



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE SABİT
NOKTA TEOREMLERİ**

REYHAN ÖZÇELİK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. EMRAH EVREN KARA**

DÜZCE, 2019

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE SABİT
NOKTA TEOREMLERİ**

Reyhan Özçelik tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Emrah Evren KARA

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT

Sakarya Üniversitesi

Doç. Dr. Emrah Evren KARA

Düzce Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Merve İLKHAN

Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 02/08/2019

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

02 Ağustos 2019

Reyhan Özçelik

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanma sürecinin her aşamasında fikirlerini, bilgilerini, değerli tecrübelerini ve yardımlarını benden esirgemeyen, birlikte çalışmaktan onur duyduğum çok değerli hocam Doç. Dr. Emrah Evren Kara'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Merve İlkan'a da şükranlarımı sunarım.

Hayatım boyunca sevgilerini, yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme, çalışmalarımda beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan sevgili eşim Kubilay Özçelik'e ve hayatımın anlamı oğlum Mert Mete Özçelik'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

02 Ağustos 2019

Reyhan Özçelik

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	4
2.1. METRİK UZAYLAR VE GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR	4
2.1.1. Metrik Uzaylar	4
2.1.2. b-Metrik Uzay	6
2.1.3. Dikdörtgensel Metrik Uzaylar	8
2.1.4. Dikdörtgensel b-Metrik Uzaylar	10
2.1.5. Metrik Uzayların Karşılaştırılması	11
2.2. SABİT NOKTA TEORİSİ	14
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ DİKDÖRTGENSEL b-METRİK UZAYDA (α, ϕ) -MEIR-KEELER DARALMA FONKSİYONUNUN SABİT NOKTALARI	19
4. b-METRİK UZAY ÜZERİNDE CF-SİMULATION FONKSİYONU VEYA FONKSİYONLARI İLE ÇAKIŞIK NOKTA TEOREMLERİ	29
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	37
6. KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	41

SİMGELER

$DbMU$	Dikdörtgensel b -metrik uzay
DMU	Dikdörtgensel metrik uzay
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tüm simülasyon fonksiyon ailesi
$\mathbb{Z}_F$	C_F -simülasyon fonksiyonları ailesi



ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Reyhan ÖZÇELİK
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. E. Evren KARA
Ağustos 2019, 40 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tez konusuyla ilgili literatürde yapılan çalışmalara yer verildi. İkinci bölümde bu çalışmada kullanılacak temel tanım ve teoremlerden bahsedildi. Üçüncü bölümde genelleştirilmiş dikdörtgensel (rectangular) b -metrik uzay üzerinde tanımlı (α, ϕ) -Meir-Keeler daralma dönüşümünün sabit noktaları ile ilgili bazı teoremler ispatlandı. Son bölümde C_F -simülasyon fonksiyon yardımıyla b -metrik uzay üzerinde iki dönüşüm için çakışık noktaların varlığı araştırıldı.

Anahtar sözcükler: Sabit nokta teorisi, Daralma dönüşümü, Genelleştirilmiş metrik.

ABSTRACT

FIXED POINT THEOREMS ON GENERALIZED METRIC SPACES

Reyhan ÖZÇELİK

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master's Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. E. Evren KARA

August 2019, 40 pages

This study consists of four parts. In the first part, the studies related to the topic of the thesis made in the literature are given. In the second part, the basic definitions and theorems to be used in this study are mentioned. In the third part, some theorems related to the fixed points of a (α, ϕ) -Meir-Keeler contractive mapping defined on a generalized rectangular b -metric space are proved. In the last section, the existence of coincidence points for two mappings defined on a b -metric space are investigated with the help of the C_F -simulation function.

Keywords: Fixed point theory, Contraction mapping, Generalized metric.

1. GİRİŞ

Matematiğin farklı alanlarında $F(x) = 0$ veya $T(x) = x$ şeklindeki denklemlerle karşılaşılmalıdır. Bu tür denklemleri çözmek zaten başlı başına problemidir. Bu denklem türlerini çözmek için ya tam sonucu ya da yaklaşık sonucu veren farklı yöntemler vardır. Bu yöntemlerin başında sabit nokta teorisi gelmektedir.

X boş olmayan bir küme ve $f: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. $f(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktasına f fonksiyonunun sabit noktası denir.

Örnek olarak; $[0, \infty)$ kümesi üzerinde, $f(x) = \frac{x}{5}$, $g(x) = x + 5$ şeklinde tanımlanırsa $x_0 = 0$ noktası f fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. Fakat g fonksiyonunun hiç bir sabit noktası yoktur.

Bir fonksiyonun sabit noktası olmayabilir. Ayrıca var ise birden çok sabit noktası da olabilir. O halde fonksiyonun sabit noktasının varlığı, o fonksiyonun kuralına bağlı olduğu gibi tanımlandığı kümenin yapısına da bağlıdır. Bu nedenle sabit nokta teorisi çalışmaları bir fonksiyonun sabit noktasının hangi şartlar altında var olduğu, varsa tek mi, tek ise nasıl bulunacağı ve tek değilse hangi şartlarda sabit noktanın tek olacağı gibi soruların karşılığını aramaktadır.

Sabit nokta teorisinin matematik ve matematik dışı alanlarda çalışma ve uygulamaları vardır. Bunlar fonksiyonel analiz, diferansiyel denklemler, integral denklemler, potansiyel teori, yaklaşım teorisi, kontrol sistemleri, istatistik, iktisat, ekonomi, mühendislik, matematiksel ekonomi, esneklik teorisi gibi alanlardır.

Genel olarak sabit nokta teorisindeki çalışmalar 1910 yılında Brouwer [1] ile başlamıştır. Daha sonra sabit nokta teorisi iki yönde gelişmiştir. İlk olarak tam metrik uzaylar üzerinde daralma ve daralma tipi fonksiyonlar için sabit nokta teorisi çalışmaları 1922 yılında Banach [2] ile başlamıştır.

Banach sabit nokta teoremi veya daralma ilkesi olarak bilinen aşağıdaki teoremi vermiştir.

“(X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu, her $x, y, z \in X$ ve bir $\alpha \in$

$[0,1)$ için $d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)$ eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Ayrıca herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^n(x_0)\}$ dizisi T nin $z \in X$ sabit noktasına yakınsar.”

Diğer taraftan normlu lineer uzayların kompakt, konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teorisi çalışmaları 1930 yılında Schauder [3] ile başlamıştır. Bu çalışmaya göre,

“ C , X Banach uzayının kompakt ve konveks alt kümesi olacak şekilde $f: C \rightarrow C$ fonksiyonu sürekli ise f fonksiyonunun C de en az bir sabit noktası vardır.”

Daha sonra daralma türleri yetersiz görülmüş ve daha genel daralma fonksiyon türlerine ihtiyaç duyulmuştur. 1969 yılında Meir ve Keeler [4] (X, d) metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve her $x, y \in X$ için

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta(\varepsilon) \Rightarrow d(T(x), T(y)) < \varepsilon,$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunması şeklinde bir şart vermiştir. Bu şart Meir Keeler daralma şartı olarak adlandırılır. Bazı bilim adamları da bu tip daralma şartlarını geliştirmiş ve sabit nokta için yeni genelleştirilmiş şartlar oluşturmuşlardır. Maiti ve Pal [5], Park ve Rhoades [6], Mongkolkeha ve Kumam [7], Ciric [8], Chatterjea [9] gibi daha birçok yazar sabit nokta teoremleri ve uygulamaları üzerinde çalışmışlardır.

b -metrik kavramını Bakhtin [10] metrik tanımındaki üçgen eşitsizliğinin yerine her $x, y, z \in X$ ve $s \geq 1$ için $s[d(x, z) + d(z, y)]$ ifadesini kullanarak b -metrik kavramını tanımlamıştır ve b -metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teoremini ispatlamıştır. Czerwik [11], Aydi ve ark. [12], Roshan ve ark. [13] bu uzaylar üzerinde yeni sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır.

Diğer taraftan Branciari [14] tarafından, üçgen eşitsizliğini dikdörtgensel eşitsizliği ile değiştirip metrik uzay kavramını, dikdörtgensel metrik uzay veya Branciari metrik uzay adı altında genişletmiştir. Bu uzay içerisinde bulunan bazı sabit nokta sonuçlarına [15], [16], [17], [18], [19] nolu çalışmalar referans olarak verilebilir.

Daha sonra, bir b -metrik ve bir dikdörtgensel metriğin bir kombinasyonu olarak Roshan ve ark. [20] dikdörtgensel b -metrik veya Branciari b -metrik kavramını ortaya koydu. Bu uzayda yapılan bazı sabit nokta teoremlerine [21], [22], [23] nolu çalışmalar referans

olarak verilebilir.

Son zamanlarda, Khojasteh ve ark. [24] simülasyon (simulation) fonksiyon kavramını tanımladılar. Daha sonra simülasyon fonksiyon sınıfını içeren doğrusal olmayan Z-daralma dönüşümünü tanımladılar. Bu daralma dönüşümü $d(Tx, Ty)$ ve $d(x, y)$ nin bir kombinasyonunu içeren (X, d) tam metrik uzayındaki bilinen bazı daralma türlerini birleştirilerek Banach daralmasını genelleştirmiştir. Bu çalışma alanı üzerinde birçok yazar yeni genelleştirilmiş şartlar oluşturarak, sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır [25], [26].



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez çalışması için gerekli olan bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir. Gerekli görülen bazı tanım ve teoremler birer örnek ile açıklanacaktır.

2.1. METRİK UZAYLAR VE GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR

2.1.1. Metrik Uzaylar

Tanım 2.1.1.1. [27] X boş olmayan bir küme olsun. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

$$d1) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y ,$$

$$d2) d(x, y) = d(y, x) \text{ (Simetri özelliği),}$$

$$d3) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (Üçgen eşitsizliği)}$$

şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik (veya uzaklık fonksiyonu) ve (X, d) ikilisine de metrik uzak denir.

