T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(p, q)-FİBONACCİ KUATERNİYON VE OKTONYON POLİNOMLARI ÜZERİNE

AYHAN PORSUK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. ARZU ÖZKOÇ ÖZTÜRK

DÜZCE, 2021

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(p, q)-FİBONACCİ KUATERNİYON VE OKTONYON POLİNOMLARI ÜZERİNE

Ayhan PORSUK tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK
Düzce Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. M. Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi ______________________

Dr. Öğr. Üyesi Gülhan AYAR
Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi ______________________

Tez Savunma Tarihi: 21/06/2021

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

21 Haziran 2021

Ayhan PORSUK

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

21 Haziran 2021 **Ayhan PORSUK**

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

SİMGELER

C	Clifford Cebiri
g	Üreteç Fonksiyonu
H	Kuaterniyon Cebiri
O	Oktonyon
q	Kuaterniyon
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
S	Bölme Cebiri
F_n	Fibonacci Tamsayı Dizisi
L_n	Lucas Tamsayı Dizisi
P_n	Pell Tamsayı dizisi
Q_n	Pell-Lucas Tamsayı Dizisi
$QF_{p,q,n}(x)$	(p,q) −Fibonacci Kuaterniyon Polinomu
$QL_{p,q,n}(x)$	(p,q) −Lucas Kuaterniyon Polinomu
$OF_{p,q,n}(x)$	(p,q) −Fibonacci Oktonyon Polinomu
$OL_{p,q,n}(x)$	(p,q) −Lucas Oktonyon Polinomu

ÖZET

$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$-FİBONACCİ KUATERNİYON VE OKTONYON POLİNOMLARI ÜZERİNE

AYHAN PORSUK
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK
Haziran 2021, 34 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde, önbilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, (p,q)-Fibonacci ve (p,q)-Lucas kuaterniyon polinomları tanımlanmış, bu polinomlar ile ilgili Binet formülü, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, binom toplam formülleri ve üreteç fonksiyonu ile ilgili yeni özdeşlikler elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise, (p,q)-Fibonacci ve (p,q)-Lucas oktonyon polinomları tanımlanıp, (p,q)-Fibonacci ve (p,q)-Lucas kuaterniyon polinomları ile ilgili elde edilen benzer sonuçlar (p,q)-Fibonacci ve (p,q)-Lucas oktonyon polinomları içinde bulunmuştur. Son bölümde bu tez için sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Binet formülü, Kuaterniyonlar, Oktonyonlar, (p,q)-Fibonacci Kuaterniyon polinomları, (p,q)-Fibonacci oktonyon polinomları.

ABSTRACT

ON THE (p,q)-FIBONACCI QUATERNION AND OCTONION POLYNOMIALS

AYHAN PORSUK
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master's Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK
June 2021, 34 pages

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, we have given preliminaries and some basic definitions and theorems which will be used in the next sections. In the third chapter, (p,q)-Fibonacci and (p,q)-Lucas quaternion polynomials are defined and Binet formula, Catalan identity, Cassini identity, binomial summation formula and new identities corresponding generating function are derived. In the fourth chapter, (p,q)-Fibonacci and (p,q)-Lucas octonion polynomials are defined and some results which are similar to the (p,q)-Fibonacci and (p,q)-Lucas quaternion polynomials are computed. In the last chapter, we give the corollaries and suggestions of this thesis.

Keywords: Binet formula, Octonions, Quaternions, (p,q)-Fibonacci quaternion polynomials, (p,q)-Fibonacci octonion polynomials.

1. GİRİŞ

Birçok matematikçinin dikkatini çeken ve üzerine pek çok çalışma yapılan Fibonacci sayıları, on üçüncü yüzyılda Liber Abaci adlı kitapta Fibonacci tarafından tanımlanmıştır. Temeli bir çift tavşanın her ay yeni bir çift tavşan doğurması ve yeni doğan çiftin erginleşmesi bir ay sürerse yüz ay sonunda kaç tane tavşan olur sorusuna dayanmaktadır [1].

Sonrasında, De Moivee ve Jacques-Philippe-Marie Binet Fibonacci sayılarının indirgeme bağıntısını kullanarak Binet formüllerini hesaplamışlardır [2]-[4].

Kuaterniyonlar, Sir William Hamilton tarafından keşfedilmiştir. Genellikle karmaşık sayılara benzerdir ve üç boyutlu matematiksel bir yapı oluşturmak için ortaya çıkmıştır. Çarpma ve bölme sorunlarını, dördüncü bir boyut ekleyerek çözmüşlerdir. Kuantum fiziği, mekanik kuram, 3-boyutlu uzayda dönme hareketleri ve uzay kinematiği gibi bir çok farklı alanda uygulaması bulunmaktadır [5]-[7].

İlk olarak Horadam [8] de, Fibonacci sayılarını ve kuaterniyonları birlikte ele alarak Fibonacci kuaterniyonlarını tanımlamıştır. Iyer, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları arasında bazı önemli ilişkiler elde etmiştir [9], [10]. $h(x)$-Fibonacci kuaterniyon polinomları Catarino tarafından [11] de tanımlanmıştır.

Bolat ve İpek [12] de ise Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonlarını tanıtıp, bazı temel özelliklerini elde etmişlerdir.

Pell kuaterniyonları ve Pell oktonyonları, Szynol-Liana ve Wloch tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır [13].

Akyiğit ve arkadaşları [14] de, farklı kuaterniyon birimlerini ele alarak Fibonacci genelleştirilmiş kuaterniyonlarını incelemiş, ayrıca [15] de split Fibonacci kuaterniyonlarını tanımlamış ve çeşitli özelliklerini elde etmişlerdir.

Son olarak $h(x)$-Fibonacci oktonyon polinomları, Nallı ve Haukkanen tarafından [16] makalesinde tanımlanmıştır. Bu polinom çeşidi, k-Fibonacci oktonyon sayılarının genelleştirilmiş halidir.

Yukarıda sıralanan tüm çalışmalar göz önünde bulundurularak, bu çalışmada (p, q)-Fibonacci ve (p,q)-Lucas kuaterniyon polinomları tanımlanmış, bu polinom ile ilgili önemli formüller elde edilmiştir. Son olarak (p, q)-Fibonacci ve (p, q)-Lucas oktonyon polinomları tanımlanmıştır. Bu polinomlar ile ilgili Binet formülü, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, Binom toplam formülü ve üreteç fonksiyonu ile ilgili yeni özdeşlikler elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tezin bu bölümünde, diğer bölümlerde kullanılacak bazı tanım ve kavramlara yer verilecektir.

2.1. FİBONACCİ VE LUCAS TAM SAYI DİZİLERİ

Tam sayı dizileri, ilk olarak meşhur bir tam sayı dizisi olan Fibonacci tam sayı dizisi ile ortaya çıkmıştır. Diziye adını veren İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci $(1170 - 1250)$, matematiği Araplardan alıp Avrupa'ya tanıtan kişi olup orta çağın en yetenekli matematikçilerinden biridir. Fibonacci 'Liber Abaci' isimli kitabında kapalı bir ortamdaki bir tavşan ailesinin artışını şu problemle aktarmıştır: Biri erkek biri dişi bir çift tavşanımız var, bir aylıkken çok genç olduklarından üreyemiyorlar, ama ikinci ayın sonunda erginleşip üremeye başlıyorlar. Her ay ergen her çiftin biri erkek biri dişi olmak üzere yeni bir çift ürettiğini ve hiç ölmedikleri varsayılsın. Tavşanlar bu şekilde üremeye devam ederlerse bir yılın sonunda kaç çift tavşanınız olur? Sorunun genelleştirilmiş hali, n ay sonra kaç çift tavşanınız olur? Birinci ay 1 çift, ikinci ay üreyemediklerinden yine 1 çift ve üçüncü ay 2 çift ve bu şekilde devam edilirse; her ayda kaç çift tavşan olduğunu hesaplamak, aynı zamanda $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$ dizisini hesaplamaktır. Burada üçüncü terimden itibaren her sayı kendinden önceki iki sayının toplamına eşittir. F_n, n. aydaki çift sayısı ve F_{n+1}, $(n+1)$. aydaki çift sayısı olmak üzere, $(n+2)$. aydaki çift sayısı $F_{n+2} = F_{n+1} - F_n$ şeklindedir [1].

Buna göre, Fibonacci dizisi, ilk iki terimi haricinde diğer tüm terimleri arasında kendisinden hemen önce gelen ilk iki terimin toplamı olarak ifade edilebilen, başlangıç değerleri $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olan ve $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan dizidir. Dizinin terimleri arasında birçok cebirsel bağıntı bulunmaktadır, bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir:

$$F_{2n} = 3F_{2n-2} - F_{2n-4} \tag{2.2}$$

$$F_n{}^2 + F_{n+2k+1}{}^2 = F_{2k+1}F_{2n+2k} \tag{2.3}$$

$$2\left(F_n{}^4 + F_{n+1}{}^4 + F_{n+2}{}^4\right) = \left(F_n{}^2 + F_{n+1}{}^2 + F_{n+2}{}^2\right)^2 \tag{2.4}$$

$$F_nF_{n+3}{}^2 - F_{n+2}{}^3 = (-1)^{n+1}F_{n+1} \tag{2.5}$$

$$F_{n+2}{}^2 - F_{n+1}{}^2 = F_nF_{n+3}. \tag{2.6}$$

Ayrıca bu dizinin ardışık iki teriminin oranının limiti altın orandır, yani

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\cdots \tag{2.7}$$

dir.

Fibonacci sayı dizisinden başka bir diğer önemli tam sayı dizisi de Lucas tam sayı dizisidir. Bu dizinin başlangıç terimleri $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olup, genel terimi $n \geq 2$ için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu iki tam sayı dizisinden başka önemli iki tam sayı dizisi Pell ve Pell-Lucas tam sayı dizileridir. Bu iki tam sayı dizisinin başlangıç terimleri $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ ve $Q_0 = Q_1 = 2$ olup genel terimleri

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \tag{2.9}$$

ve

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \tag{2.10}$$

dir.

