



**T.C.  
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARI**

**MUSTAFA TOPALOĞLU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN  
DR. ÖĞR. ÜYESİ NEJLA ÖZMEN**

**DÜZCE, 2021**

**T.C.**  
**DÜZCE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARI**

Mustafa TOPALOĞLU tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN  
Düzce Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN  
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA  
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Yüksel SOYKAN  
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 27/01/2021

## BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

27 Ocak 2021

Mustafa TOPALOĞLU

## **TEŞEKKÜR**

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN'e en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca manevi desteğini esirgemeyen canım anneme, tanıdığım ilk günden bu yana her konuda yanımda olan biricik eşim Ayşe TOPALOĞLU'na ve varlıklarıyla hayatımıza renk katan kızım Zeynep Sena TOPALOĞLU, oğlum Ahmet Selim TOPALOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

**27 Ocak 2021**

**Mustafa TOPALOĞLU**

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ .....	vi
KISALTMALAR.....	vii
SİMGELER .....	viii
ÖZET .....	ix
ABSTRACT .....	x
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR.....	3
3. GOULD-HOPPER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ.....	6
3.1. GOULD-HOPPER POLİNOMLARI VE GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ.....	6
3.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARI İÇİN TOPLAM FORMÜLLERİ .....	8
3.3. GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARI İÇİN BILINEAR VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR .....	14
3.4. GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ .....	20
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARI İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ LAURICELLA FONKSİYONLARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR .....	23
4.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ LAURICELLA FONKSİYONLARI .....	23
4.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARININ BİR SINIFI İÇİN BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR .....	26
5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	31
6. KAYNAKLAR .....	32
7. EKLER .....	35
7.1. EK 1. Grafikler .....	35
7.2. EK 2. Grafikler .....	36
7.3. EK 3. Grafikler .....	37
7.4. EK 4. Grafikler .....	38
ÖZGEÇMİŞ .....	39

## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 7.1. Örnek Şekil 1.....	35
Şekil 7.2. Örnek Şekil 2.....	36
Şekil 7.3. Örnek Şekil 3.....	37
Şekil 7.4. Örnek Şekil 4.....	38



## KISALTMALAR

G-GHP

GHP

2-VHKdFP

Genelleştirilmiş-Gould-Hopper Polinomları

Gould-Hopper Polinomları

Hermite-Kampé de Fériet Polinomları



## SİMGELER

$\phi_k^{(\alpha)}(z_1, \dots, z_r)$	Çok Değişkenli Polinom
${}_2F_1(a, b; c; x)$	Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu
$P_n^{(j,c)}(x, y)$	Genelleştirilmiş Gould-Hopper Polinomu
$H_{n,j,v}(x)$	Genelleştirilmiş Hermite Polinomu
$g_n^m(x, y)$	Gould-Hopper Polinomu
$H_n(x)$	Hermite Polinomları
$F_1[\cdot], F_2[\cdot], F_3[\cdot], F_4[\cdot]$	İki Değişkenli Appel Polinomu
$F_{l;m;n}^{p;q;k}[\dots; x, y]$	İki değişkenli Kampé de Fériet Fonksiyonu
$F_A^{(n)}[\cdot], F_B^{(n)}[\cdot], F_C^{(n)}[\cdot], F_D^{(n)}[\cdot]$	n-değişkenli Genelleştirilmiş Lauricella Fonksiyonu
$(\alpha)_n$	Pochhammer Sembolü

## ÖZET

### GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARI

Mustafa TOPALOĞLU

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN

Ocak 2021, 38 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde ön bilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar ve lemmalar verilmiştir. Üçüncü bölümde, Gould-Hopper polinomları ve genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları tanıtılmış, genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları için toplam formülleri elde edilmiş ve uygulamalarına yer verilmiştir. Ayrıca, bu polinomun bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonlarını veren teoremler elde edilmiş ve bu teoremlerin uygulamalarına yer verilmiştir. Daha sonra bu polinomların bazı rekürans bağıntıları ve bazı özellikleri elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları ile genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonları arasındaki bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları verilmiştir. Son olarak özel durumlar incelenmiştir. Beşinci bölümde, sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

**Anahtar sözcükler:** Doğurucu fonksiyon, Genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları, Lauricella fonksiyon, Toplam formülü.

## ABSTRACT

### GENERALIZED GOULD-HOPPER POLYNOMIALS

Mustafa TOPALOĞLU

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master's Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Nejla ÖZMEN

January 2021, 38 pages

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, preliminary information and some definitions and lemmas to be used in other chapters are given. In the third chapter, Gould-Hopper polynomials and generalized Gould-Hopper polynomials are introduced, summation formulas for generalized Gould-Hopper polynomials are obtained and their applications are given. In addition, the theorems that give the bilinear and bilateral generating functions of this polynomial are obtained and the applications of these theorems are given. Later, some recurrence relations and some properties of these polynomials are obtained. In the fourth chapter, bilateral generating function relations between generalized Gould-Hopper polynomials and generalized Lauricella functions are given. Finally, special cases are examined. In the fifth chapter, results and suggestions are given.

**Keywords:** Generalized Gould-Hopper polynomials, Generating function, Lauricella function, Summation formula.

# 1. GİRİŞ

Bu tez, genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları (G-GHP) üzerine yapılan bir çalışmadır. Klasik ortogonal polinomlardan biri olan iki değişkenli Hermite polinomları veya bir başka deyişle Gould-Hopper polinomları (GHP) ilk defa 1962 yılında H. Gould ve A. T. Hopper tarafından tanımlanmıştır [1]. Hermite polinomları Fransız matematikçi Charles Hermite (1822-1901) tarafından bulunmuştur. Hermite, Hermite diferansiyel denklemi olarak bilinen diferansiyel denklem sınıfı üzerine çalışmıştır. Hermite, dünyanın en büyük matematikçileri arasında yer alan Picard, Gaston Darboux, Paul Appel, Emile Borel, Paul Painleve ve Henri Poincare gibi birçok ünlü matematikçiyi de yetiştirmiştir. Ortogonal polinomlar üzerine yapılan çalışmalar hâlen devam etmektedir. Bu polinomlar, fizik, matematik, uygulamalı bilimler, mühendislik ve fonksiyonel analiz, diferansiyel denklemler, kuantum mekaniği, matematiksel analiz, matematiksel fizik vb. dahil olmak üzere birçok araştırma alanına sahiptir. Ortogonal polinom teorisindeki en önemli polinomlardan birisi genelleştirilmiş Hermite-Kampé de Fériet (veya Gould-Hopper) polinomudur [1]. Ortogonal polinomlar teorisinde, polinomlar ve fonksiyonlar için üretilen formlar, birkaç matematikçi tarafından çalışılmış ve geliştirilmiştir [2]-[9]. Doğru fonksiyonlar, ürettikleri dizilerin çeşitli yararlı özelliklerinin araştırılmasında önemli bir rol oynar. Çok çeşitli araştırma konularında, hatta modern kombinatoriklerde sayılar ve polinomlar için belirli özellikler ve formüller bulmak için kullanılırlar. Bir, iki ve daha fazla değişkende oldukça geniş çeşitlilikte özel fonksiyon (ve polinom) dizileri için bilinear, bilateral doğurucu fonksiyonlarını elde etmenin çeşitli yöntemlerine sistematik bir girişde kullanılan faydalı bir uygulamadır. Gould - Hopper polinom ailesi, üstel fonksiyon ile tanımlanır [10].

Son yıllarda bu polinomlar üzerine yapılan çalışmalar önemli bir yer tutmaktadır. Uygun koşullar altında ortogonal polinomların farklı tip özellikleri halen çalışılmaktadır. Tek değişkenli ortogonal polinomların ilk örnekleri A. M. Legendre, P. S. Laplace, J. L. Lagrange ve N. H. Abel tarafından ele alınmıştır. Daha sonraları, P. L. Chebychev klasik ortogonal polinomların bazı önemli özel ve genel durumlarını araştırmış, bu polinomların

genel teorisini geliştirmiştir. Tek değişkenli ortogonal polinomlar teorisi üzerine yapılan en önemli alışmalar C. Jacobi, C. Hermite, E. Laguerre ve T. Stieltjes tarafından verilmiştir. Ortogonal polinomlar teorisi üzerinde klasik sonuçlar 1939 yıllarında Szegő tarafından ele alınmıştır.

Aynı zamanda, matematikte doğurucu fonksiyon (veya üreteç fonksiyonu), bir dizinin girdilerinin bilgisini katsayılarında tutan bir biçimsel kuvvet serisidir. Kullanım ve uygulama alanlarına göre çeşitli doğurucu fonksiyonlar bulunmaktadır. Karma doğurucu fonksiyon, multilinear doğurucu fonksiyon, multilateral doğurucu fonksiyon bunlardan bazılarıdır. Doğurucu fonksiyonlar sayesinde matematikte, fizikte ve özellikle de mühendislikte pek çok uygulama alanına sahip olan özel fonksiyonların yapısal davranışları ve karakteristikleri incelenabilmektedir. Konunun geniş bir yelpazede çalışılıyor olması birçok araştırmacının ilgisini çekmektedir. Özellikle de son yıllarda etkin bir araştırma sahası haline gelmiştir. Bir doğurucu fonksiyonun elde edilmesinde kombinatoryal toplamlar ve binom özdeşlikler önem arz etmektedir. Bu özdeşlikler yardımıyla doğurucu fonksiyonların yanı sıra integral gösterimleri, ters bağıntılar, hipergeometrik serilerin içerildiği gösterimler gibi daha farklı özellikler de elde edilebilmektedir. Doğurucu fonksiyonlar kullanılarak özel polinomlar tanımlanabilir. Matematikte iyi bilinen tek ve çok değişkenli birçok polinom, doğurucu fonksiyon yardımıyla tanımlanmıştır [11]-[15]. Ayrıca Gould-Hopper tip polinomlar üzerinde yapılan çalışmalar, daha halen devam etmektedir. Örneğin; 2014 yılında Laguerre-Gould Hopper polinomları [16], 2014 yılında Legendre-Gould Hopper polinomları üzerine çalışmalar [17], 2015 yılında Gould-Hopper polinomlarının çok değişkenli matrix genelleştirilmesi [18], 2020 yılında genelleştirilmiş dejenere Gould-Hopper tip polinomlar [19], üzerine çalışmalar mevcuttur.

Bu tezde ilk olarak Gould-Hopper polinomları ve genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları verilmiştir. Daha sonra, genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomlarının toplam formülleri, bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısını veren teoremler elde edildi ve sonuçları incelenmiştir. Türev içeren rekürans bağıntısı ve polinomun bazı değerleri verilmiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları ile Lauricella fonksiyonları arasındaki bilateral doğurucu fonksiyonunu veren teorem bulunmaktadır. Bu teorem kullanılarak bazı doğurucu fonksiyon bağıntıları verilmiştir. Son bölümde, elde edilen sonuçlar ve öneriler bulunmaktadır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

**Tanım 2.1.**  $\lambda$  reel yada kompleks bir sayı,  $\vartheta$  sıfır yada pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$(\lambda)_{\vartheta} = \begin{cases} (\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + \vartheta - 1), & \vartheta \geq 1 \\ 1, & \vartheta = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan  $(\lambda)_{\vartheta}$  ifadesine Pochhammer sembolü denir [13].

**Tanım 2.2.**  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  reel ya da kompleks sabitler olmak üzere,

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n x^n}{(\gamma)_n n!}, \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanan seriye hipergeometrik seri denir. Literatürde  $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$  ile gösterilir ve bu fonksiyona hipergeometrik fonksiyon denir. Genelleştirilmiş hipergeometrik seri,

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n x^n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \dots (\gamma_q)_n n!}, \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır [20].