Örnek 2.1.1.2. [27] Her $x, y \in X$ için,

$$d(x, y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. $\mathbb{R}$ üzerindeki bu d metriğine $\mathbb{R}$ nin standart metriği veya alışılmış metrik denir.

Tanım 2.1.1.3. [27] (X, d) bir metrik uzay olsun. $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ fonksiyonu olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(n) = x_n$$

olarak tanımlanan fonksiyona X de bir dizi denir. $\{x_n\}$ veya (x_n) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.1.4. [27] (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}$ bir dizi olsun.

a) $x \in X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ için

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ 'e yakınsar (ya da $\{x_n\}$ dizisi yakınsaktır) denir. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

veya

$$x_n \rightarrow x$$

şeklinde gösterilir.

b) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq n_0$ için

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

c) X üzerinde alınan her Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak ise (X, d) uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.1.5. [27] (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f: (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ reel sayısı

$$d_1(x, x_0) < \delta$$

özellikliğini sağlayan her $x \in X$ için

$$d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde varsa f fonksiyonuna $x_0 \in X$ noktasında sürekli denir.

Tanım 2.1.1.6. [27] (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $x \in X$ olmak üzere (X, d_1) uzayında $x_n \rightarrow x_0$ özelliğine sahip, X de ki her (x_n) dizisi için (Y, d_2) uzayında $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ise f fonksiyonuna x_0 noktasında dizisel sürekli denir.

Teorem 2.1.1.7. [27] (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $f: (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu $x \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonu x noktasında dizisel sürekli.

Teorem 2.1.1.8. [27] (X, d) bir metrik uzay olsun.

- (a) (X, d) uzayında yakınsak dizinin limiti tektir.
- (b) $\{x_n\}$ nin herhangi bir alt dizisi de x e yakınsar.
- (c) (X, d) uzayında yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

2.1.2. b -Metrik Uzay

Tanım 2.1.2.1. [10] X boş olmayan bir küme ve $s \geq 1$ bir sabit olmak üzere

$d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için,

- b1) $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- b2) $d(x, y) = d(y, x)$,
- b3) $d(x, y) \leq s[d(x, z) + d(z, y)]$ (b -üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir b -metrik ve (X, d) ikilisine de b -metrik uzak denir.

Örnek 2.1.2.2. [28] (X, d) bir metrik uzay ve $p > 1$ bir reel sayı olmak üzere, $\rho(x, y) = (d(x, y))^p$ olsun.

- b1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow (d(x, y))^p = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- b2) $\rho(x, y) = (d(x, y))^p = (d(y, x))^p = \rho(y, x)$.
- b3) $1 < p < \infty$ ise $x > 0$ için $f(x) = x^p$ fonksiyonu dışbükeydir. Bu durumda, $a, b \geq 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + b^p) = \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$$

olup $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= (d(x, y))^p \leq (d(x, z) + d(z, y))^p \\ &\leq 2^{p-1}((d(x, z))^p + (d(z, y))^p) \\ &= 2^{p-1}(\rho(x, z) + \rho(z, y)). \end{aligned}$$

Sonuç olarak, ρ fonksiyonu, $s = 2^{p-1}$ sabiti ile bir b -metriktir.

Tanım 2.1.2.3. [29] (X, d) b -metrik uzayında bir dizi $\{x_n\}$ olsun.

a) $\{x_n\}$ dizisinin bir $x \in X$ noktasına b -yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

olmasıdır.

b) $\{x_n\}$ dizisinin bir b -Cauchy olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq n_0$ için

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ olmasıdır.

c) X üzerinde alınan her b -Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına b -yakınsak ise (X, d) uzayına tam b -metrik uzay denir.

Tanım 2.1.2.4. [28] (X, d) bir b -metrik uzay olsun. Herhangi bir $\{x_n\} \subset X$ dizisi $x \in X$ e b -yakınsak yani $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ olup $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Tx_n, Tx) = 0$ ise $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu b -metriğe göre süreklidir denir.

Uyarı a. [28] (X, d) bir b -metrik uzay olsun.

(a) (X, d) uzayında b -yakınsak dizinin limiti tektir.

(b) (X, d) uzayında b -yakınsak her dizi bir b -Cauchy dizisidir.

(c) (X, d) uzayında, b -metrik sürekli değildir.

2.1.3. Dikdörtgensel Metrik Uzaylar

Tanım 2.1.3.1. [14] X boş olmayan bir küme olsun. $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve her biri x, y den farklı olan tüm farklı $u, v \in X$ için,

$$r1) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$r2) d(x, y) = d(y, x),$$

$$r3) d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$$

şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir dikdörtgensel metrik ve (X, d) ikilisine de dikdörtgensel metrik uzay (DMU) denir.

Örnek 2.1.3.2. [20] $A = \{0, 2\}$, $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ve $X = A \cup B$ olsun. $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \text{ ve } x, y \in A \text{ veya } x, y \in B \\ y, & x \in A, y \in B \\ x, & x \in B, y \in A. \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$r1) \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$r2) \rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \text{ ve } x, y \in A \text{ veya } x, y \in B \\ y, & x \in A, y \in B \\ x, & x \in B, y \in A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y = x \\ 1, & y \neq x \text{ ve } y, x \in A \text{ veya } y, x \in B \\ x, & y \in A, x \in B \\ y, & y \in B, x \in A \end{cases}$$

$$= \rho(y, x)$$

r3) $x = y \Rightarrow \rho(x, y) = 0$ dir. Ayrıca $\rho(x, u) \geq 0$, $\rho(u, v) \geq 0$, $\rho(v, y) \geq 0$ olduğundan $0 = \rho(x, y) \leq \rho(x, u) + \rho(u, v) + \rho(v, y)$ dir. $x \neq y$ olsun. $u = v$ yada $u \neq v$ ise

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, u) + \rho(u, v) + \rho(v, y)$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç olarak, ρ fonksiyonu X üzerinde bir dikdörtgensel metriktir.

Tanım 2.1.3.3. [14] (X, d) bir dikdörtgensel metrik uzay, $x \in X$ ve $\{x_n\}$, X üzerinde bir dizi olsun.

a) $\{x_n\}$ dizisinin $x \in X$ noktasına D-yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

olmasıdır.

b) $\{x_n\}$ dizisi D-Cauchy olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunmasıdır.

c) X üzerinde alınan her D-Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına D-yakınsak ise (X, d) uzayına tam dikdörtgensel metrik uzay denir.

Tanım 2.1.3.4. [14] (X, d) bir dikdörtgensel metrik uzay, $x \in X$ ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Tx_n, Tx) = 0$ oluyorsa $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu dikdörtgensel metriğe göre süreklidir denir.

Uyarı b. [30] (X, d) bir dikdörtgensel metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda D-Cauchy dizisi olsun. $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ ise her $y \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) = d(x, y) = 0$ dır.

Özellikle, eğer $y \neq x$ ise $\{x_n\}$ dizisi y noktasına yakınsak değildir.

Uyarı c. (X, d) bir dikdörtgensel metrik uzay olsun.

- (X, d) uzayında D-yakınsak bir dizinin limiti tek değildir.
- (X, d) uzayında D-yakınsak bir dizi, bir D-Cauchy dizisi olmayabilir.

- (X, d) uzayında D-metrik sürekli değildir.

2.1.4. Dikdörtgensel b -Metrik Uzaylar

Tanım 2.1.4.1. [20] X boş olmayan bir küme ve $s \geq 1$ sabit bir reel sayı olsun. $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve her biri x, y den farklı olan tüm farklı $u, v \in X$ için

$$a1) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$a2) d(x, y) = d(y, x),$$

$$a3) d(x, y) \leq s[d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)]$$

şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir dikdörtgensel b -metrik ve (X, d) ikilisine de dikdörtgensel b -metrik uzak (DbMU) denir.

Örnek 2.1.4.2. [20] (X, d) bir dikdörtgensel metrik uzay ve $p > 1$ bir reel sayı olmak üzere $\rho(x, y) = (d(x, y))^p$ olsun.

$$a1) \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow (d(x, y))^p = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$a2) \rho(x, y) = (d(x, y))^p = (d(y, x))^p = \rho(y, x)$$

a3) $1 < p < \infty$ ise $x > 0$ için $f(x) = x^p$ fonksiyonu dışbükeydir. Bu durumda, $a, b, c \geq 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^p \leq \frac{1}{3}(a^p + b^p + c^p) = \frac{1}{3}f(a) + \frac{1}{3}f(b) + \frac{1}{3}f(c)$$

olup $(a + b + c)^p \leq 3^{p-1}(a^p + b^p + c^p)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= (d(x, y))^p \leq (d(x, z) + d(z, t) + d(t, y))^p \\ &\leq 3^{p-1}((d(x, z))^p + (d(z, t))^p + (d(t, y))^p) \\ &= 3^{p-1}(\rho(x, z) + \rho(z, t) + \rho(t, y)). \end{aligned}$$

Sonuç olarak, ρ fonksiyonu, $s = 3^{p-1}$ sabiti ile bir dikdörtgensel b -metriktir.

Tanım 2.1.4.3. [31] (X, d) bir dikdörtgensel b -metrik uzay, $x \in X$ ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun.

a) $\{x_n\}$ dizisinin $x \in X$ noktasına Db-yakınsak olması için gerek ve yeter şart her

$\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ olduğunda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

olmasıdır.

- b) $\{x_n\}$ dizisinin bir Db-Cauchy olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0, p > 0$ için

$$d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var olmasıdır.

- c) X içinde alınan her Db-Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına Db-yakınsak ise (X, d) uzayına tam dikdörtgensel b -metrik uzay denir.

