T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BETA FONKSİYONU İÇEREN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

FATİH ATA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA

DÜZCE, 2021

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BETA FONKSİYONU İÇEREN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Fatih ATA tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Samet ERDEN
Bartın Üniversitesi ______________________

Tez Savunma Tarihi: 01/07/2021

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

01 Temmuz 2021

Fatih ATA

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca dualarını ve desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

01 Temmuz 2021 **Fatih ATA**

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER

B	Beta fonksiyonu
$B_x\,(a,b)$	Tam Olmayan Beta Fonksiyonu
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
f'	f in birinci türevi
f''	f in ikinci türevi
$\lvert f \rvert$	f in mutlak değeri
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
R	Reel Sayılar Kümesi
R^n	n boyutlu Öklit Uzayı
I	R nin içinde bir aralık
I^o	I nın içi
Γ	Gama Fonksiyonu
$[.,.]$	Kapalı aralık
$(.,.)$	Açık aralık
$\lVert . \rVert$	Norm

ÖZET

BETA FONKSİYONU İÇEREN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Fatih ATA
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimler Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Temmuz 2021, 94 sayfa

Bu tezin amacı, Beta fonksiyonu içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde ederek, birinci türevlerin mutlak değerleri konveks olan fonksiyonlar kullanarak, literatür de elde edilmiş bazı sonuçları kapsayan Hermite-Hadamard eşitsizliği ve buna bağlı olarak yamuk ve orta nokta tipli eşitsizlikler elde edilir.

Anahtar Sözcükler: Beta fonksiyonu, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Konveks fonksiyonlar.

ABSTRACT

HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES WITH BETA FUNCTION

Fatih ATA
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Science, Department of Mathematics
Master's Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
July 2021, 94 pages

The aim of this thesis is to obtain Hermite-Hadamard type inequalities containing Beta function, by using functions whose absolute values of first derivatives are convex, Hermite-Hadamard inequality covering some results obtained in the literature and accordingly trapezoid and midpoint type inequalities are obtained.

Keywords: Beta function, Convex functions, Hermite-Hadamard Inequality.

1. GİRİŞ

Kesirli integral ve kesirli türev kavramları ilk olarak literatüre Riemann-Liouville tarafından atıldı. Kesirli türev ve kesirli integral kavramı türev ve integralin sadece tamsayılar da var mıdır sorusundan ortaya çıkmıştır. 17. yüzyıldan itibaren Leibnitz, Euler, Lagrange, Liouville ve diğer birçok matematikçi tarafından kesirli türev ve kesirli integral çalışmaları ile gelişmeye başlamıştır (Pecaric, Proshan ve Tong 1992). Kesirli türev ve kesirli integraller ilk zamanlarda yapısal kurgusundan dolayı bilim ve mühendislikte çok popüler değildi. Kesirli türev ve kesirli integral bilim ve mühendislikte daha popüler olması doğanın daha iyi anlatılması ve anlaşılmasını sağlamaktı. Kesirli türev ve kesirli integral kavramları Hospital 1965'de tarafından Leibnitz'e gönderilen mektup ile başladı. L'Hospital bu mektupta Leibnitz'e $\frac{d^n y}{dx^n}$ ifadesinin $n=\frac{1}{2}$ için anlamlı olup olmayacağını sormuştur. Leibnitz ise L'Hospital'a cevap olarak "ileride bir gün çok güzel sonuçlara yol açacak ancak şimdilik bir paradoks" demiştir. Leibnitz bu sözleri ile kesir analizinin doğuşunu sağlamıştır. Leibnitz tam sayı mertebeden türevi

$$\frac{d^n e^{mx}}{dx^n} = m^n e^{mx} \tag{1.1}$$

şeklinde ifade etmiştir.

Kesir analizi konusu L'Hospital ve Leibnitz'den sonra 1730 yılında Euler'in de dikkatini çekmiştir. Euler bu denklemde e^{mx} fonksiyonu yerine x^m fonksiyonu yazılarak

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m.(m-1)(m-2)...(m-n+1)x^{m-n} \tag{1.2}$$

denklemini yazmıştır. Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(m+1) = m.(m-1)...(m-n+1)\Gamma(m-n+1) \tag{1.3}$$

özelliği kulanılarak

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \tag{1.4}$$

eşitliği vermiştir. Bu eşitlikte $m=1$ ve $n=\frac{1}{2}$ alındığında

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{4x}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \tag{1.5}$$

olduğunu göstermiştir. 1772 yılında Lagrange diferansiyeller operatörler için kuvvet alma kanunu ile kesir analizine katkıda bulunmuştur. 1812 yılında P. S. Laplace integraller yoluyla kesirli türevi tanımlamış ve bu tanım Lacroix'in eserlerinde yer almıştır. Lacroix m bir tamsayı olmak üzere $y = x^m$ ile $n-$ninci türevi elde etmiştir:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, m \geq n. \tag{1.6}$$

Lacroix tam Gamma fonksiyonu için Legendre'nin sembolünü kullanarak şu sonuca varmıştır:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \tag{1.7}$$

1822 yılında Fourier keyfi mertebeden türevli konular çalışmıştır. Fourier tarafından

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz)dp \tag{1.8}$$

olarak tanımlamıştır. Fourier integral tanımı $f(x)$ in integral gösteriminden doğmuştur. Burada n bir tamsayı olmak üzere

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos p(x-z) = p^n \cos\left[p(x-z)+\frac{1}{2}n\pi\right] \tag{1.9}$$

dir. Buradan Fourier

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz\int_{-\infty}^{\infty} p^n \cos\left[p(x-z)+n\frac{\pi}{2}\right]dp \tag{1.10}$$

ifadesinin n için tamsayı olmayan $n-$ninci dereceden kesirli türevin tanımı olarak kabul etmiştir (Pecaric, Proshan ve Tong 1992).

Abel kesirli operatörleri ilk kez tauchore problemi olarak adlandırılan integral denklemini çözmek için kullanmıştır. Tautochrone problemi sürtünmesiz bir eğri üzerinde kayan bir cismin iniş süresinin o cismin başlangıç noktasından bağımsız olduğu eğrinin şeklini belirlemedir. Abel'in integral denklemi; fizik, kimya, biyoloji ve mekanik gibi alanlarda ortaya çıkan birçok problemin çözümüne yardımcı olmuştur.

Abel'in $1.$ tip ve $2.$ tip integral denklemi sırasıyla

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}}dt \tag{1.11}$$

ve

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}}dt \tag{1.12}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $f(x)$ sürekli bir fonksiyon ve T sabit olmak üzere $0 \le x,t \le T$ dir. Bununla birlikte "Genelleştirilmiş Abel İntegral Denklemi" $0 \le \alpha \le 1$ olmak üzere sırasıyla

$$f(x)=\int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha}dt \tag{1.13}$$

ve

$$u(x)=f(x)+\int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha}dt \tag{1.14}$$

şeklinde tanımlanır. Bu genelleştirilmiş denklemler ise kesirli integral denklemi olarak göz önüne alınabilir.

1832 yılında J. Liouville kesirli analiz tanımlarını teorik problemlere uygulamıştır ve tamsayı olmayan türevlerin mertebeleri için aşağıdaki yaklaşımları önermiştir:

Leibnitz’in formülü ile aşağıdaki gibidir:

1.

$$\frac{d^m e^{ax}}{dx^m}=a^m e^{ax} \tag{1.15}$$

$$\begin{gathered} f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} c_n e^{a_n x};\ \operatorname{Re} a_n>0 \\ \frac{d^\varsigma f(x)}{dx^\varsigma}=\sum_{m=0}^{\infty} c_n a_n^\varsigma e^{a_n x} \end{gathered} \tag{1.16}$$

2.

$$\begin{aligned} \int^\mu \Psi(x)dx^\mu &= \frac{1}{(-1)^\mu \Gamma(\mu)}\int_0^\infty \Psi(x+\alpha)\alpha^{\mu-1}d\alpha \\ \int^\mu \Psi(x)dx^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \Psi(x-\alpha)\alpha^{\mu-1}d\alpha \\ \tau &= x+\alpha\,,\ \ \tau=x-\alpha \\ \int^\mu \Psi(x)dx^\mu &= \frac{1}{(-1)^\mu \Gamma(\mu)}\int_x^\infty (\tau-x)^{\mu-1}\Psi(\tau)d\tau \\ \int^\mu \Psi(x)dx^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{-\infty}^x (x-\tau)^{\mu-1}\Psi(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{1.17}$$

şeklindedir.

3.

$$\frac{d^m F(x)}{dx^m} = \frac{(-1)^{\mu}}{h^{\mu}}\left(F(x) - \frac{\mu}{1} F(x+h) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} F(x+2h) - ... \right)$$
$$\frac{d^m F(x)}{dx^m} = \frac{1}{h^{\mu}}_{\lim_{h\to 0}} \left(F(x) - \frac{\mu}{1} F(x-h) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} F(x-2h) - ... \right) \tag{1.18}$$

Sağ ve sol taraflı türev ve integrallerin varlığını ilk olarak J. Liouville ortaya koymuştur. 1867 yılına A. K. Grünwald 1867 kesirli türev ve kesirli integraller üzerine çalışmalar yapmıştır. 1868 ve 1872 yılları arasında A. V. Letnikov kesirli integrasyonlar üzerine pek çok makale yayımlamıştır (Pecaric, 1992).

1892 yılında Riemann yayımladığı çalışmasında üzerinde uzun yıllardır çalıştığı kesirli integrasyon teorisini geliştirmiştir. Riemann kesirli integrasyon için formül elde ederken Taylor serisinin bir genelleştirmesini kullanmıştır. Riemann integralin alt sınırını sabitlemediği için keyfi bir $\Psi(x)$ fonksiyonu tanımlamıştır. Bu dezavantajı çözememiştir. Bundan sonra kesirli analizin 20. yüzyılın ikinci yarısındaki doğuşuna kadar, G. F. B. Riemann'ın keyfi fonksiyonlu gösterimi şu şekildedir:

$${}_{c}D_{x}^{-v} l(x) = \left({}_{c}l_{x}^{v}\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_{c}^{x} (x-l)^{v-1} l(l) + \Psi(l); [\Re e v > 0]. \tag{1.19}$$

Kesirli türev ile ilgili çalışmalar yapan A. L. Cauchy $f(z)$ kompleks fonksiyonu için $n-$ninci mertebeden türev formülünü şu şekilde vermiştir:

$$D^n f(z) = f^n(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \tag{1.20}$$

.

Kesirli türev için yapılan çalışmalara önemli katkı sağlayan biri de A. Marchaud dır. Marchaud, Riemann-Liouville kesirli integralini kullanarak kesirli türevi v yerine $-v$ alarak, $v > 0$ için kesirli türevi

$$
{}_{0^+}D_x^{\nu} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_c^{\infty} u^{-\nu}(x-u)du = {}_{-\infty}I_x^{1-\nu} f'(x) \tag{1.21}
$$

şeklindedir.

Hermann Weyl, kesirli integral tanımını ileriye doğru integrasyon ve geriye doğru integrasyon şeklinde tanımlamıştır.

İleriye doğru integrasyon:

$$
\begin{aligned}
{}_xW_{\infty}^{\alpha} f(x) &= {}_x I_{\infty}^{\alpha} f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (u-x)^{\alpha-1} f(u)du
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

Geriye doğru integrasyon:

$$
\begin{aligned}
{}_{-\infty}W_x^{\alpha} f(x) &= {}_{-\infty} I_x^{\alpha} f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-u)^{\alpha-1} f(u)du
\end{aligned} \tag{1.23}
$$

şeklinde tanımlanır.

1900'lü yıllardan günümüze kadar kesir analizine katkıda bulunan birçok bilim adamı vardır. Bunlar H. H. Hardy, S. Samko, M. Riezs, K. B. Oldman, B. Ross, A. Kilbas, R. Bagley, K. S. Miller, M. Caputo gibi birçok bilim adam bu konuda önemli çalışmalar ortaya koymuştur.

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in π değerini hesaplamasına kadar uzanan bir kavramdır. Buna karşın konvekslik kavramının matematikte yer alması 19. yüzyılın sonu 20. yüzyılın başını bulmaktadır. Konvekslik, geometri, analiz, topoloji, lineer cebir alanlarında kullanılır. Konvekslik kavrama ilk olarak 1881 yılında Hermite'nin bir sonucunun, 1883 yılında Mathesis dergisinde yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Hadamard'n 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansada asıl çalışmalar 1905−1906 yıllarında J. L. W. V. Jensen ile başlamıştır. Konveks fonksiyon kavramı eşitsizlik teorisinin gelişmesinde önemli rol oynamıştır. Eşitsizlik kavramı ile ilgili ilk monografi 1930'lu yılarda yayınlanmıştır (Pecaric, Proshan ve Tong 1992). Hardy, Littlewood, Polya, Beckenbach, Bellman, Mitrinòvic, Pachpatte, Pećarić ve Fink gibi matematikçiler Eşitsizlik teorisi ve konveks fonksiyonlar bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar ve çok sayıda makaleler yayınlamışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk çalışma 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır (Hardy, Litlewood ve Polya, 1952). Bu kitabın birçok baskısı olmakla birlikte bu gün hala yeni baskısı da bulunmaktadır. İkinci çalışma ise E. F Beckenbach ve R. Bellman 1961'de yazılan $1934-1960$ yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren "Inequalities" adlı kitaptır. Bunu Mitrinòvic 1970'de yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği "Analytic Inequalities" adlı isimli kitap takip eder. Bu kaynakların yanı sıra literatür de var olan bazı kaynaklar şunlardır; "Inequalities involving Functions and Their Integrals and Derivaties" (Mitrinòvic, 1991), "Classical and New Inequalities in Analysis" (Mitrinòvic, Pečarić ve Fink, 1993), "Mathematical inequalities" (Pachpatte, 2005) ve "Convex Functions and Their Applications" (Niculescu ve Persson, 2006) dır.

Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilişkili olan Eşitsizlik Teorisi C. F. Gaus, A. L. Cauchy ve P. L. Ćebyśev ile gelişmiştir. Eşitsizlikler teorisi ve konveks fonksiyonlar arasındaki ilişki oldukça önemlidir. $19.-20.$ yy'da bulunan önemli eşitsizliklerin birçoğu konveks fonksiyonlar yardımı ile elde edilmiştir. Bu eşitsizliklerin en önemlilerinden biri olan ve 1981 yılında Hermite tarafından ifade edilen Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Hermite Ekim 1881'de, Journal Mathesis dergisine ispatsız olarak yazdığı bir mektup ile aşağıdaki ifadeyi sundu. Bu mektup Mathesis 3 de şu şekilde yayınlanmıştır;

"Sur deux limites d'une integrale define. Soit $f(x)$ une Function qui varie toujours dans le mĕme send de $x=a$, $x=b$. On aura les relations

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

on bien

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\int_a^b f(x)dx>(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y=f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavite vers l'axe des abcisses (Hadamard, 1883)".

Bu eşitsizlikler integraller için ortalama değer teoreminin fonksiyon ve görüntülerinin ortalama değerine ilişkin olup fonksiyonun konvekslik veya konkavlık olması duruma bağlıdır.

Daha sonra Hermite'nin sonuçlarının genelleştirilmesi olarak 1906 yılında Fejer trigonometrik fonksiyonlar ile çalışırken şu eşitsizliği elde etmiştir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx \tag{1.24}$$

Burada $g(x)=1$ ve $x\in(a,b)$ için Hermitin eşitsizlikleri elde edilir. Fejer'in bu sonucu ile ile ilgili son yıllarda literatür de pek çok çalışma bulunmaktadır. Bu eşitsizliklerin yanı sıra 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliği de mevcuttur. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların birçoğu S. S. Dragomir ve C. E. M Pearce tarafından 2000 yılında yazılan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" isimli kitapta yer almıştır. Ostrowski eşitsizliği ile ilgili çalışmalar bir çoğu S. S Dragomir ve T. M. Rassias tarafından 2002 yılında yazılmış olan "Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration" kitapta bir araya getirilmiştir. Konveks fonksiyonlar üzerine çalışan diğer matematikçiler M. E. Özdemir, U. S. Kırmacı, R. Agarval, G. Anastassiou, G. V. Milovanovic, A. M. Fink, A. W. Roberts, D. E. Varberg, N. S. Barnett, H. Yıldırım, M. Z. Sarıkaya, N. Ujević, S. Varośanec, P. S. Bullen, P. Cerone, G. Toader, M. Alomari, F. Qi, C. E. M. Pearce, M. Darus, M. K. Bakula, J. Pećarić, E. Set, A. O Akdemir, H. Kavurmacı Önalan, M. Avcı Ardıç, M. Gürbüz, A. Ekinci, Ç. Yıldız, M. Tunç şeklindedir. Konveks fonksiyonlar ile ilgili birçok kitabın yanında yüksek lisans ve doktora tezleri litiratürde mevcuttur (Pecaric, Proshan ve Tong 1992).

1.1. BETA FONKSİYONUNUN TARİHSEL GELİŞİMİ

18. yüzyılda Leonardo Euler tarafından tanımlanan beta fonksiyonu 1.tip Euler integrali olarak da bilinmektedir. Özel fonksiyonların en önemlilerinden biri olan beta fonksiyonu birçok matematikçi tarafından ele alınmıştır. Bu matematikçilerden bazıları Chaudhry, Miller, Özarslan adlı kişilerdir.