**Tanım 2.3.** (Newton Binom Formülü)  $a, b \in R$  ve  $n \in N$  olmak üzere,

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k, \quad (2.4)$$

dır.

**Lemma 2.4.**  $c > 0$  olmak üzere,

$$c^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln c)^n}{n!}, \quad (2.5)$$

şeklinde açılımına sahiptir [20].

Ayrıca,  $c = e$  alınırsa,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (2.6)$$

elde edilir.

**Lemma 2.5.** Hipergeometrik serilerin tanımında Eşitlik (2.2)'deki ifadesinde  $\alpha, \beta, \gamma$  değerleri özel olarak alındığında aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [20]:

a)

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)_n \frac{x^n}{n!} = {}_2F_1(\alpha, 1; 1; x). \quad (2.7)$$

b)

$$\ln(1+x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (1)_n (-x)^n}{(2)_n n!} = x {}_2F_1(1, 1; 2; -x). \quad (2.8)$$

**Lemma 2.6.** Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [13]:

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} A(k, n - pk). \quad (2.9)$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n + pk). \quad (2.10)$$

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n - k). \quad (2.11)$$

d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n + k). \quad (2.12)$$

e)

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{\lfloor k/p \rfloor} A(k, l) = \sum_{l=0}^{\lfloor n/p \rfloor} \sum_{k=0}^{n-pl} A(k + pl, l). \quad (2.13)$$

**Tanım 2.7.** İki değişkenli bir  $f(x,t)$  fonksiyonu  $t$  nin kuvvetlerine göre

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x,t) t^n \quad (2.14)$$

şeklinde bir seriye açılabilirse,  $F(x,t)$  fonksiyonuna  $\{f_n(x)\}$  fonksiyonlar ailesinin bir doğurucu fonksiyonu denir. Burada  $c_n$  ler  $x$  ve  $t$  den bağımsız,  $n$  nin bir fonksiyonu olup değişik parametreler içerebilirler.

**Tanım 2.8.** Üç değişkenli  $D(x,y,t)$  fonksiyonu,  $t$  nin kuvvetlerine göre

$$D(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x) h_k(y) t^k \quad (2.15)$$

şeklinde bir seriye açılabilirse,  $D(x,y,t)$  fonksiyonuna  $h_k(x)$  fonksiyonları için bilinear doğurucu fonksiyon denir.

**Tanım 2.9.** Üç değişkenli  $D(x,y,t)$  fonksiyonu  $t$  nin kuvvetlerine göre

$$D(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x) g_k(y) t^k \quad (2.16)$$

şeklinde bir seriye açılabilirse  $D(x,y,t)$  fonksiyonuna  $h_k(x)$  ve  $g_k(y)$  fonksiyonları için bilateral doğurucu fonksiyon denir.

**Tanım 2.10.**  $(r+1)$  değişkenli  $D(x_1, x_2, \dots, x_r, t)$   $t$  nin kuvvetlerine göre,

$$D(x_1, x_2, \dots, x_r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x_1) f_k(x_2) \dots f_k(x_r) t^k \quad (2.17)$$

şeklinde bir seriye açılabilirse,  $D(x,y,t)$  fonksiyonuna  $f_k(x_1), f_k(x_2), \dots, f_k(x_r)$  fonksiyonları için multilineer doğurucu fonksiyon denir.

**Tanım 2.11.**  $(r+1)$  değişkenli  $D(x_1, x_2, \dots, x_r, t)$   $t$  nin kuvvetlerine göre

$$D(x_1, x_2, \dots, x_r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_{1k}(x_1) f_{2k}(x_2) \dots f_{rk}(x_r) t^k \quad (2.18)$$

şeklinde bir seriye açılabilirse,  $D(x_1, x_2, \dots, x_r, t)$  fonksiyonuna  $f_{1k}(x_1), f_{2k}(x_2), \dots, f_{rk}(x_r)$  fonksiyonları için multilateral doğurucu fonksiyon denir.

### 3. GOULD-HOPPER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Gould-Hopper polinomları  $g_n^m(x, y)$  ve genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları  $P_n^{(j,c)}(x, y)$  için bazı yeni özellikler türetiyoruz. Ayrıca, genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları  $P_n^{(j,c)}(x, y)$  için toplam formüllerini elde ediyoruz. Bu toplam formüllerine ek olarak, genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları  $P_n^{(j,c)}(x, y)$  için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonları veren teoremler elde edilecektir. Burada verilen teoremler için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonları veren bağıntılar yardımıyla, genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları için bazı sonuçlar ve rekürans bağıntıları elde edilecektir.

#### 3.1. GOULD-HOPPER POLİNOMLARI VE GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda, Gould-Hopper polinomları ve genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları için genel bilgiler verilecektir.

1962 yılında Gould ve Hopper tarafından, Hermite polinomlarının genelleştirilmesiyle

$$g_n^m(x, y) = \sum_{k=0}^{[n/m]} \frac{n!}{k!(n-mk)!} y^k x^{n-mk} \quad (m \in \mathbb{Z}^+), \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır [1]. Eşitlik (3.1) ifadesinde  $x = 2x$ ,  $m = 2$ ,  $y = -1$  alınırsa,

$$\begin{aligned} g_n^2(2x, -1) &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(n-2k)!} (-1)^k (2x)^{n-2k} \\ &= H_n(x), \end{aligned} \quad (3.2)$$

klasik Hermite polinomları elde edilir. Gould-Hopper polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^m(x, y) \frac{t^n}{n!} = e^{xt+yt^m} \quad (m \in \mathbb{N} \text{ ve } m \geq 2), \quad (3.3)$$

şeklinde doğurucu fonksiyona sahiptir [10]. Eşitlik (3.1) ifadesinde  $m = 1$  durumunda iki değişkenli Newton binom formülü elde edilir. Eşitlik (3.3) ifadesinde  $m = 2$  alınırsa iki değişkenli klasik Hermite polinomları  $H_n^{(2)}(x, y)$  elde edilir. Bu polinom yardımıyla özel polinomların iki değişkenli uzantılarını tanımlamak mümkündür [2].

Genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları (G-GHP)  $P_n^{(j,c)}(x, y)$ ;

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x, y) \frac{t^n}{n!} = c^{xt+yt^j} \quad (c > 1, j \geq 2), \quad (3.4)$$

şeklinde doğurucu fonksiyona sahiptir [21]. Genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları  $P_n^{(j,c)}(x, y)$

$$P_n^{(j,c)}(x, y) = n! \sum_{s=0}^{[n/j]} \frac{x^{n-js} y^s}{(n-js)! s!} (\ln c)^{n+s-js} \quad (j \geq 2, j \in N), \quad (3.5)$$

şeklinde bir toplam ifadesine sahiptir [21]. Ayrıca Eşitlik (3.5) ifadesinde  $c = e$  alınırsa

$$P_n^{(j,e)}(x, y) = H_n^{(j)}(x, y) \quad (3.6)$$

elde edilir. Buradaki,  $H_n^{(j)}(x, y)$  iki değişkenli genelleştirilmiş Hermite polinomudur ve

$$H_n^{(j)}(x, y) = n! \sum_{s=0}^{[n/j]} \frac{x^{n-js} y^s}{(n-js)! s!} \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanmıştır [1], [22]. İki değişkenli genelleştirilmiş Hermite polinomunun doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(j)}(x, y) \frac{t^n}{n!} = e^{xt+yt^j} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanmıştır [1], [22].

Aynı şekilde, Eşitlik (3.5) ifadesinde  $c = e, j = 2$  alınırsa,

$$P_n^{(2,e)}(x, y) = H_n(x, y) \quad (3.9)$$

elde edilir. Buradaki,  $H_n(x, y)$  klasik Hermite polinomudur ve

$$H_n(x, y) = n! \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{x^{n-2s} y^s}{(n-2s)! s!} \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanmıştır [1], [22].

Klasik iki değişkenli Hermite Polinomunun doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, y) \frac{t^n}{n!} = e^{xt+yt^2} \quad (3.11)$$

sahiptir [23]. Bir başka deyişle buradaki polinomlar iki değişkenli Hermite-Kampé de Fériet (veya Gould-Hopper) polinomları (2-VHKdFP) olarak bilinir.

Ayrıca, Eşitlik (3.7) ifadesinde  $x = vx$ ,  $y = -1$  alınırsa, M. Lahiri tarafından 1971 yılında

$$H_n^{(j)}(vx, -1) = H_{n,j,v}(x) \quad (3.12)$$

iki değişkenli Hermite polinomlarının bir başka genelleştirilmiş tanımlanmış ve bu polinomun

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{n,j,v}(x) \frac{t^n}{n!} = e^{vxt-t^j} \quad (3.13)$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyonuna sahiptir [24].

Bu polinomlar, parabolik koordinatlarda, kuantum mekaniğinde ve olasılık teorisinde, Laplace denklemini içeren problemlerde, klasik ve genelleştirilmiş ısı denklemlerinin çözümlerinde önemli bir rol oynamaktadır.

### 3.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARI İÇİN TOPLAM FORMÜLLERİ

Bu kısımda, genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomları  $P_n^{(j,c)}(x, y)$  için toplam formülleri elde edilecektir.

**Teorem 3.1.** Genelleştirilmiş Gould-Hopper Polinomları  $P_n^{(j,c)}(x, y)$  için aşağıdaki toplam formülü geçerlidir [25]:

$$P_{n+m}^{(j,c)}(w, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^m \binom{n}{k} \binom{m}{r} (w-x)^{k+r} (\ln c)^{k+r} P_{n+m-k-r}^{(j,c)}(x, y). \quad (3.14)$$

*İspat.* Eşitlik (3.4) ifadesinde  $t$  yerine  $u + t$  yazılırsa ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{(t+u)^n}{n!} = \sum_{n,m=0}^{\infty} f(n+m) \frac{t^n u^m}{n! m!} \quad (3.15)$$

formülü kullanılırsa [28];

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x,y) \frac{(t+u)^n}{n!} = c^{x(t+u)+y(t+u)^j} \quad (3.16)$$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} P_{n+m}^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n u^m}{n!m!} = c^{x(t+u)} c^{y(t+u)^j} \quad (3.17)$$

$$c^{-x(t+u)} \sum_{n,m=0}^{\infty} P_{n+m}^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n u^m}{n!m!} = c^{y(t+u)^j} \quad (3.18)$$

elde edilir. Eşitlik (3.18) ifadesinde  $x$  yerine  $w$  yazılırsa,

$$c^{-w(t+u)} \sum_{n,m=0}^{\infty} P_{n+m}^{(j,c)}(w,y) \frac{t^n u^m}{n!m!} = c^{y(t+u)^j} \quad (3.19)$$

elde edilir. Eşitlik (3.18) ifadesi ile Eşitlik (3.19) ifadesi birbirine eşitlenirse,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} P_{n+m}^{(j,c)}(w,y) \frac{t^n u^m}{n!m!} = c^{(w-x)(t+u)} \sum_{n,m=0}^{\infty} P_{n+m}^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n u^m}{n!m!}, \quad (3.20)$$

elde edilir. Eşitlik (3.20) ifadesinde, Eşitlik (2.5) ifadesi uygulanırsa,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} P_{n+m}^{(j,c)}(w,y) \frac{t^n u^m}{n!m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((w-x)(t+u)(\ln c))^k}{k!} \sum_{n,m=0}^{\infty} P_{n+m}^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n u^m}{n!m!}, \quad (3.21)$$

elde edilir. Eşitlik (3.21) ifadesine, Tanım 2.3 uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m=0}^{\infty} P_{n+m}^{(j,c)}(w,y) \frac{t^n u^m}{n!m!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{(w-x)^k t^{k-r} u^r (\ln c)^k}{k!} \sum_{n,m=0}^{\infty} P_{n+m}^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n u^m}{n!m!}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir. Eşitlik (3.22) ifadesine, Eşitlik (2.12) özdeşliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m=0}^{\infty} P_{n+m}^{(j,c)}(w,y) \frac{t^n u^m}{n!m!} \\ &= \sum_{k,r=0}^{\infty} \frac{(w-x)^{k+r} (\ln c)^{k+r} t^k u^r}{k!r!} \sum_{n,m=0}^{\infty} P_{n+m}^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n u^m}{n!m!} \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir. Eşitlik (3.23) ifadesine iki defa Eşitlik (2.11) özdeşliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m=0}^{\infty} P_{n+m}^{(j,c)}(w,y) \frac{t^n u^m}{n!m!} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{k,r=0}^{n,m} \frac{P_{n+m-k-r}^{(j,c)}(x,y) (w-x)^{k+r} (\ln c)^{k+r}}{k!r!} \frac{t^n u^m}{(n-k)!(m-r)!} \end{aligned} \quad (3.24)$$

elde edilir. Son eşitlikte  $t^n$  ve  $u^m$  nin katsayıları birbirine eşitlenirse

$$P_{n+m}^{(j,c)}(w,y) = \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^m \binom{n}{k} \binom{m}{r} (w-x)^{k+r} (\ln c)^{k+r} P_{n+m-k-r}^{(j,c)}(x,y), \quad (3.25)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.  $\square$