Lemma 2.1.4.4. [31] (X, d) bir dikdörtgensel b -metrik uzay, $x \in X$ ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Tx_n, Tx) = 0$ ise $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu dikdörtgensel b -metriğe göre süreklidir.

Uyarı d. [30] (X, d) dikdörtgensel b -metrik uzay ve $\{x_n\}$ Db-Cauchy dizisi olsun. $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ ise her $y \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) = d(x, y) = 0$ dır. Özellikle, eğer $y \neq x$ ise $\{x_n\}$ dizisi y noktasına yakınsak değildir.

Uyarı e. (X, d) bir dikdörtgensel b -metrik uzay olsun.

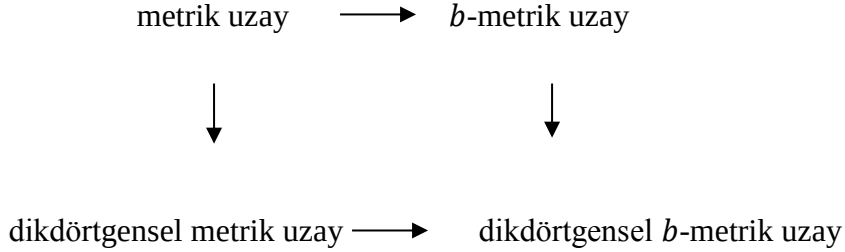
- (X, d) uzayında Db-yakınsak bir dizinin limiti tek değildir.
- (X, d) uzayında Db-yakınsak bir dizi, bir Db-Cauchy dizisi olmayabilir.
- (X, d) uzayında Db-metrik sürekli değildir.

2.1.5. Metrik Uzayların Karşılaştırılması

Her metrik uzay bir dikdörtgensel metrik uzay ve her dikdörtgensel metrik uzayda bir dikdörtgensel b -metrik uzaydır. Fakat bu sonucun tersi her zaman doğru değildir ([31] Örnek 2.4. ve 2.5.). Ayrıca her metrik uzay bir b -metrik uzay ve her b -metrik uzayda bir dikdörtgensel b -metrik uzaydır (aynı katsayı olmak zorunda değil).

Keyfi bir s sayısı için her b -metrik, keyfi bir s^2 sayısı için dikdörtgensel b -metrik uzaydır. Fakat tersi doğru değildir (Örnek 2.1.5.4.).

Böylece aşağıdaki diyagram ortaya çıkar. Bu geçişlerin tersleri, doğru değildir.



Dikdörtgensel metrik uzay veya dikdörtgensel b -metrik uzay içinde alınan dizinin limiti tek olmak zorunda değildir. Ayrıca dikdörtgensel metrik uzay üzerindeki D-yakınsak dizi de D-Cauchy dizisi olmak zorunda değildir. Dikdörtgensel b -metrik uzay üzerindeki Db-yakınsak dizide Db-Cauchy dizisi olmak zorunda değildir (Örnek 2.1.5.4.).

Örnek 2.1.5.1. [32] $X = \{0,1,2,3\}$ olmak üzere $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$ ve $d(0,0) = d(1,1) = d(2,2) = d(3,3) = 0$, $d(0,1) = 1$, $d(0,2) = 22$, $d(1,3) = 6$, $d(0,3) = 7$, $d(1,2) = d(2,3) = 8$ şeklinde tanımlansın. $s = 2$ için d bir dikdörtgensel b -metriktir. Fakat,

$$22 = d(0,2) > 2(d(2,1) + d(1,0)) = 18$$

olduğundan d fonksiyonu bir b -metrik değildir. Ayrıca,

$$22 = d(0,2) > d(0,1) + d(1,3) + d(3,2) = 15$$

olduğundan d fonksiyonu bir dikdörtgensel metrik de değildir.

Örnek 2.1.5.2. [32] $X = \{0,1,2, \dots\}$ olmak üzere $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 2 & x \neq y \text{ ve } x, y \in \{0,1\} \\ \frac{1}{3} & x \neq y \text{ ve } x \text{ veya } y \notin \{0,1\}, \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $s = 2$ için (X, d) bir dikdörtgensel b -metriktir. Fakat,

$$2 = d(0,1) > \frac{4}{3} = 2(d(0,2) + d(2,1)),$$

olduğundan b -metrik değildir. Ayrıca,

$$2 = d(0,1) > 1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = d(0,2) + d(2,3) + d(3,1),$$

olduğundan dikdörtgensel metrik de değildir.

Örnek 2.1.5.3. [31] $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ve B kümesi tüm pozitif tam sayıların kümesi olsun.

$X = A \cup B$ olmak üzere $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu, $\alpha > 0$ ve her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 2\alpha, & x, y \in A \\ \frac{\alpha}{2n}, & x \in A, y \in \{2, 3\} \\ \alpha, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

- 1) $d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = 2\alpha > \frac{5\alpha}{12} = d\left(\frac{1}{2}, 2\right) + d\left(2, \frac{1}{3}\right)$ olduğundan d bir metrik değildir.
- 2) $d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = 2\alpha > s \left[d\left(\frac{1}{n}, 2\right) + d\left(2, \frac{1}{m}\right) \right] = s \frac{\alpha(n+m)}{2mn}$ ve her $n, m \in \mathbb{N}$ için $\frac{4mn}{m+n} > s$ olduğundan d bir b -metrik değildir.
- 3) $d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = 2\alpha > \frac{17\alpha}{12} = d\left(\frac{1}{2}, 2\right) + d(2, 3) + d\left(3, \frac{1}{3}\right)$ olduğundan d bir dikdörtgensel metrik değildir.
- 4) $s = 2$ alındığında d bir dikdörtgensel b -metriktir. Gerçekten,

$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = 2\alpha \leq 2 \left[d\left(\frac{1}{n}, 2\right) + d(2, 3) + d\left(3, \frac{1}{m}\right) \right] = 2 \left[\alpha + \frac{\alpha(n+m)}{2mn} \right]$$
 dır.
- 5) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisi (X, d) dikdörtgensel b -metrik uzayında 2 ve 3 noktalarına yakınsar. Yani limiti tek değildir. Diğer bir ifadeyle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d\left(\frac{1}{n}, 2\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2n} = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d\left(\frac{1}{n}, 3\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2n} = 0$$

olduğundan 2 ve 3 noktaları, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisinin limitleridir.

6) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisi Db-yakınsaktır. Fakat,

$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+p}\right) = 2\alpha \nrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğundan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisi bir Db-Cauchy dizisi değildir.

Örnek 2.1.5.4. [20] $A = \{0,2\}$, $B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ve $X = A \cup B$ olsun. $\rho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \text{ ve } x, y \in A \text{ veya } x, y \in B \\ y, & x \in A, y \in B \\ x, & x \in B, y \in A \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X, ρ) bir dikdörtgensel metrik uzaydır. (Bknz. Örnek 2.1.3.2). $d(x, y) = (\rho(x, y))^2$ olarak alınırsa (X, d) bir dikdörtgensel b -metrik uzay olur.

2.2. SABİT NOKTA TEORİSİ

Tanım 2.2.1. [33] X boş olmayan bir küme ve $T, g : X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun.

1. $Tx = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T nin bir sabit noktası denir.

2. $Tx = gx$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T nin bir çakışık (coincidence) noktası denir.
3. $Tx = gx = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T nin bir ortak (common) sabit noktası denir.

Tanım 2.2.2. [34] (X, d) bir metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ ise T ye büzülebilir dönüşüm ve $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ ise T ye daralma (büzülme) dönüşümü denir.

Teorem 2.2.3. [2] (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere $T: X \rightarrow X$ bir daralma fonksiyonu ise o zaman T nin bir ve yalnız bir sabit $x \in X$ noktası vardır. Ayrıca herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^n(x_0)\}$ dizisi T nin bu sabit x noktasına yakınsar.

Teorem 2.2.4. [4] (X, d) tam metrik uzay ve f, X üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(fx, fy) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonunun bir tek ξ sabit noktası vardır. Ayrıca, herhangi bir $x \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n x = \xi.$$

Tanım 2.2.5. [35] $a \geq 1$ bir reel sayı ve $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun.

- 1) ϕ fonksiyonu monoton artan,
- 2) $\sum_{i=0}^{\infty} z_i$ pozitif terimli yakınsak bir seri olmak üzere, $j_0 \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0,1)$ ve $j \geq j_0$ için

$$\alpha^{j+1} \phi^{j+1}(t) \leq \alpha \alpha^j \phi^j(t) + z_j$$

şartları sağlanıyorsa ϕ fonksiyonuna (a) -karşılaştırma fonksiyonu ((a) -comparison function) denir.

Tüm (a) -karşılaştırma fonksiyonların kümesi Φ ile ifade edilecektir.

Lemma 2.2.6. ([36], [37], [38]) Eğer $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir (α) -karşılaştırma fonksiyonu ise aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- 1) Herhangi bir $t \in [0, +\infty)$ için $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \phi^k(t)$ serisi yakınsaktır.
- 2) $h_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \phi^k(t)$ şeklinde tanımlanan $h_\alpha: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu 0 da sürekli ve artandır.
- 3) $k \geq 1$ için ϕ fonksiyonunun her ϕ^k yinelemesi bir (α) -karşılaştırma fonksiyondur.
- 4) ϕ fonksiyonu 0 da süreklidir.
- 5) Herhangi bir $t > 0$ için $\phi(t) < t$ dır.

Tanım 2.2.7. [39] $T: X \rightarrow X$ ve $\alpha: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ birer fonksiyon olmak üzere, her $x \in X$ için

$$\alpha(x, Tx) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, T^2x) \geq 1$$

şartı sağlanıyorsa T ye α -orbital kabul edilebilir fonksiyon (α -orbital admissible function) denir.