Yukarıda ele alınan tüm tam sayı dizileri, p ve q, $p^2 - 4q > 0$ şartını sağlayan iki tam sayı olmak üzere başlangıç değerleri $U_0 = 0$, $U_1 = 1$, $V_0 = 2$, $V_1 = p$ ve genel terimleri $n \geq 2$ için

$$U_n = U_n(p,q) = pU_{n-1} - qU_{n-2} \tag{2.11}$$

ve

$$V_n = V_n(p,q) = pV_{n-1} - qV_{n-2} \tag{2.12}$$

olarak tanımlanan U_n ve V_n tam sayı dizilerinin özel halleridir. Gerçekten de

$$U_n = U_n(1,-1) = F_n,\ U_n = U_n(2,-1) = P_n \tag{2.13}$$

$$V_n = V_n(1,-1) = L_n,\ V_n = V_n(2,-1) = Q_n \tag{2.14}$$

dir. Bu tam sayı dizilerinin karakteristik denklemi

$$x^2 - px + q = 0 \tag{2.15}$$

olup bu denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \tag{2.16}$$

dir ($p^2 - 4q \neq 0$ alınmasının sebebi, denklemin farklı iki kökünün olması istendiği içindir).

Bu diziler için Binet (Jacques Phillipe Marie Binet, 1786-1856) formülleri

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ ve } V_n = \alpha^n + \beta^n \tag{2.17}$$

dir [17].

Karakteristik denklemin köklerinin *n*. kuvvetlerinin toplamı ve farkı sırasıyla

$$\alpha^n + \beta^n = U_n\sqrt{p^2 - 4q} + \left(p - \sqrt{p^2 - 4q}\right)^n 2^{1-n} \tag{2.18}$$

$$\alpha^n - \beta^n = U_n\sqrt{p^2 - 4q} \tag{2.19}$$

dır. Bu iki tam sayı dizisi arasında birçok cebirsel bağıntı olup bunlardan bazıları

$$U_{2n} = U_n V_n \tag{2.20}$$

$$V_{2n} = V_n^{\,2} - 2q^n \tag{2.21}$$

$$U_{3n} = U_n\left(V_n^{\,2} - q^n\right) = U_n\left(\left(p^2 - 4q\right)U_n^{\,2} + 3q^n\right) \tag{2.22}$$

$$V_{3n} = V_n\left(V_n^{\,2} - 3q^n\right) \tag{2.23}$$

$$V_n^{\ 2} - \left(p^2 - 4q\right)U_n^{\ 2} = 4q^n \tag{2.24}$$

dir [1].

2.2. BAZI ÖNEMLİ CEBİRSEL ÖZDEŞLİKLER

Fibonacci ve Lucas tam sayı dizileri ile ilgili birçok özdeşlik mevcuttur. Bunlardan bazılarının isimleri özdeşliği bulan matematikçinin adı ile anılmaktadır. Bu özdeşliklerden en çok bilinenleri Cassini, Catalan ve d'Ocagne özdeşlikleri olarak sayılabilir.

Tanım 2.1. F_n, *n.* dereceden Fibonacci sayısını göstermek üzere $n \geq 1$ için

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^{\ 2} = \left(-1\right)^n \tag{2.25}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe, Cassini özdeşliği denir [1].

Tanım 2.2. F_n, *n.* dereceden Fibonacci sayısı, k bir pozitif tamsayı ve $n \geq k$ olmak üzere

$$F_{n-k}F_{n+k} - F_n^{\ 2} = \left(-1\right)^{n+k+1}F_k^{\ 2} \tag{2.26}$$

ile tanımlanan eşitliğe, Catalan özdeşliği denir.

Tanımlardan da görüldüğü üzere Catalan özdeşliği Cassini özdeşliğinin genelleştirilmiş halidir [1].

Tanım 2.3. F_n, *n.* dereceden Fibonacci sayısı *n* ve *m* birer tamsayı olmak üzere, $m \geq n$ için

$$F_mF_{n+1} - F_nF_{m+1} = \left(-1\right)^n F_{m-n} \tag{2.27}$$

şeklinde tanımlı özdeşliğe, d'Ocagne özdeşliği denir [1].

Ayrıca Cassini, Catalan ve d'Ocagne özdeşliğinden farklı olarak, hem Fibonacci dizisi hem de Lucas dizisi ile ilgili birçok özdeşlikler bulunmaktadır.

2.3. KUATERNİYONLAR VE OKTONYONLAR

Bölme cebiri, sıfırdan farklı her elemanın çarpmaya göre tersinin olduğu bir halkadır.

Fakat bu çarpma işlemi değişmeli olmak zorunda değildir. Buradan her cismin bir bölme cebiri olacağı açıkça görülebilir. Daha açık olarak, bir S bölme cebiri $+$ ve $*$ ile gösterilen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan ikili işleme sahip bir halkadır:

1. Her $a,b,c \in S$ için $(a.+b)+c = a+(b+c)$ dir.

2. Her $a,b \in S$ için $a+b=b+a$ dır.

3. Her $a \in S$ için $a+0=0+a=a$ olacak şekilde bir $0 \in S$ vardır.

4. Her $a \in S$ için $a+(-a)=0=(-a)+a$ olacak şekilde bir $-a \in S$ vardır.

5. Her $a,b,c \in S$ için $(a.*b)*c = a*(b*c)$ dir.

6. Her $a \in S$ için $a*1=1*a=a$ olacak şekilde $1 \in S$ vardır.

7. Sıfırdan farklı her $a \in S$ için $a*a^{-1}=1=a^{-1}*a$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in S$ vardır.

8. Her $a,b,c \in S$ için $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$ ve $(b+c)*a=(b*a)+(c*a)$ özellikleri sağlanır [18].

Tanım 2.4. $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere q kuaterniyonu

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \tag{2.28}$$

ile tanımlanır. Burada $1, i, j, k$ bazlar olmak üzere

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij = k &= -ji, \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} jk = i &= -kj, \\ ki = j &= -ik \end{aligned} \tag{2.30}$$

koşullarını sağlayan temel kuaterniyon birimleridir.

Kuaterniyon cebiri H sembolü ile gösterilir ve reel sayılar üzerinde dört boyutlu birleşmeli ve değişmeli olmayan normlu bir bölme cebiridir. n. dereceden Fibonacci ve n. dereceden Lucas kuaterniyonları sırasıyla

$$Q_n = F_n + F_{n+1} i + F_{n+2} j + F_{n+3} k \tag{2.31}$$

ve

$$K_n = L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}j + L_{n+3}k \tag{2.32}$$

şeklinde tanımlanır. Burada F_n ve L_n sırasıyla n. dereceden Fibonacci ve Lucas sayılarıdır [19].

Tanım 2.5. Clifford cebirindeki oktonyonlar O, kuaterniyonlardan farklı olarak reel sayılar üzerinde tanımlı 8-boyutlu birer normlu bölme cebiridir. $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0,\ 1,\cdots,7)$ olmak üzere,

$$\alpha = \sum_{s=0}^{7} \alpha_s e_s \tag{2.33}$$

oktonyonu yukarıdaki şekilde tanımlı, $e_0,\ e_1,\cdots,e_6$ ve e_7 ile gösterilen sekiz tane baz elemanı tarafından üretilen, değişmeli olmayan ve birleşme özelliğini sağlamayan 8-boyutlu bir cebirdir (fakat birleşme özelliğinin daha zayıf bir formunu sağlar) [20].

$\times$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Şekil 2.1. Oktonyon Çarpım Tablosu.

Tanım 2.6. $n \geq 0$ için F_n, n. dereceden klasik Fibonacci sayıları olmak üzere

$$O_n = \sum_{s=0}^{7} F_{n+s} e_s. \tag{2.34}$$

rekürans bağıntısı Fibonacci oktonyon sayılarını temsil eder [21].

2.4. BAZI ÖZEL TANIMLI POLİNOM SINIFLARI

Fibonacci benzeri yineleme bağıntıları yardımıyla tanımlanan polinomlara Fibonacci polinomları denir. Reel katsayılı $p(x)$ ve $q(x)$ polinomlar olmak üzere, (p,q)-Fibonacci polinomları için rekürans bağıntısı, $F_{p,q,0}=0,\quad F_{p,q,1}=1$ başlangıç değerleriyle

$$F_{p,q,n+1}=p(x)F_{p,q,n}+q(x)F_{p,q,n-1} \tag{2.35}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca reel katsayılı $p(x)$ ve $q(x)$ polinomlar olmak üzere, (p,q)-Lucas polinomları için rekürans bağıntısı, $L_{p,q,0}=2,\quad L_{p,q,1}=p(x)$ başlangıç değerleriyle

$$L_{p,q,n+1}=p(x)L_{p,q,n}+q(x)L_{p,q,n-1} \tag{2.36}$$

biçiminde tanımlanır.

$$\alpha^2-p(x)\alpha-q(x)=0 \tag{2.37}$$

karakteristik denkleminin kökleri

$$\alpha_1(x)=\frac{p(x)+\sqrt{p^2(x)+4q(x)}}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha_2(x)=\frac{p(x)-\sqrt{p^2(x)+4q(x)}}{2} \tag{2.38}$$

dir. (p,q)-Fibonacci polinomu ve (p,q)-Lucas polinomu için Binet formülleri ise sırasıyla

$$\begin{aligned} F_{p,q,n}(x)&=\frac{\alpha_1^n(x)-\alpha_2^n(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\\ L_{p,q,n}(x)&=\alpha_1^n(x)+\alpha_2^n(x)\end{aligned} \tag{2.39}$$

şeklindedir. Ayrıca karakteristik denklemin kökleri ile alakalı bazı eşitlikler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x)+\alpha_2(x)&=p(x)\\ \alpha_1(x)-\alpha_2(x)&=\sqrt{p^2(x)+4q(x)}\\ \alpha_1(x).\alpha_2(x)&=-q(x)\\ \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}&=\frac{-\alpha_1^2(x)}{q(x)}\\ \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}&=\frac{-\alpha_2^2(x)}{q(x)}\end{aligned} \tag{2.40}$$

[21].

Dikkat edilirse, burada (p,q)-Fibonacci kuaterniyon polinomları, $h(x)$-Fibonacci kuaterniyon polinomlarının genelleştirilmiş halidir.

3. (p,q) −FİBONACCİ KUATERNİYON POLİNOMLARI

Bu bölümde, $(p,q)-$ Fibonacci kuaterniyon polinomları tanımlanmış ve bu yeni kuaterniyon polinomunun çeşitli özellikleri incelenmiştir. Bu özellikler arasında Binet formülü, üreteç fonksiyonu, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, Binom formülleri ve ilk n-terim toplamı formülleri sayılabilir [22].

3.1. (p,q) -FİBONACCİ KUATERNİYON POLİNOMLARI ÜZERİNE

$h(x)$ -Fibonacci kuaterniyon polinomları

$$Q_{h,n}(x)=\sum_{l=1}^{3}F_{h,n+l}(x)e_l \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $F_{h,n}(x)$ n. dereceden, $h(x)$ -Fibonacci polinomudur [20].

