}\left(t^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^kt^k}{(k)!}+\frac{t}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^kt^k}{(k)!}\right)\\
&= t^2+\frac{t}{n}
\end{aligned}$$

olduğundan $S_n(x^2,t)\rightrightarrows t^2$ dir. Böylece Korovkin teoremine göre $(S_n(f,t))$ Szász-Mirakyan operatörler dizisi $f\in C[0,r]$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. $\square$

$\|\cdot\|$, $C[0,r]$ üzerinde supremum normu olmak üzere

$$|S_n(f,t)-f(t)| \leq \frac{1}{2n}t\|f^{''}\|$$

hata sınırı $f \in C^2[0,r]$ için yakınsama hızının en az $\frac{1}{n}$ olduğunu gösterir.

Szász operatörleri için Voronovskaya sonucu aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 4.2. [23] f her sonlu aralıkta sınırlı ve bir $N \in \mathbb{N}$ için $f(t) = O(x^N)$, $t \to \infty$ olsun. Bu durumda f nin iki defa türevlenebilir olduğu her bir $t > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} n[(S_n(f,t)-f(t)] = \frac{1}{2}tf^{''}(t)$$

olur.

Korovkin test fonksiyonları $\{1,t,t^2\}$ yerine $e^{\lambda t}$ ve $e^{2\lambda t}$, $\lambda > 0$ üstel fonksiyonlarını koruyan Szász-Mirakyan tipli lineer pozitif operatörlerin dizisi $(R_n(f,t))$,

$$R_n(f,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-na_n(t)} \frac{(nb_n(t))^k}{k!}, (t \in \mathbb{R}^+)$$

şeklinde tanımlanmıştır ([17]).

5. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİNİ AYRIŞTIRMA

Bu bölümde, Szász-Mirakyan yaklaşım metodu yardımı ile birinci ve ikinci tip Volterra integral denkleminin nümerik çözüm yöntemleri verilecektir. Bu amaç doğrultusunda, $\lambda > 0$ olmak üzere $e^{\lambda t}$ ve $e^{2\lambda t}$ üstel fonksiyonlarını koruyan ve $[0,m]$ aralığında bilinmeyen fonksiyona yaklaşan, yani

$$R_n(h,t) = \sum_{k=0}^{mn} h\left(\frac{k}{n}\right) e^{-na_n(t)} \frac{(nb_n(t))^k}{k!}, \quad (n \in \mathbb{N}, t \in [0,m]) \tag{5.1}$$

formundaki Szász–Mirakyan operatörler kullanılacaktır. Burada, $a_n, b_n : [0,m] \to \mathbb{R}$ pozitif fonksiyonları

$$b_n(t) = \frac{\lambda t}{ne^{\lambda/n}(e^{\lambda/n} - 1)},$$

$$a_n(t) = b_n(t)e^{\lambda/n}(2 - e^{\lambda/n}) = \frac{\lambda t(2 - e^{\lambda/n})}{n(e^{\lambda/n} - 1)}$$

şeklinde tanımlıdır.

$\|\cdot\|$, $C[0,m]$ üzerinde supremum normu olmak üzere

$$|R_n(h(t)) - h(t)| \leq \frac{1}{n}t\left(\alpha^2\|h\| - \frac{3\alpha}{2}\|h'\| + \frac{1}{2}\|h''\|\right) \tag{5.2}$$

hata sınırı $h \in C^2[0,m]$ için yakınsama hızını gösterir.

Üstel fonksiyonları koruyan Szász operatörleri için Voronovskaya sonucu aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 5.1. [17] $h \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ olsun. Eğer h fonksiyonu $t > 0$ için iki defa türevlenebilir ve h'' sürekli ise

$$\lim_{n\to\infty} n[R_n(h(t)) - h(t)] = \alpha^2 th(t) - \frac{3\alpha}{2}th'(t) + \frac{1}{2}th''(t)$$

sağlanır.