Örnek 2.2.8. [39] $X = \{0,1,2,3\}$ olmak üzere $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ verilsin. $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu $T(0) = 0$, $T(1) = 2$, $T(2) = 1$, $T(3) = 3$ şeklinde tanımlansın. $A = \{(0,1), (0,2), (1,1), (2,2), (1,2), (2,1), (1,3), (2,3)\} \subseteq X \times X$ olmak üzere $\alpha: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in A, \\ 0, & X \times X - \{A\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\alpha(1, T(1)) = \alpha(1, 2) = 1$ ve $\alpha(T(1), T^2(1)) = \alpha(2, 1) = 1$ olduğundan T bir α -orbital kabul edilebilir fonksiyondur.

Tanım 2.2.9. [24] $\zeta: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- $\zeta_1)$ $\zeta(0,0) = 0$,
- $\zeta_2)$ Her $t, s > 0$ için $\zeta(t, s) < s - t$ dır,

$\zeta 3)$ $\{t_n\}$ ve $\{s_n\}$ dizileri $(0, \infty)$ üzerinde iki dizi olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n > 0$ olup $\limsup_{n \rightarrow \infty} \zeta(t_n, s_n) < 0$ dır,

şartlarını sağlıyorsa ζ fonksiyonuna simülasyon fonksiyonu denir.

Tüm simülasyon fonksiyonlarının kümesi Z ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.10. [24] (X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir fonksiyon ve $\zeta \in Z$ olsun.

Eğer her $x, y \in X$ için

$$\zeta(d(Tx, Ty), d(x, y)) \geq 0$$

ise T ye bir Z -daralma dönüşümü denir.

Lemma 2.2.11. [40] (X, d) bir metrik uzay $\{x_n\}$, X de bir dizi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ olsun. Eğer $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi değilse $d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $n_k > m_k \geq k$ olmak üzere $\{m_k\}$ ve $\{n_k\}$ pozitif tamsayı dizileri vardır. Her bir $k > 0$ için m_k ya karşılık n_k sayısı $d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon$, $d(x_{m_k}, x_{n_{k-1}}) < \varepsilon$ ve

$$i) \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_{k-1}}, x_{m_{k+1}}) = \varepsilon,$$

$$ii) \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, x_{m_k}) = \varepsilon,$$

$$iii) \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_{k-1}}, x_{n_k}) = \varepsilon,$$

$$iv) \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, x_{m_{k+1}}) = \varepsilon$$

olacak şekilde en küçük pozitif tamsayı olarak seçilebilir.

Lemma 2.2.12. [41] (X, d) $s \geq 1$ katsayısı ile bir b - metrik uzay, $\{x_n\}$, X de bir dizi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ olsun. Eğer $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi değilse $d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon$, $d(x_{m_k}, x_{n_{k-1}}) < \varepsilon$ ve

$$i) \varepsilon \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq s\varepsilon,$$

$$ii) \frac{\varepsilon}{s} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_{k+1}}, x_{n_k}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_{k+1}}, x_{n_k}) \leq s^2\varepsilon,$$

$$iii) \frac{\varepsilon}{s} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k}, x_{n_{k+1}}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k}, x_{n_{k+1}}) \leq s^2\varepsilon,$$

$$\text{iv)} \frac{\varepsilon}{s^2} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) \leq s^3 \varepsilon,$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $n_k > m_k \geq k$ olmak üzere $\{m_k\}$ ve $\{n_k\}$ pozitif tamsayı dizileri vardır.

Tanım 2.2.13. [33] (X, d) bir metrik uzay ve $T, g: X \rightarrow X$ olsun. $\{gx_n\}$ ve $\{Tx_n\}$ dizileri yakınsak ve limitleri aynı olmak üzere X de her $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Tgx_n, gTx_n) = 0$ ise T ve g uyumlu (compatible) denir.

Uyarı f. [42] T ve g değişmeli (commuting) (yani, her $x \in X$ için $Tgx = gTx$) ise T ve g uyumludur.

Tanım 2.2.14. [24] $T, g: X \rightarrow X$ fonksiyonları ve X de bir $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Her $n \geq 0$ için $gx_{n+1} = Tx_n$ ise $\{x_n\}$ (T, g) ikilisinin bir Picard-Jungck dizisidir denir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ DİKDÖRTGENSEL b -METRİK UZAYDA (α, ϕ)-MEIR-KEELER DARALMA FONKSİYONUNUN SABİT NOKTALARI

Bu bölümde ilk olarak genelleştirilmiş dikdörtgensel b -metrik uzay üzerinde (α, ϕ)-Meir-Keeler daralma fonksiyonu ile ilgili kavramlar verilecektir. Daha sonra bu kavram ile ilgili bazı teoremler ispatlanıp gerekli görülenler örneklerle açıklanacaktır ve bunlara ilişkin sonuçlar verilecektir.

Tanım 3.1. X boş olmayan bir küme ve $s \geq 1$ sabit bir reel sayı olsun. $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve $u \neq v$ olan her $u, v \in X \setminus \{x, y\} \in X$ için

$$d1) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$d2) d(x, y) = d(y, x),$$

$$d3) d(x, y) \leq s[d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)]$$

şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir genelleştirilmiş dikdörtgensel b -metrik ve (X, d) ikilisine de genelleştirilmiş dikdörtgensel b -metrik uzak denir.

Tanım 3.2. $T : X \rightarrow X$ ve $\alpha : X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ birer fonksiyon olmak üzere her $x \in X$ için

$$\alpha(x, Tx) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, T^2x) \geq 1,$$

$$\alpha(x, Tx) < \infty \Rightarrow \alpha(Tx, T^2x) < \infty$$

şartları sağlanıyorsa T ye genelleştirilmiş α -orbital kabul edilebilir fonksiyon denir.

Tanım 3.3. (X, d) bir genelleştirilmiş dikdörtgensel b -metrik uzay ve $T: X \times X$ bir fonksiyon Her $x, y \in X$ için

$$\varepsilon \leq \phi(d(x, y)) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \alpha(x, y)d(Tx, Ty) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\alpha : X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ ve $\phi \in \Phi$ varsa T ye (α, ϕ)-Meir-Keeler daralma

fonksiyonu denir.

Uyarı g. $x \neq y$ için $0 < d(x, y) < \infty$ ve $\alpha(x, y) < \infty$ ise

$$\alpha(x, y)d(Tx, Ty) < \phi(d(x, y))$$

olur.

Teorem 3.4. (X, d) genelleştirilmiş tam dikdörtgensel b -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$, (α, ϕ) -Meir-Keeler daralma fonksiyonu olsun.

- i) T , genelleştirilmiş α -orbital kabul edilebilir fonksiyondur;
- ii) $1 \leq \alpha(x_0, Tx_0) < \infty$ ve $1 \leq \alpha(x_0, T^2x_0) < \infty$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır;
- iii) T süreklidir.

$\{x_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_{n+1} = Tx_n$$

şekilde tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki ifadelerden biri sağlanır:

A. Her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) = \infty,$$

$$d(x_n, x_{n+2}) = \infty.$$

B. $d(x_k, x_{k+1}) < \infty$ ve $d(x_k, x_{k+2}) < \infty$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}_0$ vardır.

Bu durumda T fonksiyonunun bir sabit noktası vardır. Diğer bir ifadeyle

$Tu = u$ eşitliğini sağlayan $u \in X$ noktası vardır.

İspat. A'nın sağlanması durumunda ispat edilecek bir şey yoktur. Bu nedenle $d(x_k, x_{k+1}) < \infty$ ve $d(x_k, x_{k+2}) < \infty$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}_0$ var olduğu kabul edilsin. Eğer $x_k = x_{k+1} = Tx_k$ ise x_k , T nin bir sabit noktası olur. Bu ise ispatı tamamlar. $x_k \neq x_{k+1}$ kabul edilsin. İspat dört adımda incelenecektir.

1.Adım: Uyarı g ve ϕ nin özelliği kullanılarak,

$$\alpha(x_k, x_{k+1})d(x_{k+1}, x_{k+2}) < \phi(d(x_k, x_{k+1})) < d(x_k, x_{k+1}) < \infty$$

elde edilir.

T , genelleştirilmiş α -orbital kabul edilebilir fonksiyon olduğundan ii) şartı kullanılarak her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} 1 \leq \alpha(x_0, Tx_0) = \alpha(x_0, x_1) < \infty &\Rightarrow 1 \leq \alpha(Tx_0, T(Tx_0)) = \alpha(x_1, x_2) < \infty \\ &\Rightarrow 1 \leq \alpha(Tx_1, Tx_2) = \alpha(x_2, x_3) < \infty \\ &\vdots \\ &\Rightarrow 1 \leq \alpha(Tx_{k-1}, Tx_k) = \alpha(x_k, x_{k+1}) < \infty \\ &\vdots \\ &\Rightarrow 1 \leq \alpha(Tx_{k+n-1}, Tx_{k+n}) = \alpha(x_{k+n}, x_{k+n+1}) < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) \leq \alpha(x_k, x_{k+1})d(x_{k+1}, x_{k+2}) < \phi(d(x_k, x_{k+1})) < \infty,$$

elde edilir. Bu şekilde işleme devam edilerek, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{k+n}, x_{k+n+1}) < \phi^n(d(x_k, x_{k+1})) < \infty$$

elde edilir. Lemma 2.2.6. nın 1) şikkından dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$$

bulunur.

2.Adım: Uyarı g ve ϕ nin özelliği kullanılarak,

$$\alpha(x_k, x_{k+2})d(x_{k+1}, x_{k+3}) < \phi(d(x_k, x_{k+2})) < d(x_k, x_{k+2}) < \infty$$

elde edilir.