Aşağıda tanıtılacak olan $(p,q)-$ Fibonacci kuaterniyon polinomu ve $(p,q)-$ Lucas kuaterniyon polinomları literatüre ilk kez kazandırılmıştır.

$(p,q)-$ Fibonacci kuaterniyon polinomu $QF_{p,q,n}(x)$ ile gösterilmek üzere

$$QF_{p,q,n}(x)=\sum_{k=0}^{3}F_{p,q,n+k}(x)e_k \tag{3.2}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $F_{p,q,n+k}(x)$, n. mertebeden $(p,q)-$ Fibonacci polinomudur. Bu kuaterniyon dizisinin başlangıç değerleri

$$QF_{p,q,0}(x)=\sum_{k=0}^{3}F_{p,q,k}(x)e_k=e_1+p(x)e_2+(p^2(x)+q(x))e_3 \tag{3.3}$$

ve

$$\begin{aligned}QF_{p,q,1}(x)&=\sum_{k=0}^{3}F_{p,q,1+k}(x)e_k \\ &=e_0+p(x)e_1+(p^2(x)+q(x))e_2+(p^3(x)+2p(x)q(x))e_3\end{aligned} \tag{3.4}$$

dir. Ayrıca $QF_{p,q,n}(x)$ kuaterniyon dizisinin rekürans bağıntısı

$$\begin{aligned}QF_{p,q,n+1}(x)&=\sum_{k=0}^{3}F_{p,q,n+k+l}(x)e_k \\ &=\sum_{k=0}^{3}(p(x)F_{p,q,n+k}(x)+q(x)F_{p,q,n-1+k}(x))e_k \\ &=p(x)\sum_{k=0}^{3}F_{p,q,n+k}(x)e_k+q(x)\sum_{k=0}^{3}F_{p,q,n-1+k}(x)e_k\end{aligned} \tag{3.5}$$

olduğundan

$$QF_{p,q,n+1}(x) = p(x)QF_{p,q,n}(x) + q(x)QF_{p,q,n-1}(x) \tag{3.6}$$

biçiminde yazılır.

$(p,q) -$ Lucas kuaterniyon polinomları ise

$$QL_{p,q,n}(x) = \sum_{k=0}^{3} L_{p,q,n+k}(x)e_k \tag{3.7}$$

ile tanımlıdır. Burada da $L_{p,q,n+k}$, n. mertebeden $(p,q) -$ Lucas polinomu olup, $n \geq 1$ için rekürans bağıntısı

$$QL_{p,q,n+1}(x) = p(x)QL_{p,q,n}(x) + q(x)QL_{p,q,n-1}(x) \tag{3.8}$$

dir. Ayrıca bu dizinin başlangıç değerleri

$$QL_{p,q,0}(x) = \sum_{k=0}^{3} L_{p,q,k}(x)e_k \tag{3.9}$$

ve

$$QL_{p,q,1}(x) = \sum_{k=0}^{3} L_{p,q,1+k}(x)e_k \tag{3.10}$$

dir.

3.2. (p,q) -FİBONACCİ KUATERNİYON POLİNOMLARI İÇİN SONUÇLAR

Aşağıdaki teoremlerde (p,q) −Fibonacci and (p,q) −Lucas kuaterniyon polinomları için üreteç fonksiyonlar oluşturulmuştur. Ardından gelen Sonuç ve Lemma da ise oluşturulan bu üreteç fonksiyonlar tekrarda farklı formda ele alınmıştır

Teorem 3.1. (p,q) −Fibonacci and (p,q) −Lucas kuaterniyon polinomları sırasıyla $QF_{p,q,n}(x)$ ve $QL_{p,q,n}(x)$ olmak üzere, üreteç fonksiyonları

$$g_{QF}(t) = \frac{QF_{p,q,0}(x) + (QF_{p,q,1}(x) - p(x)QF_{p,q,0}(x))t}{1 - p(x)t - q(x)t^2} \tag{3.11}$$

ve

$$g_{QL}(t) = \frac{QL_{p,q,0}(x) + (QL_{p,q,1}(x) - p(x)QL_{p,q,0}(x))t}{1 - p(x)t - q(x)t^2} \tag{3.12}$$

dir.

İspat. $g_{QF}(t)$ üreteç fonksiyonu, $QF_{p,q,n}(x)$ kuaterniyon polinomu için

$$\sum_{n=0}^{\infty} QF_{p,q,n}(x)t^n = QF_{p,q,0}(x) + QF_{p,q,1}(x)t + QF_{p,q,2}(x)t^2 + \cdots + QF_{p,q,n}(x)t^n +$$

serisi ile gösterilir.

$-p(x)tg_{QF}(t), -q(x)t^2 g_{QF}(t) -$ ve $g_{QF}(t)$ nin seri açılımları

$$g_{QF}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} QF_{p,q,n}(x)t^n = QF_{p,q,0}(x) + QF_{p,q,1}(x)t + QF_{p,q,2}(x)t^2 + \cdots + QF_{p,q,n}(x)t^n + \cdots \quad (3.13)$$

$$-p(x)tg_{QF}(t) = -p(x)QF_{p,q,0}(x)t - p(x)QF_{p,q,1}(x)t^2 - p(x)QF_{p,q,2}(x)t^3 - \cdots - p(x)QF_{p,q,n}(x)t^{n+1} - \cdots \quad (3.14)$$

$$-q(x)t^2 g_{QF}(t) = -q(x)QF_{p,q,0}(x)t^2 - q(x)QF_{p,q,1}(x)t^3 - q(x)QF_{p,q,2}(x)t^4 - \cdots - q(x)QF_{p,q,n}(x)t^{n+2} - \cdots \quad (3.15)$$

olduğundan $g_{QF}(t) - g_{QF}(t)p(x)t - g_{QF}(t)q(x)t^2$ açılımı elde edilir.

$$\begin{aligned} g_{QF}(t)(1 - p(x)t - q(x)t^2) &= QF_{p,q,0}(x) + QF_{p,q,1}(x)t - p(x)QF_{p,q,0}(x)t \\ &\quad +(QF_{p,q,2}(x) - p(x)QF_{p,q,1}(x) - q(x)QF_{p,q,0}(x))t^2 \\ &\quad + \left(QF_{p,q,3}(x) - p(x)QF_{p,q,2}(x) - q(x)QF_{p,q,1}(x)\right)t^3 \\ &\quad + \cdots + (QF_{p,q,n}(x) - p(x)QF_{p,q,n-1}(x) \\ &\quad -q(x)QF_{p,q,n-2}(x))t^n + \ldots \\ &= QF_{p,q,0}(x) + [QF_{p,q,1}(x) - p(x)QF_{p,q,0}(x)]t. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bu yüzden kuaterniyon dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g_{QF}(t) = \frac{QF_{p,q,0}(x) + (QF_{p,q,1}(x) - p(x)QF_{p,q,0}(x))t}{1 - p(x)t - q(x)t^2} \quad (3.17)$$

olarak elde edilir.

Diğer polinom için de üreteç fonksiyon benzer şekilde ispatlanabilir.

Sonuç 3.2. $(p,q) -$ Fibonacci ve $(p,q) -$ Lucas kuaterniyon polinomları sırasıyla $QF_{p,q,n}(x)$ ve $QL_{p,q,n}(x)$ olmak üzere bu polinomların üreteç fonksiyonları

$$g_{QF}(t) = \frac{e_1 + p(x)e_2 + p^2(x)e_3 + q(x)e_3 + (e_0 + q(x)e_2 + p(x)q(x)e_3)t}{1 - p(x)t - q(x)t^2} \quad (3.18)$$

ve

$$g_{QL}(t) = \frac{\begin{Bmatrix} 2e_0 + p(x)e_1 + [p^2(x) + 2q(x)]e_2 + [p^3(x) - 3p(x)q(x)]e_3 \\ +(-p(x)e_0 + 2q(x)e_1 + q(x)[3p(x) - 1]e_2 + q(x)[p^2(x) + 2q(x)]e_3)t \end{Bmatrix}}{1 - p(x)t - q(x)t^2}. \quad (3.19)$$

dır.

Lemma 3.3. Teorem 3.1 de verilen üreteç fonksiyonu için sırasıyla

$$g_{QF}(t)=\frac{1}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\left\{\begin{array}{c}\frac{QF_{p,q,1}(x)-\alpha_2(x)QF_{p,q,0}(x)}{1-\alpha_1(x)t}\\-\frac{QF_{p,q,1}(x)-\alpha_1(x)QF_{p,q,0}(x)}{1-\alpha_2(x)t}\end{array}\right\} \tag{3.20}$$

ve

$$g_{QL}(t)=\frac{1}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\left\{\begin{array}{c}\frac{QL_{p,q,1}(x)-\alpha_2(x)QL_{p,q,0}(x)}{1-\alpha_1(x)t}\\-\frac{QL_{p,q,1}(x)-\alpha_1(x)QL_{p,q,0}(x)}{1-\alpha_2(x)t}\end{array}\right\} \tag{3.21}$$

eşitlikleri doğrulanır.