5.1. İKİNCİ TİP VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİNİ AYRIŞTIRMA

$\mathcal{K}$ çekirdek, f verilen reel değerli bir fonksiyon ve γ bir parametre olmak üzere

$$h(t) = f(t) + \gamma \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau)h(\tau)d\tau \tag{5.3}$$

ikinci tip Volterra integral denklemi ele alınsın. Önerilen metodun ana motivasyonu bilinmeyen h fonksiyonuna (5.1) ile yaklaşmaktır. Diğer bir ifadeyle

$$h(t) = \sum_{k=0}^{mn} h\left(\frac{k}{n}\right) e^{-na_n(t)} \frac{(nb_n(t))^k}{k!} \tag{5.4}$$

formunda bir yaklaşık çözüm bulunacaktır. Böylelikle

$$\begin{aligned} f(t) &= h(t) - \gamma \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau)h(\tau)d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{mn} h\left(\frac{k}{n}\right) e^{-na_n(t)} \frac{(nb_n(t))^k}{k!} - \gamma \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau) \sum_{k=0}^{mn} h\left(\frac{k}{n}\right) e^{-na_n(\tau)} \frac{(nb_n(\tau))^k}{k!} d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{mn} h\left(\frac{k}{n}\right) \left[e^{-na_n(t)} \frac{(nb_n(t))^k}{k!} - \gamma \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau) e^{-na_n(\tau)} \frac{(nb_n(\tau))^k}{k!} d\tau \right] \end{aligned} \tag{5.5}$$

eşitliği elde edilir. $h(\frac{k}{n})$ $(k = 0,1,...,mn)$ değerlerini bulmak için ε yeteri kadar küçük olmak üzere t değeri $t_i = \frac{i}{n} + \varepsilon$ $(i = 0,1,...,mn-1)$ ve $t_{mn} = m - \varepsilon$ ile değiştirilerek (5.5) eşitliği bir lineer denklem sistemine dönüştürülebilir. Tekillik (aykırılık) problemini göz ardı etmek adına integral denklemin tekil değerleri hariç $[0,m]$ aralığındaki farklı değerler alınarak t_i $(i = 0,1,...mn)$ değerleri seçilebilir. Matris notasyonu yardımıyla A bir $mn \times mn$ matris, B ve t birer $mn \times 1$ vektörler ve

$$A = \left[e^{-na_n(t_i)} \frac{(nb_n(t_i))^k}{k!} - \gamma \int_0^{t_i} \mathcal{K}(t_i,\tau) e^{-na_n(\tau)} \frac{(nb_n(\tau))^k}{k!} d\tau \right], \ (i,k = 0,1,\cdots,mn), \tag{5.6}$$

$$B = \begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_{mn}) \end{bmatrix}, \qquad t = \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1/n) \\ \vdots \\ h(m) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$At = B$$

yazılır. t çözümünü belirlemek için ilk olarak A matrisi ve B vektörü nümerik olarak hesaplanmalıdır. Bu işlemin sonunda t vektörü bulunur. Bulunan t vektörü (5.4) eşitliğinde yerine yazılarak ikinci tip Volterra integral denkeminin yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

5.2. BİRİNCİ TİP VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİNİ AYRIŞTIRMA

$\mathcal{K}$ çekirdek, g verilen reel değerli bir fonksiyon ve γ bir parametre olmak üzere

$$g(t) = \gamma \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau)h(\tau)d\tau \tag{5.7}$$

birinci tip Volterra integral denklemi ele alınsın. Önerilen metodun ana motivasyonu bilinmeyen h fonksiyonuna (5.1) ile yaklaşmaktır. Diğer bir ifade ile,

$$h(t) = \sum_{k=0}^{mn} h\left(\frac{k}{n}\right) e^{-na_n(t)} \frac{(nb_n(t))^k}{k!} \tag{5.8}$$

formunda bir yaklaşık çözüm bulunacaktır. Böylelikle

$$\begin{aligned} g(t) &= \gamma \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau) \sum_{k=0}^{mn} h\left(\frac{k}{n}\right) e^{-na_n(\tau)} \frac{(nb_n(\tau))^k}{k!} d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{mn} h\left(\frac{k}{n}\right) \left[\gamma \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau) e^{-na_n(\tau)} \frac{(nb_n(\tau))^k}{k!} d\tau\right] \end{aligned} \tag{5.9}$$