Leonarda Euler tam olmayan n değerleri için

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt, ... n = 0,1,2,... \tag{1.25}$$

değerlerini hesaplamaya çalışıyordu. Aslnda bu hesaplama Euler'in faktöriyel fonksiyonun bir genellemesi olan

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \tag{1.26}$$

gamma fonksiyonunu tanımlamasına yol açtı. Bu fonksiyon uzun yıllar faktöriyel fonksiyonları ile tanımlanan işlemlerin genelleştirilmesinde ve birçok elementer olmayan integrallerin tespitinde kullanıldı.

Euler 1771 yılında gamma fonksiyonun özel bir hali olan

$$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt; \quad \mathrm{Re}(m) > 0, \quad \mathrm{Re}(n) > 0 \tag{1.27}$$

beta fonksiyonunu tanımladı. Gamma fonksiyonu için geçerli olan özelliklerin çoğu beta fonksiyonu için de geçerlidir. Beta fonksiyonu iki değişkenli ve simetri özelliği sağlaması sebebi ile istatiksel dağılım teorisinde kendine çok geniş bir yer bulmuştur (Pecaric, Proshan ve Tong 1992).

Legendre toplamları gamma fonksiyonunu veren ve gamma fonksiyonunun integral sınırları üzerinden bir genellemesi olan

$$\varphi(v,x) := \Gamma(n) = \int_0^x t^{v-1} e^{-t} dt, ... \mathrm{Re}(v) > 0 \tag{1.28}$$

$$\Gamma(v,x) := \int_x^\infty t^{v-1} e^{-t} dt \tag{1.29}$$

tam olmayan gamma fonksiyonunu tanımladı. Bu fonksiyonlar uygulamalı matematik, istatistik, mühendislik ve fizik alanlarındaki birçok problemlerin çözümlerinin elde edilmesinde kullanıldı.

Chaudhry ve Zubair gamma fonksiyonunun tanım kümesini tüm kompleks düzleme genişleterek

$$\Gamma(v;b)=\int_0^\infty t^{v-1}e^{-t-\frac{b}{t}}dt; \quad (\mathrm{Re}(b)>0; b=0, \mathrm{Re}(v)>0) \tag{1.30}$$

genişletilmiş gamma fonksiyonudur.

Chaudhry ve arkadaşları genişletilmiş beta fonksiyonun

$$B(v,\mu;b)=\int_0^1 t^{v-1}(1-t)^{\mu-1}e^{-\frac{b}{t(1-t)}}dt, \quad (\mathrm{Re}(b)>0 \tag{1.31}$$

olarak tanımlandı. Bu fonksiyonun tanım kümesi tüm kompleks düzlemdi ve yeni fonksiyon simetri özelliğini sağlamaktadır.

Bu tezde, Beta fonksiyonu içeren Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler elde ederek, birinci türevleri mutlak değerleri konveks olan fonksiyonlar kullanarak, daha önce elde edilmiş olan sonuçları da kapsayan Hermite-Hadamard eşitsizliği ile bağlantılı yeni yamuk ve orta nokta eşitsizlikleri elde etmektir.

2. KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez için gerekli olan tanım ve teoremler verilmiş olup ayrıca gerekli görülen bazı önemli teoremlerin ispatlarına da yer verilmiştir.

Tanım 2.1. (Gamma fonksiyonu) Gamma fonksiyon $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \tag{2.1}$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun bazı özelliklerini şu şekilde sıralayabiliriz:

1.

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = (n)! \tag{2.2}$$

Bu özelliğin ispatı için, (2.1) denklemindeki integrale kısmi integrasyon metodu uygularsak;

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[x^{n-1} e^{-x} \Big|_0^\varepsilon - \int_0^\varepsilon [-(n-1) x^{n-2} e^{-x}] dx \right] \\ &= (n-1) \int_0^\infty x^{n-2} e^{-x} dx \\ &= (n-1)\Gamma(n-1) \end{aligned} \tag{2.3}$$

olarak bulunur. n tam sayı ise bu indirgeme formülü ardışık olarak uygulandığında

$$\Gamma(n) = (n-1).(n-2)...\Gamma(1) \tag{2.4}$$

olur. Burada

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \tag{2.5}$$

Böylece

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)! \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = (n)! \end{aligned} \tag{2.6}$$

olur.

2. $$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{2.7}$$

olduğunu göstermek için, (2.1) denkleminde n yerine $n = \frac{1}{2}$ yazılırsa,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \tag{2.8}$$

integrali elde edilir. (2.6) denkleminde $x = y^2$ değişken değişimi yapılırsa $dx = 2ydy$ olacağından

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \tag{2.9}$$

olur. Ya da denklemine denk olarak,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \tag{2.10}$$

(2.9) ve (2.10) denkleminin taraf tarafa çarpımından

$$\Gamma\left[\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy \tag{2.11}$$

iki katlı integrali oluşur. Bu integralin değerini hesaplamak için kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\Gamma\left[\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-(r^2)}rdrd\theta = \pi \tag{2.12}$$

Yani

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{2.13}$$

elde edilmiş olur.

3. $$\int_0^\infty \tfrac{x^p}{1+x}dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \tfrac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1 \tag{2.14}$$

(2.1) denkleminde n yerine $n = p$ ve $n = 1-p$ yazıldığında

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx\int_0^\infty e^{-y}x^{-p}dy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x}e^{-y}\left(\frac{x}{y}\right)^p x^{-1}dxdy \tag{2.15}$$

çift katlı integrali elde edilir. (2.15) denkleminde $\frac{x}{y} = u$ dönüşümü uygularsak $dx = ydu$ olacağından

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-yu} e^{-y} u^p \frac{1}{yu} y du dy \tag{2.16}$$

denklemi elde edilir. (2.16) denkleminde $yu = t$ olarak alındığında

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y(u+1)} u^{p-1} du dy \tag{2.17}$$

denklemi elde edilir.

$$\int_0^\infty u^{p-1} \int_0^\infty e^{-y(u+1)} du dy$$

$$\int_0^\infty u^{p-1} \left[\frac{-1}{u+1} e^{-y(u+1)} \Big|_0^\infty \right] du$$

$$= \int_0^\infty u^{p-1} \frac{1}{u+1} du \tag{2.18}$$

Denklem (2.18)'de $u = \frac{1}{v}$ dönüşümü uygularsak, $du = -\frac{1}{v^2} dv$

$$= \int_0^1 \frac{u^{p-1}}{u+1} du + \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{u+1} du$$

$$= \int_0^1 \frac{u^{p-1}}{u+1} du + \int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{v}\right)^{p-1}}{\frac{1}{v}+1} \frac{-dv}{v^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{u^{p-1}}{u+1} du + \int_0^1 \frac{v^{-p}}{v+1} dv$$

$$= \int_0^1 u^{p-1} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n (u)^n du + \int_0^1 v^{-p} \sum_{m=0}^\infty (-1)^m (v)^m dv$$

$$= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n + \int_0^1 u^{n+p-1} du + \sum_{m=0}^\infty (-1)^m + \int_0^1 v^{-p+m} dv$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+p} + \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m-p+1} \tag{2.19}$$

Denklem (2.19)'da $n = k$ ve $m+1 = k$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k-p} \\
&= \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{k+p} - \frac{1}{k-p} \right] \\
&= \frac{1}{p} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2p}{k^2 - p^2} \\
&= \frac{\pi}{\sin p\pi}
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

olur.

4. $$2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2n). \tag{2.21}$$

olduğunu ispatlamak için

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \tag{2.22}$$

(2.22) fonksiyonunda $x = \cos^2 t$ dönüşümü yapılırsa $dx = -2\cos t \sin t dt$ olur.

$$B(m,n) = -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^{2m-2} t \sin^{2n-2} \cos t \sin t dt \tag{2.23}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} t \sin^{2n-1} t dt \tag{2.24}$$

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{2.25}$$

olur. (2.24) integralinde $2n-1 = 2p$ ve $2m-1 = 2p$ yazarsak,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x dx \\
J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x dx
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

şeklinde gösterilir ve

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x dx \tag{2.27}$$

Denklem (2.27)'de $2x=t$ dönüşümü yapılırsa $dx=\frac{dt}{2}$ olacağından aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^{2p} t dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} t dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2p} t dt\,. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Denklem (2.28)'de $t=\pi-x$ dönüşümü uygulanırsa $dt=-dx$ olacağından

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} t dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x dx = I \end{aligned} \tag{2.29}$$

yazlır öyle ki $I=J$ olur. Buradan da

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x \cos x)^{2p} dx \\ &= 2^{2p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x \cos^{2p} x dx \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$J=2^{2p-1}B\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}\right) \tag{2.31}$$

$$I=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)}=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(p+\frac{1}{2})}{2\Gamma(p+1)} \tag{2.32}$$

yazılır. $I = J$ olduğundan (2.31) ve (2.32) den

$$2^{2p-1} B\left(p+\frac{1}{2}, \frac{p+1}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(p+\frac{1}{2})}{2\Gamma(p+1)} \tag{2.33}$$

$$2^{2p-1} \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(2p+1)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(p+\frac{1}{2})}{2\Gamma(p+1)} \tag{2.34}$$

$$2^{2p-1}\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2p) \tag{2.35}$$

olur. Böylece

$$2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n) \tag{2.36}$$

eşitliğinin ispatı tamamlanır.

Tanım 2.2. (Genişletilmiş Gamma Fonksiyonu) n nin pozitif değerleri için tanımlanan Gamma fonksiyonu negatif n değerleri için de tanımlanabilmektedir. Yani $\Gamma(n)$, tüm reel saylara genişletilebilir.

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \tag{2.37}$$

Özelliği kullanılarak negatif n değereleri için $\Gamma(n)$ değer $-x < n < -x+1 < n+x$ ise $0 < n+x < 1$ olmak üzere

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+x)}{n(n+1)(n+2)...(n+x-1)} \tag{2.38}$$

eşitliği ile hesaplanır. Buradan da görüldüğü gibi Gamma fonksiyonu sıfır ve negatif tam saylar için sınırsızdır. Faktöriyel özelliği pozitif sayılar için bir anlam ifade ederken negatif sayılar için bir anlam içermemektedir. Çünkü n 'nin negatif tam sayılara yakın değerleri için $\Gamma(n)$ 'ler pozitif ve negatif değerler alarak sınırsız şekilde büyümektedir.

Tanım 2.3. (Beta fonksiyonu) $B(m,n)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu,

$$B(m,n)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt; \quad \mathrm{Re}(m)>0, \quad \mathrm{Re}(n)>0 \tag{2.39}$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanan iki değişkenli bir fonksiyon olup

$$B(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2m-1}(\cos\theta)^{2n-1}d\theta \tag{2.40}$$

$$B(m,n)=\int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}}du \tag{2.41}$$

şeklinde yazılır. Beta ve Gamma fonksiyonları arasında

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{2.42}$$

biçimlerinde ifade edilir. (2.39) eşitliğinde $t=\sin^2\theta$ alınırsa (2.40) eşitliği; $t=\frac{u}{u+1}$ alınırsa (1.41) eşitliği elde edilir.

$\Gamma(m)$ 'in tanımında $x=s^2$ dönüşümü yapılırsa

$$\Gamma(m)=\int_0^\infty x^{m-1}e^{-x}dx=\Gamma(m)=2\int_0^\infty s^{2m-1}e^{-s^2}ds \tag{2.43}$$

olur. $\Gamma(m)$ nin bu ifadesinden dolayı

$$\Gamma(n)=2\int_0^\infty t^{2n-1}e^{-t^2}dt \tag{2.44}$$

yazılabilir. Buradan

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty s^{2m-1} t^{2n-1} e^{-(s^2+t^2)} dtds \tag{2.45}$$

olup

$$s = r\cos\theta$$
$$t = r\sin\theta$$

kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\begin{aligned} \Gamma(m)\Gamma(n) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r^{2(m+n)-2} e^{-r^2} (\cos\theta)^{2m-1} (\sin\theta)^{2n-1} rdrd\theta \\ &= \left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2m-1} (\sin\theta)^{2n-1} d\theta \right] \left[2\int_0^\infty r^{2(m+n)-2} e^{-r^2} dr \right] \\ &= B(m,n)\Gamma(m+n) \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{2.47}$$

bulunur. Bu ise (2.47) eşitliğinde, $B(m,n) = B(n,m)$ olup bu iki eşitlik Beta fonksiyonunun simetri özelliği olarak adlandırılır (Rainville, 1973).

Tanım 2.4. (Tam Olmayan Beta Fonksiyonu) $0 \le x < 1$ olmak üzere tam olmayan beta fonksiyonu

$$B_x(\gamma,\beta) = \int_0^x t^{\gamma-1}(1-t)^{\beta-1} dt \quad (\mathrm{Re}(\gamma) > 0) \tag{2.48}$$

şeklindedir.

Beta fonksiyonu ve tam olmayan Beta fonksiyonunun bazı özellikerini şöyle sıralayabiliriz:

Özel olarak (2.48) integralinde

1. $\gamma = 1$ alınırsa

$$B_x(1,\beta)=\int_0^x (1-t)^{\beta-1}dt \tag{2.49}$$

$$=-\int_1^{1-x} u^{\beta-1}du=\frac{u^{\beta}}{\beta}\Big|_{1-x}^{1} \tag{2.50}$$

$$B_x(1,\beta)=\frac{1}{\beta}\left\{1-(1-x)^{\beta}\right\} \tag{2.51}$$

$\beta=1$ alınırsa

$$B_x(\gamma,1)=\int_0^x t^{\gamma-1}dt=\frac{t^{\gamma}}{\gamma}\Big|_0^1 \tag{2.52}$$

$$B_x(\gamma,1)=\frac{x^{\gamma}}{\gamma} \tag{2.53}$$

eşitlikleri elde edilir.

2. $$B(\gamma,\beta)=B_x(\beta,\gamma)+B_{1-x}(\gamma,\beta) \tag{2.54}$$

olduğunu gösterelim, (2.48) denkleminde $B_x(\beta,\gamma)+B_{1-x}(\gamma,\beta)$ fonksiyonlar birlikte ele alındığında

$$\begin{aligned} B_x(\beta,\gamma)+B_{1-x}(\gamma,\beta) &= \int_0^x t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-1}dt+\int_0^{1-x} t^{\gamma-1}(1-t)^{\beta-1}dt \\ &= \int_0^x t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-1}dt-\int_1^x (1-u)^{\gamma-1}u^{\beta-1}du \\ &= \int_0^x t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-1}dt+\int_x^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-1}du \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned} B_x(\beta,\gamma)+B_{1-x}(\gamma,\beta) &= \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-1}dt \\ &= B(\gamma,\beta) \end{aligned} \tag{2.56}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise tam olmayan beta fonksiyonu ile beta fonksiyonu arasındaki

$$B(\gamma,\beta)=B_x(\beta,\gamma)+B_{1-x}(\gamma,\beta) \tag{2.57}$$

ilişkisini verir.

3. $$B_x(\gamma+1,\beta)+B_x(\gamma,\beta+1)=B_x(\gamma,\beta) \tag{2.58}$$

bu özelliğin ispat için (2.48) denkleminde $B_x(\gamma+1,\beta)$, $B_x(\gamma,\beta+1)$ fonksiyonlar birlikte ele alındığında

$$\begin{aligned} B_x(\gamma+1,\beta)+B_x(\gamma,\beta+1) &= \int_0^x t^{\gamma}(1-t)^{\beta-1}dt+\int_0^x t^{\gamma-1}(1-t)^{\beta}dt \\ &= \int_0^x t^{\gamma-1}(1-t)^{\beta-1}dt \\ &= B_x(\gamma,\beta) \end{aligned} \tag{2.59}$$

$$B_x(\gamma+1,\beta)+B_x(\gamma,\beta+1)=B_x(\gamma,\beta) \tag{2.60}$$

ispatlanmış olur.

4. $$B_x(\gamma+1,\beta)=\tfrac{\gamma}{\beta}B_x(\gamma,\beta+1)-\tfrac{x^{\gamma}(1-x)^{\beta}}{\beta} \tag{2.61}$$

Bu özelliği ispatlamak için (2.48) verilen denklemde $\gamma=\gamma+1$ alınıp kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} B_x(\gamma+1,\beta) &= \int_0^x t^{\gamma}(1-t)^{\beta-1}dt \\ &= -\frac{t^{\gamma}(1-t)^{\beta}}{\beta}\Big|_0^x+\frac{\gamma}{\beta}\int_0^x t^{\gamma-1}(1-t)^{\beta-1}dt \\ &= \frac{\gamma}{\beta}B_x(\gamma,\beta+1)-\frac{x^{\gamma}(1-x)^{\beta}}{\beta} \end{aligned} \tag{2.62}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$B_x(\gamma+1,\beta)=\frac{\gamma}{\beta}B_x(\gamma,\beta+1)-\frac{x^{\gamma}(1-x)^{\beta}}{\beta} \tag{2.63}$$

eşitliği sağlanır.