İspat. Teorem 3.1 de verilen $\mathrm{g}_{\mathrm{QF}}(t)$ ifadesi ve (2.3) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{QF_{p,q,0}(x)+[QF_{p,q,1}(x)-p(x)QF_{p,q,0}(x)]t}{1-p(x)t-q(x)t^2}=\frac{QF_{p,q,0}(x)+[QF_{p,q,1}(x)-p(x)QF_{p,q,0}(x)]t}{(1-\alpha_1(x)t)(1-\alpha_2(x)t)}$$

$$=\left(\frac{QF_{p,q,0}(x)+[QF_{p,q,1}(x)-(\alpha_1(x)+\alpha_2(x))QF_{p,q,0}(x)]t}{(1-\alpha_1(x)t)(1-\alpha_2(x)t)}\right)\times\left(\frac{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\right)$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}\alpha_1(x)QF_{p,q,0}(x)+\alpha_1(x)QF_{p,q,1}(x)t-\alpha_1^2(x)QF_{p,q,0}(x)t\\-\alpha_1(x)\alpha_2(x)QF_{p,q,0}(x)t-\alpha_2(x)QF_{p,q,0}(x)-\alpha_2(x)QF_{p,q,1}(x)t\\+\alpha_1(x)\alpha_2(x)QF_{p,q,0}(x)t+\alpha_2^2(x)QF_{p,q,0}(x)t+QF_{p,q,1}(x)-QF_{p,q,1}(x)\end{array}\right\}}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(1-\alpha_1(x)t)(1-\alpha_2(x)t)}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}QF_{p,q,1}(x)(1-\alpha_2(x)t)+\alpha_2(x)QF_{p,q,0}(x)(-1+\alpha_2(x)t)\\+QF_{p,q,1}(x)(-1+\alpha_1(x)t)+\alpha_1(x)QF_{p,q,0}(x)(1-\alpha_1(x)t)\end{array}\right\}}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(1-\alpha_1(x)t)(1-\alpha_2(x)t)}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}(1-\alpha_2(x)t)(QF_{p,q,1}(x)-\alpha_2(x)QF_{p,q,0}(x))\\-(1-\alpha_1(x)t)(QF_{p,q,1}(x)-\alpha_1(x)QF_{p,q,0}(x))\end{array}\right\}}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(1-\alpha_1(x)t)(1-\alpha_2(x)t)}$$

$$=\frac{1}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\left[\frac{QF_{p,q,1}(x)-\alpha_2(x)QF_{p,q,0}(x)}{1-\alpha_1(x)t}-\frac{QF_{p,q,1}(x)-\alpha_1(x)QF_{p,q,0}(x)}{1-\alpha_2(x)t}\right]$$

bulunur.

İspat $(p,q)-$ Lucas kuaterniyon polinomu için de benzer şekilde ispatlanır.

Lemma 3.4. $(p,q)-$ Fibonacci and $(p,q)-$Lucas polinomları sırasıyla $F_{p,q,n}(x)$ ve $L_{p,q,n}(x)$ olsun. Bu durumda

1. $F_{p,q,k+1}(x) - \alpha_2(x)F_{p,q,k}(x) = \alpha_1^k(x)$ (3.22)

   $F_{p,q,k+1}(x) - \alpha_1(x)F_{p,q,k}(x) = \alpha_2^k(x)$ (3.23)

2. $\frac{L_{p,q,k+1}(x)-\alpha_2(x)L_{p,q,k}(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)} = \alpha_1^k(x)$ (3.24)

   $\frac{\alpha_1(x)L_{p,q,k}(x)-L_{p,q,k+1}(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)} = \alpha_2^k(x)$ (3.25)

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (1) İspat için tümevarım yöntemi kullanılacaktır. $k=1$ olsun. Bu durumda

$$F_{p,q,2}(x) - \alpha_2(x)F_{p,q,1}(x) = p(x) - \alpha_2(x) = \alpha_1(x) \tag{3.26}$$

olup eşitlik sağlanır. $k=n-1$ için denklemin $F_{p,q,n}(x) - \alpha_2(x)F_{p,q,n-1}(x) = \alpha_1^{n-1}(x)$ olduğu kabul edilsin. $k=n$ için

$$\begin{aligned}
\alpha_1^n(x) &= \alpha_1^{n-1}(x)\alpha_1(x)\\
&= (F_{p,q,n}(x) - \alpha_2(x)F_{p,q,n-1}(x))\alpha_1(x)\\
&= \alpha_1(x)F_{p,q,n}(x) - \alpha_1(x)\alpha_2(x)F_{p,q,n-1}(x)\\
&= (p(x) - \alpha_2(x))F_{p,q,n}(x) - (-q(x))F_{p,q,n-1}(x)\\
&= p(x)F_{p,q,n}(x) + q(x)F_{p,q,n-1}(x) - \alpha_2(x)F_{p,q,n}(x)\\
&= F_{p,q,n+1}(x) - \alpha_2(x)F_{p,q,n}(x)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

olur. Böylece sonuç elde edilir.

Benzer şekilde (2) de ispatlanır.

Şimdi $QF_{p,q,n}(x)$ ve $QL_{p,q,n}(x)$ için Binet formülleri elde edilecektir. Bunun için öncelikle aşağıdaki teoremler verilecektir.

Teorem 3.5. $n \geq 0$ için $(p,q)-$ Fibonacci ve $(p,q)-$ Lucas kuaterniyon polinomları sırasıyla $QF_{p,q,n}(x)$ ve $QL_{p,q,n}(x)$ olmak üzere

$$QF_{p,q,n}(x) = \frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^n(x)-\alpha_2^*(x)\alpha_2^n(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)} \tag{3.28}$$

ve

$$QL_{p,q,n}(x) = \alpha_1^*(x)\alpha_1^n(x) + \alpha_2^*(x)\alpha_2^n(x) \tag{3.29}$$

dir. Burada $\alpha_1^*(x) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_1^k(x)e_k$ ve $\alpha_2^*(x) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_2^k(x)e_k$ dir.

İspat. Lemma 3.3 ve Lemma 3.4 kullanılarak gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$g_{QF}(t) = \frac{1}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}\left(\left(QF_{p,q,1}(x) - \alpha_2(x)QF_{p,q,0}(x)\right)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^n(x)t^n \right.$$
$$\left. - \left(QF_{p,q,1}(x) - \alpha_1(x)QF_{p,q,0}(x)\right)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_2^n(x)t^n\right)$$
$$= \frac{\begin{Bmatrix} \sum_{k=0}^{3}\left(F_{p,q,1+k}(x) - \alpha_2(x)F_{p,q,k}(x)\right)e_k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^n(x)t^n \\ -\sum_{k=0}^{3}\left(F_{p,q,1+k}(x) - \alpha_1(x)F_{p,q,k}(x)\right)e_k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^n(x)t^n \end{Bmatrix}}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}$$
$$= \frac{1}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}\left(\sum_{k=0}^{3} \alpha_1^k(x)e_k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^n(x)t^n - \sum_{k=0}^{3} \alpha_2^k(x)e^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_2^n(x)t^n\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^n(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^n(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} t^n \qquad (3.30)$$

elde edilir. Üreteç fonksiyon tanımı yardımıyla

$$QF_{p,q,n}(x) = \frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^n(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^n(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \qquad (3.31)$$

bulunur.

$(p,q) -$ Lucas kuaterniyon polinomu için de Binet formülü benzer şekilde ispatlanır.

Şimdi Binet formülü kullanılarak, Catalan özdeşliği ve Cassini özdeşliği oluşturulacaktır.

Teorem 3.6. (Catalan Özdeşliği) (p,q)-Fibonacci ve (p,q)-Lucas kuaterniyon polinomları sırasıyla $QF_{p,q,n}(x)$ ve $QL_{p,q,n}(x)$ olsun. n ve r negatif olmayan tamsayılar ve $r \leq n$ olmak üzere sırasıyla

$$QF_{p,q,n-r}(x)QF_{p,q,n+r}(x) - QF_{p,q,n}^2(x)$$
$$= \frac{(-1)^n\left(q(x)\right)^{n-r}}{\left(\alpha_1(x) - \alpha_2(x)\right)^2}\begin{Bmatrix} \alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\left(\left(-q(x)\right)^r - \alpha_1^{2r}(x)\right) \\ +\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\left(\left(-q(x)\right)^r - \alpha_2^{2r}(x)\right) \end{Bmatrix} \qquad (3.32)$$

ve

$$QL_{p,q,n-r}(x)QL_{p,q,n+r}(x) - QL_{p,q,n}^2(x)$$

$$=\begin{Bmatrix}(-1)^n\big(q(x)\big)^{n-r}\Big(\alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\Big((-1)^r\alpha_1^{2r}(x)-q^r(x)\Big)\Big.\\ \Big.+\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\Big((-1)^r\alpha_2^{2r}(x)-q^r(x)\Big)\Big)\end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

ifadeleri sağlanır.

İspat. Teorem 3.5 ve Lemma 3.4 kullanılarak ve aynı zamanda $\alpha_1(x)$ ve $\alpha_2(x)$ köklerini içeren (2.3) eşitlikleri yardımıyla

$$QF_{p,q,n-r}(x)QF_{p,q,n+r}(x)-QF_{p,q,n}^2(x)$$

$$=\frac{1}{\big(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)\big)^2}\begin{Bmatrix}\alpha_1^*(x)^2\alpha_1^{2n}(x)-\alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\alpha_1^{n+r}(x)\alpha_2^{n-r}(x)\\ -\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\alpha_2^{n+r}(x)\alpha_1^{n-r}(x)+(\alpha_2^*)^2\alpha_2^{2n}(x)\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\big(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)\big)^2}\begin{Bmatrix}\alpha_1^*(x)^2\alpha_1^{2n}(x)-\alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\alpha_1^{n+r}(x)\alpha_2^{n-r}(x)\\ -\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\alpha_2^{n+r}(x)\alpha_1^{n-r}(x)+(\alpha_2^*)^2\alpha_2^{2n}(x)\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{(-1)^n\big(q(x)\big)^n}{\big(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)\big)^2}\left[\alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\left(1-\frac{\alpha_1^r(x)}{\alpha_2^r(x)}\right)+\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\left(1-\frac{\alpha_2^r(x)}{\alpha_1^r(x)}\right)\right]$$

$$=\frac{(-1)^n\big(q(x)\big)^n}{\big(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)\big)^2}\begin{Bmatrix}\alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\left(\dfrac{\alpha_2^r(x)-\alpha_1^r(x)}{\alpha_2^r(x)\alpha_1^r(x)}\right)\alpha_1^r(x)\\ +\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\left(\dfrac{\alpha_1^r(x)-\alpha_2^r(x)}{\alpha_1^r(x)\alpha_2^r(x)}\right)\alpha_2^r(x)\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{(-1)^n\big(q(x)\big)^n}{\big(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)\big)^2}\begin{Bmatrix}\alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\left(\dfrac{\big(-q(x)\big)^r-\alpha_1^{2r}(x)}{\big(-q(x)\big)^r}\right)\\ +\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\left(\dfrac{\big(-q(x)\big)^r-\alpha_2^{2r}(x)}{\big(-q(x)\big)^r}\right)\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{(-1)^n\big(q(x)\big)^{n-r}}{\big(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)\big)^2}\begin{Bmatrix}\alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\Big(\big(-q(x)\big)^r-\alpha_1^{2r}(x)\Big)\\ +\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\Big(\big(-q(x)\big)^r-\alpha_2^{2r}(x)\Big)\end{Bmatrix} \tag{3.34}$$

elde edilir.