eşitliği elde edilir. $h(\frac{k}{n})$ $(k = 0,1,...,mn)$ değerlerini bulmak için ε yeteri kadar küçük olmak üzere t değeri $t_i = \frac{i}{n} + \varepsilon$ $(i = 0,1,...,mn-1)$ ve $t_{mn} = m - \varepsilon$ ile değiştirilerek (5.9) eşitliği bir lineer denklem sistemine dönüştürülebilir. Tekillik (aykırılık) problemini göz ardı etmek adına integral denklemin tekil değerleri hariç $[0,m]$ aralığındaki farklı değerler alınarak t_i $(i = 0, 1, ...mn)$ değerleri seçilebilir. Matris notasyonu yardımıyla A bir $mn \times mn$ matris, B ve t birer $mn \times 1$ vektörler ve

$$A = \gamma \int_0^{t_i} \mathcal{K}(t_i, \tau) e^{-na_n(\tau)} \frac{(nb_n(\tau))^k}{k!} d\tau, \ (i, k = 0, 1, \cdots, mn), \tag{5.10}$$

$$B = \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ \vdots \\ g(t_{mn}) \end{bmatrix}, \qquad t = \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1/n) \\ \vdots \\ h(m) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$At = B$$

yazılır. t çözümünü belirlemek için ilk olarak A matrisi ve B vektörü nümerik olarak hesaplanmalıdır. Bu işlemin sonunda t vektörü bulunur. Bulunan t vektörü (5.8) eşitliğinde yerine yazılarak birinci tip Volterra integral denkeminin yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

6. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜNÜN HATA TAHMİNİ

Bu bölümde, bir çeşit Szász-Mirakyan yaklaşım tekniği kullanılarak ikinci ve birinci tip Volterra integral denklemlerinin hesaplama çözümünün üst sınırları bulunacaktır.

6.1. İKİNCİ TİP VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN HATA ANALİZİ

Teorem 6.1. $\mathcal{K}$, $[0,m]\times[0,m]$ üzerinde sürekli, f reel değerli bir fonksiyon ve γ bir parametre olsun. Eğer bir $\alpha>2$ için $(C^{\alpha}\cap L^2)([0,m])$ sınıfına ait $h(t_i)$, (5.3) ile verilen ikinci tip Volterra integral denkleminin nümerik çözümü ise A (5.6) ile elde edilen matris, $C:=|\gamma|\sup_{t,\tau\in[0,m]}|\mathcal{K}(t,\tau)|$, $t_i=i/n$, $i=0,1,\cdots,mn$, $h(t)$ kesin çözüm, $R_n(h_n(t_i))$ önerilen yöntem olmak üzere bu çözümün hata sınırı

$$\begin{aligned}\sup_{t_i\in[0,m]}|h(t_i)-R_n(h_n(t_i))| &\leq \frac{m}{n}\|A^{-1}\|(1+Cm)\left(\alpha^2\|h\|-\frac{3\alpha}{2}\|h'\|+\frac{1}{2}\|h''\|\right)\\ &+ \frac{m}{n}\left(\alpha^2\|h_n\|-\frac{3\alpha}{2}\|h_n'\|+\frac{1}{2}\|h_n''\|\right)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

İspat. İlk olarak

$$\begin{aligned}\sup_{t_i\in[0,m]}|h(t_i)-R_n(h_n(t_i))| &= \sup_{t_i\in[0,m]}|h(t_i)-h_n(t_i)+h_n(t_i)-R_n(h_n(t_i))|\\ &\leq \sup_{t_i\in[0,m]}|h_n(t_i)-R_n(h_n(t_i))|+\sup_{t_i\in[0,m]}|h(t_i)-h_n(t_i)|\\ &:= I_1+I_2\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Szász-Mirakyan operatörleri için (5.2) ile verilen asimptotik hata sınırına göre

$$I_1=\sup_{t_i\in[0,m]}|h_n(t_i)-R_n(h_n(t_i))| \leq \frac{1}{n}t\left(\alpha^2\|h_n\|-\frac{3\alpha}{2}\|h_n'\|+\frac{1}{2}\|h_n''\|\right)$$

$$\leq \quad \frac{m}{n}\left(\alpha^2\|h_n\| - \frac{3\alpha}{2}\|h_n'\| + \frac{1}{2}\|h_n''\|\right)$$

elde edilir.