T , genelleştirilmiş α -orbital kabul edilebilir fonksiyon olduğundan ii) şartı kullanılarak her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} 1 \leq \alpha(x_0, T^2 x_0) = \alpha(x_0, x_2) < \infty &\Rightarrow 1 \leq \alpha(Tx_0, T(T^2 x_0)) = \alpha(x_1, x_3) < \infty \\ &\Rightarrow 1 \leq \alpha(Tx_1, T(T^2 x_1)) = \alpha(x_2, x_4) < \infty \\ &\vdots \\ &\Rightarrow 1 \leq \alpha(Tx_{k-1}, T(T^2 x_{k-1})) = \alpha(x_k, x_{k+2}) < \infty \\ &\vdots \\ &\Rightarrow 1 \leq \alpha(Tx_{k+n-1}, T(T^2 x_{k+n-1})) \\ &= \alpha(x_{k+n}, x_{k+n+2}) < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$d(x_{k+1}, x_{k+3}) \leq \alpha(x_k, x_{k+2})d(x_{k+1}, x_{k+3}) < \phi(d(x_k, x_{k+2})) < \infty$$

elde edilir. Bu şekilde işleme devam edilerek, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{k+n}, x_{k+n+2}) < \phi^n(d(x_k, x_{k+2})) < \infty$$

elde edilir. Lemma 2.2.6. nın 1) şikkından dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+2}) = 0$$

bulunur.

3.Adım: $n > m$ için $x_n = x_m$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x_{n+1} = Tx_n = Tx_m = x_{m+1}$ dir. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için $x_{n+k} = x_{m+k}$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_{m+1}) &= d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha(x_{n-1}, x_n) d(x_n, x_{n+1}) < \phi(d(x_{n-1}, x_n)) \\
&< d(x_{n-1}, x_n) < d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\
&\vdots \\
&< d(x_m, x_{m+1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle, varsayımımız yanlış olup her $m \neq n$ için $x_n \neq x_m$ dir.

4.Adım:

1.Durum. $m \geq 1$ için $v = 2m + 1$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
d(x_{k+n}, x_{k+n+2m+1}) &\leq sd(x_{k+n}, x_{k+n+1}) + sd(x_{k+n+1}, x_{k+n+2}) \\
&\quad + sd(x_{k+n+2}, x_{k+n+2m+1}) \\
&\leq s[d(x_{k+n}, x_{k+n+1}) + d(x_{k+n+1}, x_{k+n+2})] \\
&\quad + s^2 d(x_{k+n+2}, x_{k+n+3}) + s^2 d(x_{k+n+3}, x_{k+n+4}) \\
&\quad + s^2 d(x_{k+n+4}, x_{k+n+2m+1}) \\
&\leq s[d(x_{k+n}, x_{k+n+1}) + d(x_{k+n+1}, x_{k+n+2})] \\
&\quad + s^2 [d(x_{k+n+2}, x_{k+n+3}) + d(x_{k+n+3}, x_{k+n+4})] \\
&\quad + \dots \\
&\quad + s^m d(x_{k+n+2m-2}, x_{k+n+2m-1}) + s^m d(x_{k+n+2m-1}, x_{k+n+2m}) \\
&\quad + s^m d(x_{k+n+2m}, x_{k+n+2m+1}) \\
&< s[\phi^n(d(x_k, x_{k+1})) + \phi^{n+1}(d(x_k, x_{k+1}))] \\
&\quad + s^2 [\phi^{n+2}(d(x_k, x_{k+1})) + \phi^{n+3}(d(x_k, x_{k+1}))] \\
&\quad + \dots \\
&\quad + s^m [\phi^{n+2m-2}(d(x_k, x_{k+1})) + \phi^{n+2m-1}(d(x_k, x_{k+1}))] \\
&\quad + s^m \phi^{n+2m}(d(x_k, x_{k+1})) \\
&< s\phi^n(d(x_k, x_{k+1})) + s^2 \phi^{n+1}(d(x_k, x_{k+1}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +s^3\phi^{n+2}(d(x_k, x_{k+1})) + s^4\phi^{n+3}(d(x_k, x_{k+1})) \\
& +s^5\phi^{n+4}(d(x_k, x_{k+1})) + s^6\phi^{n+5}(d(x_k, x_{k+1})) \\
& + \dots \\
& +s^{2m-1}\phi^{n+2m-2}(d(x_k, x_{k+1})) + s^{2m}\phi^{n+2m-1}(d(x_k, x_{k+1})) \\
& +s^{2m+1}\phi^{n+2m}(d(x_k, x_{k+1})) \\
& = \sum_{i=n}^{n+2m} s^{i-n+1}\phi^i(d(x_k, x_{k+1})) \\
& < \sum_{i=n}^{n+2m} s^i\phi^i(d(x_k, x_{k+1}))
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.Durum. $m \geq 2$ için $v = 2m$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
d(x_{k+n}, x_{k+n+2m}) & \leq sd(x_{k+n}, x_{k+n+1}) + sd(x_{k+n+1}, x_{k+n+2}) \\
& + sd(x_{k+n+2}, x_{k+n+2m}) \\
& \leq s[d(x_{k+n}, x_{k+n+1}) + d(x_{k+n+1}, x_{k+n+2})] \\
& + s^2d(x_{k+n+2}, x_{k+n+3}) + s^2d(x_{k+n+3}, x_{k+n+4}) \\
& + s^2d(x_{k+n+4}, x_{k+n+2m}) \\
& \leq s[d(x_{k+n}, x_{k+n+1}) + d(x_{k+n+1}, x_{k+n+2})] \\
& + s^2[d(x_{k+n+2}, x_{k+n+3}) + d(x_{k+n+3}, x_{k+n+4})] \\
& + \dots \\
& + s^{m-1}d(x_{k+n+2m-4}, x_{k+n+2m-3}) \\
& + s^{m-1}d(x_{k+n+2m-3}, x_{k+n+2m-2}) \\
& + s^{m-1}d(x_{k+n+2m-2}, x_{k+n+2m}) \\
& < s[\phi^n(d(x_k, x_{k+1})) + \phi^{n+1}(d(x_k, x_{k+1}))] \\
& + s^2[\phi^{n+2}(d(x_k, x_{k+1})) + \phi^{n+3}(d(x_k, x_{k+1}))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots \\
& + s^{m-1} [\phi^{n+2m-4}(d(x_k, x_{k+1})) + \phi^{n+2m-3}(d(x_k, x_{k+1}))] \\
& + s^{m-1}(d(x_{k+n+2m-2}, x_{k+n+2m})) \\
& \leq s\phi^n(d(x_k, x_{k+1})) + s^2\phi^{n+1}(d(x_k, x_{k+1})) \\
& + s^3\phi^{n+2}(d(x_k, x_{k+1})) + s^4\phi^{n+3}(d(x_k, x_{k+1})) \\
& + \dots \\
& + s^{2m-3}\phi^{n+2m-4}(d(x_k, x_{k+1})) + s^{2m-2}\phi^{n+2m-3}(d(x_k, x_{k+1})) \\
& + s^{m-1}(d(x_{k+n+2m-2}, x_{k+n+2m})) \\
& = \sum_{i=n}^{n+2m-3} s^{i-n+1}\phi^i(d(x_k, x_{k+1})) + s^{m-1}d(x_{k+n+2m-2}, x_{k+n+2m}) \\
& < \sum_{i=n}^{n+2m-3} s^i\phi^i(d(x_k, x_{k+1})) + s^{m-1}d(x_{k+n+2m-2}, x_{k+n+2m})
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+2}) = 0$ ve Lemma 2.2.6. nın (1) şikkından $v \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ için

$$d(x_{k+n}, x_{k+n+v}) < \sum_{i=n}^{n+v-1} s^i \phi^i(d(x_k, x_{k+1})) < \varepsilon$$

olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ var olup bu nedenle $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi ve $\{x_n\}$ dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsaktır. T nin sürekliliğinden $\{Tx_n\}$ dizisi Tx noktasına yakınsar. $\{Tx_n\} = \{x_{n+1}\}$ olduğundan $\{x_{n+1}\}$ dizisi de Tx e yakınsar. O halde limitin tekliğinden dolayı $Tx = x$ eşitliği sağlanır. Bu durumda x , T fonksiyonun bir sabit noktasıdır.

Teorem 3.5. (X, d) genelleştirilmiş tam dikdörtgensel b -metrik uzay $T : X \rightarrow X$, (α, ϕ) -Meir-Keeler daralma fonksiyonu olsun.

i) T , genelleştirilmiş α -orbital kabul edilebilir fonksiyondur ;

- ii) $1 \leq \alpha(x_0, Tx_0) < \infty$ ve $1 \leq \alpha(x_0, T^2x_0) < \infty$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır;
- iii) $\{x_n\}$, X de bir dizi, her n için $1 \leq \alpha(x_n, x_{n+1}) < \infty$ ve $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak ise her k için $1 \leq \alpha(x_{n_k}, x) < \infty$ ve $0 \leq d(x_{n_k}, x) < \infty$ olacak şekilde $\{x_n\}$ nin $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır.

Bu durumda aşağıdaki ifadelerden biri sağlanır:

A. Her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) = \infty,$$

$$d(x_n, x_{n+2}) = \infty.$$

B. $d(x_k, x_{k+1}) < \infty$ ve $d(x_k, x_{k+2}) < \infty$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}_0$ vardır.

Bu durumda T fonksiyonunun bir sabit noktası vardır. Diğer bir ifadeyle $Tx = x$ eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ noktası vardır.