Diğer eşitliğin doğruluğu da benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.7. (Cassini Özdeşliği) (p,q)- Fibonacci kuaterniyon polinomu $QF_{p,q,n}(x)$ ve (p,q)- Lucas kuaterniyon polinomu $QL_{p,q,n}(x)$ olsun. Herhangi bir n doğal sayısı için

$$QF_{p,q,n-1}(x)QF_{p,q,n+1}(x) - QF^2_{p,q,1}(x)$$
$$= \frac{(-1)^n\left(q(x)\right)^{n-1}}{\left(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)\right)^2}\begin{Bmatrix} \alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\left(q(x)+\alpha_1^2(x)\right) \\ +\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\left(q(x)+\alpha_2^2(x)\right) \end{Bmatrix} \tag{3.35}$$

ve

$$QL_{p,qn-1}(x)QL_{p,q,n+1}(x) - QL^2_{p,q,1}(x)$$
$$= (-1)^n\left(q(x)\right)^{n-1}\begin{Bmatrix} \alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\left(\alpha_1^2(x)+q(x)\right) \\ +\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\left(\alpha_2^2(x)+q(x)\right) \end{Bmatrix} \tag{3.36}$$

dir.

İspat. Catalan özdeşliğinde $\mathrm{r} = 1$ yazılarak görülebilir.

Teorem 3.8. $(p, q) -$ Fibonacci ve Lucas kuaterniyon polinomları sırasıyla $QF_{p,q,n}(x)$ ve $QL_{p,q,n}(x)$ olsun. $n \geq 0$ için

1. $q(x)(QF_{p,q,n}(x))^2 + (QF_{p,q,n+1}(x))^2 = \frac{(\alpha_1^*)^2(x)\alpha_1^{2n+1}(x)-(\alpha_2^*)^2(x)\alpha_2^{2n+1}(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}$

   $q(x)(QL_{p,q,n}(x))^2 + (QL_{p,q,n+1}(x))^2$
   $$= \begin{Bmatrix} (\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(\alpha_1^*)^2(x)\alpha_1^{2n+1}(x) \\ -(\alpha_2^*)^2(x)\alpha_2^{2n+1}(x) \end{Bmatrix} \tag{3.37}$$

2. $QF_{p,q,1}(x) - \alpha_1(x)QF_{p,q,0}(x) = \alpha_2^*(x)$
   $$QF_{p,q,1}(x) - \alpha_2(x)QF_{p,q,0}(x) = \alpha_1^*(x) \tag{3.38}$$

   ve

3. $QL_{p,q,1}(x) - \alpha_1(x)QL_{p,q,0}(x) = (\alpha_1(x)-\alpha_2(x))\alpha_2^*(x)$
   $$QL_{p,q,1}(x) - \alpha_2(x)QL_{p,q,0}(x) = \left(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)\right)\alpha_1^*(x) \tag{3.39}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. 1) eşitliğini ispatlamak için ilgili formüller kullanılırsa

$$q(x)(QF_{p,q,n}(x))^2 + (QF_{p,q,n+1}(x))^2$$
$$= q(x)\left(\frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^n(x)-\alpha_2^*(x)\alpha_2^n(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^{n+1}(x)-\alpha_2^*(x)\alpha_2^{n+1}(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\right)^2$$

$$= \frac{\left\{\begin{matrix} q(x)(\alpha_1^*)^2(x)\alpha_1^{2n}(x) - 2q(x)\alpha_1^*(x)\alpha_1^n(x)\alpha_2^*(x)\alpha_2^n(x) \\ +q(x)(\alpha_2^*)^2(x)\alpha_2^{2n}(x) + (\alpha_1^*)^2(x)\alpha_1^{2n+2}(x) \\ -2\alpha_1^*(x)\alpha_1^{n+1}(x)\alpha_2^*(x)\alpha_2^{n+1}(x) + (\alpha_2^*)^2(x)\alpha_2^{2n+2}(x) \end{matrix}\right\}}{(\alpha_1(x) - \alpha_2(x))^2}$$

$$= \frac{\left\{\begin{matrix} (\alpha_1^*)^2(x)\alpha_1^{2n}(x)(q(x) + \alpha_1^2(x)) \\ +(\alpha_2^*)^2(x)\alpha_2^{2n}(x)(q(x) + \alpha_2^2(x)) \\ -2\alpha_1^*(x)\alpha_1^n(x)\alpha_2^*(x)\alpha_2^n(x)(q(x) + \alpha_1(x)\alpha_2(x)) \end{matrix}\right\}}{(\alpha_1(x) - \alpha_2(x))^2}$$

$$= \frac{(\alpha_1^*)^2(x)\alpha_1^{2n}(x)\left(q(x) - q(x)\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}\right) + (\alpha_2^*)^2(x)\alpha_2^{2n}(x)\left(q(x) + q(x)\dfrac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\right)}{(\alpha_1(x) - \alpha_2(x))^2}$$

$$= \frac{(\alpha_1^*)^2(x)\alpha_1^{2n+1}(x) - (\alpha_2^*)^2(x)\alpha_2^{2n+1}(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \tag{3.40}$$

sonuç elde edilir. Diğer eşitlik de benzer şekilde ispatlanır

Ayrıca $(p,q) -$ Lucas kuaterniyon polinomu için 2) eşitliğinin ispatı da benzerdir.

Şimdi binom toplamı ile ilişkili aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 3.9. $(p,q) -$ Fibonacci ve $(p,q) -$ Lucas kuaterniyon polinomları sırasıyla $QF_{p,q,n}(x)$ ve $QL_{p,q,n}(x)$ olsun. $n \geq 0$ için tek ve çift terimli binom toplam formülleri sırasıyla

1. $QF_{p,q,2n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m} p(x)^m QF_{p,q,m}(x)$

$$QF_{p,q,2n+1}(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m} p(x)^m QF_{p,q,m+1}(x) \tag{3.41}$$

2. $QL_{p,q,2n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m} p(x)^m QL_{p,q,m}(x)$

$$QL_{p,q,2n+1}(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m} p(x)^m QL_{p,q,m+1}(x) \tag{3.42}$$

şeklindedir.

İspat. (1) Eşitlik (2.3) ve Binet formülünden

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m} p(x)^m QF_{p,q,m}(x)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m} p(x)^m \frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^m(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^m(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m} p(x)^m \frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^m(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^m(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}$$

$$= \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m} (p(x)\alpha_1(x))^m$$

$$- \frac{\alpha_2^*(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m} (p(x)\alpha_2(x))^m$$

$$= \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} (q(x) + p(x)\alpha_1(x))^n - \frac{\alpha_2^*(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} (q(x) - p(x)\alpha_2(x))^n$$

$$= \frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^{2n}(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^{2n}(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}$$

$$= QF_{p,q,2n}(x). \tag{3.43}$$

olduğu görülür. (2) durumunun ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

Şimdi de $(p,q) -$ Fibonacci kuaterniyon polinomlarının ve $(p,q) -$ Lucas kuaterniyon polinomlarının ilk n-terim toplamını veren formül elde edilecektir.

Teorem 3.10. $(p,q) -$ Fibonacci ve Lucas kuaterniyon polinomları sırasıyla $QF_{p,q,n}(x)$ ve $QL_{p,q,n}(x)$ olsun. Dizilerin ilk n −terim toplamları

$$\sum_{s=0}^{n} QF_{p,q,s}(x) = \frac{\begin{Bmatrix} -q(x)QF_{p,q,n}(x) - QF_{p,q,n+1}(x) \\ +QF_{p,q,0}(x) - \frac{\alpha_1^*(x)\alpha_2(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_1(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)} \end{Bmatrix}}{(\alpha_1(x)-1)(\alpha_2(x)-1)} \tag{3.44}$$

ve

$$\sum_{s=0}^{n} QL_{p,q,s}(x) = \frac{\begin{Bmatrix} -q(x)QL_{p,q,n}(x) - QL_{p,q,n+1}(x) \\ +QL_{p,q,0}(x) - \alpha_1^*(x)\alpha_2(x) + \alpha_2^*(x)\alpha_1(x) \end{Bmatrix}}{(\alpha_1(x)-1)(\alpha_2(x)-1)} \tag{3.45}$$

dir.

İspat. Binet formülü ve $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ ile ilişkili (2.3) özdeşlikleri kullanılarak

$$\sum_{s=0}^{n} QF_{p,q,s}(x)$$

$$= \frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^s(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^s(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}$$

$$= \frac{1}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \sum_{s=0}^{n} (\alpha_1^*(x)\alpha_1^s(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^s(x))$$

$$= \frac{1}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \left(\alpha_1^*(x) \sum_{s=0}^{n} \alpha_1^s(x) - \alpha_2^*(x) \sum_{s=0}^{n} \alpha_2^s(x) \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \left(\alpha_1^*(x) \frac{\alpha_1^{n+1}(x) - 1}{\alpha_1(x) - 1} - \alpha_2^*(x) \frac{\alpha_2^{n+1}(x) - 1}{\alpha_2(x) - 1} \right)$$

$$= \frac{\alpha_1^*(x)(\alpha_1^{n+1}(x)-1)(\alpha_2(x)-1) - \alpha_2^*(x)(\alpha_2^{n+1}(x)-1)(\alpha_1(x)-1)}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(\alpha_1(x)-1)(\alpha_2(x)-1)}. \tag{3.46}$$

elde edilir.

Diğer eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

4. $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ −FİBONACCİ OKTONYON POLİNOMLARI

Bu bölümde $(p,q)-$ Fibonacci oktonyon polinomları ve $(p,q)-$ Lucas oktonyon polinomları tanımlanmıştır. Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve $(p,q)-$ Fibonacci ve $(p,q)-$ Lucas oktonyon polinom dizilerine ait bazı özdeşlikler elde edilmiştir [23].

4.1. $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ −FİBONACCİ OKTONYON POLİNOMLARI ÜZERİNE

$h(x)$ reel katsayılı bir polinom olsun. $F_{h,n}(x)$ n. dereceden $h(x)$ -Fibonacci polinomu olmak üzere, $h(x)$ -Fibonacci oktonyon polinomları

$$O_{h,n}(x)=\sum_{s=0}^{7}F_{h,n+s}(x)e_s \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlıdır.