I_2 değerini hesaplamak için herhangi bir $h \in C[0,m]$ ve bir $\varepsilon > 0$ için $\|R_n(h) - h\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n sayısı mevcut olduğundan ikinci tip Volterra integral denklemi

$$f(t) = R_n(h(t)) - \gamma \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau) R_n(h(\tau)) d\tau, \quad 0 < t < m \tag{6.1}$$

şeklinde yazılabilir.

Aynı işlem h_n fonksiyonuna da uygulanır, yani

$$f_n(t) = R_n(h_n(t)) - \gamma \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau) R_n(h_n(\tau)) d\tau, \quad 0 < t < m \tag{6.2}$$

yazılır. Böylece $i = 0, 1, \cdots, mn$ için (6.1) ve (6.2) denklemlerinden sırasıyla

$$\sup_{t_i \in [0,m]} |h(t_i)| \leq \|A^{-1}\| \sup_{t_i \in [0,m]} |f(t_i)|$$

ve

$$\sup_{t_i \in [0,m]} |h_n(t_i)| \leq \|A^{-1}\| \sup_{t_i \in [0,m]} |f_n(t_i)|$$

elde edilir. Sonuç olarak, $i = 0, 1, \cdots, mn$ için

$$\sup_{t_i \in [0,m]} |h(t_i) - h_n(t_i)| \quad \leq \quad \|A^{-1}\| \sup_{t_i \in [0,m]} |f(t_i) - f_n(t_i)| \tag{6.3}$$

bulunur. Öte yandan $f(t) = h(t) - \gamma \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau) h(\tau) d\tau$ ve $f_n(t) = R_n(h(t)) - \gamma \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau) R_n(h(\tau)) d\tau$ denklemleri kullanılarak

$$f(t) - f_n(t) = h(t) - R_n(h(t)) - \gamma \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau)[h(t) - R_n(h(\tau))] d\tau$$

elde edilir. Buradan $C := |\gamma| \sup_{t,\tau \in [0,m]} |\mathcal{K}(t,\tau)|$ olmak üzere

$$\sup_{t \in [0,m]} |f(t) - f_n(t)| \quad = \quad \sup_{t,\tau \in [0,m]} \left| h(t) - R_n(h(t)) - \gamma \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau)[h(\tau) - R_n(h(\tau))] d\tau \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{t\in[0,m]} |h(t)-R_n(h(t))| + |\gamma| \sup_{t,\tau\in[0,m]} \int_0^t |\mathcal{K}(t,\tau)|\,|h(\tau)-R_n(h(\tau))|\,d\tau \\
&\leq \sup_{t\in[0,m]} |h(t)-R_n(h(t))| + C \sup_{t,\tau\in[0,m]} \int_0^t |h(\tau)-R_n(h(\tau))|\,d\tau \\
&\leq \frac{m}{n}\left(\alpha^2\|h\| - \frac{3\alpha}{2}\|h'\| + \frac{1}{2}\|h''\|\right) + C\frac{m^2}{n}\left(\alpha^2\|h\| - \frac{3\alpha}{2}\|h'\| + \frac{1}{2}\|h''\|\right) \\
&\leq (1+Cm)\frac{m}{n}\left(\alpha^2\|h\| - \frac{3\alpha}{2}\|h'\| + \frac{1}{2}\|h''\|\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Bulunan bu üst sınır (6.3) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$
\sup_{t_i\in[0,m]} |h(t_i)-h_n(t_i)| \leq \|A^{-1}\|(1+Cm)\frac{m}{n}\left(\alpha^2\|h\| - \frac{3\alpha}{2}\|h'\| + \frac{1}{2}\|h''\|\right)
$$

elde edilir. Son olarak I_1 ve I_2 için bulunan üst sınırlar kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\sup_{t_i\in[0,m]} |h(t_i)-R_n(h_n(t_i))| \;&\leq\; \frac{m}{n}\|A^{-1}\|(1+Cm)\left(\alpha^2\|h\| - \frac{3\alpha}{2}\|h'\| + \frac{1}{2}\|h''\|\right) \\
&+\; \frac{m}{n}\left(\alpha^2\|h_n\| - \frac{3\alpha}{2}\|h_n'\| + \frac{1}{2}\|h_n''\|\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliğinin sağlandığı ispat edilmiş olur. □