İspat. Teorem 3.4. ispatında, $\{x_n\}$ dizisinin $x \in X$ noktasına yakınsak olduğu ispatlandı.

iii) yardımı ile $\{x_n\}$ dizisinin alt dizisi olan $\{x_{n_k}\}$, her k için $1 \leq \alpha(x_{n_k}, x) < \infty$ ve $0 \leq d(x_{n_k}, x) < \infty$ dır. Uyarı g. kullanılarak

$$d(Tx_{n_{k+1}}, Tx) = d(T(Tx_{n_k}), Tx) \leq \alpha(Tx_{n_k}, x)d(T(Tx_{n_k}), Tx) < \phi(d(Tx_{n_k}, x))$$

elde edilir. $Tx_{n_k} = x_{n_{k+1}}$ olduğu için yukarıdaki eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\{x_{n_{k+1}}\}$ dizisi x noktasına yakınsak ve ϕ fonksiyonu $\phi(0) = 0$ da süreklidir. Bu durumda $d(x, Tx) = 0$; diğer bir ifadeyle $x = Tx$ dir.

(U) T nin $t, \tilde{t}$ herhangi iki sabit noktası için $1 \leq \alpha(t, \tilde{t}) < \infty$ dır.

Teorem 3.6. Teorem 3.4. (veya Teorem 3.5.) hipotezlerine (U) şartı eklenerek $T, Y = \{t \in X: d(x_k, t) < \infty, d(x_{k+1}, t) < \infty\}$ de en fazla bir sabit noktası vardır.

İspat. $T : X \rightarrow X$, (α, ϕ) -Meir-Keeler türü bir daralma fonksiyonu olsun. Teorem 3.4. (veya Teorem 3.5.) den T fonksiyonunun X üzerinde bir sabit noktası vardır.

T fonksiyonunun Y de birbirinden farklı t ve $\tilde{t}$ iki sabit noktası olsun. Böylece $i = k, k + 1$ için $d(x_i, t) < \infty$ ve $d(x_i, \tilde{t}) < \infty$ dur. Ayrıca Teorem 3.4. (veya Teorem 3.5.)

içindeki B) durumundan $d(x_k, x_{k+1}) < \infty$ vardır. Böylece

$$d(t, \tilde{t}) \leq s[d(t, x_k) + d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, \tilde{t})] < \infty.$$

(U) şartı ve Uyarı g yardımıyla,

$$d(t, \tilde{t}) = d(Tt, T\tilde{t}) \leq \alpha(t, \tilde{t})d(Tt, T\tilde{t}) < \phi(d(t, \tilde{t})) < d(t, \tilde{t})$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde kabul yanlış olup $t = \tilde{t}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teoremden, genelleştirilmiş dikdörtgensel b -metrik uzay üzerinde Meir-Keeler tipi daralma fonksiyonları için bir sabit nokta teoremi verilmektedir.

Teorem 3.7. (X, d) genelleştirilmiş tam dikdörtgensel b -metrik uzay ve T, X de tanımlı bir fonksiyon olmak üzere:

$\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, $x, y \in X$ için

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow (Tx, Ty) < \frac{\varepsilon}{3s},$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$x \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}_0$ için $x_{n+1} = Tx_n$ olmak üzere aşağıdaki ifadelerden biri sağlanır.

A. Her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) = \infty,$$

$$d(x_n, x_{n+2}) = \infty.$$

B. $d(x_k, x_{k+1}) < \infty$ ve $d(x_k, x_{k+2}) < \infty$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}_0$ vardır.

Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- i) T , X üzerinde bir x sabit noktası vardır; diğer bir ifade ile $Tx = x$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ dır.
- ii) T fonksiyonun $Y = \{t \in X : d(x_k, t) < \infty, d(x_{k+1}, t) < \infty\}$ de tek bir sabit noktası var ve $\{t_n\}$, Y üzerinde bir dizi, herhangi bir $t_0 \in Y$ için $t_{n+1} = Tt_n$ ile $\lim_{n \rightarrow \infty} d(t_n, x) = 0$ dır.

İspat. $\alpha(u, v) = 1$ ve $\phi(t) = \frac{t}{3s}$ alındığında Teorem 3.4. ve Teorem 3.5. in ispatından çıkarılan bir sonuçtur.

4. b -METRİK UZAY ÜZERİNDE C_F -SIMULATION FONKSİYONU VEYA FONKSİYONLARI İLE ÇAKIŞIK NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde ilk olarak C_F -simülasyon fonksiyonu ve $(Z_{F,b}, g)$ -daralma ile ilgili kavramlar verilecektir. Daha sonra b -metrik uzay üzerinde C_F -simülasyon fonksiyon yardımıyla çakışık nokta ile ilgili bazı teoremler ispatlanıp gerekli görülenler örneklerle açıklanacaktır ve bunlara ilişkin sonuçlar verilecektir

Tanım 4.1. [43] $F: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, sürekli ve

1) $F(s, t) \leq s$;

2) Her $s, t \in [0, \infty)$ için $F(s, t) = s$ iken $s = 0$ ya da $t = 0$

şartlarını sağlıyorsa F fonksiyonuna C - sınıfı fonksiyon denir.

Tüm C - sınıfı fonksiyonları C ile gösterilecektir.

Tanım 4.2. [44] $F: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, bir $C_F \geq 0$ için,

1) $F(s, t) > C_F \Rightarrow s > t$;

2) Her $t \in [0, \infty)$ için $F(t, t) \leq C_F$

şartlarını sağlıyorsa C_F özelliğine sahiptir denir.

Örnek 4.3. [44] $F: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere her $s, t \in [0, \infty)$ için

1) $r \in [0, \infty)$ ve $C_F = r$ olmak üzere $F(s, t) = s - t$

2) $r \in (0, \infty)$ ve $C_F = 1$ olmak üzere $F(s, t) = \frac{s}{(1+t)^r}$

fonskiyonları C_F özelliğine sahip C nin elemanlarıdır.

Tanım 4.4. [45] $\zeta: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

ζa) $\zeta(0,0) = 0$;

ζb) $F: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ C_F özelliğine sahip ve $F \in C$ olmak üzere, her $t, s > 0$ için $\zeta(t, s) < F(s, t)$;

ζc) $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n > 0$ ve $t_n < s_n$ olmak üzere $\{t_n\}$ ve $\{s_n\}$ $(0, \infty)$ üzerinde iki

dizi ise $\limsup_{n \rightarrow \infty} \zeta(t_n, s_n) < C_F$

şartlarını sağlıyorsa C_F - simülasyon fonksiyonu olarak isimlendirilir.

C_F -simülasyon fonksiyonların sınıfı Z_F ile gösterilecektir.

Örnek 4.5. [44] $\zeta: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $k < 1$ reel sayı olsun. $C_F = 0$ ve $\zeta(t, s) = kF(s, t) - t$ şeklinde tanımlansın.

$$\zeta(t, s) = kF(s, t) - t \leq kF(s, t) < F(s, t) \leq s$$

ve

$$\zeta(t, t) = kF(t, t) - t \leq kt - t < 0$$

olduğundan ζ fonksiyonu, $\zeta a)$ ve $\zeta b)$ aksiyomları sağladığı aşıkardır. $\{t_n\}$ ve $\{s_n\}$ dizileri $(0, \infty)$ üzerinde iki dizi olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \delta > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n < s_n$ iken

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \zeta(t_n, s_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (kF(s_n, t_n) - t_n) \leq (k - 1)\delta < 0$$

olduğundan $\zeta c)$ aksiyomu sağlanır. Bu nedenle ζ , bir C_F - simülasyon fonksiyondur.

Tanım 4.6. (X, d) bir b -metrik uzay $T, g: X \rightarrow X$ iki fonksiyon ve $\zeta \in Z_F$ olsun. $gx \neq gy$ olan her $x, y \in X$ için

$$\zeta(s^4 d(Tx, Ty), d(gx, gy)) \geq C_F,$$

şartı sağlıyorsa T ye bir $(Z_{F,b}, g)$ – daralma dönüşümü denir.

Uyarı h.

1. $\zeta b)$ gereği her $r > 0$ için $\zeta(s^4 r, r) < C_F$ dır.
2. Eğer $T \zeta \in Z_F$ ye göre $(Z_{F,b}, g)$ – daralma dönüşümü ise $gx \neq gy$ olan her $x, y \in$

X için

$$d(Tx, Ty) \leq s^4 d(Tx, Ty) < d(gx, gy)$$

sağlanır.

İspatı için, $gx \neq gy$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $d(gx, gy) > 0$ dır. Eğer $Tx = Ty$ ise $0 = d(Tx, Ty) = s^4 d(Tx, Ty) < d(gx, gy)$ dır. Eğer $Tx \neq Ty$ ise ζb) aksiyomu ve $(Z_{F,b}, g)$ -daralma özelliği kullanılarak

$$C_F \leq \zeta(s^4 d(Tx, Ty), d(gx, gy)) < F(d(gx, gy), s^4 d(Tx, Ty))$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$d(Tx, Ty) \leq s^4 d(Tx, Ty) < d(gx, gy)$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 4.7. T fonksiyonu (X, d) b -metrik uzayında bir $(Z_{F,b}, g)$ – daralma dönüşümü olsun. $x, y \in X$ noktaları T ve g nin çakışık noktalarıysa $Tx = gx = gy = Ty$ dir. Ayrıca, aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. T (veya g), T ve g nin tüm çakışık noktaları kümesi üzerinde birebir ise, T ve g nin en fazla bir çakışık noktası vardır.
2. T ve g nin bir ortak sabit noktası varsa tektir.

İspat. $gx \neq gy$ kabul edilsin. Bu durumda $d(gx, gy) > 0$ dır. T bir $(Z_{F,b}, g)$ -daralma dönüşümü olduğundan

$$C_F \leq \zeta(s^4 d(Tx, Ty), d(gx, gy)) = \zeta(s^4 d(gx, gy), d(gx, gy))$$

olup Uyarı h. 1) şıkkı ile çelişir.

Teorem 4.8. T (X, d) b -metrik uzayı üzerinde bir $(Z_{F,b}, g)$ – daralma dönüşümü ve $\{x_n\}$ (T, g) ikilisi $\{x_n\}_{n \geq 0}$ bir Picard-Jungck dizisi olsun. Ayrıca, aşağıdaki şartlardan en az

biri sağlansın.