**Uyarı 3.2.** Teorem 3.1 ifadesinde  $m = 0$  yazılırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.3.** Genelleştirilmiş Gould-Hopper Polinomları  $P_n^{(j,c)}(x,y)$  için aşağıdaki toplam formülü elde edilir [25]:

$$P_n^{(j,c)}(w,y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (w-x)^k (\ln c)^k P_{n-k}^{(j,c)}(x,y). \quad (3.26)$$

**Uyarı 3.4.** Eşitlik (3.26) da  $w$  yerine  $w+x$  yazılırsa,

$$P_n^{(j,c)}(w+x,y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (w)^k (\ln c)^k P_{n-k}^{(j,c)}(x,y), \quad (3.27)$$

elde edilir.

**Teorem 3.5.** Genelleştirilmiş Gould-Hopper Polinomları  $P_n^{(j,c)}(x,y)$  için aşağıdaki toplam ifadesi geçerlidir [25]:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{x}{w}\right)^r \left(\frac{X}{W}\right)^s}{r!s!} P_r^{(j,c)}(w,y) P_s^{(j,c)}(W,y) \\ &= \sum_{k=0}^r \sum_{l=0}^s \frac{y^{k+l} (\ln c)^{k+l} \left[\left(\frac{x}{w}\right)^j - 1\right]^k \left[\left(\frac{X}{W}\right)^j - 1\right]^l}{(r-jk)!k!(s-jl)!} P_{r-jk}^{(j,c)}(x,y) P_{s-jl}^{(j,c)}(X,y). \end{aligned} \quad (3.28)$$

*İspat.* Eşitlik (3.4) ifadesini kullanarak,  $-t$  ve  $-T$  ye göre seri açılımları yazılırsa,

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r P_r^{(j,c)}(x,y) \frac{t^r}{r!} = c^{-xt+y(-t)^j} \quad (c > 1, \quad j \geq 2), \quad (3.29)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s P_s^{(j,c)}(X,y) \frac{T^s}{s!} = c^{-XT+y(-T)^j} \quad (c > 1, \quad j \geq 2), \quad (3.30)$$

elde edilir. Eşitlik (3.29) ve Eşitlik (3.30) ifadesi taraf tarafa çarpılır, yani Cauchy çarpımı uygulanırsa,

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} P_r^{(j,c)}(x,y) P_s^{(j,c)}(X,y) \frac{t^r T^s}{r! s!} = c^{-xt+y(-t)^j - XT+y(-T)^j}, \quad (3.31)$$

elde edilir. Eşitlik (3.31) ifadesinde  $t$  yerine  $wz$  ve  $T$  yerine  $WZ$  yazılırsa,

$$\begin{aligned} & c^{-(xwz-y(-wz)^j + XWZ-y(-WZ)^j)} \\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} P_r^{(j,c)}(x,y) P_s^{(j,c)}(X,y) \frac{(wz)^r (WZ)^s}{r! s!} \end{aligned} \quad (3.32)$$

elde edilir. Eşitlik (3.32) ifadesinde  $x$  yerine  $w$ ,  $w$  yerine  $x$ ,  $X$  yerine  $W$  ve  $W$  yerine  $X$  yazıldığında,

$$\begin{aligned} & c^{-(xwz-y(-wz)^j + XWZ-y(-XZ)^j)} \\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} P_r^{(j,c)}(w,y) P_s^{(j,c)}(W,y) \frac{(xz)^r (XZ)^s}{r! s!} \end{aligned} \quad (3.33)$$

elde edilir. Eşitlik (3.33) ifadesinin sol tarafına, bazı özel değerlerle çarpılıp, bölünürse ve Eşitlik (3.4) ifadesi ve Eşitlik (2.5) özdeşliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & c^{-(xwz-y(-xz)^j + XWZ-y(-XZ)^j)} \\ &= c^{-xwz+y(-xz)^j} c^{-XWZ+y(-XZ)^j} \\ &= \left( c^{-xwz+y(-xz)^j} \cdot \frac{c^{-xwz+y(-wz)^j}}{c^{-xwz+y(-wz)^j}} \right) \left( c^{-XWZ+y(-XZ)^j} \cdot \frac{c^{-XWZ+y(-WZ)^j}}{c^{-XWZ+y(-WZ)^j}} \right) \\ &= \left( c^{y(-xz)^j - y(-wz)^j} \cdot c^{-xwz+y(-wz)^j} \right) \left( c^{y(-XZ)^j - y(-WZ)^j} \cdot c^{-XWZ+y(-WZ)^j} \right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} P_r^{(j,c)}(x,y) \frac{(-wz)^r}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[y(-z)^j (x^j - w^j) \ln c]^k}{k!} \\ &\quad \times \sum_{s=0}^{\infty} P_s^{(j,c)}(X,y) \frac{(-WZ)^s}{s!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[y(-Z)^j (X^j - W^j) \ln c]^l}{l!}, \\ &= \sum_{k,r=0}^{\infty} (-1)^{r+jk} \frac{y^k (z)^{jk} (x^j - w^j)^k (\ln c)^k (wz)^r}{r! k!} P_r^{(j,c)}(x,y) \\ &\quad \times \sum_{s,l=0}^{\infty} (-1)^{s+jl} \frac{y^l (Z)^{jl} (X^j - W^j)^l (\ln c)^l (WZ)^s}{s! l!} P_s^{(j,c)}(X,y), \end{aligned} \quad (3.34)$$

elde edilir. Böylece, elde edilen son ifadenin sağ tarafına Eşitlik (2.9) özdeşliği uygulanırsa, yani  $r$  yerine  $r - jk$ ,  $s$  yerine  $s - jl$  yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k,r=0}^{\infty} (-1)^{r+jk} \frac{y^k (z)^{jk} (x^j - w^j)^k (\ln c)^k (wz)^r}{r!k!} P_r^{(j,c)}(x,y) \\
& \times \sum_{s,l=0}^{\infty} (-1)^{s+jl} \frac{y^l (Z)^{jl} (X^j - W^j)^l (\ln c)^l (WZ)^s}{s!l!} P_s^{(j,c)}(X,y) \\
= & \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[r/j]} (-1)^r \frac{y^k (z)^{jk} (x^j - w^j)^k (\ln c)^k (wz)^{r-jk}}{(r-jk)!k!} P_{r-jk}^{(j,c)}(x,y) \\
& \times \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[s/j]} (-1)^s \frac{y^l (Z)^{jl} (X^j - W^j)^l (\ln c)^l (WZ)^{s-jl}}{(s-jl)!l!} P_{s-jl}^{(j,c)}(X,y), \quad (3.35)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik (3.34) ile Eşitlik (3.35) ifadeleri birbirine eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[r/j]} (-1)^r \frac{y^k (z)^{jk} (x^j - w^j)^k (\ln c)^k (wz)^{r-jk}}{(r-jk)!k!} P_{r-jk}^{(j,c)}(x,y) \\
& \times \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[s/j]} (-1)^s \frac{y^l (Z)^{jl} (X^j - W^j)^l (\ln c)^l (WZ)^{s-jl}}{(s-jl)!l!} P_{s-jl}^{(j,c)}(X,y) \\
= & \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} P_r^{(j,c)}(w,y) P_s^{(j,c)}(W,y) \frac{(xz)^r (XZ)^s}{r!s!} \quad (3.36)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeye  $z^r$  nin ve  $Z^s$  nin katsayıları eşitlenirse ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(\frac{x}{w}\right)^r \left(\frac{X}{W}\right)^s}{r!s!} P_r^{(j,c)}(w,y) P_s^{(j,c)}(W,y) \\
= & \sum_{k=0}^{[r/j]} \sum_{l=0}^{[s/j]} \frac{y^{k+l} (\ln c)^{k+l} \left[\left(\frac{x}{w}\right)^j - 1\right]^k \left[\left(\frac{X}{W}\right)^j - 1\right]^l}{(r-jk)!k!(s-jl)!l!} P_{r-jk}^{(j,c)}(x,y) P_{s-jl}^{(j,c)}(X,y), \quad (3.37)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.  $\square$

**Lemma 3.6.** Genelleştirilmiş Gould-Hopper Polinomları  $P_n^{(j,c)}(x,y)$  için aşağıdaki toplam formülü geçerlidir [25]:

$$P_n^{(j,c)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{n-k}^{(j,c)}(x_1, y_1) P_k^{(j,c)}(x_2, y_2). \quad (3.38)$$

*İspat.* Eşitlik (3.4) ifadesinde  $x$  yerine  $x_1 + x_2$ ,  $y$  yerine  $y_1 + y_2$  yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \frac{t^n}{n!} = c^{(x_1+x_2)t+(y_1+y_2)t^j}, \quad (3.39)$$

elde edilir. Eşitlik (3.39) ifadesinin sağ tarafını düzenlersek ve Eşitlik (3.4) ifadesini tekrar kullanırsak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \frac{t^n}{n!} &= c^{x_1t+y_1t^j} c^{x_2t+y_2t^j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x_1, y_1) \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(j,c)}(x_2, y_2) \frac{t^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x_1, y_1) P_k^{(j,c)}(x_2, y_2) \frac{t^{n+k}}{n!k!} \end{aligned} \quad (3.40)$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ tarafına, Eşitlik (2.11) özdeşliği uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n P_{n-k}^{(j,c)}(x_1, y_1) P_k^{(j,c)}(x_2, y_2) \frac{t^n}{(n-k)!k!} \quad (3.41)$$

elde edilir. Eşitlik (3.41) ifadesinin  $t^n$  nin katsayıları birbirine eşitlenirse,

$$P_n^{(j,c)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{n-k}^{(j,c)}(x_1, y_1) P_k^{(j,c)}(x_2, y_2) \quad (3.42)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.  $\square$

**Sonuç 3.7.** Eşitlik (3.14), Eşitlik (3.26) ve Eşitlik (3.27) ifadelerinde  $j = 2$ ,  $c = e$  alınır ve Eşitlik (3.8) ifadesi kullanılırsa,

$$H_{n+m}(w, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^m \binom{n}{k} \binom{m}{r} (w-x)^{k+r} H_{n+m-k-r}(x, y), \quad (3.43)$$

$$H_n(w, y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (w-x)^k H_{n-k}(x, y), \quad (3.44)$$

$$H_n(w+x, y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w^k H_{n-k}(x, y), \quad (3.45)$$

2 – VHKdFP  $H_n(x, y)$  için toplam formülleri elde edilir.