Yardımcı Teorem 6.2. $\tilde{C}_1 = \max_i |\gamma| \int_0^{t_i} |\mathcal{K}(t_i,\tau)|d\tau$, $\|\cdot\|$ satır dizisinin maksimum normu ve I birim matris olmak üzere Teorem 6.1 de verilen şartlar sağlansın. Bu durumda

$$
\|A-I\| = \tilde{C}_2 < 1
$$

olmak üzere

$$
cond(A) \leq \frac{1+\tilde{C}_1}{1-\tilde{C}_2}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $cond(A)$ değerinin bir üst sınırını bulmak için, $\|A\|$ ve $\|A^{-1}\|$ için sınırlar belirlenmelidir. Nümerik çözüm kısmında

$$
A = \left[e^{-na_n(t_i)}\frac{(nb_n(t_i))^k}{k!} - \gamma\int_0^{t_i} \mathcal{K}(t_i,\tau)e^{-na_n(\tau)}\frac{(nb_n(\tau))^k}{k!}d\tau \right]
$$

elde edilmiştir. Böylelikle, $\|\cdot\|$ satırların maksimum normunu göstermek üzere

$$\begin{aligned}\|A\| &= \max_i \sum_{k=0}^{mn} \left| e^{-na_n(t_i)} \frac{(nb_n(t_i))^k}{k!} - \gamma \int_0^{t_i} \mathcal{K}(t_i,\tau) e^{-na_n(\tau)} \frac{(nb_n(\tau))^k}{k!} d\tau \right| \\ &\leq \max_i \left\{ e^{-na_n(t_i)} \sum_{k=0}^{mn} \frac{(nb_n(t_i))^k}{k!} + |\gamma| \int_0^{t_i} |\mathcal{K}(t_i,\tau)| e^{-na_n(\tau)} \sum_{k=0}^{mn} \frac{(nb_n(\tau))^k}{k!} d\tau \right\} \\ &\leq 1 + \tilde{C}_1\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $\|A^{-1}\|$ normunu hesaplayalım. $\|\Omega\| = \|A - I\| = C_2 < 1$ olsun. Geometrik seri teoremine göre, I birim matris olmak üzere

$$\|A^{-1}\| = \|(1+\Omega)^{-1}\| < \frac{1}{1-\|\Omega\|} = \frac{1}{1-C_2}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \leq \frac{1+C_1}{1-C_2}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. □

6.2. BİRİNCİ TİP VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN HATA ANALİZİ

Teorem 6.3. $\mathcal{K}$, $[0,m] \times [0,m]$ üzerinde sürekli, g reel değerli bir fonksiyon ve γ bir parametre olsun. Eğer bir $\alpha > 2$ için $(C^{\alpha} \cap L^2)([0,m])$ sınıfına ait $h(t_i)$, (5.7) ile verilen birinci tip Volterra integral denkleminin nümerik çözümü ise A (5.10) ile elde edilen matris, $\tilde{D} = \sup_{t,\tau\in[0,m]} |\mathcal{K}(t,\tau)|$, $t_i = i/n$, $i = 0,1,\cdots,mn$, $h(t)$ kesin çözüm, $R_n(h_n(t_i))$ önerilen yöntem olmak üzere bu çözümün hata sınırı

$$\sup_{t_i\in[0,m]} |h(t_i) - R_n(h_n(t_i))| \leq \frac{m}{n}\left(\alpha^2\|h\| - \frac{3\alpha}{2}\|h'\| + \frac{1}{2}\|h''\|\right)\left(1 + \|A^{-1}\|Cm\right)$$

olarak hesaplanır.