Benzer şekilde: $B_x(\gamma,\beta+1)=\frac{\beta}{\gamma}B_x(\gamma+1,\beta)+\frac{x^{\gamma}(1-x)^{\beta}}{\gamma}$ olduğunu ispatlamak için (2.48) verilen denklemde $\beta=\beta+1$ alınıp kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} B_x(\gamma,\beta+1) &= \int_0^x t^{\gamma-1}(1-t)^{\beta}\,dt \\ &= -\frac{t^{\gamma}(1-t)^{\beta}}{\gamma}\Big|_0^x+\frac{\beta}{\gamma}\int_0^x t^{\gamma}(1-t)^{\beta-1}\,dt \\ &= \frac{\beta}{\gamma}B_x(\gamma+1,\beta)+\frac{x^{\gamma}(1-x)^{\beta}}{\gamma} \end{aligned} \tag{2.64}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$B_x(\gamma,\beta+1)=\frac{\beta}{\gamma}B_x(\gamma+1,\beta)+\frac{x^{\gamma}(1-x)^{\beta}}{\gamma} \tag{2.65}$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.5. a bir sabit ve n sıfır ya da pozitif bir tamsay olmak üzere

$$(a)_n=a(a+1)(a+2)...(a+n-1),\quad (a)_0=1 \tag{2.66}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye Pochhammer sembolü denir. Pochhammer sembolü için aşağdaki eşitlikler geçerlidir,

i) $$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \tag{2.67}$$

Gamma fonksiyonunun $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=(n)!=n(n-1)!$ özelliği kullanılarak $\Gamma(a+n)$ ifadesi

$$\begin{aligned}\Gamma(a+n) &= (a+n-1)\Gamma(a+n-1) \\ &= (a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2) \\ &\ \ ... \\ &= (a+n-1)(a+n-2)...(a+1)a\Gamma(a) \\ &= (a)_n \Gamma(a)\end{aligned} \tag{2.68}$$

şeklinde olur. Eşitliğin her iki tarafn $\Gamma(a)$ ile bölünürse

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \tag{2.69}$$

eşitliği elde edilir.

ii) $$(a)_{n+1} = a(a+1)_n \tag{2.70}$$

$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ eşitliğinde n yerine $n+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}(a)_{n+1} &= \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a)} \\ &= \frac{a\Gamma(a+n+1)}{a\Gamma(a)} \\ &= a\frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a+1)} \\ &= a(a+1)_n\end{aligned} \tag{2.71}$$

elde edilir. Özel olarak $n=0$ alnrsa $(a)_0 = 1$ olur.

Teorem 2.6. (Hata Fonksiyonu) $x \in \mathrm{R}$ için

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{2.72}$$

olarak tanımlanır. Hata fonksiyonunun tümleyeni $Erf_c(x)$ olup

$$Erf_c(x) = 1 - Erf(x) \tag{2.73}$$

şeklindedir. (2.72) sonucu olarak $Erf(0) = 0$ ve $Erf(\infty) = 1$ olur.

Tanım 2.7. (Mittag-Leffler Fonksiyonu) Mittag-Leffler fonksiyonu e^x üstel fonksiyonunun bir genelleştirmesi olup kesir hesaplamalarında önemli bir yere sahiptir. Bir ve iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu:

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \ \alpha > 0 \tag{2.74}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \ \alpha > 0, \beta > 0 \tag{2.75}$$

kuvvet serisidir. (2.75) serisi (2.74) in genelleştirmesidir. Bu genelleştirmesi 1953'de Agarwal tarafından tanımlanmıştır. (1.75) verilen tanımın sonucu,

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x) \tag{2.76}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta+1}(x) \tag{2.77}$$

yazılır. (2.77) eşitliğinden

$$\frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta+1}(x) = \frac{1}{\alpha x}\left[E_{\alpha,\beta}(x) - \beta E_{\alpha,\beta+1}(x)\right] \tag{2.78}$$

dır. Burada β yerine $\beta - 1$ yazılırsa

$$\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x)=\frac{1}{\alpha x}\left[E_{\alpha,\beta-1}(x)-(\beta-1)E_{\alpha,\beta}(x)\right] \tag{2.79}$$

olur. Şimdi (2.76) eşitliğini ispatlayalım. Bu eşitliği ispatlamak için (2.75) yardımıyla

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}=\sum_{k=-1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty}x\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k(\alpha+\beta))}=\frac{1}{\Gamma(\beta)}+x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k(\alpha+\beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}+xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x) \end{aligned} \tag{2.80}$$

elde edilir. Burada $E_{\alpha,\beta}(0)=1$ dir.

Tanım 2.8. (Mellin-Ross Fonksiyonu) Mellin-Ross fonksiyonu $e^{\alpha t}$ nin kesirli integrali bulunduğu zaman ortaya çıkmıştır. Bu fonksiyon incomplete gamma ve Mittag-Leffler fonksiyonlarını ikisi ile ilişkilidir. Mellin-Ross fonksiyonu

$$E_t(v,\alpha)=t^v e^{\alpha t}\Gamma^{\Delta}(v,t) \tag{2.81}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} E_t(v,\alpha) &= t^v e^{\alpha t}\sum_{k=-1}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{\Gamma(k+v+1)} \\ &= t^v E_{1,v+1}(\alpha t) \end{aligned} \tag{2.82}$$

olarak yazılabilir.

Tanım 2.9. Lineer uzaydan reel(kompleks) uzaya olan dönüşümlere fonksiyonel denir.

Tanım 2.10. Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüme operatör denir.

Tanım 2.11. (Konveks Küme) V bir lineer uzay ve $A\subset V$ ve $x,y\in A$ olsun.

$$B = \{t \in V \ : \ t = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A \tag{2.83}$$

şeklinde tanmlanabiliyorsa A kümesine konveks küme denir. Ancak $t \in B$ ise $t = \alpha x + (1-a)y$ eşitliğinde x ve y nin katsayıları için bağıntı her zaman doğrudur.

Bundan dolayı konveks küme tanımındaki $(1-\alpha)$, α yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan negatif olmayan α, β sayıları yazabiliriz. Geometrik anlamda B kümesi uç noktalar x ve y olan bir doğru parçasını belirtmektedir. Sonuç olarak konveks küme boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasına karşılık gelen kümedir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.12. (Konveks Fonksiyon) $\forall \ \alpha, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(\alpha t + (1-t)b) \leq tf(\alpha) + (1-t)f(b) \tag{2.84}$$

eşitsizliğini sağlayan $f \ : \ I \subset R \to R$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (eşdeğer olarak $t \in (0,1)$ aralığında da seçilebilir.). Geometrik olarak bu eşitsizlik, f fonksiyonunun grafiği kirişlerinin altından geçtiği anlamına gelmektedir.

Aşağıda bazı konveks fonksiyon örnekleri verilmiştir.

$i)$ e^{ax}

$ii)$ $-\log(x)$

$iii)$ x^a, (R^+), $a \geq 1$ ve $a \leq 0$

$iv)$ x^a, (R^+), $a \leq 0 \leq 1$

$v)$ $|x|^a$, $a \geq 1$

$vi)$ $x\log(x)$, (R^+)

Aşağıdaki kriterler konveks fonksiyon tanımına eşdeğerdir.

1. I aralığı üzeride f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in I$ noktası için, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ fonksiyonunun I aralığında artan olmasıdır.

2. $f\ :(a,b)\to R$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $c,x\in(a,b)$ için,

$$f(x)-f(c)=\int_c^x g(t)dt \tag{2.85}$$

olacak şekilde $g\ :(a,b)\to R$ artan fonksiyonun olmasıdır.

3. f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere , f nin konveks olmas için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır (Pecaric ve diğ., 1992).

4. f'', (a,b) de mevcut olsun. Bu durumda f nin konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x)\geq 0$ olmasıdır.

5. $f\ :(a,b)\to R$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0\in(a,b)$ için f fonksiyonunun en az bir support doğrusuna sahip olmasıdır. Yani

$$f(x)\geq f(x_0)+\lambda(x-x_0) \tag{2.86}$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ, x_0 bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman

$$\lambda=f'(x_0)\ \text{yada}\ f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)\ \text{ise}\ \lambda\in[f'_-(x_0)+f'_+(x_0)] \tag{2.87}$$

dır.

6. $f\ :(a,b)\to R$ fonksiyonunun konveks olmas için gerek ve yeter şart $P,\ Q$ ve R noktaları f fonksiyonunun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere ,

$$eğimPQ\leq eğimPR\leq eğimQR \tag{2.88}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Niculescu, 2006).

Konveks fonksiyonların temel özellikleri şunlardır:

1. $f_j \ : \ R^n \to R \quad , (j=1,2,3,...,k)$ fonksiyonlar konveks olmak üzere (2.89)

$$f(x)=\sum_{j=1}^{k} a_j f_j(x)\ , \ \alpha_j>0;(1,2,3,...,k) \tag{2.90}$$

fonksiyonuda konvekstir. Konveksliğin tanımından;

$$\begin{aligned} f(tx+(1-t)y &= \textstyle\sum_{j=1}^{k} a_j f_j(tx+(1-t)y) \\ &\le \textstyle\sum_{j=1}^{k} a_j[tf_j(x)+(1-t)f_j(y)] \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{k}[ta_j f_j(x)+(1-t)a_j f_j(y)] \\ &= t\textstyle\sum_{j=1}^{k}(a_j f_j(x))+(1-t)\textstyle\sum_{j=1}^{k}(a_j f_j(y)) \\ &\le tf(x)+(1-t)f(y). \end{aligned} \tag{2.91}$$

2. $f \ : \ R^n \to R$ konkav ve $A=\{x \ : \ f(x)>0\}$ olmak üzere $g \ : \ A \to R,\ g(x)=\frac{1}{f(x)}$ biçiminde tanımlanan $g,\ A$'da konvekstir.

3. $f \ : \ R \to R$ azalmayan ve konveks ve $g \ : \ R^n \to R$ da konveks bir fonksiyon olsun . Bu takdirde , $h \ : \ R^n \to R$

$h(x)=(fog)(x)$ olarak tanımlanan h bileşke fonksiyonu da konveksdir. Gerçekten $h \ : \ R^n \to R \quad , \quad h(x)=f(g(x)$ olmak üzere $x=ta+(1-t)b,$ ve buradan

$$\begin{aligned} h(tx_1+(1-t)x_2) &= f(g(tx_1+(1-t)x_2) \\ &\le f(tg(x_1)+(1-t)g(x_2)) \\ &= tf((g(x_1)+(1-t)f((g(x_2)) \\ &= th(x_1)+(1-t)h(x_2) \end{aligned} \tag{2.92}$$

4. $f \ : \ R^n \to R$ konveks ve K uygun matris olmak üzere $g \ : \ R^n \to R$, $g(x)=Kx+L$ formunda bir konveks fonksiyon olsun. $h(x)=f\big(g(x)\big)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} g(tx+(1-t) &= K(tx+(1-t)y)+L \\ &= tKx+(1-t)Ky+L \end{aligned} \tag{2.93}$$

olup;

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) \quad &= f(g(tx+(1-t)y) \\
&= f(tKx+(1-t)Ky+L \\
&= f(tKx+(1-t)Ky+L+tL-tL) \\
&= f(t(Kx+L)+(1-t)Ky+(1-t)L \\
&= f(t(Kx+L)+(1-t)(Ky+L) \\
&\le tf(Kx+L)+(1-t)f(Ky+L) \\
&tf(g(x))+(1-t)f(g(x)
\end{aligned}
\tag{2.94}
$$

olduğundan $h=f(g(x))$ konveks fonksiyondur. Yani afin dönüşüm koonveks fonksiyon altındaki görüntüsüde konvekstir.

Tanım 2.13 (Starshaped Fonksiyon). $f:[0,b]\to \mathrm{R}$ fonksiyonu $\forall\ x\in[0,b]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f(tx)\le tf(x) \tag{2.95}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna starshaped fonksiyon denir.

Tanım 2.14. (m −Konveks Fonksiyon) $f:[0,b]\to \mathrm{R}$ ve $b>0$ olsun. $\forall\ x,y\in[0,b]$, $t\in[0,1]$, $m\in[0,b]$ için

$$f(tx+m(1-t)y)\le tf(x)+m(1-t)f(y) \tag{2.96}$$

şart sağlanıyorsa f fonksiyonuna $m-$ konveks fonksiyon denir. (Toader, 1984).

$-f$ fonksiyonu $m-$ konveks olduğu takdirde f fonksiyonu $m-$konkavdır. Ayrıca $f(0)\le 0$ için $[0,b]$ aralığında tanımlı tüm $m-$ konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir.

Tanım 2.15. ((a,m) -Konveks Fonksiyon) $f:[0,b]\to \mathrm{R}$ ve $b>0$ olsun. $\forall$ $x,y\in[0,b]$, $t\in[0,1]$, $a,m\in[0,1]^2$ için

$$f(tx+m(1-t)y) \le t^a f(x)+m(1-t^a)f(y) \tag{2.97}$$

şart sağlanıyorsa f fonksiyonuna $(a,m)-$ konveks fonksiyon denir. Burada $f(0)\le 0$ için $[0,b]$ aralığında tanımlı tüm $(a,m)-$ konveks fonksiyonların sınıfı $K_m^a(b)$ ile gösterilir.

Yine buradan $(a,m)\in\{(0,0),(a,0),(1,0),(1,m),(1,1)(a,m)\}$ olduğunda (a,m) fonksiyon grupları sırasıyla; artan, $a-$starshaped, starshaped, m-konveks ve $a-$konveks fonksiyon gruplarına dönüşür.

Tanım 2.16. ((h,m) Konveks Fonksiyon) $h : J\subseteq \mathrm{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall\ x,y\in[0,b]$, $m\in[0,1]$ ve $a\in[0,1]$ için $f:[0,b]\to\mathrm{R}$ negatif olmayan f fonksiyonuna

$$f(ax+m(1-a)y)\le h(a)f(x)+mh(1-a)f(y) \tag{2.98}$$

şartını sağlıyorsa $f:[0,b]\to\mathrm{R}$ fonksiyonuna h,m konveks fonksiyon denir (Özdemir ve diğ. 2011).

Tanım 2.17. (Godunova-Levin Fonksiyonu) Negatif olmayan $f : I\to\mathrm{R}$ fonksiyonu $\forall\ x,y\in I,\lambda\in(0,1)$ olmak üzere

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\frac{f(x)}{\lambda}+\frac{f(y)}{1-\lambda} \tag{2.99}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir. Bu tanıma denk olarak; $f\in Q(I)$ ve $x,y,z\in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z)+f(y)(y-x)(y-z)+f(z)(z-x)(z-y)\ge 0 \tag{2.100}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.18. (Logaritmik Konveks Fonksiyon) $f : I \subset \mathrm{R} \to [0,\infty)$ $\forall$ $x, y \in I$ ve $a \in [0,1]$ için

$$f(ax+(1-a)y) \le [af(x)]^{a} + [f(y)]^{1-a} \qquad (2.101)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona I üzerinde logaritmik konveks fonksiyon denir. Bu eşitsizliğin ters çevrilmesi durumda ise logaritmik konkav fonksiyon olur (Dragomir ve Pearce, 2000).

Tanım 2.19. (Quasi-Konveks Fonksiyon) $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ bir fonksiyon ve farklı küme olsun $\forall x, y \in [a,b]$ ve $\psi \in [0,1]$ için

$$f(\psi x+(1-\psi)y) \le \max\{f(x)+f(y)\} \qquad (2.102)$$

ise f 'ye quasi-konveks fonksiyon denir. Eğer

$$f(\psi x+(1-\psi)y) < \max\{f(x)+f(y)\} \qquad (2.103)$$

ise f 'ye strictly quasi-konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\psi x+(1-\psi)y) \ge \max\{f(x)+f(y)\} \qquad (2.104)$$

ise f 'ye quasi-konkav fonksiyon denir ve

$$(\psi x+(1-\psi)y) > \max\{f(x)+f(y)\} \qquad (2.105)$$

ise f 'ye strictly quasi-konkav fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce 1998).

Tanım 2.20 f hem quasi konveks hem de quasi konkav ise f 'ye quasi-monotonik fonksiyon denir (Greenberg ve Pierskalla, 1970)

Sonuç 2.1. Herhangi bir konveks fonksiyon quasi konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani quasi konveks fonksiyon olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır. Örneğin $g\ :[-2,2]\to \mathrm{R}$,

$$g(t)=\begin{cases}1, & t\in[-2,-1]\\ t^2, & t\in(-1,2]\end{cases}$$

fonksiyonu $[-2,2]$ aralğında konveks değildir fakat quasi-konvekstir (Ion, 2007).

Tanım 2.21. (P-Fonksiyon) $f\ :\ I\to \mathrm{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $x,y\in I$ ve $\phi\in(0,1)$ olmak üzere

$$f(\phi x+m(1-\phi)y)\le f(x)+f(y) \tag{2.106}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye P-Fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir ve diğ., 1995).

Tanımlardan da görüldüğü gibi tüm negatif olmayan monoton ve negatif olmayan konveks fonksiyonlar $Q(I)$ sınıfına aittir. Ayrca $Q(I)\supset P(I)$ ve $P(I)$ sınıfında fonksiyonlar negatif olmayan monoton, konveks ve quasi konveks fonksiyonlardan meydana gelmektedir.

Tanım 2.22. $h\neq 0$ ve $h\ :\ J\to \mathrm{R}$ negatif olmayan fonksiyon olsun.
$\forall x,y\in I, a\in(0,1)$ için

$$f(ax+(1-a)y)\le h(a)f(x)+h(1-a)f(y) \tag{2.107}$$

şartn sağlayan $f\ :\ I\to R$ fonksiyonuna $h-$ konveks fonksiyon veya $SX(h,I)$ sınıfına aittir denir. Burada I ve J,R de iki aralık, $(0,1)\subseteq J$ dir. (Wright, 1954).

Bu eşitsizlik yön değiştirirse, bu durumda f 'ye $h-$ konkav fonksiyon veya $SV(h,I)$ sınıfına aittir denir. Eğer

i) $h(a)=a$ alınırsa $h-$ konveks fonksiyonu negatif olmayan konveks fonksiyon olur.