**Sonuç 3.8.** Eşitlik (3.28) ifadesinde  $j = 2$  ve  $c = e$  alınır ve Eşitlik (3.8) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{x}{w}\right)^r \left(\frac{X}{W}\right)^s}{r!s!} H_r(w, y) H_s(W, y) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \sum_{l=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \frac{y^{k+l} \left[\left(\frac{x}{w}\right)^2 - 1\right]^k \left[\left(\frac{X}{W}\right)^2 - 1\right]^l}{(r-2k)!k!(s-2l)!l!} H_{r-2k}(x, y) H_{s-2l}(X, y), \end{aligned} \quad (3.46)$$

2 – *VHKdFP*  $H_n(x, y)$  için toplam formülü elde edilir.

**Sonuç 3.9.** Eşitlik (3.14), Eşitlik (3.26), Eşitlik (3.27) ifadesinde  $y = -1$ ,  $j = 2$ ,  $c = e$  ve  $x$  yerine  $vx$ ,  $v$  yerine  $wv$  yazılır ve Eşitlik (3.12) ifadesi kullanılırsa, M. Lahiri tarafından tanımlanan Hermite Polinomu için  $H_{n,m,v}(x)$ ;

$$H_{n+m,j,v}(w) = \sum_{n,r=0}^{k,l} \binom{k}{n} \binom{l}{r} (v)^{n+r} (w-x)^{n+r} H_{n+m-k-r,j,v}(x), \quad (3.47)$$

$$H_{n,j,v}(w) = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (v)^n (w-x)^n H_{n-k,j,v}(x), \quad (3.48)$$

$$H_{n,j,v}(w+x) = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (vw)^{k-n} H_{n-k,j,v}(x), \quad (3.49)$$

toplam formülleri elde edilir. Ayrıca, Eşitlik (3.28) ifadesinde,  $x$  yerine  $vx$ ,  $w$  yerine  $vw$ ,  $X$  yerine  $vX$ ,  $W$  yerine  $vW$  yazılır ve Eşitlik (3.12) kullanılırsa, M. Lahiri tarafından tanımlanan Hermite Polinomu için  $H_{n,m,v}(x)$ ;

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{x}{w}\right)^r \left(\frac{X}{W}\right)^s}{r!s!} H_{r,m,v}(w, y) H_{s,m,v}(W, y) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor r/m \rfloor} \sum_{l=0}^{\lfloor s/m \rfloor} \frac{\left[1 - \left(\frac{x}{w}\right)^m\right]^k \left[1 - \left(\frac{X}{W}\right)^m\right]^l}{(r-mk)!k!(s-ml)!l!} H_{r-2k,m,v}(x, y) H_{s-2l,m,v}(X), \end{aligned} \quad (3.50)$$

başka toplam formülü elde edilir.

### 3.3. GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARI İÇİN BILINEAR VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Bu kısımda, genelleştirilmiş Gould-Hopper  $P_n^{(j,c)}(x, y)$  polinomlarının bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonlarını veren bazı teoremler elde edilecek ve bu teoremlerin bazı uygulamalarını ele alınacaktır. Burada kullanılan yöntemler bir çok araştırmacı tarafından kullanılmaktadır. [9], [20] ve [29] uncu referanslarda benzer yöntemler kullanılmıştır.

**Teorem 3.10.**  $\mu$  -üncü basamaktan  $z_1, \dots, z_r$  ( $r \in N$ ) kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan  $\Omega_\mu(z_1, \dots, z_r)$  fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu, \psi}(z_1, \dots, z_r, \zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(z_1, \dots, z_r) \zeta^k \quad (a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C}), \quad (3.51)$$

ve  $n, p \in N$  için

$$\Theta_{n,p}^{\mu, \psi}(x, y; z_1, \dots, z_r; \xi) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} a_k P_{n-pk}^{(j,c)}(x, y) \Omega_{\mu+\psi k}(z_1, \dots, z_r) \frac{\xi^k}{(n-pk)!} \quad (3.52)$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu, \psi}\left(x, y; z_1, \dots, z_r; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n = e^{xt+yt^j} \Lambda_{\mu, \psi}(z_1, \dots, z_r; \eta), \quad (3.53)$$

bağıntısı gerçekleşir [25].

*İspat.* Eşitlik (3.53) ifadesinin sol tarafına  $T$  diyelim. Eşitlik (3.52) ifadesi, Eşitlik (3.53) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu, \psi}\left(x, y; z_1, \dots, z_r; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} a_k P_{n-pk}^{(j,c)}(x, y) \Omega_{\mu+\psi k}(z_1, \dots, z_r) \frac{\left(\frac{\eta}{t^p}\right)^k}{(n-pk)!} \right) t^n, \end{aligned} \quad (3.54)$$

elde edilir. Bu ifadeye, Eşitlik (2.12) özdeşliği uygulanır ve Eşitlik (3.4) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_n^{(j,c)}(x, y) \Omega_{\mu+\psi k}(z_1, \dots, z_r) \frac{\eta^k t^{n+pk}}{t^{pk} n!} \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(z_1, \dots, z_r) \eta^k \right) \\ &= e^{xt+yt^j} \Lambda_{\mu, \psi}(z_1, \dots, z_r; \eta), \end{aligned} \quad (3.55)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.  $\square$

**Uyarı 3.11.** Teorem 3.10 da,

$$\Omega_{\mu+\psi k}(z_1, \dots, z_r) = \phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(z_1, \dots, z_r) \quad (3.56)$$

çok değişkenli  $\phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$  polinomu alınırsa,

$$\Lambda_{\mu, \psi}(z_1, \dots, z_r, \zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(z_1, \dots, z_r) \zeta^k \quad (a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C}), \quad (3.57)$$

ve  $n, p \in \mathbb{N}$  için

$$\Theta_{n,p}^{\mu, \psi}(x, y; z_1, \dots, z_r; \xi) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k P_{n-pk}^{(j,c)}(x, y) \phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(z_1, \dots, z_r) \frac{\xi^k}{(n-pk)!}, \quad (3.58)$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu, \psi}\left(x, y; z_1, \dots, z_r; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k P_{n-pk}^{(j,c)}(x, y) \phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(z_1, \dots, z_r) \frac{\left(\frac{\eta}{t^p}\right)^k}{(n-pk)!} \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_n^{(j,c)}(x, y) \phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(z_1, \dots, z_r) \frac{\eta^k t^{n+pk}}{t^{pk} n!} \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(z_1, \dots, z_r) \eta^k \right) \\ &= c^{xt+yt^j} \Lambda_{\mu, \psi}(z_1, \dots, z_r; \eta), \end{aligned} \quad (3.59)$$

elde edilir.

**Sonuç 3.12.** Uyarı 3.11 de  $\mu = 0, \psi = 1, a_k = 1$  alınır ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) t^n = (1 - x_1 t)^{-\alpha} \exp(x_2 + \dots + x_r) t \quad \left( |t| < |x_1|^{-1} \right), \quad (3.60)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı kullanılırsa [29],

$$\begin{aligned} \Lambda_{0,1}(z_1, \dots, z_r, \zeta) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^{(\alpha)}(z_1, \dots, z_r) \zeta^k \\ &= (1 - z_1 \zeta)^{-\alpha} \exp(z_2 + \dots + z_r) \zeta, \end{aligned} \quad (3.61)$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu, \psi}\left(x, y; z_1, \dots, z_r; \frac{\eta}{t^p}\right) := \sum_{k=0}^{[n/p]} P_{n-pk}^{(j,c)}(x, y) \phi_k^{(\alpha)}(z_1, \dots, z_r) \frac{\xi^k}{(n-pk)!}, \quad (3.62)$$

elde edilir.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi} \left( x, y; z_1, \dots, z_r; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n \\
&= \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^{(\alpha)}(z_1, \dots, z_r) \eta^k \right) \\
&= c^{xt+yt^j} (1 - z_1 \eta)^{-\alpha} \exp(z_2 + \dots + z_r) \eta, \tag{3.63}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece geneleştirilmiş Gould-Hopper Polinomları  $P_n^{(j,c)}(x, y)$  için bilateral doğurucu fonksiyonların bir sınıfı elde edilmiş olur.

**Uyarı 3.13.** Teorem 3.10 de  $r = 2$  için

$$\Omega_{\mu+\psi k}(z_1, z_2) = P_{\mu+\psi k}^{(j,c)}(z_1, z_2) \tag{3.64}$$

genelleştirilmiş Gould-Hopper  $P_n^{(j,c)}(x, y)$  polinomu alınırsa,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(z_1, z_2, \xi) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_{\mu+\psi k}^{(j,c)}(z_1, z_2) \xi^k \quad (a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C}), \tag{3.65}$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x, y; z_1, z_2; \xi) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} a_k P_{n-pk}^{(j,c)}(x, y) P_{\mu+\psi k}^{(j,c)}(z_1, z_2) \frac{\xi^k}{(n-pk)!} \quad (n, p \in \mathbb{N}), \tag{3.66}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi} \left( x, y; z_1, z_2; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} a_k P_{n-pk}^{(j,c)}(x, y) P_{\mu+\psi k}^{(j,c)}(z_1, z_2) \frac{(\frac{\eta}{t^p})^k}{(n-pk)!} \right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_n^{(j,c)}(x, y) P_{\mu+\psi k}^{(j,c)}(z_1, z_2) \frac{\eta^k t^{n+pk}}{t^{pk} n!} \\
&= \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_{\mu+\psi k}^{(j,c)}(z_1, z_2) \eta^k \right) \\
&= c^{xt+yt^j} \Lambda_{\mu,\psi}(z_1, z_2; \eta), \tag{3.67}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Sonuç 3.14.** Uyarı 3.13 de  $\mu = 0$ ,  $\psi = 1$ ,  $a_k = \frac{1}{k!}$  alınır ve Eşitlik (3.4) ifadesi kullanılırsa,

$$\Lambda_{0,1}(z_1, z_2, \zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P_k^{(j,c)}(z_1, z_2) \zeta^k = c^{z_1 \zeta + z_2 \zeta^j}, \quad (3.68)$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi} \left( x, y; z_1, z_2; \frac{\eta}{t^p} \right) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} \frac{1}{k!} P_{n-pk}^{(j,c)}(x, y) P_k^{(j,c)}(z_1, z_2) \frac{\xi^k}{(n-pk)!}, \quad (3.69)$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi} \left( x, y; z_1, z_2; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P_k^{(j,c)}(z_1, z_2) \eta^k \right) \\ &= c^{xt+yt^j} c^{z_1 \eta + z_2 \eta^j}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

elde edilir. Böylece geneleştirilmiş Gould-Hopper Polinomları  $P_{\mu+\psi k}^{(j,c)}(x, y)$  için bilinear doğurucu fonksiyonların bir sınıfı elde edilmiş olur.

**Teorem 3.15.**  $\mu$ - üncü basamaktan  $y_1, \dots, y_r$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan  $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_r)$  fonksiyonu için,  $a_k \neq 0$ ,  $\mu, \psi \in \mathbb{C}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\mu,\psi}^{n,p}(x_1 + x_2, y_1 + y_2; z_1, \dots, z_r; \eta) \\ &:= \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} a_k P_{n-pk}^{(j,c)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \Omega_{\mu+\psi k}(z_1, \dots, z_r) \eta^k, \end{aligned} \quad (3.71)$$

ve  $p \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{\lfloor k/p \rfloor} a_l \binom{n-pl}{k-pl} P_{n-k}^{(j,c)}(x_1, y_1) P_{k-pl}^{(j,c)}(x_2, y_2) \Omega_{\mu+\psi l}(z_1, \dots, z_r) \eta^l \\ &= \Lambda_{\mu,\psi}^{n,p}(x_1 + x_2, y_1 + y_2; z_1, \dots, z_r; \eta), \end{aligned} \quad (3.72)$$

bağıntısı gerçekleşir [25].