İspat. İspat bir önceki teoremin ispatına benzer şekilde yapılır.

$$I_1 = \sup_{t_i\in[0,m]} |h_n(t_i) - R_n(h_n(t_i))| \leq \frac{m}{n}\left(\alpha^2\|h_n\| - \frac{3\alpha}{2}\|h_n^{'}\| + \frac{1}{2}\|h_n^{''}\|\right)$$

elde edilmiştir. Burada tek değişiklik $I_2 = \sup_{t_i\in[0,m]} |h(t_i) - h_n(t_i)|$ değeri için üst sınır bulunmasıdır.

$g(t) = \gamma \int_0^t \mathcal{K}(t,\tau)h(\tau)d\tau$ olduğundan bir önceki teoremin ispatındaki gibi benzer adımları takip ederek $\tilde{D} := \sup_{t,\tau\in[0,m]} |\mathcal{K}(t,\tau)|$ olmak üzere

$$\sup_{t_i\in[0,m]} |h(t_i) - h_n(t_i)| \leq \|A^{-1}\| C \frac{m^2}{n} \left(\alpha^2 \|h\| - \frac{3\alpha}{2}\|h'\| + \frac{1}{2}\|h''\| \right)$$

bulunur. Ayrıca

$$\sup_{t_i\in[0,m]} |h(t_i) - R_n(h_n(t_i))| \leq I_1 + I_2$$

olduğundan

$$\sup_{t_i\in[0,m]} |h(t_i) - R_n(h_n(t_i))| \leq \frac{m}{n} \left(\alpha^2 \|h\| - \frac{3\alpha}{2}\|h'\| + \frac{1}{2}\|h''\| \right) \left(1 + \|A^{-1}\| Cm\right)$$

sonucu elde edilir. □

Yardımcı Teorem 6.4. $D_1 = |\gamma| \max_i \int_0^{t_i} |\mathcal{K}(t,\tau)| d\tau$, $\|\cdot\|$ satır dizisinin maksimum normu ve I birim matris olmak üzere Teorem 6.3 de verilen şartlar sağlansın. Bu durumda

$$\|A - I\| = D_2 < 1$$

olmak üzere

$$cond(A) \leq \frac{D_1}{1 - D_2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $cond(A)$ değerinin bir üst sınırını bulmak için, $\|A\|$ ve $\|A^{-1}\|$ için sınırlar belirlenmelidir. Nümerik çözüm kısmında

$$A = \left[\gamma \int_0^{t_i} \mathcal{K}(t_i,\tau) e^{-na_n(\tau)} \frac{(nb_n(\tau))^k}{k!} d\tau \right]$$

elde edilmiştir. Böylelikle, $\|\cdot\|$ satırların maksimum normunu göstermek üzere

$$\|A\| = \max_i \sum_{k=0}^{mn} \left| \gamma \int_0^{t_i} \mathcal{K}(t_i,\tau) e^{-na_n(\tau)} \frac{(nb_n(\tau))^k}{k!} d\tau \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; |\gamma| \max_i \left\{ \int_0^{t_i} |\mathcal{K}(t_i,\tau)|\, e^{-na_n(\tau)} \sum_{k=0}^{mn} \frac{(nb_n(\tau))^k}{k!} d\tau \right\} \\
&\leq \; |\gamma| \max_i \int_0^{t_i} |\mathcal{K}(t,\tau)| d\tau = D_1
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi $\|A^{-1}\|$ normunu hesaplayalım. Let $\|\Omega'\| = \|A - I\| = D_2 < 1$ olsun. Geometrik seri teoremine göre, I birim matris olmak üzere

$$
\|A^{-1}\| = \|(1+\Omega')^{-1}\| < \frac{1}{1-\|\Omega'\|} = \frac{1}{1-D_2}
$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$
cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \leq \frac{D_1}{1-D_2}
$$

elde edilir. □

7. SONUÇ

Bu çalışmada, ikinci ve birinci tip Volterra integral denkleminin çözümü için genelleştirilmiş Szász-Mirakyan operatörleri yardımı ile bir yaklaşım önerilmiştir ve test edilmiştir. Buna ek olarak, bu yöntem için hata sınırları tahmini sağlanmıştır. Sayısal deneyler, tanıtılan tekniğin doğruluk sağladığını göstermektedir. Bu araştırmanın bulguları, gelecekteki uygulamalar için önem taşımaktadır.