$(p,q)-$ Fibonacci oktonyon polinomları

$$OF_{p,q,n}(x)=\sum_{k=0}^{7}F_{p,q,n+k}(x)e_k \tag{4.2}$$

rekürans bağıntısı yardımıyla tanımlanır. Burada $F_{p,q,n+k}$, $(n+k)$. dereceden $(p,q)-$ Fibonacci polinomlarıdır. Bu oktonyon dizisinin başlangıç değerleri

$$\begin{aligned}OF_{p,q,0}(x)=\sum_{k=0}^{7}F_{p,q,k}(x)e_k&\\ &=e_1+p(x)e_2+\big(p^2(x)+q(x)\big)e_3+\big(p^3(x)+2p(x)q(x)\big)e_4\\ &+\big(p^4(x)+3p^2(x)q(x)+q^2(x)\big)e_5\\ &+\big(p^5(x/)+4p^3(x)q(x)+3p(x)q^2(x)\big)e_6\\ &+\big(p^6(x)+5p^4(x)q(x)+6p^2(x)q^2(x)+q^3(x)\big)e_7\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$OF_{p,q,1}(x)=\sum_{k=0}^{7}F_{p,q,1+k}(x)e_k=e_0+p(x)e_1+(p^2(x)+q(x))e_2$$

$$+\big(p^3(x)+2p(x)q(x)\big)e_3+\big(p^4(x)+3p^2(x)q(x)+q^2(x)\big)e_4$$
$$+\big(p^5(x)+4p^3(x)q(x)+3p(x)q^2(x)\big)e_5$$
$$+\big(p^6(x)+5p^4(x)q(x)+6p^2(x)q^2(x)+q^3(x)\big)e_6$$
$$+(p^7(x)\ +6p^5(x)q(x)+10p^3(x)q^2(x)+4p(x)q^3(x))e_7. \tag{4.4}$$

ile verilir.

Ayrıca $OF_{p,q,n}(x)$ için

$$OF_{p,q,n+1}(x)=\sum_{k=0}^{7}F_{p,q,n+1+k}(x)e_k$$
$$=\sum_{k=0}^{7}(p(x)F_{p,q,n+k}(x)+q(x)F_{p,q,n-1+k}(x))e_k$$
$$=p(x)\textstyle\sum_{k=0}^{7}F_{p,q,n+k}(x)e_k+q(x)\sum_{k=0}^{7}F_{p,q,n-1+k}(x)e_k \tag{4.5}$$

ikinci basamaktan bir rekürans bağıntısı elde edilir.

$$OF_{p,q,n+1}(x)=p(x)OF_{p,q,n}(x)+q(x)OF_{p,q,n-1}(x) \tag{4.6}$$

dir.

$n\geq 1$ için yukarıda tanımlanan başlangıç koşulları altında, $L_{p,q,n+k}$ $(n+k)$. dereceden $(p,q)-$ Lucas polinomu olmak üzere, n. dereceden Lucas oktonyon polinomu

$$OL_{p,q,n}(x)=\textstyle\sum_{k=0}^{7}L_{p,q,n+k}(x)e_k \tag{4.7}$$

ile tanımlıdır.

4.2. (p,q) −FİBONACCİ OKTONYON POLİNOMLARI İÇİN SONUÇLAR

Bu bölümde (p,q) −Fibonacci ve Lucas oktonyon polinomları için üreteç fonksiyonlar, Catalan ve Cassini özdeşliklerine ek olarak binom formülleri ve ilk n terim toplamı ile ilgili sonuçlar bulunmuştur.

Teorem 4.1. (p,q) −Fibonacci ve (p,q) −Lucas oktonyon polinomları sırasıyla $QF_{p,q,n}(x)$ ve $QL_{p,q,n}(x)$ olmak üzere üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$g_{OF}(t)=\frac{OF_{p,q,0}(x)+(OF_{p,q,1}(x)-p(x)OF_{p,q,0}(x))t}{1-p(x)t-q(x)t^2} \tag{4.8}$$

ve

$$g_{OL}(t)=\frac{OL_{p,q,0}(x)+(OL_{p,q,1}(x)-p(x)OL_{p,q,0}(x))t}{1-p(x)t-q(x)t^2} \tag{4.9}$$

dir.

İspat. $OF_{p,q,n}(x)$ için $g_{OF}(t)$ üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} OF_{p,q,n}(x)t^n$$

$$=OF_{p,q,0}(x)+OF_{p,q,1}(x)t+OF_{p,q,2}(x)t^2+\cdots+OF_{p,q,n}(x)t^n+\cdots \tag{4.10}$$

ile tanımlanır.

$-p(x)tg_{OF}(t), -q(x)t^2g_{OF}(t)$ ve $g_{OF}(t)$ nin kuvvet serisi açılımları sırasıyla

$$g_{OF}(t)=\begin{Bmatrix} OF_{p,q,0}(x)+OF_{p,q,1}(x)t+OF_{p,q,2}(x)t^2+\cdots+OF_{p,q,n}(x)t^n+\cdots \\ +OF_{p,q,n}(x)t^n+\cdots \end{Bmatrix}$$

$$-p(x)tg_{OF}(t)=\begin{Bmatrix} -p(x)OF_{p,q,0}(x)t-p(x)OF_{p,q,1}(x)t^2-p(x)OF_{p,q,2}(x)t^3 \\ -p(x)OF_{p,q,n}(x)t^{n+1}-\cdots \end{Bmatrix}$$

$$-q(x)t^2g_{OF}(t)=\begin{Bmatrix} -q(x)t^2g_{OF}(t)-q(x)OF_{p,q,1}(x)t^3-q(x)OF_{p,q,2}(x)t^4 \\ -\cdots-q(x)OF_{p,q,n}(x)t^{n+2}-\cdots \end{Bmatrix} \tag{4.11}$$

olup $g_{OF}(t)-g_{OF}(t)p(x)t-g_{OF}(t)q(x)t^2$ nin açılımı

$$g_{OF}(t)[1-p(x)t-q(x)t^2]$$

$$=OF_{p,q,0}(x)+OF_{p,q,1}(x)t-p(x)OF_{p,q,0}(x)t$$

$$+[OF_{p,q,2}(x)-p(x)OF_{p,q,1}(x)-q(x)OF_{p,q,0}(x)]t^2$$

$$+[OF_{p,q,3}(x)-p(x)OF_{p,q,2}(x)-q(x)OF_{p,q,1}(x)]t^3$$

$$+\ldots+[OF_{p,q,n}(x)-p(x)OF_{p,q,n-1}(x)-q(x)OF_{p,q,n-2}(x)]t^n+\ldots$$

$$=OF_{p,q,0}(x)+[OF_{p,q,1}(x)-p(x)OF_{p,q,0}(x)]t \tag{4.12}$$

olur. Buradan

$$g_{OF}(t)=\frac{OF_{p,q,0}(x)+\left(OF_{p,q,1}(x)-p(x)OF_{p,q,0}(x)\right)t}{1-p(x)t-q(x)t^2} \tag{4.13}$$

eşitliği iddia edildiği şekliyle elde edilir.

Diğer durum da benzer biçimde gösterilebilir.

Şimdi aşağıdaki lemmalar daha sonraki teoremlerde kullanılmak üzere verilecektir.

Lemma 4.2. Teorem 4.1 de verilen üreteç fonksiyonu için

$$g_{OF}(t) = \frac{1}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\left\{\begin{array}{c}\frac{OF_{p,q,1}(x)-\alpha_2(x)OF_{p,q,0}(x)}{1-\alpha_1(x)t} \\ -\frac{OF_{p,q,1}(x)-\alpha_1(x)OF_{p,q,0}(x)}{1-\alpha_2(x)t}\end{array}\right\} \tag{4.14}$$

$$g_{OL}(t) = \frac{1}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\left\{\begin{array}{c}\frac{OL_{p,q,1}(x)-\alpha_2(x)OL_{p,q,0}(x)}{1-\alpha_1(x)t} \\ -\frac{OL_{p,q,1}(x)-\alpha_1(x)OL_{p,q,0}(x)}{1-\alpha_2(x)t}\end{array}\right\} \tag{4.15}$$

ifadeleri geçerlidir.

İspat. Teorem 4.1 ve (2.3) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
&\frac{OF_{p,q,0}(x)+[OF_{p,q,1}(x)-p(x)OF_{p,q,0}(x)]t}{1-p(x)t-q(x)t^2} = \frac{OF_{p,q,0}(x)+[OF_{p,q,1}(x)-p(x)OF_{p,q,0}(x)]t}{(1-\alpha_1(x)t)(1-\alpha_2(x)t)} \\
&= \left(\frac{OF_{p,q,0}(x)+[OF_{p,q,1}(x)-(\alpha_1(x)+\alpha_2(x))OF_{p,q,0}(x)]t}{(1-\alpha_1(x)t)(1-\alpha_2(x)t)}\right)\times\left(\frac{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\right) \\
&= \frac{\left\{\begin{array}{c}\alpha_1(x)OF_{p,q,0}(x)+\alpha_1(x)OF_{p,q,1}(x)t-\alpha_1^2(x)OF_{p,q,0}(x)t \\ -\alpha_1(x)\alpha_2(x)OF_{p,q,0}(x)t-\alpha_2(x)OF_{p,q,0}(x)-\alpha_2(x)OF_{p,q,1}(x)t \\ +\alpha_1(x)\alpha_2(x)OF_{p,q,0}(x)t+\alpha_2^2(x)OF_{p,q,0}(x)t+OF_{p,q,1}(x)-OF_{p,q,1}(x)\end{array}\right\}}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(1-\alpha_1(x)t)(1-\alpha_2(x)t)} \\
&= \frac{\left\{\begin{array}{c}OF_{p,q,1}(x)(1-\alpha_2(x)t)+\alpha_2(x)OF_{p,q,0}(x)(-1+\alpha_2(x)t) \\ +OF_{p,q,1}(x)(-1+\alpha_1(x)t)+\alpha_1(x)OF_{p,q,0}(x)(1-\alpha_1(x)t)\end{array}\right\}}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(1-\alpha_1(x)t)(1-\alpha_2(x)t)} \\
&= \frac{\left\{\begin{array}{c}(1-\alpha_2(x)t)(OF_{p,q,1}(x)-\alpha_2(x)OF_{p,q,0}(x)) \\ -(1-\alpha_1(x)t)(OF_{p,q,1}(x)-\alpha_1(x)OF_{p,q,0}(x))\end{array}\right\}}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(1-\alpha_1(x)t)(1-\alpha_2(x)t)} \\
&= \frac{1}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\left[\frac{OF_{p,q,1}(x)-\alpha_2(x)OF_{p,q,0}(x)}{1-\alpha_1(x)t}-\frac{OF_{p,q,1}(x)-\alpha_1(x)OF_{p,q,0}(x)}{1-\alpha_2(x)t}\right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Diğer durum da benzer biçimde gösterilebilir.