*İspat.* Eşitlik (3.72) ifadesinin sol tarafına S diyelim. Bu ifadeye Eşitlik (2.13) özdeşliği uygulanır ve Eşitlik (3.38) ile Eşitlik (3.71) ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l \binom{n-pl}{k-pl} P_{n-k}^{(j,c)}(x_1, y_1) P_{k-pl}^{(j,c)}(x_2, y_2) \Omega_{\mu+\psi l}(z_1, \dots, z_r) \eta^l \\
&= \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} a_l \binom{n-pl}{k} P_{n-k-pl}^{(j,c)}(x_1, y_1) P_k^{(j,c)}(x_2, y_2) \Omega_{\mu+\psi l}(z_1, \dots, z_r) \eta^l \\
&= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l \left( \sum_{k=0}^{n-pl} \binom{n-pl}{k} P_{n-k-pl}^{(j,c)}(x_1, y_1) P_k^{(j,c)}(x_2, y_2) \right) \Omega_{\mu+\psi l}(z_1, \dots, z_r) \eta^l \\
&= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l P_{n-pl}^{(j,c)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \Omega_{\mu+\psi l}(z_1, \dots, z_r) \eta^l \\
&= \Lambda_{\mu, \psi}^{n,p}(x_1 + x_2, y_1 + y_2; z_1, \dots, z_r; \eta), \tag{3.73}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.  $\square$

**Uyarı 3.16.** Teorem 3.15 de  $r = 2$  için  $z_1 = x_3$ ,  $z_2 = y_3$  ve

$$\Omega_{\mu+\psi k}(x_3, y_3) = P_{\mu+\psi k}^{(j,c)}(x_3, y_3) \tag{3.74}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{\mu, \psi}^{n,p}(x_1 + x_2, y_1 + y_2; x_3, y_3; \eta) \\
&:= \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k P_{n-pk}^{(j,c)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) P_{\mu+\psi k}^{(j,c)}(x_3, y_3) \eta^k, \tag{3.75}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l \binom{n-pl}{k-pl} P_{n-k}^{(j,c)}(x_1, y_1) P_{k-pl}^{(j,c)}(x_2, y_2) P_{\mu+\psi l}^{(j,c)}(x_3, y_3) \eta^l \\
&= \Lambda_{\mu, \psi}^{n,p}(x_1 + x_2, y_1 + y_2; x_3, y_3; \eta), \tag{3.76}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Sonuç 3.17.** Uyarı 3.16 da  $a_l = \binom{n}{l}$ ,  $\mu = 0$ ,  $\psi = 1$ ,  $p = 1$ ,  $\eta^l = \eta^k = 1$  alınır ve Eşitlik (3.38) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \Lambda_{0,1}^{n,1}(x_1 + x_2, y_1 + y_2; x_3, y_3; \eta) \\ & := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{n-k}^{(j,c)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) P_k^{(j,c)}(x_3, y_3), \end{aligned} \quad (3.77)$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l} P_{n-k}^{(j,c)}(x_1, y_1) P_{k-l}^{(j,c)}(x_2, y_2) P_l^{(j,c)}(x_3, y_3) \\ & = P_n^{(j,c)}(x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3), \end{aligned} \quad (3.78)$$

elde edilir.

Teorem 3.10 da  $\Omega_{\mu+\psi l}(z_1, \dots, z_r)$  çok değişkenli fonksiyonu, basit fonksiyonların uygun çarpımı olarak ifade edilirse,  $a_k$  katsayılarının her bir uygun seçimi için Eşitlik (3.4) ile tanımlanan  $P_n^{(j,c)}(x, y)$  polinomu için multilinear ve multilateral doğurucu fonksiyon aileleri elde edilebilir.

### 3.4. GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda, genelleştirilmiş Gould-Hopper  $P_n^{(j,c)}(x, y)$  polinomları için türev içeren rekürans bağıntısı elde edilecektir. Aynı zamanda, Gould-Hopper polinomu ve genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomunun bazı değerleri bulunup, bazı özel değerler için birkaç grafik verilecektir.

Eşitlik (3.4) ifadesi ile tanımlanan genelleştirilmiş Gould-Hopper  $P_n^{(j,c)}(x, y)$  polinomunun,  $x$  e göre türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x, y) \frac{t^n}{n!} = c^{xt+yt^j} \quad (c > 1, j \geq 2), \quad (3.79)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} P_n^{(j,c)}(x, y) \frac{t^n}{n!} = t c^{xt+yt^j} \ln c, \quad (3.80)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} P_n^{(j,c)}(x, y) \frac{t^n}{n!} = t \ln c \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x, y) \frac{t^n}{n!}, \quad (3.81)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} P_n^{(j,c)}(x, y) \frac{t^n}{n!} = \ln c \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(j,c)}(x, y) \frac{t^{n+1}}{n!}, \quad (3.82)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} P_n^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n}{n!} = \ln c \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n}{(n-1)!}, \quad (3.83)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} P_n^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n}{n!} = \ln c \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n}{(n-1)!}, \quad (3.84)$$

elde edilir. Son ifadede  $t^n$  nin katsayıları birbirine eşitlenirse,

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} P_n^{(j,c)}(x,y)}{n!} = \ln c \frac{P_{n-1}^{(j,c)}(x,y)}{(n-1)!} \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P_n^{(j,c)}(x,y) = n \ln c \cdot P_{n-1}^{(j,c)}(x,y), \quad (3.86)$$

elde edilir. Böylece, genelleştirilmiş Gould-Hopper  $P_n^{(j,c)}(x,y)$  polinomunu için türev içeren rekürans bağıntısı elde edilir.

Ayrıca, Gould-Hopper polinomu ile genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomu için Eşitlik (3.1) ve Eşitlik (3.5) ifadeleri kullanarak, aşağıdaki tabloda polinomların ilk 10 değeri hesaplandı.

$$g_n^m(x,y), m=3 \text{ için } \left\{ \begin{array}{l} g_0^3(x,y) = 1, \\ g_1^3(x,y) = x, \\ g_2^3(x,y) = x^2, \\ g_3^3(x,y) = x^3 + 6y, \\ g_4^3(x,y) = x^4 + 24xy, \\ g_5^3(x,y) = x^5 + 60x^2y, \\ g_6^3(x,y) = x^6 + 120x^3y + 360y^2, \\ g_7^3(x,y) = x^7 + \frac{7!}{4!}x^4y + \frac{7!}{2!}xy^2, \\ g_8^3(x,y) = x^8 + \frac{8!}{5!}x^5y + \frac{8!}{2!2!}x^2y^2, \\ g_9^3(x,y) = x^9 + \frac{9!}{6!}x^6y + \frac{9!}{2!3!}x^3y^2 + \frac{9!}{3!}y^3, \\ g_{10}^3(x,y) = x^{10} + \frac{10!}{7!}x^7y + \frac{10!}{2!4!}x^4y^2 + \frac{10!}{3!}xy^3. \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} P_n^{(j,c)}(x,y), j=3 \text{ için} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_0^{(3,c)}(x,y) = 1, \\ P_1^{(3,c)}(x,y) = x \ln c, \\ P_2^{(3,c)}(x,y) = x^2 (\ln c)^2, \\ P_3^{(3,c)}(x,y) = x^3 (\ln c)^3 + 6y \ln c, \\ P_4^{(3,c)}(x,y) = x^4 (\ln c)^4 + 24xy (\ln c)^2, \\ P_5^{(3,c)}(x,y) = x^5 (\ln c)^5 + 60x^2y (\ln c)^3, \\ P_6^{(3,c)}(x,y) = x^6 (\ln c)^6 + \frac{6!}{3!} x^3y (\ln c)^4 + \frac{6!}{2!} y^2 (\ln c)^2, \\ P_7^{(3,c)}(x,y) = x^7 (\ln c)^7 + \frac{7!}{4!} x^4y (\ln c)^5 + \frac{7!}{2!} xy^2 (\ln c)^3, \\ P_8^{(3,c)}(x,y) = x^8 (\ln c)^8 + \frac{8!}{5!} x^5y (\ln c)^6 + \frac{8!}{2!2!} x^2y^2 (\ln c)^4, \\ P_9^{(3,c)}(x,y) = x^9 (\ln c)^9 + \frac{9!}{6!} x^6y (\ln c)^7 + \frac{9!}{3!2!} x^3y^2 (\ln c)^5 + \frac{9!}{3!} y^3 (\ln c)^3, \\ P_{10}^{(3,c)}(x,y) = x^{10} (\ln c)^{10} + \frac{10!}{7!} x^7y (\ln c)^8 + \frac{10!}{4!2!} x^4y^2 (\ln c)^6 + \frac{10!}{3!} xy^3 (\ln c)^4. \end{array}$$

Bu değerler yardımıyla,  $x$ ,  $y$  ve  $c$  nin bazı özel değerlerine karşılık bu polinomların grafikleri Mathematica programında çizilmiş olup,  $c=5$  için polinomların görüntüleri Ekler kısmında Şekil 7.1, Şekil 7.2, Şekil 7.3 ve Şekil 7.4 olarak verilmiştir.

## 4. GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARI İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ LAURICELLA FONKSİYONLARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Bu bölümde, genelleştirilmiş Gould-Hopper  $P_n^{(j,c)}(x,y)$  polinomlarının, genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonlarıyla arasındaki bağıntılar elde edilecektir.

### 4.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ LAURICELLA FONKSİYONLARI

Bu kısımda, iki değişkenli Appell fonksiyonları ve genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonlarının tanımları verilecektir. İki değişkenli Appell fonksiyonları,

$$F_1 [a, b, b'; c; x, y] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_m (b')_n x^m y^n}{(c)_{m+n} m! n!}, \quad (4.1)$$

$$F_2 [a, b, b'; c, c'; x, y] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_m (b')_n x^m y^n}{(c)_m (c')_n m! n!}, \quad (4.2)$$

$$F_3 [a, a', b, b'; c; x, y] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_m (a')_n (b)_m (b')_n x^m y^n}{(c)_{m+n} m! n!}, \quad (4.3)$$

$$F_4 [a, b; c, c'; x, y] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_{m+n} x^m y^n}{(c)_m (c')_n m! n!}, \quad (4.4)$$

şeklindedir [26].

Lauricella tarafından  $n$  değişkenli fonksiyonlar

$$\begin{aligned} & F_A^{(n)} [a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; x_1, \dots, x_n] \\ = & \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n} m_1! \dots m_n!} \\ & (|x_1| + \dots + |x_n| < 1), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
& F_B^{(n)} [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n; c; x_1, \dots, x_n] \\
= & \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1} \dots (a_n)_{m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n} m_1! \dots m_n!} \\
& (\max \{|x_1|, \dots, |x_n|\} < 1), \tag{4.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F_C^{(n)} [a, b; c_1, \dots, c_n; x_1, \dots, x_n] \\
= & \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b)_{m_1+\dots+m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n} m_1! \dots m_n!} \\
& (\sqrt{|x_1|} + \dots + \sqrt{|x_n|} < 1), \tag{4.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F_D^{(n)} [a, b_1, \dots, b_n; c; x_1, \dots, x_n] \\
= & \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n} m_1! \dots m_n!} \\
& (\max \{|x_1|, \dots, |x_n|\} < 1), \tag{4.8}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır [27]. Buradan, Appell ve Lauricella fonksiyonları arasında,

$$F_A^{(2)} = F_2, F_B^{(2)} = F_3, F_C^{(2)} = F_4, F_D^{(2)} = F_1 \tag{4.9}$$

ilişki vardır.