$ii)$ $h(a)=\frac{1}{a}$ alnrsa $SX(h,I)$ sınıfı $Q(I)$ sınıfını içerir.

$iii)$ $h(a)=(a)^s$ ve $s\in(0,1)$ alnırsa K_s^2 sınıfını içerir.

Tanım 2.23. ($J-$Konveks Fonksiyon) I , R de bir aralık olmak üzere $\forall x, y\in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{2.108}$$

şartını sağlayan, f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya $J-$ konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.24. (Kesin J -Konveks Fonksiyon) $\forall x, y\in I$ ve $x\neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{2.109}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J-konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.25. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar) f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I da iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$i)$ $x_2>x_1$ iken $f(x_2)>f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

$ii)$ $x_2>x_1$ iken $f(x_2)<f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

$iii)$ $x_2>x_1$ iken $f(x_2)\geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

$iv)$ $x_2>x_1$ iken $f(x_2)\leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

denir (Adam ve Essex, 2010).

Teorem 2.1. J açk bir aralk ve $J\subseteq I$ olmak üzere f, I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$i)$ $\forall x\in J$ için $f'(x)>0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

$ii)$ $\forall x\in J$ için $f'(x)<0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

$iii)$ $\forall x\in J$ için $f'(x)\geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

$iv)$ $\forall x \in J$ için $f^{'}(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır,

(Adams ve Essex, 2010).

Sonuç 2.2. f ve g konveks fonksiyonlar ve g ayn zamanda artan ise gof fonksiyonu konvekstir (Roberts ve Varberg, 1973).

Tanım 2.26. (Birinci Anlamda s-konveks fonksiyon) $\alpha, \beta \geq 0, \alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere $x, y \in R^+$ için $f : R^+ \to R$ fonksiyonu

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \tag{2.110}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f\,'$ye birinci anlamda $s-$ konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonun sınıfı K_s^1 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonuna birinci anlamda $s-$ konkav olarak adlandırılır.

Tanım 2.27. (İkinci Anlamda s-konveks Fonksiyon) $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere $x, y \in R^+$ için $f : R^+ \to R$ fonksiyonu

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \tag{2.111}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye ikinci anlamda $s-$ konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonun sınıfı K_s^2 ile gösterili. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonuna ikinci anlamda $s-$ konkav olarak adlandırılır.

Yukarda verilen iki $s-$ konveks fonksiyon tanımlar için $s = 1$ olması halinde bilinen konveks fonksiyon olur.

Sonuç 2.3. Her konveks fonksiyon $J-$konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.28. (Sınırlı Fonksiyon) $I \subset R$, $f : I \to R$ bir fonksiyon ve her $x \in I$ için $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir.

Tanım 2.29. (Lipschitz Şart) $[a,b]$ kapalı aralığındaki her x, y noktaları için

$$|f(x)-f(y)|\leq K|x-y| \tag{2.112}$$

şartını sağlayan bir K sabiti varsa f , $[a,b]$ aralığında Lipchitz şartını sağlıyor demektir.

Sonuç 2.4. f , $[a,b]$ Lipschitz şartını sağlıyorsa f , $[a,b]$ düzgün süreklidir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.30. (Düzgün Süreklilik) $f:[a,b]\subseteq \mathrm{R}\to \mathrm{R}, x_0\in[a,b]$ ve $\varepsilon>0$ verilmiş olsun. $x\in[a,b]$ ve $|x_1-x_2|<\delta$ şartını sağlayan $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ için $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa f , $[a,b]$ de düzgün süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Teorem 2.2. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

$i)$ f , (a,b) aralığında süreklidir ve

$ii)$ f , $[a,b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia, 1994).

Tanım 2.31. (Lineer Uzay) L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+: LxL\to L$ ve $FxL\to L$ işlemleri tanımlansın. Aşağdaki şartlar sağlanıyorsa L 'ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzay) denir.

1. $L,+$ işlemine göre değişmeli gruptur.

$G1.$ $\forall$ $a,b\in L$ için $a+b\in L$ 'dir

$G2.$ $\forall$ $a,b,c\in l$ için $a+(b+c)=(a+b)+c$ dir.

$G3.$ $\forall$ $x\in L$ için $a+\sigma=\sigma+a$ olacak şekilde $\sigma\in L$ vardır.

$G4.$ $\forall\in L$ için $a+(-a)=(-a)+a=\sigma$ olacak şekilde $\sigma\in L$ vardır.

$G5.$ $\forall a,b\in L$ için $a+b=b+a$ dır.

2. $a,b\in L$ ve $\sigma,\beta\in F$ olmak üzere aşağdaki şartlar sağlanır.

$L1.$ $\sigma a\in L$ dir.

$L2.$ $\sigma.(a+b)=\sigma.a+\sigma.b$ dir.

$L3.\ (\sigma+\beta).a=\sigma.a+\beta.a$ dır.

$L4.\ (\sigma.\beta)a=\sigma.(\beta.a)$ dır.

$L5.\ 1.a=a$ dır. (Burada 1 , F nin birim elemandr.)

$F=R$ ise L reel lineer uzay , $F=C$ ise L 'ye kompleks lineer uzay denir.

Tanım 2.32. F bir cisim ve V' ve W de F cismi üzerinde tanımlı iki lineer uzay olsun, $u,v\in V$ ve $\lambda\in F$ olmak üzere $T:V\rightarrow W$ ddönüşümü

a) $T(u+v)=T(u)+T(v)$ (2.113)

b) $T(\lambda.V)=\lambda.T(v)$ (2.114)

şartlarını sağlıyorsa T ye V üzeride lineer dönüşüm denir. Özel olarak $V=W$ ise $T:V\rightarrow V$ lineer dönüşümüne bir lineer operatör denir.

Tanım 2.33. ($k-$Gamma ve $k-$Beta fonksiyonu): $k-$ gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!k^n(nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}} \tag{2.115}$$

dır. Burada

$$(x)_{n,k}=\prod_{j=0}^{n-1}(x+jk),k>0 \tag{2.116}$$

Pochhammer $k-$ symbol fonksiyonudur. $e^{-\frac{t^k}{k}}$ üstel fonksiyon dönüşümü için , $k-$ gamma fonksiyonunu

$$\Gamma_k(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\frac{t^k}{k}}dt \tag{2.117}$$

olur. Açık olarak

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to 1}\Gamma_k(x)$$
$$\Gamma_k(x) = k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma(\frac{x}{k}) \tag{2.118}$$

ve

$$\Gamma_k(x+k) = x\Gamma_k(x) \tag{2.119}$$

olur.

$k-$beta fonksiyonu

$$B_k(x,y) = \frac{1}{k}\int_0^1 t^{\frac{x}{k}-1}(1-t)^{\frac{x}{k}-1}dt \tag{2.120}$$

şeklindedir. Buradan $k-$ gamma ve $k-$ beta fonksiyonu arasındaki bağıntı:

$$\begin{aligned} B_k(x,y) &= \frac{1}{k}B(\frac{x}{k},\frac{y}{k}) \\ &= \frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)} \end{aligned} \tag{2.121}$$

şeklinde ifade edilir. Beta $k-$ ile klasik Beta fonksiyonu arasında

$$B_k(x,y) = \frac{1}{k}B(\frac{x}{k},\frac{y}{k}) \tag{2.122}$$

eşitliği vardır.

Tanım 2.34. (Üçgen Eşitsizliği) $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} &\|x+y\| \leq| \|x\| |+\|y\| \\ &\|x\|-\|y\| \leq \|x-y\| \\ &\|x\|-\|y\| |\leq| \|x+y\| \end{aligned} \tag{2.123}$$

ve tümevarım yöntemiyle,

$$\|x_1+...x_n\| \leq \|x_1\|+...\|x_n\| \tag{2.124}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Mitrinovic ve diğ., 1993).

Tanım 2.35. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) f, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{2.125}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.3. (Ortalama Değer Teoremi) f, $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) de diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda

$$f^{'}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{2.126}$$

olacak şekilde $c \in (a,b)$ vardır.

Teorem 2.4. (İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi) f, $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \tag{2.127}$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır.

Tanım 2.36. E ölçülebilir bir küme olmak üzere f bu küme üzerinde tanımlı ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda herhangi bir L sayısı için $f(x) > L$ olan $x \in E$ değerlerin kümesi ölçülebilirse f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir.

Teorem 2.5. (Lebesque İntegralinin Varlık Teoremi) Sonlu ölçümlü E kümesi üzerinde f fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir ise Lebesque integrali vardır.

Tanım 2.37. (Jensen Eşitsizliği) f , $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon $t_i \in [0,1]$ için $\sum_{i=1}^{n} t_i$ ve $\forall x_i \in [a,b]$ için aşağdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \qquad (2.128)$$

Bu eşitsizlikte özel olarak $t_1 = t_2 = t_3 = ... = t_n = \frac{1}{n}$ alınarak tekrar düzenleme yapılırsa

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad (2.129)$$

elde edilir.

f , $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon $t_i \in [0,1]$ için $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ olduğunda $\forall x_i \in [a,b]$ için indüksiyonla

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_{n-1}x_{n-1} + t_nx_n) \qquad (2.130)$$

$$\begin{aligned}
&= f\left((1-t_n)\left(\frac{t_1}{(1-t_n)}x_1 + ... + \frac{t_{n-1}}{(1-t_n)}x_{n-1}\right) + t_nx_n\right) \\
&\leq (1-t_n) f\left((1-t_n)\left(\frac{t_1}{(1-t_n)}x_1 + ... + \frac{t_{n-1}}{(1-t_n)}x_{n-1}\right)\right) + t_n f(x_n) \\
&\leq (1-t_n)\left\{\frac{t_1}{(1-t_n)} f(x_1) + ... + \frac{t_{n-1}}{(1-t_n)} f(x_{n-1})\right\} + t_n f(x_n) \\
&= t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + ... + t_n f(x_n)
\end{aligned} \qquad (2.131)$$

olduğu görülür.

Teorem 2.6. (İntegraller için Jensen Eşitsizliği) $f\ :\ [a,b]\to R$ konveks fonksiyon, $h\ :\ [a,b]\to(0,\infty)$ ve $u\ :\ [a,b]\to R_+=[0,\infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$f\left(\frac{\int_a^b h(t)u(t)dt}{\int_a^b h(t)dt}\right)\leq\frac{\int_a^b h(t)f(u(t))dt}{\int_a^b h(t)dt} \tag{2.132}$$

eşitsizliği geçerlidir (Jensen, 1906).

İspat. f fonksiyonu konveks olduğundan dolayı, bir support doğruya sahiptir. Yani $\Omega>0$ için

$$f(t)-f(\Omega)\geq\lambda(t-\Omega)\quad\forall t\geq 0 \tag{2.133}$$

olacak şekilde bir λ sabiti vardır. Burada $t=u(t)$ seçilirse ve eşitsizliğin her iki taraf $h(t)$ ile çarpılır ve $[a,b]$ aralığında t'ye göre integral alınırsa,

$$\int_a^b h(t)f(u(t))dt-f(\Omega)\int_a^b h(t)dt\geq\lambda\left\{\int_a^b h(t)u(t)dt-\Omega\int_a^b h(t)\right\}dt \tag{2.134}$$

elde edilir. Son bulunan eşitsizlikte

$$\Omega=\frac{\int_a^b h(t)u(t)dt}{\int_a^b h(t)dt} \tag{2.135}$$

yerine yazılarak ispat tamamlanmş olur.

Tanım 2.38. $\psi_1=[a,b]$, $\psi_2=[c,d]\ -\infty\leq a<b\leq\infty$, $-\infty\leq c<d\leq\infty$ ve $f(x,y),\psi_1 x\psi_2$ üzerinde tanımıl olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b\left(\int_a^x f(x,y)dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_y^b f(x,y)dx\right)dy \tag{2.136}$$

şeklindeki eşitliğe *Dirichlet formülü* denir.

Tanım 2.39 $1 \le p < \infty$ olmak üzere

$$L^p = L_p = \left\{ f \ : \ \left(\int_E | f(x) |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \ \| f \|_\infty = \left(\int_E | f(x) |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.137)$$

normuna göre bir *Banach* uzayıdır.

Tanım 2.40. (Abel İntegral Denklemi) $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} \psi(\tau) d\tau, \quad x > 0 \qquad (2.138)$$

ifadesine *Abel İntegral Denklemi* denir (Samko, Kilbas, Mariche 1993).

Tanım 2.41. (Fubini Teoremi) $f(x,y)$ fonksiyonunun $a < x < b, c < y < d$ aralıklar üzerinde ölçülebilir olmak üzere

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy \qquad (2.139)$$

dir (Samko ve ark., 1993).

Tanım 2.42. (Mutlak Süreklilik) $I \subset R$, $\dot{f} \ : \ I \to R$ bir fonksiyon ve (x_k, y_k) sonlu bir aralık olsun. Bu durumda, $\varepsilon > 0$ için $\exists$ bir $\delta > 0$ vardır öyleki

$$\sum_k | y_k - x_k | < \delta \Rightarrow \sum_k | f(y_k) - f(x_k) | < \varepsilon \qquad (2.140)$$

dır. $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli fonksiyonların sınıfı $AC^n[a,b]$ ile gösterilir.

Tanım 2.43. (Normlu Uzay) X, F üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$\|.\|: \ X \to R \tag{2.141}$$

fonksiyonudur.

$\forall \ x, y \in X$ ve $\forall \ \lambda \in F$ için

$i. \|.\| \geq 0$

$ii. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$iii. \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

$iv. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tanım 2.44. (Hölder Eşitsizliği) $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ ve $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki $n-$lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{2.142}$$

olmak üzere

a. $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.143}$$

b. $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.144}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović, 1970).

Tanım 2.45. (İntegraller için Hölder Eşizsizliği) $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q, [a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.145}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović ve diğ., 1993).

Sonuç 2.5. (Power Mean Eşitsizliği) $q\ge 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^p, [a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.146}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.46. (Cauch Eşitsizliği) $x=(x_1,x_2,...x_n)$ ve $y=(y_1,y_2,...y_n)$ reel veya kompleks sayıların $n-$lisi olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.147}$$

veya

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le |x|_2 |y|_2 \tag{2.148}$$

dir.

Tanım 2.47. (Cauchy -Schwarz Eşitsizliği) $f,g : [a,b]\to \mathrm{R}$ integrallenebilen fonksiyonlar ve λ sabiti için

$$\int_a^t f(x)dx = \lambda \int_a^t g(x)dx\, t \in [a,b] \tag{2.149}$$

ilişkisi mevcut ise

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right) \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx\right)\left(\int_a^b [g(x)]^2 dx\right) \tag{2.150}$$

sağlanr. Bu eşitsizliğe Cauchy -Schwarz Eşitsizliği adı verilir.

Tanım 2.48. (Cauchy -Schwarz Bunyakovsky Eşitsizliği) $f, g : [a,b] \to \mathrm{R}$ integrallenebilen fonksiyonlar ve $\lambda \in \mathrm{R}$ olsun. $\forall t \in [a,b]$

$$\int_a^t f(x)dx = \lambda \int_a^t g(x)dx \tag{2.151}$$

ilişkisi mevcut ise

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx\right)\left(\int_a^b [g(x)]^2 dx\right) \tag{2.152}$$

eşitsizliğine **Cauchy -Schwarz Bunyakovsky Eşitsizliği** denir.

Teorem 2.7. (Simpson Eşitsizliği) $f : [a,b] \to \mathrm{R}$, (a,b) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\left\|f^{(4)}\right\|_\infty = \sup_{x\in(a,b)} |f^{(4)}(x)| < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{1}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{1}{2880}\left\|f^4\right\|_\infty (b-a)^4 \tag{2.153}$$

eşitsizliğine Simpson Eşitsizliği denir.

Teorem 2.8. (Grüss Eşitsizliği) f ve g, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen iki fonksiyon olsun $k, l, K, L \in \mathrm{R}$ ve $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\right|\leq\frac{1}{4}(K-k)(L-l) \qquad (2.154)$$

dir. Bu eşitsizliğe literatürde Grüss Eşitsizliği olarak bilinir.

Tanım 2.48. (Chebychev İntegral Eşitsizliği) $f_1, f_2, \ldots f_n [a,b]$ aralığında integrallenebilir monoton fonksiyonlar (tümü birden ya monoton azalan ya da monoton artan) olmak üzere,

$$\int_a^b f_1(x)dx\int_a^b f_2(x)dx\ldots\int_a^b f_n(x)dx\leq(b-a)^{n-1}\int_a^b f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)dx \qquad (2.155)$$

eşitsizliğine Chebychev İntegral Eşitsizliği denir.

Tanım 2.49. (Korkine Eşitliği) f ve g, fonksiyonlar $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen iki fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \left(\frac{1}{b-a}\right)^2\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b-a}\right)^2\int_a^b\int_a^b[f(x)-f(s)][g(x)-g(s)]dxds\end{aligned} \qquad (2.156)$$

eşitliğine Korkine eşitliği denir.

Tanım 2.50. (Minskovski Eşitsizliği) $1\leq p<\infty$ olmak üzere Ω_1 ve Ω_2 kümeleri üzerinde ölçülebilir $f(x,y)$ fonksiyonu için,

$$\left\{\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)dx\right)^p dy\right\}^{\frac{1}{p}}\leq\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}|f(x,y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}dx \qquad (2.157)$$

eşitsizliğine Minskovski eşitsizliği ya da genelleştirilmiş Minskovski eşitsizliği denir (Mitrinović ve diğ., 1993).