- (a) $(g(X), d)$ (veya $(T(X), d)$) tamdır.
- (b) (X, d) tam, T ve g b -sürekli ve uyumludur.
- (c) (X, d) tam, T ve g b -sürekli ve değişmelidir.

Bu durumda T ve g nin en az bir çakışık noktası vardır. Ayrıca, $\{gx_n\}$ dizisi T ve g nin bir çakışık noktasını içerir ya da aşağıdaki şartlardan en az biri sağlanır.

- (a) durumunda, $\{gx_n\}$ dizisi $u \in g(X)$ noktasına yakınsar ve $gv = u$ olan herhangi bir $v \in X$ noktası T ve g nin bir çakışık noktasıdır.
- (b) ve (c) durumunda, $\{gx_n\}$ dizisi T ve g nin bir çakışık noktasına yakınsar.

Buna ek olarak, $x, y \in X$, T ve g nin çakışık noktalarıysa $Tx = gx = gy = Ty$ dir. g (veya T), T ve g nin tüm çakışık noktaları kümesi üzerinde birebir ise T ve g nin bir tek çakışık noktası vardır.

İspat. $\{x_n\}$, T ve g nin bir çakışık noktasını içeriyorsa ispat tamamlanır. $\{x_n\}$, T ve g herhangi bir çakışık noktasını içermediği kabul edilsin. Her $n \geq 0$ için

$$gx_n \neq Tx_n = gx_{n+1}.$$

Bu durumda, her $n \geq 0$ için

$$d(gx_n, gx_{n+1}) > 0.$$

İspat üç aşamada gösterilecektir.

1.Durum. ζb aksiyomu ve $(Z_{F,b}, g)$ - daralma özelliği yardımıyla her $n \geq 0$ ve $s \geq 1$ bir reel sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} C_F &\leq \zeta(s^4(d(Tx_n, Tx_{n+1}), d(gx_n, gx_{n+1}))) \\ &= \zeta(s^4(d(gx_{n+1}, gx_{n+2}), d(gx_n, gx_{n+1}))) \\ &< F(d(gx_n, gx_{n+1}), s^4 d(gx_{n+1}, gx_{n+2})) \end{aligned}$$

olur. Buradan her $n \geq 0$ için $0 < d(gx_{n+1}, gx_{n+2}) \leq s^4 d(gx_{n+1}, gx_{n+2}) < d(gx_n, gx_{n+1})$ elde edilir. Dolayısıyla benzer şekilde $d(gx_{n+2}, gx_{n+3}) < d(gx_{n+1}, gx_{n+2})$ olduğu elde edilir. Bu nedenle $\{d(gx_n, gx_{n+1})\}$ dizisi sıfır ile alttan sınırlı ve artmayan bir dizi olduğundan yakınsaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(gx_n, gx_{n+1}) = r > 0 \text{ olsun.}$$

$\{t_n\} = \{d(gx_{n+1}, gx_{n+2})\}$ ve $\{s_n\} = \{d(gx_n, gx_{n+1})\}$ dizileri ile ζc aksiyomu uygulanırsa (her n için $t_n < s_n$),

$$C_F \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \zeta(s^4(d(gx_{n+1}, gx_{n+2}), d(gx_n, gx_{n+1}))) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \zeta(s^4 t_n, s_n) < C_F$$

olduğundan çelişki elde edilir. O halde $r = 0$ olmalıdır. Diğer bir ifade ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(gx_n, gx_{n+1}) = 0$$

dır.

2.Durum. $\{gx_n\}$ dizisi bir b -Cauchy dizisi olmadığını varsayalım. $d(gx_{m(k)}, gx_{n(k)}) > \varepsilon$ ve $d(gx_{m(k)}, gx_{n(k)-1}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $n(k) > m(k) \geq k$ ile $\{x_{n(k)}\}$ ve $\{x_{m(k)}\}$ iki pozitif tamsayı dizileri vardır. $T, (Z_{F,b}, g)$ –daralma dönüşümü olduğundan ζb aksiyomu kullanılarak

$$\begin{aligned} C_F &\leq \zeta(s^4(d(Tx_{m(k)}, Tx_{n(k)}), d(gx_{m(k)}, gx_{n(k)}))) \\ &= \zeta(s^4(d(gx_{m(k)+1}, gx_{n(k)+1}), d(gx_{m(k)}, gx_{n(k)}))) \\ &< F(d(gx_{m(k)}, gx_{n(k)}), s^4 d(gx_{m(k)+1}, gx_{n(k)+1})) \end{aligned}$$

elde edilir.

i) $s = 1$ olsun.

Bu durumda (X, d) bir metrik uzaydır. $\{t_n\} = \{d(gx_{m(k)+1}, gx_{n(k)+1})\}$ ve $\{s_n\} = \{d(gx_{m(k)}, gx_{n(k)})\}$ olmak üzere Lemma 2.2.11. in i)-iv) aksiyomlar ve $\zeta c)$ yardımıyla

$$\begin{aligned} C_F &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \zeta \left(d(gx_{m(k)+1}, gx_{n(k)+1}), d(gx_{m(k)}, gx_{n(k)}) \right) \\ &< F \left(d(gx_{m(k)}, gx_{n(k)}), d(gx_{m(k)+1}, gx_{n(k)+1}) \right) < C_F \end{aligned}$$

olup çelişki elde edilir.

ii) $s > 1$ olsun.

Bu durumda (X, d) bir b -metrik uzaydır. Lemma 2.2.12. nin i)-iv) aksiyomlar yardımıyla,

$$\begin{aligned} C_F &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \zeta \left(s^4 d(gx_{m(k)+1}, gx_{n(k)+1}), d(gx_{m(k)}, gx_{n(k)}) \right) \\ &< F \left(d(gx_{m(k)}, gx_{n(k)}), s^4 d(gx_{m(k)+1}, gx_{n(k)+1}) \right) < C_F \end{aligned}$$

olup çelişki elde edilir.

O halde $\{gx_n\}$, X de bir b -Cauchy dizisi olmalıdır.

3.Durum. (a) veya (b) veya (c) varsayımlarıyla, T ve g nin bir çakışık noktasına sahip olduğu gösterilecektir.

(a) $(g(X), d)$ (veya $(T(X), d)$) tam olsun. Bu durumda, her $n \geq 0$ için $gx_{n+1} = Tx_n \in T(X) \subseteq g(X)$ dir. Ayrıca, bir önceki aşamada $\{gx_n\}$ dizisinin bir b -Cauchy dizisi olduğu gösterildi. $g(X)$, (veya $(T(X))$ tam olduğundan dolayı $\{gx_n\} \rightarrow u \in g(X)$ dir. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(gx_n, u) = 0$$

dir. Her $n \geq 0$ için $gx_{n+1} = Tx_n$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(Tx_n, u) = 0$$

dır. Herhangi bir $v \in X$ için $gv = u$ olsun. v , T ve g nin bir çakışık noktası olmadığı kabul edilsin. Diğer bir ifadeyle $u = gv \neq Tv$ olsun. Bu durumda, $\delta = d(Tv, gv) > 0$ dir. Ayrıca, her $n \geq n_0$ için $d(gx_n, gv) < \delta$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Yani, her $n \geq n_0$ için $d(gx_n, gv) < \delta = d(Tv, gv)$.

O halde her $n \geq n_0$ için $gx_n \neq Tv$ olup

$$d(Tx_n, Tv) = d(gx_{n+1}, Tv) > 0$$

elde edilir. Diğer taraftan her $n \geq n_1$ için $gx_n = gv$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ olsaydı bu durum $d(gx_n, gx_{n+1}) > 0$ olmasıyla çelişir.

Bu nedenle, $\{gx_n\}$ dizisinin her n için

$$gx_{\delta(n)} \neq gv$$

olacak şekilde belirli bir $\{gx_{\delta(n)}\}$ alt dizisi vardır.

$n_2 \in \mathbb{N}$ için $\delta(n_2) \geq n_0$ olsun. Bu nedenle, $gx_{\delta(n)} \neq gv$ ve $d(Tx_n, Tv) > 0$ olduğundan her $n \geq n_2$ için $d(gx_{\delta(n)}, gv) > 0$ ve $d(Tx_{\delta(n)}, Tv) > 0$ dir. ζb kullanılarak

$$\begin{aligned} C_F &\leq \zeta(s^4(d(Tx_{\delta(n)}, Tv), d(gx_{\delta(n)}, gv))) \\ &< F(d(gx_{\delta(n)}, gv), s^4 d(Tx_{\delta(n)}, Tv)) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, her $n \geq n_2$ için

$$0 \leq d(Tx_{\delta(n)}, Tv) \leq s^4 d(Tx_{\delta(n)}, Tv) < d(gx_{\delta(n)}, gv) = d(gx_{\delta(n)}, u)$$

olup limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Tx_{\delta(n)}, Tv) = 0$ elde edilir. Fakat $\{Tx_{\delta(n)}\} = \{gx_{\delta(n)+1}\}$ olduğundan $\{gx_n\}$ in bir alt dizisi gv ye yakınsaktır. Limitin tekliği

nedeniyle $gv = Tv$ dir. Bu durum kabulümüz ile çelişir. O halde v , T ve g nin bir çakışık noktasıdır.

- (b) (X, d) b -metrik uzayı tam, T ve g b -süreklili ve uyumlu olsun. Bu durumda $\{gx_n\}$ dizisi, (X, d) tam b -metrik uzayında bir b -Cauchy dizisi olduğundan $\{gx_n\} \rightarrow u \in X$ dir. T ve g süreklili olduğundan $\{ggx_n\} \rightarrow gu$ ve $\{Tgx_n\} \rightarrow Tu$ dir. Ayrıca, T ve g uyumlu ve $\{Tx_n\} = \{gx_{n+1}\}$ ile $\{gx_n\}$ dizilerinin limiti aynı olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(Tgx_n, gTx_n) = 0$$

dir. Dolayısıyla,

$$d(Tu, gu) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(Tgx_n, ggx_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(Tgx_n, gTx_n) = 0$$

olur. Bu nedenle, $Tu = gu$ elde edilir. Sonuç olarak u , T ve g nin bir çakışık noktasıdır.