İki değişkenli Kampé de Fériet hipergeometrik fonksiyonları,

$$\begin{aligned}
& F_{l:m;n}^{p:q;k} \left[ \begin{matrix} (a_p) : (b_q); (c_k); \\ x, y \\ (\alpha_l) : (\beta_m); (\gamma_n); \end{matrix} \right] \\
= & \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_{r+s} \prod_{j=1}^q (b_j)_r \prod_{j=1}^k (c_j)_s x^r y^s}{\prod_{j=1}^l (\alpha_j)_{r+s} \prod_{j=1}^m (\beta_j)_r \prod_{j=1}^n (\gamma_j)_s r! s!}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır [20].

İki değişkenli Kampé de Fériet hipergeometrik fonksiyonları Srivastava ve Daoust tarafından aşağıdaki şekilde geliştirilmiştir. Bunlara geliştirilmiş Lauricella fonksiyonları da denir [20], [28], [30], [31]:

$$\begin{aligned}
& F_{C:D';D'';\dots;D^{(n)}}^{A:B';B'';\dots;B^{(n)}}(z_1, z_2, \dots, z_n) \\
&= F_{C:D';D'';\dots;D^{(n)}}^{A:B';B'';\dots;B^{(n)}} \left( \begin{array}{l} [(a) : \theta', \theta'', \dots, \theta^{(n)}] : [(b') : (\phi')]; \\ [(c) : \psi', \psi'', \dots, \psi^{(n)}] : [(d') : \delta']; \\ [(b'') : (\phi'')]; \dots; [(b^{(n)}) : (\phi^{(n)})]; \\ z_1, z_2, \dots, z_n \\ [(d'') : \delta'']; \dots; [(d^{(n)}) : (\delta^{(n)})]; \end{array} \right) \\
&= \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n=0}^{\infty} \Omega(m_1, m_2, \dots, m_n) \frac{z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_n^{m_n}}{m_1! m_2! \dots m_n!}, \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
\Omega(m_1, m_2, \dots, m_n) &:= \frac{\prod_{j=1}^A (a_j)_{m_1 \theta'_j + m_2 \theta''_j + \dots + m_n \theta_j^{(n)}}}{\prod_{j=1}^C (c_j)_{m_1 \psi'_j + m_2 \psi''_j + \dots + m_n \psi_j^{(n)}}} \\
&\times \frac{\prod_{j=1}^{B'} (b'_j)_{m_1 \theta'_j} \prod_{j=1}^{B''} (b''_j)_{m_2 \theta''_j} \dots \prod_{j=1}^{B^{(n)}} (b_j^{(n)})_{m_n \theta_j^{(n)}}}{\prod_{j=1}^{D'} (d'_j)_{m_1 \delta'_j} \prod_{j=1}^{D''} (d''_j)_{m_2 \delta''_j} \dots \prod_{j=1}^{D^{(n)}} (d_j^{(n)})_{m_n \delta_j^{(n)}}} \tag{4.12}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\theta_j^{(k)} \quad (j = 1, \dots, A; k = 1, 2, \dots, n), \quad \phi_j^{(k)} \quad (j = 1, \dots, B^{(k)}; k = 1, 2, \dots, n) \tag{4.13}$$

$$\psi_j^{(k)} \quad (j = 1, \dots, C; k = 1, 2, \dots, n), \quad \delta_j^{(k)} \quad (j = 1, \dots, D^{(k)}; k = 1, 2, \dots, n) \tag{4.14}$$

reel sabitler olup;  $(b_{B^{(k)}}^{(k)})$ ,  $B^{(k)}$  dizilerinin  $b_j^{(k)}$   $j = 1, \dots, B^{(k)}; k = 1, 2, \dots, n$  şeklinde kısaltılmıştır.

Eşitlik (4.11) de  $n = 2$  alınırsa, Kampé de Fériet hipergeometrik fonksiyonun iki değişkenli bağıntısı,

$$\begin{aligned}
& F_{l:s_1;s_2}^{p:q_1;q_2}(z_1, z_2) \\
&= F_{l:s_1;s_2}^{p:q_1;q_2} \left( \begin{array}{l} (a_p) : (b'_{q_1}); (b''_{q_2}); \\ z_1, z_2 \\ (c_1) : (d'_{s_1}); (d''_{s_2}); \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{m_1, m_2=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_{m_1+m_2} \prod_{j=1}^{q_1} (b'_j)_{m_1} \prod_{j=1}^{q_2} (b''_j)_{m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}}{\prod_{j=1}^l (c_j)_{m_1+m_2} \prod_{j=1}^{s_1} (d'_j)_{m_1} \prod_{j=1}^{s_2} (d''_j)_{m_2} m_1! m_2!}, \quad (4.15)$$

şeklinde elde edilir.

## 4.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ GOULD-HOPPER POLİNOMLARININ BİR SINIFI İÇİN BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Bu kısımda, genelleştirilmiş Gould-Hopper  $P_n^{(j,c)}(x,y)$  polinomları için bilateral doğurucu fonksiyonların bir ailesi elde edilecektir.

**Teorem 4.1.** Genelleştirilmiş Gould-Hopper  $P_n^{(j,c)}(x,y)$  polinomu için aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısı geçerlidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) P_n^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n,s=0}^{\infty} f(n+js) \frac{(xt \ln c)^n (yt^j \ln c)^s}{n! s!}. \quad (4.16)$$

*İspat.* İspatı kolaylaştırmak için Eşitlik (4.16) bağıntısının sol tarafını  $\Delta_1$  ile gösterilirse ve Eşitlik (3.5) bağıntısı kullanılırsa,

$$\Delta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[n/j]} f(n) \frac{n! x^{n-js} y^s (\ln c)^{n+s-js} t^n}{(n-js)! s! n!}, \quad (4.17)$$

elde edilir. Eşitlik (4.17) ifadesinin sağ tarafına Eşitlik (2.10) özdeşliği uygulanırsa,

$$\Delta_1 = \sum_{n,s=0}^{\infty} f(n+js) \frac{(xt \ln c)^n (yt^j \ln c)^s}{n! s!}, \quad (4.18)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.  $\square$

Teorem 4.1 de  $f(n)$  fonksiyon dizisinin uygun seçimleriyle birçok ilginç sonuçlar elde edilebilir. Aşağıdaki bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları bunlara birer örnektir.

**Uyarı 4.2.** Teorem 4.1 deki Eşitlik (4.16) bağıntısında

$$f(n) = \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_n}{\prod_{j=1}^q (b_j)_n \prod_{j=1}^l (c_j)_n} \quad (4.19)$$

alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.3.** Genelleştirilmiş Gould-Hopper  $P_n^{(j,c)}(x,y)$  polinomu için aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısı geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_n}{\prod_{j=1}^q (b_j)_n \prod_{j=1}^l (c_j)_n} P_n^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \\ &= F_{q+l;0;0}^{p;0;0} \left( \begin{matrix} [(a)_1^p : 1, j] : -; -; \\ [ (b)_1^q : 1, j ], [ (c)_1^l : 1, j ] : -; -; \end{matrix} ; xt \ln c, yt^j \ln c \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Burada,  $(a)_1^p$  notasyonu  $(a)_1^p = \prod_{j=1}^p a_j$  ifadesine eşittir.

**Örnek 4.4.** Eşitlik (4.20) iadesinde  $p = q = l = 1$  alınrsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n}{(b_1)_n (c_1)_n} P_n^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \\ &= F_{2;0;0}^{1;0;0} \left( \begin{matrix} [a_1 : 1, j] : -; -; \\ [b_1 : 1, j], [c_1 : 1, j] : -; -; \end{matrix} ; xt \ln c, yt^j \ln c \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir.

Eşitlik (4.21) ifadesinde,  $b_1 = c_1 = 1$  alınır ve  $a_1$  yerine  $a + 1$  yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+n}{n} P_n^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n}{n!^2} \\ &= F_{2;0;0}^{1;0;0} \left( \begin{matrix} [a+1 : 1, j] : -; -; \\ [1 : 1, j], [1 : 1, j] : -; -; \end{matrix} ; xt \ln c, yt^j \ln c \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

elde edilir.

**Uyarı 4.5.** Teorem 4.1 de,

$$f(n) = \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_n}{\prod_{j=1}^q (b_j)_n} \quad (4.23)$$

alınır ve  $n = 2$  için Eşitlik (4.11) ifadesi kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Sonuç 4.6.** Genelleştirilmiş Gould-Hopper  $P_n^{(j,c)}(x,y)$  polinomu için aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısı geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_n}{\prod_{j=1}^q (b_j)_n} P_n^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \\ &= F_{q;0;0}^{p;0;0} \left( \begin{matrix} [(a)_1^p : 1, j] : -; -; \\ xt \ln c, yt^j \ln c \\ [(b)_1^q : 1, j] : -; -; \end{matrix} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

**Örnek 4.7.** Eğer, Eşitlik (4.24) ifadesinde  $p = q = 1$  alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n}{(b_1)_n} P_n^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \\ &= F_{1;0;0}^{1;0;0} \left( \begin{matrix} [a_1 : 1, j] : -; -; \\ xt \ln c, yt^j \ln c \\ [b_1 : 1, j] : -; -; \end{matrix} \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde edilir. Eşitlik (4.25) ifadesinde,  $a_1 = b_1 = 1$  alınır ve Eşitlik (3.4) ifadesi kullanılırsa, genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomunun doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

**Uyarı 4.8.** Teorem 4.1 de

$$f(n) = J_n^{(j)}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k w^k}{k!(n+jk)!} \quad (4.26)$$

genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu alınır, aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Sonuç 4.9.** Genelleştirilmiş Gould-Hopper  $P_n^{(j,c)}(x,y)$  polinomu için aşağıdaki bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(j)}(w) P_n^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \\ &= F_{1;0;0}^{0;0;0} \left( \begin{matrix} - : -; -; \\ (xt \ln c), (yt^j \ln c - w) \\ [1 : 1, j] : -; -; \end{matrix} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