Tanım 2.51. (Literatürde Sık Kullanılan Bazı Ortalamalar)

x, y iki pozitif reel sayı olmak üzere;

$i)$ Genel Ortalama:

$$M = M_q(x_1,..., x_n) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right]^{\frac{1}{q}}, x_i \geq 0 \tag{2.158}$$

$ii)$ Aritmetik Ortalama

$$A = A(x, y) = \frac{x+y}{2}, \quad x, y \geq 0 \tag{2.159}$$

$iii)$ Geometrik Ortalama

$$G = G(x, y) = \sqrt{xy}, \quad x, y \geq 0 \tag{2.160}$$

$iv)$ Harmonik Ortalama

$$H = H(x, y) = \frac{2xy}{x+y}, \quad x, y \geq 0 \tag{2.161}$$

$v)$ Logaritmik Ortalama

$$L = L(x, y) = \begin{cases} x, & x = y \\ \frac{y-x}{Iny-Inx}, & x \neq y \end{cases} x, y \geq 0 \tag{2.162}$$

$vi)$ Genelleştirilmiş Logaritmik Ortalama

$$rA_q = A_q(x,y) = \begin{cases} x, & x = y \\ \left[\frac{y^{q+1}-x^{q+1}}{(q+1)(y-x)}\right]^{\frac{1}{q}}, & x \neq y \end{cases} \quad x, y \geq 0 \tag{2.163}$$

vii) İdentrik Ortalama

$$I = I(x,y) = \begin{cases} x, & x = y \\ \frac{1}{e}\left(\frac{y^y}{x^x}\right)^{\frac{1}{y-x}}, & x \neq y \end{cases} \quad x, y \geq 0 \tag{2.164}$$

vii) Kuadratik Ortalama

$$K = K(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad x, y \geq 0 \tag{2.165}$$

ortalamaları vardır.

Teorem 2.9. (**AO-GO Eşitsizliği**) Eğer her $i = 1, 2, ..., n$ için $x_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \tag{2.166}$$

eşitsizliği geçerlidir (Lin, 2012).

İspat. $\exists$ bir i için $x_i \geq 0$ ise ispat aşikardr. $x_i \geq 0$ durumunda, $y_i = \log x_i$ seçilirse,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \exp f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right) \tag{2.167}$$

olup $f(t) = e^t$ fonksiyonu R 'de konveks olduğundan Jensen eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} &= f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(y_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\end{aligned} \tag{2.168}$$

elde edilir. Özel olarak $n=2$, $\alpha_1=\frac{1}{p}, a_2=\frac{1}{q}, x_1=x^p$ ve $x_2=y^q$ seçilirse Young eşitsizliği olarak bilinen

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \tag{2.169}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.10. (Young Eşitsizliği) φ : $[0,+\infty) \to \mathrm{R}$ sürekli, kesin olarak artan, $\varphi(0)=0$ ve $\lim_{u\to\infty}\varphi(u)=+\infty$, özelliklerine sahip bir fonksiyon ve $\varphi^{-1}=\Psi$ olsun. $\forall\alpha\in\mathrm{R}$ için

$$\Phi(\alpha)=\int_0^{\alpha}\varphi(u)du, \quad \Psi(\alpha)=\int_0^{\alpha}\Psi(u)du \tag{2.170}$$

denirse her $x, y \in [0,+\infty)$ için

$$xy \leq \Phi(x)+\Psi(x) \tag{2.171}$$

dır. Eşitlik sadece $y=\varphi(x)$ olması halinde geçerlidir.

Tanım 2.52. (Grünwald-Letnikov (GL) Kesirli Differintegralleri)

Differintegrasyon süreci pozitif indeks için türevleme ve negatif indeks için integrasyondur.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{2.172}$$

$$f''(x)=\lim_{h_1\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\lim_{h_1\to 0}\frac{\lim_{h_2\to 0}\frac{f(x+h_1+h_2)-f(x+h_1)}{h_2}-\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}}{h_1} \tag{2.173}$$

$$h_1=h_2=h \tag{2.174}$$

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} \tag{2.175}$$

Böylece n defa tekrar edilirse,

$$f^n(x)=D^n f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}f(x-mh) \tag{2.176}$$

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{2.177}$$

Tam olmayan n için bunun yerine Gamma fonksiyonlar

$$\frac{\Gamma(a+1)}{m!\Gamma(a-m+1)} \tag{2.178}$$

şekliyle kullanlabilir. Dolayısıyla kesirli mertebeden türev,

$$_aD^a f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{\Gamma(a+1)}{m!\Gamma(a-m+1)}f(x-mh) \tag{2.179}$$

olur. Negatif a için işlem integrasyon şekline dönüşecektir. O halde

$$\binom{-n}{m} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)...(-n-m+1)}{m!}$$
$$= (-1)^m \frac{n(n+1)(n+2)...(n+m+-1)}{m!}$$
$$= (-1)^m \frac{(n+m+-1)}{m!(n-1)!} \tag{2.180}$$
$$= (-1)^m \frac{\Gamma(a+m)}{m!\Gamma(a)!}$$

olacağından integrasyon için

$$_aD^{-a} f(x) = \lim_{h\to 0} h^a \sum_{m=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} \frac{\Gamma(a+m)}{m!\Gamma(a)} f(x-mh) \tag{2.181}$$

yazılır. Burada $\left[\frac{x-a}{h}\right]$ kısım tam sayı kısmıdır. Yani, toplam sembolünün üst sınır buradaki tamsayı kısmıdır.

Tanım 2.53. $f : [a,b] \to R$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $0 < a < 1$ için

$$D_{a^+}^a f = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^a} dt \tag{2.182}$$

ve

$$D_{b^-}^a f = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^a} dt \tag{2.183}$$

ifadeleri sırasıyla $a.$ mertebeden sağ ve sol taraflı kesirli türev denir.

Tanım 2.54. a bir tamsayı olmak üzere $a.$ mertebeden bilinen klasik türev

$$D_{a^+}^a = \left(\frac{d}{dx}\right)^a, D_{b^-}^a = \left(-\frac{d}{dx}\right)^a, a = 1,2,3... \tag{2.184}$$

şeklinde ifade edilir. a bir tamsayı olmaması durumda $0 \le \{a\} < 1$ için

$$a = [a] + \{a\} \tag{2.185}$$

eşitliği yazılır. Buna göre, f fonksiyonu her sonlu (a, x) aralığında sürekli ve integrallenebilir ise $x > a$ için reel değerli bir f fonksiyonunun a. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevleri,

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{a} f &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{[a]} D_{a^+}^{\{a\}} f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[a]+1} J_{a^+}^{1-\{a\}} f \\ D_{b^-}^{a} f &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[a]} D_{b^-}^{\{a\}} f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[a]+1} J_{b^-}^{1-\{a\}} f \end{aligned} \tag{2.186}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikler yardımıyla daha genel olan

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{a} f &= \frac{1}{\Gamma(n-a)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{a-n+1}}\, dt, n = \{a\}+1, \\ D_{b^-}^{a} f &= (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n-a)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{a-n+1}}\, dt, n = \{a\}+1 \end{aligned} \tag{2.187}$$

şeklinde türev formülleri yazılır.

Teorem 2.11. $f : [a,b] \to R$ konveks fonksiyon olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.188}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard Eşitsizliği denir. Bura da f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir. Klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği bir $f : [a,b] \to R$ fonksiyonunun ortalama değerinin hesabını sağlar (Dragomir ve Pearce, 2002).

İspat. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan, $t \in [0,1]$ için

$$f(\alpha t+(1-t)b) \le tf(\alpha)+(1-t)f(b) \tag{2.189}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte iki tarafında $[0,1]$ aralığında t'ye göre integralini alırsak,

$$\int_0^1 f(\alpha t+(1-t)b)dt \le \int_0^1 tf(\alpha)dt+\int_0^1 (1-t)f(b)dt = \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.190}$$

elde edilir. Diğer taraftan f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan, $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{\alpha t+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+bt}{2}\right) \\ &\le \frac{1}{2}\left[f(\alpha t+(1-t)b)+(1-t)a+bt\right] \end{aligned} \tag{2.191}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & \le \frac{1}{2}\int_0^1\left[f(\alpha t+(1-t)b)+(1-t)a+bt\right]dt \\ & = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(\alpha t+(1-t)b)dt+\int_0^1 f((1-t)a+bt)dt\right] \end{aligned} \tag{2.192}$$

olur. Bu eşitsizliğin sağ tarafında ikinci integralde $1-t=k$ yazarsak sol taraftaki eşitsizlikte

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(\alpha t+(1-t)b)dt+\int_0^1 f(ka+(1-k)b)dk\right] \\
& =\int_0^1 f(\alpha t+(1-t)b)dt
\end{aligned}
\tag{2.193}
$$

olur. Buradan

$$
f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq \int_0^1 f(\alpha t+(1-t)b)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}
\tag{2.194}
$$

elde ederiz. $\int_0^1 f(\alpha t+(1-t)b)dt$ integralinde $\alpha t+(1-t)b=x$ yazarsak,

$$
\int_0^1 f(\alpha t+(1-t)b)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx
\tag{2.195}
$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.12. (**Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği**) $f:[a,b]\to R$ konveks fonksiyon, $g:[a,b]\to R$, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir, negatif olmayan, $\frac{a+b}{2}{}'$ye göre simetrik bir fonksiyon olmak üzere

$$
f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx
\tag{2.196}
$$

dır.

İspat. Her $t\in[0,1]$ için f $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{t\alpha+(1-t)b+tb+(1-t)\alpha}{2}\right) \\
&\leq \frac{f(t\alpha+(1-t)b+tb+(1-t)\alpha)}{2}
\end{aligned}
\tag{2.197}
$$

yazılabilir. (2.197) eşitsizliğinin her iki tarafıda $g(tb+(1-t)a)$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığında t'ye göre integral aldığımızda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 g(tb+(1-t)a)dt \tag{2.198}$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^1 g(tb+(1-t)a)[f(t\alpha+(1-t)b+f(tb+(1-t)a]dt \tag{2.199}$$

bulunur. Burada $x=tb+(1-t)a$ ve $dx=(b-a)dt$ dönüşümü yapıldığında

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx \\ & \leq \frac{1}{2}\frac{1}{(b-a)}\left\{\int_a^b f(\alpha+b-x)g(x)dx+\int_a^b f(x)g(x)dx\right\} \\ & = \frac{1}{2}\frac{1}{(b-a)}\left\{\int_a^b f(x)g(\alpha+b-x)g(x)dx+\int_a^b f(x)g(x)dx\right\} \\ & = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)g(x)dx \end{aligned} \tag{2.200}$$

bulunur. Buradan (2.197) eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur. Sağ tarafın ispatı için f konveks fonksiyon olduğundan her $t\in[0,1]$ için

$$f(t\alpha+(1-t)b+f(tb+(1-t)\alpha)\leq f(a)+f(b) \tag{2.201}$$

eşitsizliği yazılabilir. (1.201) eşitsizliğinin her iki tarafın da $g(tb+(1-t)a)$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralğında t'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 g(tb+(1-t)a)f(t\alpha+(1-t)b)dt+\int_0^1 g(tb+(1-t)a)f(tb+(1-t)adt \\ & \leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 g(tb+(1-t)a)dt \end{aligned} \tag{2.202}$$

yazılır. Buradan düzenleme yapılırsa

$$\frac{2}{(b-a)}\int_a^b f(x)g(x)dx \le [f(a)+f(b)]\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx \tag{2.203}$$

bulunarak (2.197) eşitsizliğin sağ tarafı ispatlanmış olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.13. (Ostrowski Eşitsizliği) $f : I \subset [0,\infty) \to \mathrm{R}$, I^0 da diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $f' \in [a,b]$ olacak şekilde I sınırlı olsun. Burada $a<b$ ve $a,b \in I$ dır. Eğer $|f'(x)| \le M$ ise

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \right| \le M(b-a)\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right] \tag{2.204}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Ostrowski Eşitsizliği denir.

İspat. Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$P_1(x,t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a}, a \le t < x \\ \frac{t-b}{b-a}, x \le t \le b \end{cases} \tag{2.205}$$

Peano çekirdeği yardımıyla Montgomery özdeşliği olarak bilinen

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt + \int_a^b P_1(x,t) f'(t)dt \tag{2.206}$$

ifadesi elde edilir. Burada $|f'(t)| \le M$ kullanılırsa,

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |P_1(x,t)||f'(t)|dt$$

$$\leq \frac{M}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)dt + \int_x^b (b-t)dt\right] \tag{2.207}$$

$$= \frac{M}{2(b-a)}\left[(x-a)^2 + (b-x)^2\right]$$

elde edilir. Burada

$$(x-a)^2 + (b-x)^2 = \left(x - \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} - a\right)^2 + \left(b - \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} - x\right)^2$$

$$= \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$+2\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - x\right)\left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 \tag{2.208}$$

$$= 2\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$= 2(b-a)^2\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

kullanılarak ispat tamamlanmış olur.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde kesirli Riemann-Liouville integrali ve kesirli türev operatörlerinin elde edilişi ve bazı özellikleri verilecektir.

3.1. KESİRLİ RİEMANN-LİOUVİLLE İNTEGRAL VE TÜREVLERİNİN ELDE EDİLİŞİ

Şimdi birçok matematikçi tarafından kullanılan Riemann-Liouville kesirli integrallerini formüllerini elde etmek için

$$\int_a^x \int_a^{\mu_1} \int_a^{\mu_2} \dots \int_a^{\mu_{n-1}} f(\mu_n) d\mu_n d\mu_{n-1} \dots d\mu_2 d\mu_1 \tag{3.1}$$

n katlı integrali ele alınırsa (3.1) de ifade edilen integrasyonda Dirichlet formülü dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
&a < \mu_2 < x \Rightarrow \mu_2 < \mu_1 < x \\
&a < \mu_2 < \mu_1 \Rightarrow \mu_3 < \mu_2 < x \\
&a < \mu_3 < \mu_2 \Rightarrow \mu_4 < \mu_3 < x \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&a < \mu_{n-1} < \mu_{n-2} \Rightarrow \mu_n < \mu_{n-1} < x \\
&a < \mu_n < \mu_{n-1} \Rightarrow a < \mu_n < x \\
&a < \mu_n < \mu_{n-1} < \dots < \mu_3 < \mu_2 < \mu_1 < x
\end{aligned} \tag{3.2}$$

sınır değişimi altında,

$$\int_a^x \int_a^{\mu_1} \int_a^{\mu_2} \dots \int_a^{\mu_{n-1}} f(\mu_n) d\mu_n d\mu_{n-1} \dots d\mu_2 d\mu_1$$
$$= \int_a^x f(\mu_n) \left(\int_{\mu_n}^x \left(\int_{\mu_{n-1}}^x \dots \int_{\mu_3}^x \left(\int_{\mu_2}^x d\mu_1 \right) d\mu_2 \dots \right) d\mu_{n-1} \right) d\mu_n \tag{3.3}$$

şeklinde yazılır. Elde edilen (3.3) eşitliğinin sağ tarafındaki integraller iç integralden başlanıp dışa doğru hesaplandığında,

$$\int_{\mu_2}^x d\mu_1 = \mu_1 |_{\mu_2}^x = x - \mu_2, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mu_3}^x (x-\mu_2) d\mu_2 &= \frac{(x-\mu_3)^2}{2} \\ \int_{\mu_4}^x \frac{(x-\mu_3)^2}{2} d\mu_3 &= -\frac{(x-\mu_3)^3}{2.3} |_{\mu_4}^x = \frac{(x-\mu_4)^3}{2.3}, \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ \int_{\mu_n}^x \frac{(x-\mu_{n-1})^{n-2}}{2.3 \dots (n-2)} d\mu_{n-1} &= -\frac{(x-\mu_{n-1})^{n-1}}{2.3 \dots (n-2)(n-1)} |_{\mu_n}^x = \frac{(x-\mu_n)^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitlikler (3.3) de yerlerine yazılırsa

$$\int_a^x \int_a^{\mu_1} \int_a^{\mu_2} \dots \int_a^{\mu_{n-1}} f(\mu_n) d\mu_n \dots d\mu_1 = \int_a^x \frac{(x-\mu_n)^{n-1}}{(n-1)!} f(\mu_n) d\mu_n \tag{3.6}$$

elde edilir. Elde edilen (3.6) ifadesinde Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{3.7}$$

özelliği kullanılırsa

$$\int_a^x \int_a^{\mu_1} \int_a^{\mu_2} \dots \int_a^{\mu_{n-1}} f(\mu_n) d\mu_n d\mu_{n-1} \dots d\mu_2 d\mu_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(\mu_n)(x-\mu_n)^{n-1} d\mu_n \tag{3.8}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki n pozitif tamsayıdır. Gamma fonksiyonu tam sayılar dışında da ifade edilebildiğinden, n nin tam sayı olmaması durumunda (3.8) eşitliğinin sağ taraf için aşağdaki tanım ifade edilebir.