8. KAYNAKLAR

[1] A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov, *Handbook of Integral Equations*. New York: CRC Press, 2008.

[2] A. V. Plotnikov and N. V. Skripnik, “Existence and uniqueness theorem for set-valued Volterra integral equations,” *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, vol. 1, no. 3, pp. 41–45, 2013.

[3] C. Corduneanu, *Integral Equations and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[4] M. Rahman, *Integral Equations and Their Applications*. Boston: WIT Press, 2007.

[5] A.-M. Wazwaz, *Linear and Nonlinear Integral Equations*. New York: Springer, 2011.

[6] K. Weierstrass, “Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veranderlichen Sitzungsberichteder,” *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pp. 633–639, 1885.

[7] S. Bernstein, “Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul des probabilites,” *Communications of the Kharkov Mathematical Society*, vol. 13, no. 1, pp. 1–2, 1912.

[8] K. Maleknejad, E. Hashemizadeh, and R. Ezzati, “A new approach to the numerical solution of Volterra integral equations by using Bernstein’s approximation,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, no. 2, pp. 647–655, 2011.

[9] A. Il’inskii and S. Ostrovska, “Convergence of generalized Bernstein polynomials,” *Journal of Approximation Theory*, vol. 116, no. 1, pp. 100–112, 2002.

[10] S. Bhattacharya and B. N. Mandal, “Use of Bernstein polynomials in numerical solutions of Volterra integral equations,” *Applied Mathematical Sciences*, vol. 2, no. 36, pp. 1773 – 1787, 2008.

[11] B. N. Mandal and S. Bhattacharya, “Numerical solution of some classes of integral equations using Bernstein polynomials,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 190, no. 2, pp. 1707–1716, 2007.

[12] P. P. Korovkin, *Linear Operators and Approximation Theory*. India: Hindustan Publishing Corporation, 1960.

[13] O. Szasz, “Generalization of S. Bernstein’s polynomials to the infinite interval,” *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 45, no. 3, pp. 239–245, 1950.

[14] G. M. Mirakjan, “Approximation of continuous functions with the aid of polynomials,” *Doklady Akademii Nauk*, vol. 31, pp. 201–205, 1941.

[15] O. Duman and M. A. Özarslan, “Szász–Mirakjan type operators providing a better error estimation,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 20, no. 12, pp. 1184–1188, 2007.

[16] A. Aral, D. Inoan, and I. Raşa, “On the generalized Szász–Mirakyan operators,” *Results in Mathematics*, vol. 65, no. 3-4, pp. 441–452, 2014.

[17] T. Acar, A. Aral, D. Cárdenas-Morales, and P. Garrancho, “Szász–Mirakyan type operators which fix exponentials,” *Results in Mathematics*, vol. 72, no. 3, pp. 1393–1404, 2017.

[18] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*. Ankara, Türkiye: Gazi Kitapevi, 2006.

[19] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley& Sons, 1978.

[20] M. Balcı, *Matematik Analiz*. Ankara, Türkiye: Palme Yayıncılık, 2016.

[21] B. Musayev and M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*. Kütahya, Türkiye: Balcı Yayınları, 2000.

[22] H. Hacısalihoğlu and A. Hacıyev, *Lineer Pozitif Operatörler Dizilerinin Yakınsaklığı*. Ankara, Türkiye: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 1995.

[23] T. Acar, M. Cappelletti Montano, P. Garrancho, and V. Leonessa, “On sequences of J. P. King-type operators,” *Journal of Function Spaces*, vol. 2019, 2019.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Nihal SEYYAR
Doğum Tarihi ve Yeri	: 09.09.1992 / Düzce
Yabancı Dili	: İngilizce
Eposta	: nihalseyyar.ns0@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Yüksek Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2020
Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2015
Lise	Sayısal	Düzce Lisesi	2010