*İspat.* İspatı kolaylaştırmak için Eşitlik (4.27) ifadesinin sol tarafı  $\Delta_2$  ile gösterilirse

$$\Delta_2 = \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(j)}(w) P_n^{(j,c)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \quad (4.28)$$

elde edilir. Burada, Eşitlik (4.26) ifadesi ve Eşitlik (3.5) ifadesi yerine yazılırsa,

$$\Delta_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k w^k}{k!(n+jk)!} \right) \left( n! \sum_{s=0}^{\lfloor n/j \rfloor} \frac{x^{n-js} y^s (\ln c)^{n+s-js}}{(n-js)!s!} \right) \frac{t^n}{n!} \quad (4.29)$$

elde edilir. Eşitlik (2.10) özdeşliği uygulanırsa, yani  $n$  yerine  $n + js$  dönüşümü yapılırsa,

$$\Delta_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^k w^k x^n y^s (\ln c)^{n+s}}{k!(n+js+jk)!n!s!} t^{n+js}, \quad (4.30)$$

elde edilir. Eşitlik (4.30) ifadesine Eşitlik (2.11) özdeşliği uygulanırsa, yani  $s$  yerine  $s - k$  dönüşümü yapılırsa,

$$\Delta_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^n y^s (\ln c)^{n+s} t^{n+js}}{(n+js)!n!s!} \left( \sum_{k=0}^s s! \frac{(-1)^k}{k!(s-k)!} \left( \frac{w}{yt^j \ln c} \right)^k \right), \quad (4.31)$$

elde edilir. Eşitlik (4.31) ifadesine Newton binom açılımı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^n y^s (\ln c)^{n+s} t^{n+js}}{(n+js)!n!s!} \left( \sum_{k=0}^s s! \frac{(-1)^k}{k!(s-k)!} \left( \frac{w}{yt^j \ln c} \right)^k \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^n y^s (\ln c)^{n+s} t^{n+js}}{(n+js)!n!s!} \left( 1 - \frac{w}{yt^j \ln c} \right)^s, \end{aligned} \quad (4.32)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^n y^s (\ln c)^{n+s} t^{n+js}}{(n+js)!n!s!} \left( 1 - \frac{w}{yt^j \ln c} \right)^s \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1)_{n+js}} \frac{(xt \ln c)^n}{n!} \frac{(yt^j \ln c)^s}{s!} \left( 1 - \frac{w}{yt^j \ln c} \right)^s \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1)_{n+js}} \frac{(xt \ln c)^n}{n!} \frac{(yt^j \ln c - w)^s}{s!}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

elde edilir. Pochhammer sembolünün  $(0)_0 := 1$  özelliği kullanılır ve iki değişkenli Kampé de Fériet hipergeometrik fonksiyonlar için Eşitlik (4.11) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1)_{n+js}} \frac{(xt \ln c)^n}{n!} \frac{(yt^j \ln c - w)^s}{s!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(0)_0}{(1)_{n+js}} \frac{(xt \ln c)^n}{n!} \frac{(yt^j \ln c - w)^s}{s!} \\
&= F_{1:0;0}^{0:0;0} \left( \begin{array}{c} - : - ; - ; \\ (xt \ln c), (yt^j \ln c - w) \end{array} \right), \quad (4.34) \\
&\quad [1 : 1, j] : - ; - ;
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada genelleştirilmiş Gould-Hopper  $P_n^{(j,c)}(x,y)$  polinomları ve bu polinomun bazı uygulamaları incelenmiştir. Polinomlar arasında genel bir sınıf olan Hermite polinomunun genelleştirilmesi olan genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomunun bazı özellikleri verildikten sonra bu polinomlar için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntılarını veren teoremler elde edilmiştir. Ayrıca bu teoremlerin özel durumları incelendikten sonra bu polinomlar için yeni rekürans bağıntıları elde edilmiştir.

Bu tezde çalışılan konuların ışığı altında gelecekte farklı polinomların toplam formülleri, doğurucu fonksiyon bağıntıları, rekürans bağıntıları gibi farklı özellikleri de elde edilebilir. Bu tezde yapılan uygulamalar matematiğin bir çok alanında kullanılan farklı doğurucu fonksiyonların çeşitlendirilmesi ve geliştirilmesi için yol gösterebilir.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] H. Gould and A. T. Hopper, “Operational formulas connected with two generalizations of hermite polynomials,” *Duke Mathematical Journal*, c. 29, sayı 1, ss. 51-63,1962.
- [2] G. Dattoli, S. Lorenzutta and C. Cesarano, “Finite sums and generalized forms of Bernoulli polynomials,” *Rendiconti di Matematica*, c. 19, ss. 385–391, 1999.
- [3] G. Dattoli, “Generalized polynomials, operational identities and their applications,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 118, ss. 111-123, 2000.
- [4] E. Horozov. (2016, 1 Kasım). *Generalized Gould Hopper polynomials* [Online]. Erişim: <https://www.researchgate.net/publication/308361732.pdf>.
- [5] M. A. Pathan and W. A. Khan, “Some implicit summation formulas and symmetric identities for the generalized Hermite based-polynomials,” *Acta Universitatis Apulensis, Mathematics, Informatics*, c. 39, ss. 113–136, 2014.
- [6] S. Khan and M. W. M. Al-Saad, “Summation formulae for Gould–Hopper generalized Hermite polynomials,” *Computers and Mathematics with Applications*, c. 61, sayı 6, ss. 1536-1541, 2011.
- [7] H. M. Srivastava and G. B. Djordjević, “Some generating functions and other properties associated with the generalized Hermite and related polynomials,” *Integral Transforms and Special Functions*, c. 22, sayı 12, ss. 895-906, 2011.
- [8] G. B. Djordjević, “Polynomials related to generalized Chebyshev polynomials,” *Filomat*, c. 23, sayı 3, ss. 279-290, 2009.
- [9] N. Özmen and E. Erkus-Duman, “Some families of generating functions for the generalized Cesáro polynomials,” *Journal of Computational Analysis and Applications*, c. 25, sayı 4, ss. 670-683, 2018.
- [10] G. Bretti and P. E. Ricci, “Multidimensional extensions of the Bernoulli and Appell polynomials,” *Taiwanese Journal of Mathematics*, c. 8, sayı 3, ss. 415-428, 2004.
- [11] Y. Simsek, “Generating functions for the Bernstein type polynomials: A new approach to deriving identities and applications for these polynomials,” *Hacettepe Journal of Mathematical and Statistics*, c. 43, sayı 1, ss. 1-14, 2014.
- [12] Y. Simsek, “Beta type polynomials and their generating functions,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 254, ss. 172-182, 2015.
- [13] E. D. Rainville, *Special Functions*, New York, USA: The Macmillan Company, 1960.
- [14] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, New York, USA: American Mathematical Society Colloquium Publications, 1959.

- [15] E. B. Mc Bridge, *Obtaining generating functions*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1971.
- [16] S. Khan and A. A. Al-Gonah, "Certain Results for the Laguerre-Gould Hopper Polynomials," *Applications and Applied Mathematics*, c. 9, sayı 2, ss. 449-466, 2014.
- [17] G. Yasmin, "Some properties of Legendre-Gould Hopper polynomials and operational methods," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 413 , sayı 1, ss. 84-99, 2014.
- [18] B. Çekim and R. Aktas, "Multivariable matrix generalization of Gould-Hopper polynomials," *Miskolc Mathematical Notes*, c. 16, sayı 1, ss. 79-89, 2015.
- [19] U. Duran and M. Acikgoz, "On generalized degenerate Gould-Hopper based fully degenerate Bell polynomials," *Journal of Mathematics and Computer Science*, c. 21, ss. 243-257, 2020.
- [20] H. M. Srivastava and H. L. Monacha, *A Treatise on Generating Functions*, New York, USA: Ellis Horwood Limited, 1984.
- [21] B. Yilmaz and M. A. Ozarslan, "Differential equations for the extended 2D Bernoulli and Euler polynomials," *Advances in Difference Equations*, c. 2013, sayı 107, ss. 1-16, 2013.
- [22] G. Dattoli, A. Torre, S. Lorenzutta and C. Cesarano, "Generalized polynomials and operational identities," *Atti della Accademia delle Scienze di Torino Classe di Scienze Fisiche Matematiche Naturali*, c. 134, ss. 231-249, 2000.
- [23] P. Appell and J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques Polynômes d'Hermite*, Paris, France: Gauthier-Villars, 1926.
- [24] M. Lahiri, "On a generalization of Hermite polynomials," *Proceedings American Mathematical Society*, c. 27, ss. 117-121, 1971.
- [25] N. Özmen and M. Topaloğlu, "Generalized Gould-Hopper Polynomials," *Konuralp Journal of Mathematics*, basımda, 2021.
- [26] H. M. Srivastava and P. W. Karlsson, *Multiple Gaussian Hypergeometric Series*, New York, USA: Halsted Press, John Wiley and Sons, 1985.
- [27] G. Lauricella, "Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili," *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, c. 7, ss. 111-158, 1893.
- [28] H. Exton, *Multiple Hypergeometric Functions and Applications*, New York, USA: Halsted Press, John Wiley and Sons, 1976.
- [29] N. Özmen and E. Erkuş-Duman, "Some results for a family of multivariable polynomials," *American Institute of Physics Conference Proceedings*, c. 1558, ss. 1124-1127, 2013.
- [30] H. M. Srivastava and M. C. Daoust, "Certain generalized Neumann expansions associated with the Kampé de Fériet function," *Nederl Akad Wetensch Indag Math*, c. 31, ss. 449-457, 1969.

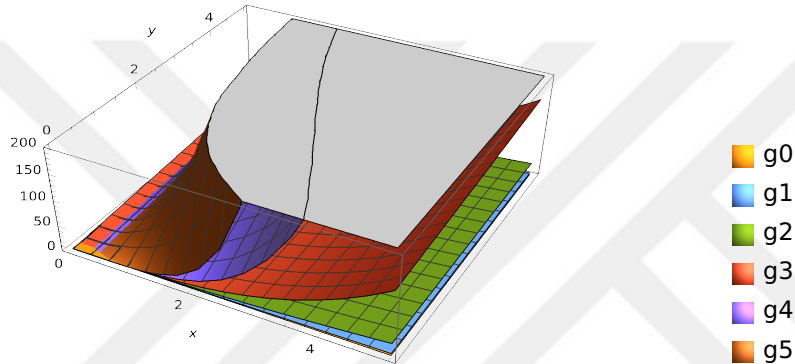
- [31] M. I. Qureshi, M. S. Khan and M. A. Pathan, "Some multiple Gaussian hypergeometric generalizations of Buschman-Srivastava theorem," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, c. 2005, ss. 143-153, 2005.



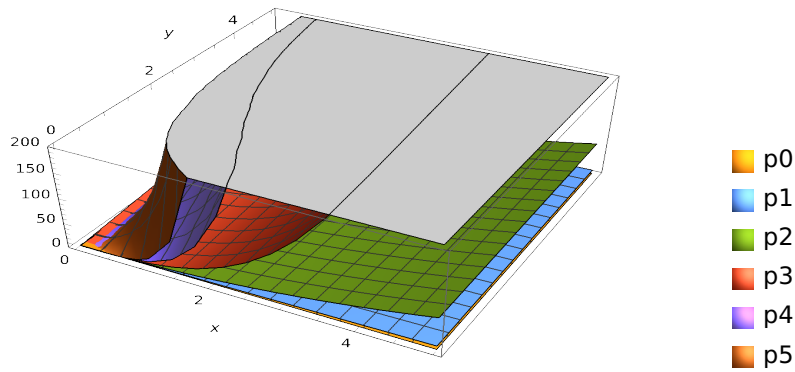
## 7. EKLER

### 7.1. EK 1. Grafikler

```
Plot3D[{1, x, x^2, x^3 + 6 y, x^4 + 24 x y, x^5 + 60 x^2 y},  
{x, 0, 5}, {y, 0, 5}, PlotStyle → Automatic, PlotRange → {0, 200},  
PlotLegends → {"g0", "g1", "g2", "g3", "g4", "g5"}, AxesLabel → Automatic]
```



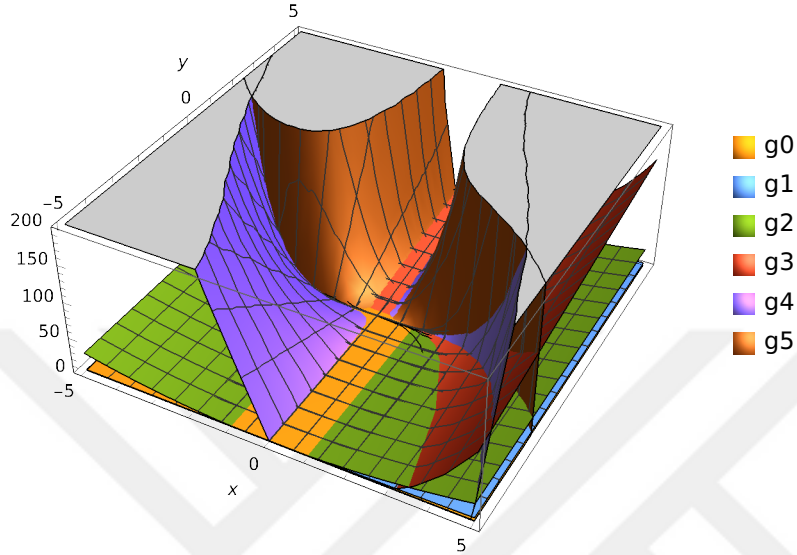
```
Plot3D[{1, x Log[5], x^2 Log[5]^2, x^3 Log[5]^3 + 6 y Log[5],  
x^4 Log[5]^4 + 24 x y Log[5]^2, x^5 Log[5]^5 + 60 x^2 y Log[5]^3},  
{x, 0, 5}, {y, 0, 5}, PlotStyle → Automatic, PlotRange → {0, 200},  
PlotLegends → {"p0", "p1", "p2", "p3", "p4", "p5"}, AxesLabel → Automatic]
```