Tanım 3.1. $f \in L_1[a,b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a \\ I_{b^-}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b \end{aligned} \tag{3.9}$$

integrallerine sırasıyla α. mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integralleri denir (Samko ve ark., 1993). Burada $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \tag{3.10}$$

ve

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = I_{b^-}^{\alpha} f(x) = f(x) \tag{3.11}$$

şeklinde olur. Yani

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a \tag{3.12}$$

Eşitliğinden

$$u = f(t) \Rightarrow du = f'(t)dt$$
$$dv = (x-t)^{\alpha-1}dt \Rightarrow v = -\frac{(x-t)^{\alpha}}{a} \tag{3.13}$$

dönüşümü altında kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{- f(t)\frac{(x-t)^{\alpha}}{\alpha}\Big|_a^x + \frac{1}{a}\int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t)dt\right\} \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t)dt \end{aligned} \tag{3.14}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikte $\alpha = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{a} f(x) &= \frac{f(a)}{\Gamma(1)} + \frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^x f'(t)dt \\ &= f(a) + f(x) - f(a) \\ &= f(x) \end{aligned} \tag{3.15}$$

olduğu görülür. Benzer yöntemle

$$I_{b^-}^{a} f(x) = f(x) \tag{3.16}$$

olduğuda gösterilebilir. Şimdi $f(t) = (t-a)^{\frac{1}{2}}$ ve $a = \frac{1}{2}$ olmak üzere aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli integralini göz önüne alalım.

$$I_{a^+}^{a} f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_a^x (x-t)^{a-1} f(t)dt, x > a \tag{3.17}$$

Bu integral kabuller altında

$$I^{\frac{1}{2}}_{a^+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}(t-a)^{\frac{1}{2}}\,dt, x > a \tag{3.18}$$

olarak yazılır. Burada $t = a + (x-a)\omega$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_0^1 \omega^{m-1}(1-\omega)^{n-1}\,d\omega = B(m,n) \tag{3.19}$$

şeklinde Beta fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}
I^{\frac{1}{2}}_{a^+} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}(t-a)^{\frac{1}{2}}\,dt, x > a \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (x-a)^{\frac{1}{2}}(x-a)^{-\frac{1}{2}+1}\,\omega^{\frac{1}{2}}(1-\omega)^{\frac{1}{2}}\,d\lambda \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\int_0^1 \omega^{\frac{1}{2}}(1-\omega)^{\frac{1}{2}}\,d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)B(3/2,1/2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2+1/2)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}(x-a)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 3.2. Kesirli integralin birleşme ve değişme özelliği vardır. Bu özellikler

$$1.\ I^{a}_{\alpha^+} I^{\beta}_{\alpha^+} = I^{\alpha+\beta}_{\alpha^+}, \quad I^{a}_{b^-} I^{\beta}_{b^-} = I^{\alpha+\beta}_{b^-} \tag{3.21}$$

$$2.\ I^{a}_{\alpha^+} I^{\beta}_{\alpha^+} = I^{\beta}_{\alpha^+} I^{a}_{\alpha^+}, \quad I^{a}_{b^-} I^{\beta}_{b^-} = I^{\beta}_{b^-} I^{a}_{b^-} \tag{3.22}$$

şeklindedir. Buna göre

1. Kesirli integralin tanımı kullanılarak,

$$I_{\alpha^+}^{a}\left(I_{\alpha^+}^{\beta}\right) f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_a^x (x-t)^{a-1} I_{\alpha^+}^{\beta} f(t)dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_a^x (x-t)^{a-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-z)^{\beta-1} f(z)dz\right) \tag{3.23}$$

yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafında integrasyon sırası

$$\left.\begin{matrix} \alpha < z < t \\ \alpha < t < x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha < z < t < x \tag{3.24}$$

şeklinde sınır değişimi yapıldığında

$$I_{\alpha^+}^{a} I_{\alpha^+}^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(z)\left(\int_z^x (x-t)^{a-1}(t-z)^{\beta-1} dt\right)dz \tag{3.25}$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki iç integralde

$$t = z + (x-z)\vartheta \Rightarrow \lambda = \frac{t-z}{x-z}, \quad d\vartheta = \frac{dt}{x-z} \tag{3.26}$$

dönüşümü yapıldığında

$$\begin{aligned}
&\int_z^x (x-t)^{a-1}(t-z)^{\beta-1} dt \\
&= \int_0^1 (x-z-(x-z)\vartheta)^{a-1}(z+(x-z)\vartheta - z)^{\beta-1}(x-z)d\vartheta \\
&= (x-z)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\vartheta)^{\alpha-1}\vartheta^{\beta-1} d\vartheta \\
&= (x-z)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-z)^{\alpha+\beta-1}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

olur. Bu eşitlik (3.23) de yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
& I^{a}_{\alpha^+} I^{\beta}_{\alpha^+} f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(z) \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-z)^{\alpha+\beta-1} dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(z)(x-z)^{\alpha+\beta-1} dz \\
&= I^{\alpha+\beta}_{\alpha^+} f(x)
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

elde edilir. Yukarı da yapılan işlemler benzer olarak,

$$
\begin{aligned}
& I^{a}_{b^-} I^{\beta}_{b^-} f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^b (t-x)^{a-1} I^{\beta}_{b^-} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^b (t-x)^{a-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (z-t)^{\beta-1} f(z) dz \right) dt
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

eşitliğinde sınır değişimi

$$
\left.\begin{matrix} x < t < b \\ t < z < b \end{matrix}\right\} \Rightarrow x < t < z < b \tag{3.30}
$$

ve

$$
t = z + (x-z)\vartheta \Rightarrow \lambda = \frac{t-z}{x-z}, \quad d\vartheta = \frac{dt}{x-z} \tag{3.31}
$$

dönüşümü yapılırsa;

$$
\begin{aligned}
& I_{b^-}^{a} I_{b^-}^{\beta} f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} \int_x^b f(z) \left(\int_x^z (t-x)^{a-1} (z-t)^{\beta-1} dt \right) dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} \int_x^b f(z) \left(\int_0^1 (x+(z-x)\vartheta - x)^{a-1} (z-x-(z-x)\vartheta)^{\beta-1} (z-x) d\vartheta \right) dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} \int_x^b f(z)(z-x)^{\alpha+\beta-1} \left(\int_0^1 \vartheta^{\alpha-1} (1-\vartheta)^{\beta-1} d\vartheta \right) dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(a+\beta)} \int_x^b (z-x)^{\alpha+\beta-1} f(z) dz \\
&= I_{b^-}^{\alpha+\beta} f(x)
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

elde edilir.

2. Yukarıda 1. özellikteki birleşme özelliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
& I_{\alpha^+}^{a} I_{\alpha^+}^{\beta} f(x) \\
&= I_{\alpha^+}^{\alpha+\beta} f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-z)^{\alpha+\beta-1} f(z) dz
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

alınır. Burada $\Gamma(\alpha+\beta) = \Gamma(\beta+\alpha)$ özelliğinden

$$
\begin{aligned}
& I_{\alpha^+}^{a} I_{\alpha^+}^{\beta} f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_a^x (x-z)^{\beta+\alpha-1} f(z) dz \\
&= I_{\alpha^+}^{\beta} I_{\alpha^+}^{a} f(x)
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

olarak bulunur.

Tanım 3.3. $f \in L_{1,k}[a,b]$ olsun. $k \geq 0$ olmak üzere $a > 0$ için $a.$ mertebeden Genelleştirilmiş sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integralleri sırasıyla

$$
I_{a^+}^{a,k} f(x) = \frac{(k+1)^{1-a}}{\Gamma(a)} \int_a^{\infty} (x^{k+1} - t^{k+1})^{a-1} t^k f(t) dt \tag{3.35}
$$

$$I_{b^-}^{a,k} f(x) = \frac{(k+1)^{1-a}}{\Gamma(a)} \int_x^b (x^{k+1} t^{k+1} - x^{k+1})^{a-1} t^k f(t) dt \tag{3.36}$$

şeklinde tanımlanır (Katugampola, 2011).

Tanım 3.4. n. mertebeden türevlerin

$$f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, ..., \frac{d^n f(x)}{dx^n} ... \tag{3.37}$$

sonsuz dizisini göz önüne alalm. Bu dizi keyfi mertebeden difensiyel düşüncesi altında tekrarlanan diferansiyelin bir genelleştirilmesidir. Burada temel amaç $\frac{d^n}{dx^n}$ sembolü ile gösterilen operatörün n tamsayı değerli parametresi, tam sayı olmayan bir a parametresiyle yer değiştirmektir.

Genel kesirli türevleri vermeden önce yarım türev de denen bir türev formülü elde ederek bir uygulama yapalım ve daha sonra daha genel kesirli türev formülleri verelim.

Bunun için, $f(x) = x^k$ şeklindeki fonksiyonu ele alalım. Burada k pozitif bir tam sayıdır. Ele aldığımız fonksiyonun $a.$ mertebeden türevini alırsak,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^k \\ f'(x) &= kx^{k-1} \\ f''(x) &= k(k-1)x^{k-2} \\ f'''(x) &= k(k-1)(k-2)x^{k-3} \\ &. \\ &. \\ &. \\ f^{(a)}(x) &= k(k-1)(k-2)...(k-a+1)x^{k-a} \\ &= \frac{k!}{(k-a)!} x^{k-a} \end{aligned} \tag{3.38}$$

elde edilir. Yine burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ olduğundan

$$f^{(a)}(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)} x^{k-a} \tag{3.39}$$

eşitliğini yazarız. Burada a sayısını herhangi bir pozitif sayı olarak seçerek fonksiyonun kesirli türevlerini hesaplayabiliriz. Bu durum için $f(x) = x^k$ fonksiyonu, $a = \frac{1}{2}$ ve $k = 2$ olması durumunda $\frac{1}{2}$. mertebeden kesirli türevinin ne olduğunu görelim.

$$f^{(a)}(x) = \frac{d^a f(x)}{dx^a} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)} x^{k-a} \tag{3.40}$$

Eşitliğinden

$$\begin{aligned} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)} x^{2-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}}, \Gamma(\frac{5}{2}) = \Gamma(1+\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \tag{3.41}$$

bulunur. Elde edilen bu yeni fonksiyonun tekrar yarım türevi alınırsa,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2\right) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}\right) = 2x \tag{3.42}$$

olduğunu görülür. Bu da iki yarım türevin bir tam türev oluşunu verir. Yukarıda yaptığımız uygulamaya benzer olarak $f(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$ alınır ve bu fonksiyonun $a = \frac{1}{2}$ mertebeden kesirli integralinin $f(x) = x^2$ olduğunu gösterelim. Yani bir fonksiyonun yarım türevinin yarım integralinin kendisine eşit olduğu gösterilir. Daha kolay olması bakımından, Riemann-Liouville integrali,

$$(I^a f)(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty (x-t)^{a-1} f(t) dt, x > 0 \tag{3.43}$$

şeklindedir. Kabuller altında $f(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonunun $a = \frac{1}{2}$ mertebeden kesirli integralinin,

$$\begin{aligned}
(I^{\frac{1}{2}} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt, x > 0 \\
&= \frac{8}{3\pi} \int_0^1 (\lambda x)^{\frac{3}{2}} (x - \lambda x)^{-\frac{1}{2}} x d\lambda, \ \ t = \lambda x \\
&= \frac{8}{3\pi} x^2 \int_0^1 \lambda^{\frac{3}{2}} (1-\lambda)^{-\frac{1}{2}} d\lambda \\
&= \frac{8}{3\pi} x^2 B(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}) \\
&= \frac{8}{3\pi} x^2 \frac{\Gamma(\frac{5}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2} + \frac{1}{2})} \\
&= \frac{8}{3\pi} x^2 \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)} \\
&= x^2
\end{aligned} \tag{3.44}$$

dir.

Şimdi kesirli türev için daha genel bir tanım verelim. $0 < a < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_a^x \Omega(t)(x-t)^{a-1} dt, x > a \tag{3.45}$$

Abel integral denklemini ele alalım. (3.45) ifadesinin her iki yanında x yerine t, t yerine s yazarak, denklemini her iki yanını $(x-t)^{-a}$ ile çarparak a dan x e kadar integralini alırsak;

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^a} \int_a^x \frac{\Omega(s)}{(t-s)^{1-a}} ds = \Gamma(a) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^a} dt \tag{3.46}$$

Burada Dirichlet formülü olarak bilinen (İntegral sınırlarının yer değişimi)

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x,y)dx \right) dy \tag{3.47}$$

şeklinde sınır değişimi formülünü uygularsak

$$\int_a^x \Omega(s)ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^a (t-s)^{1-a}} = \Gamma(a) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^a} dt \tag{3.48}$$

olduğu görülür. (3.48) ifadesindeki iç integralde $t = s + \lambda(x-s)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_s^x \frac{dt}{(x-t)^a (t-s)^{1-a}} = \int_0^1 \lambda^{a-1} (1-\lambda)^{-a} d\lambda = B(a, 1-a) = \Gamma(a)\Gamma(1-a) \tag{3.49}$$

olduğu görülür. Bu eşitlik (3.48) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(1-a) \int_a^x \Omega(s)ds &= \Gamma(a) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^a} dt \\ \int_a^x \Omega(s)ds &= \frac{1}{\Gamma(1-a)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^a} dt \end{aligned} \tag{3.50}$$

elde edilir. Buradaki son eşitliğin her iki yanının x e göre türevi alınırsa

$$\Omega(x) = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^a} dt, \quad 0 < a < 1 \tag{3.51}$$

elde edilir. Elde edilen (3.51) ifadesine a. mertebeden kesirli türev denir. Bu türeve Riemann-Liouville kesirli türevi de denmektedir. Bu türev formülünün genel olarak literatürdeki gösterimi

$$D^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^a} dt \tag{3.52}$$

şeklindedir.

Tanım 3.5. f fonksiyonu her sonlu (a, x) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in \mathrm{N}, m-1 \le a < m$ olmak üzere $x > a$ için bir f fonksiyonunun a. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D_{RL}^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-a)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{a-m+1}} dt \tag{3.53}$$

şeklindedir.

Teorem 3.1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon, $a < b$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. Eğer f $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ve $\alpha > 0$ ise kesirli integraller için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-\alpha)^\alpha} \left[J_{\alpha^+}^a f(b) + J_{b^-}^a f(a)\right] \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.54}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon, $\lambda = \frac{1}{2}$ ve $\forall x, y \in [a,b]$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{3.55}$$

eşitsizliğinde $x = ta + (1-t)b,\ y = (1-t)a + tb$ yazılırsa

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \tag{3.56}$$

olur. (3.56) eşitsizliğinin her iki tarafı $t^{\alpha-1}$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integral alındığında

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\le \int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a+tb)dt \\
&= \int_b^\alpha \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u)\frac{du}{a-b} + \int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(v)\frac{dv}{b-a} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-\alpha)^\alpha}\left[J_{\alpha^+}^a f(b) + J_{b^-}^a f(a)\right]
\end{aligned} \tag{3.57}$$

olur. Yani

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-\alpha)^\alpha}\left[J_{\alpha^+}^a f(b) + J_{b^-}^a f(a)\right] \tag{3.58}$$

olarak bulunur ve eşitsizliğin sol tarafı ispat edilmiş olur. Eğer f, $\lambda \in [0,1]$ için konveks bir fonksiyon ise (3.55) eşitsizliğinin sağ taraf aşağıdaki gibi kanıtlanır. f konveks olduğunda

$$f(ta+(1-t)b) \le tf(a) + (1-t)f(b) \tag{3.59}$$

ve

$$f((1-t)a+tb) \le (1-t)f(a) + tf(b) \tag{3.60}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlikleri taraf tarafa toplanıldığında

$$f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb) \le tf(a) + (1-t)f(b) + (1-t)f(a) + tf(b) \tag{3.61}$$

elde edilir. (3.61) eşitsizliğinin her iki tarafını $t^{\alpha-1}$ ile çarpılıp [0,1] aralığında t değişkenine göre integral alınırsa;

$$\begin{aligned}&\int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)dt+\int_0^1 f((1-t)a+tb)t^{\alpha-1}dt\\&\leq \left[f(a)+f(b)\right]\int_0^1 t^{\alpha-1}dt\end{aligned} \tag{3.62}$$

olur. Böylece

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-\alpha)^{\alpha}}\left[J_{\alpha^+}^{a} f(b)+J_{b^-}^{a} f(a)\right]\leq \frac{f(a)+f(b)}{\alpha} \tag{3.63}$$

olarak bulunur. Buradan da her iki taraf $\frac{\alpha}{2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-\alpha)^{\alpha}}\left[J_{\alpha^+}^{a} f(b)+J_{b^-}^{a} f(a)\right]\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.64}$$

elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise kesirli integral için

$$\begin{aligned}&\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-\alpha)^{\alpha}}\left[J_{\alpha^+}^{a} f(b)+J_{b^-}^{a} f(a)\right]\\&=\frac{b-a}{2}\int_0^1\left[(1-t)^{\alpha}-t^{a}\right]f'(ta+(1-t)b)dt\end{aligned} \tag{3.65}$$

özdeşliği vardır.

İspat. İspat için

$$\int_0^1\left[(1-t)^{\alpha}-t^{a}\right]f'(ta+(1-t)b)dt \tag{3.66}$$

integralini hesaplamak yeterlidir. Bunun için

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left[(1-t)^{\alpha} - t^{a}\right] f'(ta+(1-t)b)dt \\
&= \left[\int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)dt\right] + \left[-\int_0^1 t^{a} f'(ta+(1-t)b)dt\right] \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

olarak yazılır. Buradan da kısmi integrasyon yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)dt \\
&= (1-t)\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Big|_0^1 + \frac{\alpha}{a-b}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)dt \\
&= \frac{f(b)}{b-a} + \frac{\alpha}{a-b}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)dt
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

yazılır. Burada $\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)dt$ integralinde $ta+(1-t)b = x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{f(b)}{b-a} + \frac{\alpha}{a-b}\int_b^a \left(\frac{a-x}{a-b}\right)^{\alpha-1} f(x)\frac{dx}{a-b} \\
&= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(x)dx \\
&= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-\alpha)^{\alpha+1}} J_{b^-}^{a} f(a)
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\int_0^1 t^a f'(ta+(1-t)b)dt \\
&= -t^\alpha \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Big|_0^1 - \frac{\alpha}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)dt \\
&= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha}{a-b}\int_b^a \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{\alpha-1} f(x)\frac{dx}{a-b} \\
&= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha}{(a-b)^{\alpha+1}}\int_a^b (b-x) f(x)dx \\
&= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-\alpha)^{\alpha+1}} J_{\alpha^+}^{a} f(b)
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

olarak bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 \\
&= \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-\alpha)^{\alpha}}\left[J_{\alpha^+}^{a} f(b) + J_{b^-}^{a} f(a)\right]
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

yazılır. Bu son eşitliğin her iki tarafını $\frac{b-a}{2}$ ile çarparsak ispat tamamlanır.