Şimdi $OF_{p,q,n}(x)$ ve $OL_{p,q,n}(x)$ için Binet formülleri hesaplanacaktır.

Teorem 4.3. (p,q) −Fibonacci ve (p,q) −Lucas oktonyon polinomları sırasıyla $QF_{p,q,n}(x)$ ve $QL_{p,q,n}(x)$ olsun. $n \geq 0$ için $(p,q) -$ Fibonacci oktonyon polinomlarının Binet formülleri sırasıyla

$$OF_{p,q,n}(x) = \frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^n(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^n(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \tag{4.17}$$

ve

$$OL_{p,q,n}(x) \quad = \alpha_1^*(x)\alpha_1^n(x) + \alpha_2^*(x)\alpha_2^n(x) \tag{4.18}$$

dir. Burada $\alpha_1^*(x) = \sum_{k=0}^{7} \alpha_1^k(x)e_k$ ve $\alpha_2^*(x) = \sum_{k=0}^{7} \alpha_2^k(x)e_k$ dir.

İspat. Lemma 4.2 den,

$$g_{OF}(t) = \frac{1}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}\left((OF_{p,q,1}(x) - \alpha_2(x)OF_{p,q,0}(x)) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^n(x)t^n \right.$$

$$\left. -(OF_{p,q,1}(x) - \alpha_1(x)OF_{p,q,0}(x)) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_2^n(x)t^n \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{7} (F_{p,q,1+k}(x) - \alpha_2(x)F_{p,q,k}(x))e_k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^n(x)t^n \\ -\sum_{k=0}^{7} (F_{p,q,1+k}(x) - \alpha_1(x)F_{p,q,k}(x))e_k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^n(x)t^n \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \left(\sum_{k=0}^{7} \alpha_1^k(x)e_k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^n(x)t^n - \sum_{k=0}^{7} \alpha_2^k(x)e^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_2^n(x)t^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^n(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^n(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} t^n \tag{4.19}$$

olduğu görülür ve sonuç elde edilir.

Diğer durum da benzer biçimde gösterilebilir.

Şimdi Binet formülü kullanılarak Catalan ve Cassini özdeşlikleri hesaplanacaktır.

Teorem 4.4. (Catalan Özdeşliği) (p,q)-Fibonacci ve (p,q)-Lucas oktonyon polinomları sırasıyla $OF_{p,q,n}(x)$ ve $OL_{p,q,n}(x)$ olsun. n ve r negatif olmayan tamsayılar ve $r \leq n$ olmak üzere sırasıyla,

$OF_{p,q,n-r}(x)OF_{p,q,n+r}(x) - OF_{p,q,n}^2(x)$

$$= \frac{(-1)^n\left(q(x)\right)^{n-r}}{\left(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)\right)^2}\begin{Bmatrix} \alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\left(\left(-q(x)\right)^r - \alpha_1^{2r}(x)\right) \\ +\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\left(\left(-q(x)\right)^r - \alpha_2^{2r}(x)\right) \end{Bmatrix} \tag{4.20}$$

ve

$OL_{p,q,n-r}(x)OL_{p,q,n+r}(x) - OL_{p,q,n}^2(x)$

$$= \begin{Bmatrix} (-1)^n\left(q(x)\right)^{n-r}\left(\alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\left((-1)^r\alpha_1^{2r}(x) - q^r\,(x)\right)\right. \\ \left.+\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\left((-1)^r\alpha_2^{2r}(x) - q^r\,(x)\right)\right) \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

ifadeleri sağlanır.

İspat. Teorem 4.1 ve Lemma 3.4 kullanılarak

$OF_{p,q,n+r}(x)OF_{p,q,n-r}(x) - OF_{p,q,n}^2(x)$

$$= \left(\frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^{n+r}(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^{n+r}(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\right)\left(\frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^{n-r}(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^{n-r}(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\right)$$
$$-\left(\frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^{n}(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^{n}(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\right)\left(\frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^{n}(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^{n}(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}\right) \tag{4.22}$$

bulunur. Daha sonra (2.3) eşitliğinden $\alpha_1(x)$ ve $\alpha_2(x)$ köklerini içeren özdeşlikler yardımıyla

$$= \frac{1}{\left(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)\right)^2}\begin{Bmatrix} \alpha_1^*(x)^2\alpha_1^{2n}(x) - \alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\alpha_1^{n+r}(x)\alpha_2^{n-r}(x) \\ -\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\alpha_2^{n+r}(x)\alpha_1^{n-r}(x) + (\alpha_2^*)^2\alpha_2^{2n}(x) \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\left(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)\right)^2}\begin{Bmatrix} \alpha_1^*(x)^2\alpha_1^{2n}(x) - \alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\alpha_1^{n+r}(x)\alpha_2^{n-r}(x) \\ -\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\alpha_2^{n+r}(x)\alpha_1^{n-r}(x) + (\alpha_2^*)^2\alpha_2^{2n}(x) \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^n\left(q(x)\right)^n}{\left(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)\right)^2}\left[\alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\left(1-\frac{\alpha_1^r(x)}{\alpha_2^r(x)}\right) + \alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\left(1-\frac{\alpha_2^r(x)}{\alpha_1^r(x)}\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^n\left(q(x)\right)^n}{\left(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)\right)^2}\begin{Bmatrix} \alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\left(\frac{\alpha_2^r(x)-\alpha_1^r(x)}{\alpha_2^r(x)\alpha_1^r(x)}\right)\alpha_1^r(x) \\ +\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\left(\frac{\alpha_1^r(x)-\alpha_2^r(x)}{\alpha_1^r(x)\alpha_2^r(x)}\right)\alpha_2^r(x) \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^n\left(q(x)\right)^n}{\left(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)\right)^2}\begin{Bmatrix} \alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\left(\frac{\left(-q(x)\right)^r-\alpha_1^{2r}(x)}{\left(-q(x)\right)^r}\right) \\ +\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\left(\frac{\left(-q(x)\right)^r-\alpha_2^{2r}(x)}{\left(-q(x)\right)^r}\right) \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^n (q(x))^{n-r}}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))^2} \begin{Bmatrix} \alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\left(\left(-q(x)\right)^r - \alpha_1^{2r}(x)\right) \\ +\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\left(\left(-q(x)\right)^r - \alpha_2^{2r}(x)\right) \end{Bmatrix} \tag{4.23}$$

elde edilir.

Diğer eşitliğin doğruluğu da benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.5. (Cassini Özdeşliği) (p,q)- Fibonacci oktonyon polinomu $OF_{p,q,n}(x)$ ve (p,q)- Lucas kuaterniyon polinomu $OL_{p,q,n}(x)$ olsun. Herhangi bir n doğal sayısı için

$$OF_{p,q,n-1}(x)OF_{p,q,n+1}(x) - OF_{p,q,1}^2(x) =$$
$$\frac{(-1)^n (q(x))^{n-1}}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))^2} \begin{Bmatrix} \alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\left(q(x)+\alpha_1^2(x)\right) \\ +\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\left(q(x)+\alpha_2^2(x)\right) \end{Bmatrix} \tag{4.24}$$

ve

$$OL_{p,qn-1}(x)OL_{p,q,n+1}(x) -$$
$$OL_{p,q,1}^2(x)(-1)^n\left(q(x)\right)^{n-1} \begin{Bmatrix} \alpha_1^*(x)\alpha_2^*(x)\left(\alpha_1^2(x)+q(x)\right) \\ +\alpha_2^*(x)\alpha_1^*(x)\left(\alpha_2^2(x)+q(x)\right) \end{Bmatrix} \tag{4.25}$$

dir.

Teorem 4.6. $(p,q)-$ Fibonacci ve $(p,q)-$ Lucas oktonyon polinomları sırasıyla $OF_{p,q,n}(x)$ ve $OL_{p,q,n}(x)$ olsun. $n \geq 0$ olmak üzere,

1. $q(x)(OF_{p,q,n}(x))^2 + (OF_{p,q,n+1}(x))^2 = \frac{(\alpha_1^*)^2(x)\alpha_1^{2n+1}(x)-(\alpha_2^*)^2(x)\alpha_2^{2n+1}(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}$

   $$q(x)(OL_{p,q,n}(x))^2 + (OL_{p,q,n+1}(x))^2 = \begin{Bmatrix} (\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(\alpha_1^*)^2(x)\alpha_1^{2n+1}(x) \\ -(\alpha_2^*)^2(x)\alpha_2^{2n+1}(x) \end{Bmatrix}$$

   $$OF_{p,q,1}(x) - \alpha_1(x)QF_{p,q,0}(x) = \alpha_2^*(x)$$
   $$OF_{p,q,1}(x) - \alpha_2(x)QF_{p,q,0}(x) = \alpha_1^*(x) \tag{4.26}$$

2. $OL_{p,q,1}(x) - \alpha_1(x)OL_{p,q,0}(x) = (\alpha_1(x)-\alpha_2(x))\alpha_2^*(x)$

   $$OL_{p,q,1}(x) - \alpha_2(x)OL_{p,q,0}(x) = (\alpha_1(x)-\alpha_2(x))\alpha_1^*(x) \tag{4.27}$$

eşitlikleri vardır.

İspat. (1) $(p,q)-$ Fibonacci oktonyon polinomları için (2.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$q(x)(OF_{p,q,n}(x))^2 + (OF_{p,q,n+1}(x))^2$$

$$= q(x)\left(\frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^n(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^n(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^{n+1}(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^{n+1}(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}\right)^2$$

$$= \frac{\begin{Bmatrix} q(x)(\alpha_1^*)^2(x)\alpha_1^{2n}(x) - 2q(x)\alpha_1^*(x)\alpha_1^n(x)\alpha_2^*(x)\alpha_2^n(x) + q(x)(\alpha_2^*)^2(x)\alpha_2^{2n}(x) \\ +(\alpha_1^*)^2(x)\alpha_1^{2n+2}(x) - 2\alpha_1^*(x)\alpha_1^{n+1}(x)\alpha_2^*(x)\alpha_2^{n+1}(x) + (\alpha_2^*)^2(x)\alpha_2^{2n+2}(x) \end{Bmatrix}}{(\alpha_1(x) - \alpha_2(x))^2}$$

$$= \frac{(\alpha_1^*)^2(x)\alpha_1^{2n}(x)\left(q(x) - q(x)\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}\right) + (\alpha_2^*)^2(x)\alpha_2^{2n}(x)\left(q(x) + q(x)\frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\right)}{(\alpha_1(x) - \alpha_2(x))^2}$$

$$= \frac{(\alpha_1^*)^2(x)\alpha_1^{2n+1}(x) - (\alpha_2^*)^2(x)\alpha_2^{2n+1}(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \tag{4.28}$$

elde edilir.