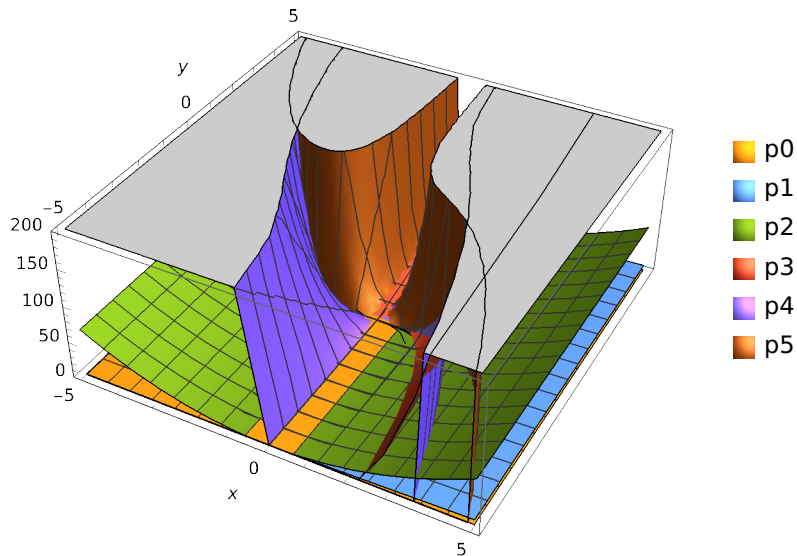
Şekil 7.1. Örnek Şekil 1.

## 7.2. EK 2. Grafikler

```
Plot3D[{1, x, x^2, x^3+6 y, x^4+24 x y, x^5+60 x^2 y},  
{x, -5, 5}, {y, -5, 5}, PlotStyle → Automatic, PlotRange → {0, 200},  
PlotLegends → {"g0", "g1", "g2", "g3", "g4", "g5"}, AxesLabel → Automatic]
```



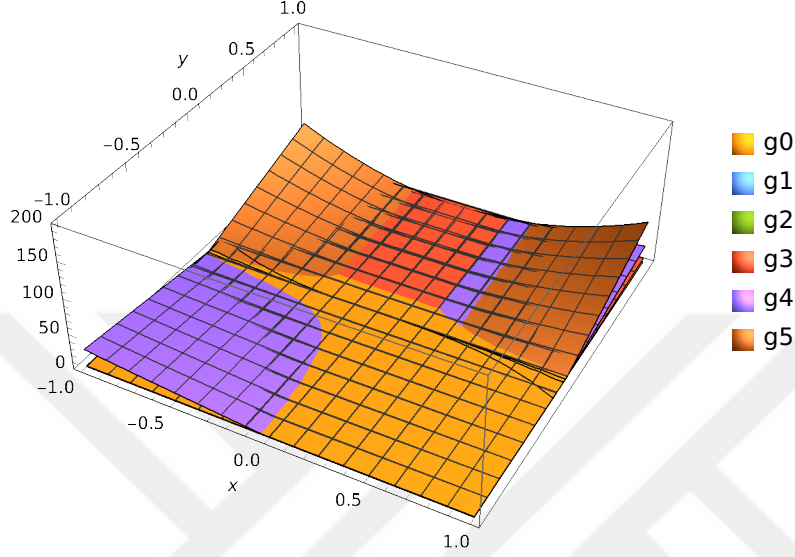
```
Plot3D[{1, x Log[5], x^2 Log[5]^2, x^3 Log[5]^3+6 y Log[5],  
x^4 Log[5]^4+24 x y Log[5]^2, x^5 Log[5]^5+60 x^2 y Log[5]^3},  
{x, -5, 5}, {y, -5, 5}, PlotStyle → Automatic, PlotRange → {0, 200},  
PlotLegends → {"p0", "p1", "p2", "p3", "p4", "p5"}, AxesLabel → Automatic]
```



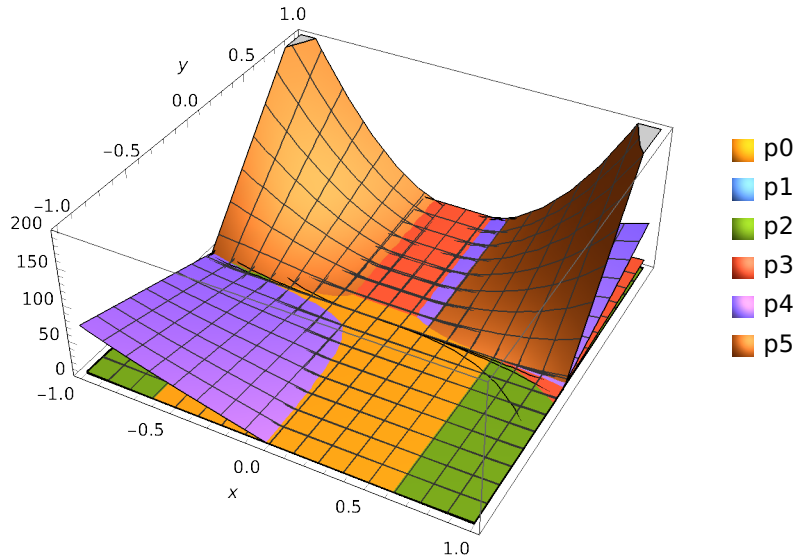
Şekil 7.2. Örnek Şekil 2.

### 7.3. EK 3. Grafikler

```
Plot3D[{1, x, x^2, x^3+6 y, x^4+24 x y, x^5+60 x^2 y},  
{x, -1, 1}, {y, -1, 1}, PlotStyle → Automatic, PlotRange → {0, 200},  
PlotLegends → {"g0", "g1", "g2", "g3", "g4", "g5"}, AxesLabel → Automatic]
```



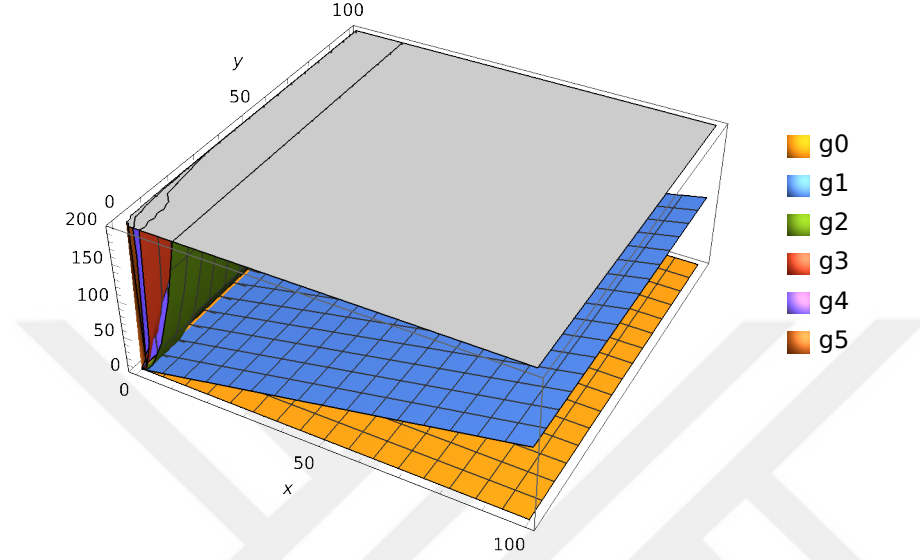
```
Plot3D[{1, x Log[5], x^2 Log[5]^2, x^3 Log[5]^3 + 6 y Log[5],  
x^4 Log[5]^4 + 24 x y Log[5]^2, x^5 Log[5]^5 + 60 x^2 y Log[5]^3},  
{x, -1, 1}, {y, -1, 1}, PlotStyle → Automatic, PlotRange → {0, 200},  
PlotLegends → {"p0", "p1", "p2", "p3", "p4", "p5"}, AxesLabel → Automatic]
```



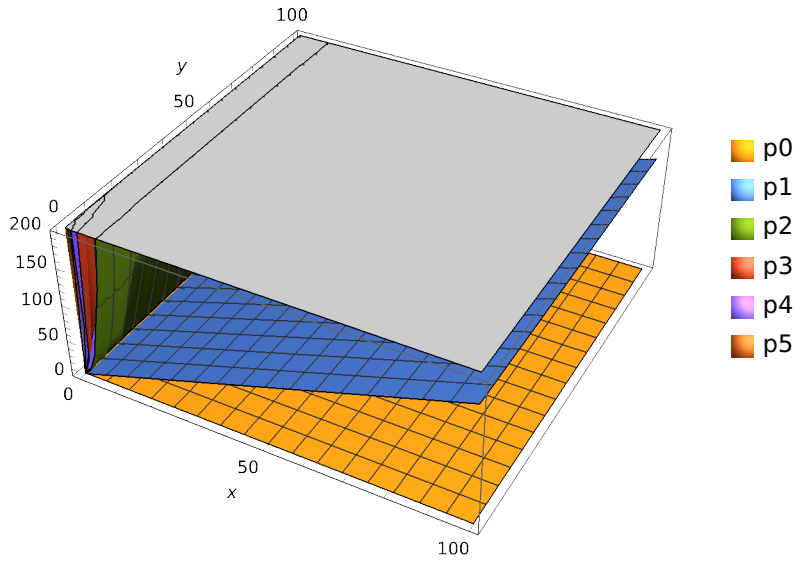
Şekil 7.3. Örnek Şekil 3.

#### 7.4. EK 4. Grafikler

```
Plot3D[{1, x, x^2, x^3 + 6 y, x^4 + 24 x y, x^5 + 60 x^2 y},  
{x, 0, 100}, {y, 0, 100}, PlotStyle → Automatic, PlotRange → {0, 200},  
PlotLegends → {"g0", "g1", "g2", "g3", "g4", "g5"}, AxesLabel → Automatic]
```



```
Plot3D[{1, x Log[5], x^2 Log[5]^2, x^3 Log[5]^3 + 6 y Log[5],  
x^4 Log[5]^4 + 24 x y Log[5]^2, x^5 Log[5]^5 + 60 x^2 y Log[5]^3},  
{x, 0, 100}, {y, 0, 100}, PlotStyle → Automatic, PlotRange → {0, 200},  
PlotLegends → {"p0", "p1", "p2", "p3", "p4", "p5"}, AxesLabel → Automatic]
```



Şekil 7.4. Örnek Şekil 4.

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : MUSTAFA TOPALOĞLU  
Doğum Tarihi ve Yeri : Kadirli / OSMANİYE 1983  
Yabancı Dili : İngilizce  
Eposta : konuralp.8081@gmail.com

## ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Anabilimdalı	Düzce Üniversitesi	2021
Lisans	İlköğretim Mat. Öğret.	Atatürk Üniversitesi	2005
Lise		Ş.Ö.Orhan Gök Y.D.A. Lisesi	2001

## A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A1. N. Özmen and M. Topaloğlu, "Generalized Gould-Hopper Polynomials," *Konuralp Journal of Mathematics*, basımda, 2021.