Teorem 3.2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$
\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-\alpha)^{\alpha}}\left[J_{\alpha^+}^{a} f(b) + J_{b^-}^{a} f(a)\right]\right| \le \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[f'(a)+f'(b)\right]
\tag{3.72}
$$

dır.

İspat. Lemma 3.1.1 deki (3.65) eşitliği ve $|f'|$ nin konveksliğini kullanarak,

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-\alpha)^{\alpha}}\left[J_{\alpha^{+}}^{a} f(b)+J_{b^{-}}^{a} f(a)\right]\right| \\
&\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{a}\right|\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt \\
&\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{a}\right|\left[t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right]dt \\
&= \frac{b-a}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{a}\right]\left[t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right]dt\right. \\
&\quad\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{a}\right]\left[t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right]dt\right\} \\
&= \frac{b-a}{2}(\tau_1+\tau_2)
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

şeklinde düzenlenir. İlk olarak

$$
\begin{aligned}
\tau_1 = \left|f'(a)\right|&\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t(1-t)^{\alpha}\,dt-\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a+1}dt\right. \\
&\left.+\left|f'(b)\right|\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha+1}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{a}\,dt\right]
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

olur. Burada $1-t=u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \left|f'(a)\right|\left[-\int_1^{\frac{1}{2}} u^{\alpha}(1-u)du-\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a+1}dt\right. \\
&\quad\left.+\left|f'(b)\right|\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha+1}dt-\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a}dt+\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a+1}dt\right] \\
&= \left|f'(a)\right|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{\alpha}du-\int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{\alpha+1}du-\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a+1}dt\right. \\
&\quad\left.+\left|f'(b)\right|\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha+1}dt-\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a}dt+\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a+1}dt\right] \\
&= \left|f'(a)\right|\left[\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-\frac{u^{\alpha+2}}{\alpha+2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-\frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\quad+\left|f'(b)\right|\left[\frac{-(1-t)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \left|f'(a)\right|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]+\left|f'(b)\right|\left[\frac{1}{\alpha+2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

elde ederiz. Diğer yandan

$$
\begin{aligned}
\tau_2 &= |f'(a)|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\alpha+1} dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} t(1-t)^{a} dt\right] \\
&\quad + |f'(b)|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)t^{\alpha} dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{a+1} dt\right] \\
&= |f'(a)|\left[\frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_{\frac{1}{2}}^{0} - \frac{u^{\alpha+2}}{\alpha+2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{0}\right] \\
&\quad + |f'(b)|\left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{(1-t)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}\right] \\
&= |f'(a)|\left[\frac{1}{\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] \\
&\quad + |f'(b)|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]
\end{aligned} \tag{3.76}
$$

olduğundan τ_1 ve τ_2 değerlerini toplanırsa

$$
\begin{aligned}
&\tau_1 + \tau_2 \\
&= |f'(a)|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] \\
&\quad + |f'(b)|\left[\frac{1}{\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] \\
&= |f'(a)|\left[\frac{1}{\alpha+1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] + |f'(b)|\left[\frac{1}{\alpha+1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}{\alpha+1}\right] \\
&= \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1 - \frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[f'(a) + f'(b)\right]
\end{aligned} \tag{3.77}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde araştırmada elde edilen bazı bulgulara üç başlık altında yer verilir. İlk olarak Beta fonksiyonu içeren Hermite-Hadamard eşitsizliklerine, ikinci olarak Beta fonksiyonu içeren yamuk eşitsizliklerine, üçüncü olarak Beta fonksiyonu içeren orta nokta eşitsizliklerini içeren tanım, teorem ve ispatlar verilmiştir. Şimdi de bulgularımız için yararlanmış olduğumuz bazı lemma ve teoremleri aşağıdaki şekilde verelim.

Lemma 4.1. $f : I^{\circ} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ile $a,b \in I^{\circ}$ ile $a<b$ (I°, I nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt. \tag{4.1}$$

Şimdi de Hermite-Hadamard eşitsizliğin sağ tarafı için bulunan ve (4.1) eşitliğinden yararlanılarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1. $f : I^{\circ} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ile $a,b \in I^{\circ}$ ile $a<b$ (I°, I nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)}{8}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right). \tag{4.2}$$

Bu (4.2) eşitsizliğe literatür de trapezoid eşitsizliği adı verilir.

Diğer yandan, Hermite-Hadamard eşitsizliğin sol tarafı için ise Kırmacı (2004) yılında aşağıdaki Lemmayı vermiştir.

Lemma 4.2. $f : I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tanımlı bir fonksiyon $a,b \in I^{\circ}$ ile $a<b$ (I°, I nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f' \in L([a,b])$ ise,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ &=(b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b)dt\right].\end{aligned} \tag{4.3}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.2. $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon $a,b \in I^\circ$ ile $a<b$ (I°, I nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizliğin var olduğu bilinmektedir.

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)}{8}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right). \tag{4.4}$$

Kesirli analizin (integraller ve türevler) konusu, temelde bilim ve mühendisliğin görünüşte çeşitlilik gösteren ve yaygın alanlarındaki gösterişli uygulamalar nedeniyle son on yıl boyunca önemli bir popülerlik ve önem kazanmıştır. Kesirli integral gerçekten de matematiksel bilimin özel fonksiyonlarının yanı sıra bunların bir ve daha fazla değişken içindeki uzantıların ve genellemelerini içeren çeşitli problemler için potansiyel olarak faydalı birkaç araç sağlar. Bu konu hala birçok yazar tarafından kapsamlı bir şekilde incelenmektedir, örneğin (Akkurt, Yıldırım ve Yıldırım, 2016), (Akkurt, Kacar ve Yıldırım, 2015), (Kilbas, Srivastava ve Trujillo, 2006), (Gorenflo ve Mainardi, 1997), (Hussain ve ark., 2017), (Miller ve Ross, 1993) bakınız. Kesirli integrallerin önemli uygulamalarından biri Hermite-Hadamard integral eşitsizliği için referanslara (Farid, Rehman ve Zahra, 2016), (Iqbal, Bhatti ve Nazeer, 2015), (Sarıkaya ve ark., 2013) bakınız. Riemann-Liouville kesirli integrali aşağıdaki şekilde yeniden verelim:

Tanım 4.1. $f \in L_1[a,b]$ olmak üzere, $a>0$ ile $\alpha \geq 0$ olmak üzere $J_{a^+}^{\alpha} f$ ve $J_{b^-}^{\alpha} f(x)$ ile verilen sağ ve sol Riemann-Liouville kesirli integralleri sırasıyla

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x>a, \tag{4.5}$$

ve

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x<b. \tag{4.6}$$

şeklindedir. Burada $\Gamma(a)$ ifadesi Gamma fonksiyonu ve

$$J_{a^+}^{0} f(x) = J_{b^-}^{\alpha} f(x) = f(x) \tag{4.7}$$

dir.

k-Riemann-Liouville kesirli integrali ise aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$J^{\alpha}_{a^+,k} f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t)dt, \quad x > a, \tag{4.8}$$

$$J^{\alpha}_{b^-,k} f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t)dt, \quad x < b \tag{4.9}$$

Buradan

$$\Gamma_k(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt, \quad \Re(\alpha) > 0 \tag{4.10}$$

ve

$$\Gamma_k(\alpha) = k^{\frac{\alpha}{k}-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{k}\right), \quad \Re(\alpha) > 0; k > 0 \tag{4.11}$$

Bu tanımlar Mubeen ve Habibullah tarafından tanımlanmıştır.

Kesirli integraller için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin temel ifadelerini (Sarıkaya ve ark., 2013) aşağdaki gibi vermiştir.

Teorem 4.3. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon $a < b$ ve $f \in L_1([a,b])$ olsun. Eğer f, $[a,b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ise o zaman kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[J^{\alpha}_{a+} f(b) + J^{\alpha}_{b-} f(a)\right] \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.12}$$

Burada $\alpha > 0$ dır.

Ayrıca, (Sarıkaya ve ark., 2013) Riemann-Liouville integrali için aşağıdaki Trapeozid tanımını vermişlerdir:

Lemma 4.3. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon $a < b$ ile (a,b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise o halde kesirli integraller için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]$$

$$=\frac{b-a}{2}\int_{0}^{1}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]f'(ta+(1-t)b)dt. \tag{4.13}$$

Teorem 4.4. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon $a<b$ ile (a,b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ise o halde kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[f'(a)+f'(b)\right]. \tag{4.14}$$

Öte yandan, (lqbal ve diğ., 2013) Hermite-Hadamard tipli Riemann-Liouville integral eşitsizliklerinin sol kısmı ile bağlantılı aşağıdaki sonuçları vermiştir (4.12) ve Midpoint tanımını kullanarak aşağıdaki ifade verilmiştir.

Lemma 4.4. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon $a<b$ ile (a,b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise Riemann-Liouville kesirli integralleri için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]=\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{4}I_k, \tag{4.15}$$

Burada

$$\begin{aligned} I_1&=\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha}f'(tb+(1-t)a)dt, & I_2&=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-t^{\alpha}\right)f'(ta+(1-t)b)dt,\\ I_3&=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t^{\alpha}-1\right)f'(tb+(1-t)a)dt, & I_4&=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1-t^{\alpha}\right)f'(ta+(1-t)b)dt. \end{aligned} \tag{4.16}$$

dır.

Birçok yazarın ilgisini çeken Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren çalışmalar ve bu tür integralleri kullanarak Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin yeni ve ilginç genelleştirmelerini (Sarıkaya ve Ertuğral, 2019), (Sarıkaya ve ark., 2013) referanslarda bulunabilir.

Bu tezin amacı Beta fonksiyonlarını içeren yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler oluşturmaktır. Birinci türevleri mutlak değerleri konveks olan fonksiyonlar kullanarak, daha önce elde edilmiş sonuçları kapsayan ünlü Hermite-Hadamard tipli ile ilişkili yeni yamuk ve orta nokta eşitsizlikleri elde edildi.

4.1. BETA FONKSİYONU İÇEREN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölüme, Beta fonksiyonlarını kullanılarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.5. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tanımlı konveks fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\beta(m,n)\le\frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}}\int_a^b\Omega(x)\,f(x)\,dx\le\beta(m,n)\frac{f(a)+f(b)}{2}\tag{4.17}$$

Burada $\beta(m,n)$ beta fonksiyonu ve

$$\Omega(x)=(b-x)^{m-1}(x-a)^{n-1}+(b-x)^{n-1}(x-a)^{m-1}.$$

İspat. $t\in[0,1]$, için, $x=ta+(1-t)b,\ y=(1-t)a+tb$ olsun. f nin konveksliği kullanılarak

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}\tag{4.18}$$

yazılır. Diğer bir ifade ile

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\tag{4.19}$$

olur. (4.19)'in her iki tarafın da $t^{m-1}(1-t)^{n-1}$ ile çarpılır ve $t \in [0,1]$, için integral alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt$$

$$\leq \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} f(ta+(1-t)b)dt \tag{4.20}$$

$$+\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} f((1-t)a+tb)dt.$$

Sonuç olarak,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\beta(m,n)$$

$$\leq \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}}\int_a^b\left[(b-x)^{m-1}(x-a)^{n-1}+(b-x)^{n-1}(x-a)^{m-1}\right]f(x)dx \tag{4.21}$$

olur ve bu da ilk eşitsizlik ispatlanmış olur.

Diğer yandan, (4.17) eşitsizliğin diğer yarısını ispatlamak için f konveks olduğundan, $\forall\ t \in [0,1]$ için,

$$f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\leq f(a)+f(b) \tag{4.22}$$

yazılır. (4.21)'nin her iki tarafı da $t^{m-1}(1-t)^{n-1}$ çarpılırsa ve sonuç olarak ortaya çıkan eşitsizliğin $t \in [0,1]$, üzerinde integrali alınırsa

$$\frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}}\int_a^b \left[(b-x)^{m-1}(x-a)^{n-1}+(b-x)^{n-1}(x-a)^{m-1}\right] f(x)dx \\ \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\beta(m,n) \tag{4.23}$$

olur. Böylece ikinci eşitsizlik de ispatlanmış olur.

Uyarı 4.1. Teorem 4.5'de, $n=m=1$, aldığımızda (4.17) eşitsizliği Klasik Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Uyarı 4.2. Teorem 4.5'de, $m=1$, $n=\alpha$, (veya $m=\alpha$, $n=1$) o zaman (4.17) eşitsizliği Teorem 4.3'de ki (4.12) eşitsizliğine dönüşür.

Uyarı 4.3. Teorem 4.5'de, $m=1$, $n=\frac{\alpha}{k}$, (veya $m=\frac{\alpha}{k}$, $n=1$) o zaman (4.17) eşitsizliği

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J^{\alpha}_{a^+,k}\, f(b)+ J^{\alpha}_{b^-,k}\, f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.24}$$

şekline dönüşür.

4.2. BETA FONKSİYONUNU İÇEREN YAMUK EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, bize yardımcı olmak için kullanacağımız aşağıdaki lemma ile başlayalım. Bu lemma kullanılarak yamuk eşitsizlikler için önemli sonuçlar verilecektir.

Lemma 4.5. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve f (a,b) de diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise, o halde aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\beta(m,n)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}}\int_a^b \Omega(x)\, f(x)dx \\ = \frac{(b-a)}{2}\int_0^1 \beta_t(m,n)\left[f'(tb+(1-t)a) - f'(ta+(1-t)b)\right]dt. \tag{4.25}$$

Burada $\beta_t(m,n)$ tam olmayan Beta fonksiyonu:

$$\beta_t(m,n)=\int_0^t s^{m-1}(1-s)^{n-1}ds, \quad 0<t\le 1. \tag{4.26}$$

İspat. Burada, kısmi integrasyon yardımıyla aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$F_1=\int_0^1 \beta_t(m,n)\, f'(tb+(1-t)a)dt_1$$

$$=\frac{f(b)}{b-a}\beta(m,n)-\frac{1}{b-a}\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} f(tb+(1-t)a)dt \tag{4.27}$$

$$=\frac{f(b)}{b-a}\beta(m,n)-\frac{1}{(b-a)^{m+n}}\int_a^b (x-a)^{m-1}(b-x)^{n-1} f(x)dx.$$

Benzer şekilde

$$F_2=\int_0^1 \beta_t(m,n)\, f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$=-\frac{f(a)}{b-a}\beta(m,n)+\frac{1}{b-a}\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} f(ta+(1-t)b)dt \tag{4.28}$$

$$=-\frac{f(a)}{b-a}\beta(m,n)+\frac{1}{(b-a)^{m+n}}\int_a^b (x-a)^{n-1}(b-x)^{m-1} f(x)dx.$$

F_1 i F_2 den çıkarılır ve $\frac{(b-a)}{2}$ ile çarpılırsa, (4.25)'in ispatı elde edilir.

Uyarı 4.4. Teorem 4.5'de, $m=n=1$, için (4.25) özdeşliği (4.1)'e dönüşür.

Uyarı 4.5. Teorem 4.5'de, $m=1,\ n=\alpha,$ (veya $m=\alpha,\ n=1$) seçilirse (4.25) özdeşliği (4.13)'e dönüşür.

Uyarı 4.6. Teorem 4.5'de, $m=1,\ n=\frac{\alpha}{k}$, (veya $m=\frac{\alpha}{k},\ n=1$) seçilirse, o zaman (4.25) özdeşliği

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J^{\alpha}_{a^+,k}\ f(b)+\ J^{\alpha}_{b^-,k}\ f(a)\right]$$
$$=\frac{b-a}{2}\int_0^1\left[(1-t)^{\frac{\alpha}{k}}-t^{\frac{\alpha}{k}}\right]f'(ta+(1-t)b)\,dt \tag{4.29}$$

şeklinde yazılır.

Uyarı 4.7. Lemma 4.5'de değişken değişimi ile, (4.25) özdeşliği

$$\beta(m,n)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}}\int_a^b\Omega(x)\,f(x)\,dx$$
$$=\frac{(b-a)}{2}\int_0^1\left[\beta_t(m,n)-\beta_{1-t}(m,n)\right]f'(tb+(1-t)a)\,dt. \tag{4.30}$$

şeklinde yazılır. Şimdi, birinci türevi mutlak değerleri konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğin sağ tarafının bazı tahminleri aşağıdaki gibi genişletebiliriz.