Diğer durumlar da benzer şekilde ispatlanır.

Şimdi binom toplamıyla ilgili aşağıdaki teorem ispatlanacaktır.

Teorem 4.7. (p,q) –Fibonacci and (p,q) –Lucas oktonyon polinomları sırasıyla $OF_{p,q,n}(x)$ ve $OL_{p,q,n}(x)$ olsun. $n \geq 0$ için, tek ve çift terimli binom formülleri

1. $OF_{p,q,2n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m} p(x)^m OF_{p,q,m}(x)$ (4.29)

   $OF_{p,q,2n+1}(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m} p(x)^m OF_{p,q,m+1}(x)$ (4.30)

2. $OL_{p,q,2n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m} p(x)^m OFL_{p,q,m}(x)$ (4.31)

   $OL_{p,q,2n+1}(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m} p(x)^m OL_{p,q,m+1}(x)$ (4.32)

sağlanır.

İspat. (1) Eşitlik (2.3) ve Binet formülleri göz önüne alınırsa,

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m} p(x)^m OF_{p,q,m}(x)$$

$$= \frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^m(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^m(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}$$

$$= \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m}(p(x)\alpha_1(x))^m$$

$$- \frac{\alpha_2^*(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q(x)^{n-m}(p(x)\alpha_2(x))^m$$

$$= \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}(q(x) + p(x)\alpha_1(x))^n - \frac{\alpha_2^*(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}(q(x) - p(x)\alpha_2(x))^n$$

$$= \frac{\alpha_1^*(x)\alpha_1^{2n}(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^{2n}(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}$$

$$= OF_{p,q,2n}(x) \tag{4.33}$$

elde edilir.

Tek indisli durum da benzer şekilde hesaplanabilir.

Ayrıca $OL_{p,q,n}(x)$ in diğer durumları da benzer bir şekilde elde edilir.

Şimdi $(p,q) -$ Fibonacci ve $(p,q) -$ Lucas oktonyon polinom dizilerinin sırasıyla ilk n terim toplamını veren formüller elde edilecektir.

Teorem 4.8. $(p,q) -$ Fibonacci ve $(p,q) -$ Lucas oktonyon polinomları $OF_{p,q,n}(x)$ ve $OL_{p,q,n}(x)$ olsun. $OF_{p,q,n}(x)$ ve $OL_{p,q,n}(x)$ dizilerinin ilk $n -$terim toplamı

$$\sum_{m=0}^{n} OF_{p,q,m}(x) = \frac{\left\{\begin{matrix} -q(x)OF_{p,q,n}(x) - OF_{p,q,n+1}(x) + OF_{p,q,0}(x) \\ -\frac{\left\{\begin{matrix} \alpha_1^*(x)\alpha_2(x) \\ -\alpha_2^*(x)\alpha_1(x) \end{matrix}\right\}}{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)} \end{matrix}\right\}}{(\alpha_1(x)-1)(\alpha_2(x)-1)} \tag{4.34}$$

ve

$$\sum_{m=0}^{n} OL_{p,q,m}(x) = \frac{-q(x)OL_{p,q,n}(x) - OL_{p,q,n+1}(x) + OL_{p,q,0}(x) - \left\{\begin{matrix} \alpha_1^*(x)\alpha_2(x) \\ +\alpha_2^*(x)\alpha_1(x) \end{matrix}\right\}}{(\alpha_1(x)-1)(\alpha_2(x)-1)} \tag{4.35}$$

dir.

İspat. $\alpha_1(x)$ ve $\alpha_2(x)$ kökleri ile ilgili (2.3) eşitlikleri ve Binet formülü kullanılırsa

$$\sum_{m=0}^{n} OF_{p,q,m}(x)$$

$$= \frac{1}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \sum_{m=0}^{n} (\alpha_1^*(x)\alpha_1^m(x) - \alpha_2^*(x)\alpha_2^m(x))$$

$$= \frac{1}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \left(\alpha_1^*(x) \sum_{m=0}^{n} \alpha_1^m(x) - \alpha_2^*(x) \sum_{m=0}^{n} \alpha_2^m(x) \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \left(\alpha_1^*(x) \frac{\alpha_1^{n+1}(x) - 1}{\alpha_1(x) - 1} - \alpha_2^*(x) \frac{\alpha_2^{n+1}(x) - 1}{\alpha_2(x) - 1} \right)$$

$$= \frac{\alpha_1^*(x)(\alpha_1^{n+1}(x) - 1)(\alpha_2(x) - 1) - \alpha_2^*(x)(\alpha_2^{n+1}(x) - 1)(\alpha_1(x) - 1)}{(\alpha_1(x) - \alpha_2(x))(\alpha_1(x) - 1)(\alpha_2(x) - 1)}$$

eşitliği elde edilir.

$OL_{p,q,n}(x)$ için diğer eşitlik benzer şekilde gösterilebilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada öncelikle (p,q)-Fibonacci ve (p,q)-Lucas kuaterniyon polinomları tanımlanmış, bu polinomlar ile ilgili Binet formülü, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, binom toplam formülü ve üreteç fonksiyonu ile ilgili yeni özdeşlikler elde edilmiştir. Diğer bir incelenen konu ise (p,q)-Fibonacci ve (p,q)-Lucas oktonyon polinomlarıdır. (p,q)-Fibonacci ve (p,q)-Lucas kuaterniyon polinomları ile ilgili elde edilen benzer sonuçlar (p,q)-Fibonacci ve (p,q)-Lucas oktonyon polinomları içinde bulunmuştur. Kuaterniyonlar ve oktonyonlar, kuantum fiziğinde, uygulamalı matematikte grafik teorisinde ve diferansiyel denklemlerde kullanılması dolayısıyla büyük önem taşımaktadır. Gelecekteki çalışmalarımızda ikinci basamaktan rekürans bağıntıları yerine üçüncü ve dördüncü basamaktan rekürans bağıntısına sahip kuaterniyon ve oktonyon dizilerinin incelenmesi planlanmaktadır.

6. KAYNAKLAR

[1] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Number with Applications*, 2. baskı, New Jersey, USA, Wiley & Sons, 2019.

[2] J. Emery, *Fibonacci Numbers and The Golden Ratio Continued Fractions,* Emery University Press.

[3] C. A. Church ve M. Bicknel, "Exponential generating functions for Fibonacci identities", *The Fibonacci Quaterly*, c. 11, sayı 3, ss. 275-281, 1973.

[4] A. F. Horadam, "A Generalized Fibonacci sequence", *American Mathematical Monthly,* c. 68, sayı 5, ss. 455-459, 1961.

[5] A. F. Horadam, "Quaternion recurrence relations", *Ulam Quaterly,* c. 2, sayı 2, ss. 23-33, 1993.

[6] S. Halici, "On Fibonacci quaternions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, c. 22, ss. 321– 327, 2012.

[7] J. L. Ramirez, "Some combinatorial properties of the k −Fibonacci and the k-Lucas Quaternions", *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, c. 23, sayı 2, ss. 201- 212, 2015.

[8] A. F. Horadam, "Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions", *American Mathematical Monthly*, c. 70, ss. 289-291, 1963.

[9] M. R. Iyer, "A note on Fibonacci quaternions", *Fibonacci Quarterly,* c. 3, ss. 225-229, 1969.

[10] M. R. Iyer, "Some results on Fibonacci quaternions", *Fibonacci Quarterly*, c. 7, ss. 201-210, 1969.

[11] P. Catarino, "A note on h(x)-Fibonacci quaternion polynomials", *Chaos, Solitons and Fractals*, c. 7, ss. 1-5, 2015.

[12] C. Bolat ve A. İpek, "On Pell quaternions and Pell-Lucas quaternions", *Advances in Applied Clifford Algebras,* c. 26, sayı 1, ss. 39– 51, 2016.

[13] A. Szynal-Liana ve I. Wloch, "The Pell quaternions and the Pell-Octonions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, c. 26, sayı 1, ss. 435– 440, 2016.

[14] M. Akyiğit, H. H. Kösal, ve M. Tosun, "Fibonacci generalized quaternions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, c. 24, ss. 631– 641, 2014.

[15] M. Akyiğit, H. H. Kösal, ve M. Tosun, "Split Fibonacci quaternions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, c. 23, sayı 3, ss. 535– 545, 2013.

[16] A. Nalli ve P. Haukkanen, "On generalized Fibonacci and Lucas polynomials", *Chaos, Solitons and Fractals*, c. 42, ss. 3179-3186, 2009.

[17] P. Ribenboim, *My Number, My Friends*. *(Popular Lectures On Number Theory)*, New York, USA, Springer-Verlag.

[18] A. I. Kostrikin ve I. R. Shafarevich, *Algebra IX*, Springer.

[19] J. P. Ward, *Quaternions and Cayley Numbers*, London, England, Kluwer Academic Publishers.

[20] A. İpek ve K. Arı, “On $h(x)$-Fibonacci octonion polynomials”, *Alabama Journal of Mathematics*, c. 39, ss. 1-6, 2015.

[21] J. Wang, “Some new results for the (p,q)-Fibonacci and Lucas polynomials”, *Advances in Difference Equations*, c. 64, 2014, ss. 1-15.

[22] A. Özkoç ve A. Porsuk, “A note for the (p,q)-Fibonacci and Lucas quaternions polynomials”, *Konuralp Journal of Mathematics*, c. 5, sayı 2, ss. 36-46, 2017.

[23] A. Özkoç Öztürk ve A. Porsuk, “Some remarks regarding the $(p,q)-$Fibonacci and Lucas octonion polynomials”, *Universal Journal of Mathematics and Applications*, c. 1, sayı. 1, ss. 46-53, 2018.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ayhan PORSUK

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği	Başkent Üniversitesi	2007
Lisans	Matematik	Gazi Üniversitesi	2004
Lise		Ankara Cumhuriyet Lisesi	1996

YAYINLAR

1. A. Özkoç ve A. Porsuk, "A note for the (p,q) −Fibonacci and Lucas quaternion polynomials", *Konuralp Journal of Mathematics*, c. 5, sayı 2, ss. 36-46, 2017.

2. A. Özkoç Öztürk ve A. Porsuk, "Some remarks regarding the (p,q) −Fibonacci and Lucas octonion polynomials", *Universal Journal of Mathematics and Applications*, c. 1, sayı 1, ss. 46-53, 2018.