Teorem 4.6. $f\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $a<b$ ile (a,b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ da konveks ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\beta(m,n)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}}\int_a^b\Omega(x)\,f(x)\,dx\right|$$
$$\leq(b-a)\left(\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right)\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\beta_{1-t}(m,n)-\beta_t(m,n)\right]dt. \tag{4.31}$$

İspat. Lemma 4.5 den ve $|f'|$, nin konveksliğinden

$$\left|\beta(m,n)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}}\int_a^b \Omega(x)\,f(x)\,dx\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(b-a)}{2}\int_0^1 \left|\beta_t(m,n)-\beta_{1-t}(m,n)\right|\left|f'((1-t)a+tb)\right|dt \\
&\leq \frac{(b-a)}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\beta_{1-t}(m,n)-\beta_t(m,n)\right]\left[(1-t)\left|f'(a)\right|+t\left|f'(b)\right|\right]dt \\
&\quad+\frac{(b-a)}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\beta_t(m,n)-\beta_{1-t}(m,n)\right]\left[(1-t)\left|f'(a)\right|+t\left|f'(b)\right|\right]dt
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$= \frac{(b-a)}{2}\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\beta_{1-t}(m,n)-\beta_t(m,n)\right]dt$$

bulunur. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.8. Teorem 4.6'da, $n=m=1,$ için (4.31) eşitsizliği (4.2)'ye dönüşür.

Uyarı 4.9. Teorem 4.6'da, $m=1,\ n=\alpha,$ (veya $m=\alpha,\ n=1$) seçilirse (4.31) eşitsizliği (4.14)'e dönüşür.

Uyarı 4.10. Teorem 4.6'da, $m=1,\ n=\frac{\alpha}{k},$ (veya $m=\frac{\alpha}{k},\ n=1$) seçilirse o zaman (4.31) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J^{\alpha}_{a^+,k}\,f(b)+J^{\alpha}_{b^-,k}\,f(a)\right]\right| \\
&\leq \frac{(b-a)}{\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}}}\right)\left(\frac{\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

şeklinde yazılır.

Teorem 4.7. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $a<b$ ile (a,b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $\left|f'\right|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\beta(m,n)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}}\int_a^b \Omega(x)f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{2}\left(\int_0^1 \left|\beta_t(m,n)-\beta_{1-t}(m,n)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.34}$$

Burada $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dır.

İspat. Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliğinden, aşağıdaki ifade yazılır:

$$\left|\beta(m,n)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}}\int_a^b \Omega(x)f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{2}\left(\int_0^1 \left|\beta_t(m,n)-\beta_{1-t}(m,n)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'((1-t)a+tb)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.35}$$

$$\leq \frac{(b-a)}{2}\left(\int_0^1 \left|\beta_t(m,n)-\beta_{1-t}(m,n)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left[(1-t)|f'(a)|^q+t|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. Böylece (4.34)’in ispatı tamamlanır.

Uyarı 4.11. Teorem 4.7’de, $m=n=1,$ alınırsa (4.34) eşitsizliği referans (Dragomir ve Agarwal, 1998) deki eşitsizliğine dönüşür.

Uyarı 4.12. Teorem 4.7’de, $m=1,\ n=\alpha,$ (veya $m=\alpha,\ n=1$), alınırsa (4.34) eşitsizliği referans (Sarıkaya ve ark., 2013) deki eşitsizliğine dönüşür.

Uyarı 4.13. Teorem 4.7’de $m=1,\ n=\frac{\alpha}{k},$ (veya $m=\frac{\alpha}{k},\ n=1$) seçilirse o zaman (4.34) eşitsizliği

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J^{\alpha}_{a^+,k}f(b)+J^{\alpha}_{b^-,k}f(a)\right]\right| \tag{4.36}$$

$$\leq\frac{(b-a)}{2\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde yazılır. Burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \frac{\alpha}{k}\in[0,1]$ dir.

4.3. BETA FONKSİYONUNU İÇEREN ORTA NOKTA EŞİTSİZLİKLERİ

Orta nokta tipli eşitsizliklerin sonuçlarını elde etmek için aşağıdaki lemmanın verilmesi gerekir.

Lemma 4.6. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $a<b$ ile (a,b) de diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise o zaman aşağdaki eşitlik geçerlidir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\beta(m,n)-\frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}}\int_a^b\Omega(x)f(x)dx=\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{4}T_k. \tag{4.37}$$

Burada

$$T_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\beta_t(m,n)f'(tb+(1-t)a)dt,\qquad T_2=\int_0^{\frac{1}{2}}(-\beta_t(m,n))f'(ta+(1-t)b)dt,$$
$$T_3=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-\beta_{1-t}(n,m))f'(tb+(1-t)a)dt,\qquad T_4=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\beta_{1-t}(n,m)f'(ta+(1-t)b)dt. \tag{4.38}$$

dır.

İspat. (4.34)'ün ispatı için, kısmi integrasyon uygulanırsa

$$T_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \beta_t(m,n)\, f'(tb+(1-t)a)\,dt$$
$$= \frac{1}{b-a}\beta_{\frac{1}{2}}(m,n)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{m-1}(1-t)^{n-1} f(tb+(1-t)a)\,dt, \tag{4.39}$$

$$T_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} (-\beta_t(m,n))\, f'(ta+(1-t)b)\,dt$$
$$= \frac{1}{b-a}\beta_{\frac{1}{2}}(m,n)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{m-1}(1-t)^{n-1} f(ta+(1-t)b)\,dt, \tag{4.40}$$

ve

$$T_3 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-\beta_{1-t}(m,n))\, f'(tb+(1-t)a)\,dt$$
$$= \frac{1}{b-a}\beta_{\frac{1}{2}}(n,m)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{m-1} t^{n-1} f(tb+(1-t)a)\,dt, \tag{4.41}$$

$$T_4 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \beta_{1-t}(m,n)\, f'(ta+(1-t)b)\,dt$$
$$= \frac{1}{b-a}\beta_{\frac{1}{2}}(n,m)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{m-1} t^{n-1} f(ta+(1-t)b)\,dt. \tag{4.42}$$

yazılır. Böylece, yukarıdaki ifadelerle istenilen (4.37) eşitliği elde edilir.

Uyarı 4.14. Lemma 4.6'da, $m = n = 1,$ için (4.37) eşitliği (4.3) özdeşliğine dönüşür.

Uyarı 4.15. Lemma 4.6'da, $m = 1,\ n = \alpha,$ (veya $m = \alpha,\ n = 1$) alındığında (4.37) eşitliği (4.15)'e dönüşür.

Uyarı 4.16. Lemma 4.6'da, $m = 1,\ n = \frac{\alpha}{k},$ (veya $m = \frac{\alpha}{k},\ n = 1$) alındığında (4.37) eşitliği referans (Farid ve diğ., 2016) daki özdeşliğe dönüşür.

Uyarı 4.17. Lemma 4.6'da değişken değişimi ile (4.37) özdeşliği

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\beta(m,n)-\frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}}\int_a^b \Omega(x)\,f(x)\,dx$$
$$=\frac{(b-a)}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\beta_t(m,n)+\beta_t(n,m)\right]\left[f'(tb+(1-t)a)-f'(ta+(1-t)b)\right]dt. \tag{4.43}$$

şeklinde yazılır.

Sonuç olarak, ilk türevi mutlak değerleri konveks olan fonksiyonlar için Hermite-adamard tipli eşitsizliğin sol tarafının bazı tahminlerini aşağıdaki gibi ifade verebiliriz.

Teorem 4.8. $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $a<b$ ile (a,b) da diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ de konveks ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\beta(m,n)-\frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}}\int_a^b \Omega(x)\,f(x)\,dx\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)}{2}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\left(\frac{1}{2}\beta(m,n)-\beta_{\frac{1}{2}}(m+1,n)-\beta_{\frac{1}{2}}(n+1,m)\right). \tag{4.44}$$

İspat. (4.43) eşitliği ve $|f'|$'nin konveksliğini kullanarak:

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\beta(m,n)-\frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}}\int_a^b \Omega(x)\,f(x)\,dx\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\beta_t(m,n)+\beta_t(n,m)\right]dt\right)\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]. \tag{4.45}$$

elde edilir. İntegrallerdeki değişken değişimi yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\beta_t(m,n)+\beta_t(n,m)\right]dt &= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^t s^{m-1}(1-s)^{n-1}\,ds\,dt+\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^t (1-s)^{m-1}s^{n-1}\,ds\,dt \\ &= \frac{1}{2}\beta(m,n)-\beta_{\frac{1}{2}}(m+1,n)-\beta_{\frac{1}{2}}(n+1,m).\end{aligned} \tag{4.46}$$

bulunur. Böylece (4.45) içine (4.46)'yı yazarak, gerekli eşitsizliği elde ederiz.

Uyarı 4.18. Teorem 4.8'de, $m=n=1,$ alınırsa (4.44) eşitsizliği (4.4) eşitsizliğine dönüşür.

Uyarı 4.19. Teorem 4.8'de, $m=1,\ n=\alpha,$ (veya $m=\alpha,\ n=1$) alındığında o zaman (4.44) eşitsizliği referans (Iqbal ve ark., 2015) deki eşitsizliğine dönüşür.

Uyarı 4.20. Teorem 4.8'de, $m=1,\ n=\frac{\alpha}{k},$ (veya $m=\frac{\alpha}{k},\ n=1$) alındığında o zaman (4.44) eşitsizliği referans (Farid ve diğ., 2016) da ki eşitsizliğine dönüşür.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde ilk olarak beta fonksiyonu yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik elde edilerek buna bağlı olarak literatür de önemli bir yere sahip Trapozoid ve Midpoint tipli eşitsizlikler elde edildi. Elde edilen tüm sonuçlarımız daha önce elde edilmiş sonuçların bir genellemesi olduğu kolayca görülmektedir. Benzer olarak farklı türden konveks fonksiyonlar kullanılarak da elde ettiğimiz türden yeni sonuçlar elde edilebilecektir. Bu sonuçların birçok okuyucunun ilgisini çekeceğini düşünüyoruz.

6. KAYNAKLAR

Abbas, I. (2013). *Harmonically (s,m)-convex function their related inequalities*. Pakistan: GC University Lahore.

Abramowitz, M., ve Irene Stegun, A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications Inc.

Akkurt, A., Yıldırım, M. E. ve Yıldırım, H. (2016). On some integral inequalities for (k,h)-Riemann-Liouville fractional integral. *New Trends in Mathematical Sciences (NTMSCI), 4*(1), 138-146.

Akkurt, A., Kacar, Z. ve Yıldırım, H. (2015). Generalized Fractional Integral Inequalities for Continuous Random Variables. *Journal of Probability and Statistics Article ID* 958980.

Ali, T., Khan, M. A. ve Khurshidi, Y. (2017). Hermite-Hadamard inequality for fractional integrals via eta-convex functions. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 86*(1), 153-164.

Andrews, L. C. (1985). *Special Functions for Engineers and Applied Mathematics*. New York: Science and Education Publishing.

Azpeitia, A. G. (1994). Convexs functions and the Hadamard inequality. *Revista Colombiana de Matemāticas, 28*(1), 7-12.

Bayraktar, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Türkiye: Şahsi yayın.

Carlson, B. C. (1977) Special Functions of Applied Mathematics. New York: Academic Press.

Chaudhry, M. A., Zubair, S. M. (1994). Generalized incomplete gamma functions with applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 55, 99-124.

Chaudhry, M. A., Zubair, S.M. (2002). On a class incomplete Gamma functions with applications. Saudi Arabia: Chapman&Hall/CRC.

Chaudhry, M. A., Qadir, A., Raque, M. ve Zubair, S. M. (1997). Extension of Euler's Beta Function. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 7*8(1), 19-32.

Chebyshev, P. L. (1883). *Ob odnom rjade, dostavljajuscem predelnye velicny integralov pri razlo zenii podintegralnoi funkcii namnozeteli*. Akad Nauk: Priloz Zapisok Imp.

Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations.* Germany: Springer.

Dragomir, S. S. ve R. P. Agarwal, R. P. (1998). Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula*," Applied Mathematics Letters. 11*(5), 91-95.

Farid, G., Rehman, A. ve Zahra, M. (2016). On Hadamard inequalities for k- fractional integrals. *Nonlinear Functional Analysis and Applications. 21*(3), 463-478.

Fink, A. M. (2000). An essay on the history of inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 249*(1), 118-134.

Gorenflo, R. ve Mainardi, F. (1997). Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. Wien: Springer Verlag.

Gradshteyn, I., & Ryzhik, I. (1994). *Tables of Integrals, Series and Product, English translation edited by Alan Jeery*. New York: Academic Press.

Hadamard, J. (1893). Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d'une fonction considree par, Riemann. *Journal de Mathématiques Purés et Appliquees 58*, 171-215

Hardy, G. H., Littlewood, J. E. & G. Polya, (1952). *Inequalities*. United Kingdom: *Cambridge University Press.*

Hudzik, H., Maligranda, L. (1994). Some remaks on s-convex functions. *Aequationes M*athhematics, *48*, 100-111.

Hussain, R., Ali, A., Latif, A. ve Gulshan, G. (2017). Some k-fractional associates of Hermite-Hadamard's inequality for quasi-convex functions and applications to special means. *Fractional Differential Calculus*, 2, 301--309.

Kannapan, P. (2009). *Functional Equations and Inequalities with Applications*. New York: Springer.

Katugampola, U. N. (2016). A new fractional integral unifying six existing fractional integrals. *arXiv*:1612.08596.

Katugampola, U. N. (2014). New approach to generalized fractional derivatives. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, *6*(4), 1-15.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. ve Trujillo, J. J. (2006). *North-Holland Mathematics Studies - Theory and applications of fractional differential equations.* Amsterdam: *Elsevier Science Publisher*.

Kirane, M. ve Torebek, B.T. Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer, Dragomir-Agarwal ve Pachpatte. Type Inequalities for Convex Functions via Fractional Integrals. *arXiv*:1701.00092

Kirmaci, U. S. (2004). Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, *Applied Mathematics and Computation* 147, 137-146.

Kunt, M. ve İşcan, İ. (2017). Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for p-convex functions. *Arabian Journal of Mathematic. 23*(2), 215-230.

Kunt, M. ve İşcan, İ. (2017). Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically (a,m)-convex, functions by using fractional integrals. *Konuralp Jornal Mathematics.* 5(1), 201-213.

Iqbal, M., Bhatti, M.I. ve Nazeer, K. (2015). Generalization of Inequalities Analogous to Hermite--Hadamard Inequality via Fractional Integrals. Bulletin of the Korean Mathematical Society, *52*(3), 707-716.

Miller, S., ve Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. USA: John Wiley & Sons.

Mitrinović, D.S. (1970). *Analytic Inequalities*. New York: Springer Verlag.

Mitrinović, D.S., Pečarić, J. E. ve Fink, A. M. (1993). *Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers*. London: Dordrecht.

Mubeen, S. ve Habibullah, G. M. (2012). k-Fractional integrals and application*,” International Journal Contempt Mathematices Sciences,* 7(2), 89 – 94.

Oldham, K.B. ve J. Spanier, J. (1974). The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. London: *Academic Press.*

Orlicz, W. ve Matuszewska, W. (1968). A note on modular spaces. *Bulletin de Academie Polonaise des Sciences-Serie des Sciences Mathematiques Astronomiques et Physiques, 10,* 801-808.

Ostrowski, A. (1938). Uber die Absolutabweichung einer dierentiebaren Funktion von ihrem Inte-gralmittelwert. *Commentarii Mathematici Helvetici*, *10*, 226-227

Özdemir, M. E., Dragomir, S. S. ve Yıldız, C. (2013). The Hadamard's inequality for convex function via fractional integrals. *Acta Mathematica Scientia 33*(5):1293-1299.

Pandey, V. (2016), Physical and Geometrical Interpretation of Fractional Derivatives in Viscoelasticity, PHD thesisFaculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Oslo.

Pearce, C. E. M. ve Pečarić, J. Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae*,” Applied Mathematics Letters. 13*(2), 51-55.

Pecaric, J., Proshan, E. ve Tong, F. (1992). Convex functions. *Partial Orderings and Statisticial Applications.* San Diego: Academic Press Inc.

Raina, R. K. (2005). On generalized Wright's hypergeometric functions and fractional calculus operators. *East Asian Mathematics*. J. *21*(2), 191-203

Ross, B. (1977). The development of fractional calculus 1965-1900. *Historia Mathematica,* 4,75-89.

Samko, S. G., Kilbas, A. A. & Marichev, O.I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. USA: Gordon and Breach Science Publishers.

Sarıkaya, M. Z., Set, E., Yaldız, H. ve Başak, N. (2013). Hermite-Hadamard’s inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. *Mathematical and Computer Modelling*, *5*7, 2403-2407.

Sarıkaya, M. Z. ve Yaldız, H. (2014). On generalization integral inequalities for fractional integrals. *Nihonkai Mathematical Journal 25*, 93-104.

Sarıkaya, M. Z., Yaldız, H. ve Başak, N. (2014). New fractional inequalities of Ostrowski-Grüss type. *Le Matematiche, 19*(1), 227-235.

Spanier, J. ve Odlham, K.B. (1987). *An Atlas of Functions*. New York: Springer, Hemisphere.

Srivastava, H. M. ve Choi, J. (2012). Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals. Amsterdam, London and New York: Elsevier Science Publishers.

Toader, G. (1984). Some generalizations of the convexity. Romania: Proc Colloq Approx Optim.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Fatih ATA
Yabancı Dili	: İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2021
Lisans	Matematik Öğretmenliği	Marmara Üniversitesi	2018
Lise		İnebolu Lisesi	2014

YAYINLAR

Sarıkaya, M. Z. ve Ata, F. (2021). On the generalized Hermite-Hadamard Inequalities Involving Beta Function, *Konuralp Journal of Mathematics,* 9, 112-118.