- (c) (X, d) tam b -metrik uzay, T ve g b -süreklili ve değişmeli olsun. Bu durumda T ve g değişmeli ise T ve g uyumlu olacağından (b) durumu ile aynı olur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezin esasını oluşturan üçüncü ve dördüncü bölümlerde elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

1. Genelleştirilmiş dikdörtgensel b - metrik uzay üzerinde $(\alpha - \phi)$ -Meir Keeler daralma fonksiyonu ile ilgili bazı teoremler elde edilmiştir. Ayrıca bu daralma fonksiyonları için sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

2. b - metrik uzay üzerinde, C_F - simülasyon fonksiyonu ve $(Z_{F,b}, g)$ – daralma fonksiyonları kullanılarak sabit nokta ile ilgili bazı teoremler elde edilmiştir.

Sonraki çalışmalarda, çeşitli metrik uzaylarda genelleştirilmiş üçgensel α - orbital kabul edilebilir fonksiyon veya Kannan tipi daralma fonksiyonları kullanılarak sabit nokta ile ilgili yeni sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca her b -metrik uzay bir dikdörtgensel b - metrik uzay olduğundan, b - metrik uzay yerine genelleştirilmiş olan dikdörtgensel b - metrik uzay veya genelleştirilmiş $(Z_{F,b}, g)$ – daralma fonksiyonları kullanılarak sabit nokta ile ilgili yeni sonuçlar elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

- [1] L. E. J. Brouwer, “Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten”, *Mathematische Annalen*, ss. 97–115, 1910.
- [2] S. Banach, “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales”, *Fundamental Mathematics*, sayı 3, ss. 133–181, 1922.
- [3] J. Schauder, “Der fixpunktsatz in funktionalramen”, *Studia Mathematica*, sayı 2, ss. 171–180, 1930.
- [4] A. Meir ve E. Keeler, “A theorem on contraction mappings”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 28, ss. 326–329, 1969.
- [5] M. Maiti ve Pal, “Generalizations of two fixed point theorems”, *Bulletin Calcutta Mathematical Society*, c. 70, ss. 57–61, 1978.
- [6] S. Park ve Rhoades, “Meir-Keeler type contractive conditions”, *Mathematics Japon*, c. 26, sayı 1, ss. 13–20, 1981.
- [7] C. Mongkolkeha ve Kumam, “Best proximity points for asymptotic proximal pointwise weaker Meir-Keeler-type ψ -contraction mappings.”, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, c. 21, ss. 87–90, 2013.
- [8] L. B. Ćirić, “Generalized contractions and fixed-point theorems”, *Publications Of The Institute Of Mathematics*, c. 12, sayı 26, ss. 19–26, 1971.
- [9] S. K. Chatterjea, “Application of an extension of a theorem of fisher on common fixed point”, *Pure Mathematics Manuscript*, c. 6, ss. 35–38, 1987.
- [10] I. A. Bakhtin, “The contraction mapping principle in quasimetric spaces”, *In: Functional Analysis*, c. 30, ss. 26–37, 1989.
- [11] S. Czerwik, “Contraction mappings in b-metric spaces”, *Ostraviensis*, c. 1, sayı 1, ss. 5–115, 1993.
- [12] H. Aydi, M. F. Bota, E. Karapınar, ve S. Moradi, “A common fixed point for weak contractions on b-metric spaces”, *Fixed Point Theory*, c. 13, sayı 2, ss. 337–346, 2012.
- [13] J. R. Roshan, N. Shobkolaei, S. Sedghi, ve M. Abbas, “Common fixed point of four maps in b-metric spaces”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, c. 43, sayı 4, ss. 613–624, 2014.
- [14] A. Branciari, “A fixed point theorem of Banach–Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces”, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, c. 57, ss. 31–37, 2000.
- [15] H. Aydi, E. Karapınar, ve W. Shatanawi, “Tripled fixed point results in generalized metric spaces”, *Journal of Applied Mathematics*, c. 2012, 2012.
- [16] H. Aydi, E. Karapınar, ve D. Zhang, “On common fixed points in the context of Branciari metric spaces”, *Results of Mathematics*, c. 71, sayı 1, ss. 73–92, 2017.
- [17] A. Azam ve M. Arshad, “Kannan fixed point theorem on generalized metric

- spaces”, *The Journal of Nonlinear Sciences and Its Applications*, c. 1, sayı 1, ss. 45–48, 2008.
- [18] H. Lakzian ve B. Samet, “Fixed point for (α, ψ) -weakly contractive mappings in generalized metric spaces”, *Applied Mathematics*, c. 25, sayı 5, ss. 902–906, 2012.
- [19] C. M. Chen, “Common fixed point theorem in complete generalized metric spaces”, *Journal of Applied Mathematics*, 2012.
- [20] J. R. Roshan, V. Parvaneh, Z. Kadelburg, ve N. Hussain, “New fixed point results in b-rectangular metric spaces”, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, c. 21, sayı 5, ss. 614–634, 2016.
- [21] Z. Kadelburg ve S. Radenovic, “Pata-type common fixed point results in b-metric and b-rectangular metric spaces”, *Journal Nonlinear Sciences Applied*, c. 8, ss. 944–954, 2015.
- [22] E. Karapinar, S. Czerwik, ve H. Aydi, “ $(\alpha - \psi)$ -Meir-Keeler contraction mappings in generalized b-metric spaces”, *Journal of Function spaces*, s. 4, 2018.
- [23] S. Shukla, S. Balasubramanian, ve M. Pavlovic, “A generalized Banach fixed point theorem”, *Bulletin of the Malasiyan Mathematical Sciences Society*, c. 39, sayı 4, ss. 1529–1539, 2016.
- [24] F. Khojaseh, S. Shukla, ve S. Radenovic, “A new approach to the study of fixed point theorems via simulation functions”, *Filomat*, c. 29, ss. 1189–1194, 2015.
- [25] A. Roldan, E. Karapinar, C. Roldan, ve J. Martinez - Moreno, “Coincidence point theorems on metric spaces via simulation functions”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 275, ss. 345–355, 2015.
- [26] H. Argoubi, B. Samet, ve C. Vetro, “Nonlinear contractions involving simulation functions in a metric space with a partial order”, *Journal Nonlinear Sciences Applied*, c. 8, 2015.
- [27] K. Mahmut, *Genel Topololiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar*, Ankara. Türkiye: Nisan Yayıncılık, 2011.
- [28] J. R. Roshan, N. Shobkolaei, S. Sedghi, ve M. Abbas, “Common fixed point of four maps in b-metric spaces”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, c. 43, sayı 4, ss. 613–624, 2014.
- [29] M. Boriceanu, M. Bota, ve A. Petrusel, “Multivalued fractals in b-metric spaces”, *Central European Journal of Mathematics*, c. 8, sayı 2, ss. 367–377, 2010.
- [30] W. A. Kirk ve N. Shahzad, “Generalized metrics and Caristi theorem”, *Fixed Point Theory Applied*, c. 9, 2013.
- [31] R. George, S. Radenovic, K. P. Reshma, ve S. Shukla, “Rectangular b-Metric Spaces and Contraction Principle Preliminaries”, *Journal Nonlinear Sciences Applied*, c. 8, sayı 6, ss. 1005–1113, 2015.
- [32] N. Alharbi, H. Aydi, A. Felhi, C. Ozel, ve S. Sahmim, “ α -contractive mappings on rectangular b-metric spaces and an application to integral equations”, *Journal of Mathematical Analysis*, c. 8, sayı 3, ss. 1–14, 2018.
- [33] G. Jungck ve B. E. Rhoades, “Fixed point for set valued functions without continuity”, *Indian Journal Of Pure Applied Mathematics*, c. 29, sayı 3, ss. 227–238, 1998.

- [34] R. P. Agarwal, M. Meehan, ve D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2001.
- [35] V. Berinde, "Sequences of operators and fixed points in quasimetric spaces", *Studia University Babeş-Bolyai Mathematics*, c. 41, sayı 4, ss. 23–27, 1996.
- [36] J. Harjani ve K. Sadarangani, "Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations", *Nonlinear Analysis*, c. 72, ss. 1188–1197, 2010.
- [37] J. Harjani, B. Lopez, ve K. Sadarangani, "Fixed point theorems for mixed monotone operators and applications to integral equations", *Nonlinear Analysis*, c. 74, ss. 1749–1760, 2011.
- [38] E. Karapinar, S. Czerwik, ve H. Aydi, " $(\alpha-\psi)$ -Meir-Keeler Contraction Mappings in Generalized b-Metric Spaces", *Journal of Function spaces*, c. 2018, s. 4, 2018.
- [39] P. Ovidiu, "Some new fixed point theorems for α -Geraghty contraction type maps in metric spaces", *Popescu Fixed Point Theory and Applications*, 2014.
- [40] G. V. R. Babu ve P. D. Sailaja, "A fixed point theorem of generalized weakly contractive maps in orbitally complete metric spaces", *Thai Journal of Mathematics*, c. 9, sayı 1, ss. 1–10, 2012.
- [41] J. R. Roshan, V. Parvaneh, ve Z. Kadelburg, "Common fixed point theorems for weakly isotone increasing mappings in ordered b-metric spaces", *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, c. 07, sayı 04, ss. 229–245, 2014.
- [42] G. Jungck, "Commuting mappings and fixed points", *The American Mathematical Monthly*, c. 83, ss. 261–263, 1976.
- [43] A.H. Ansari, "Note on α -admissible mappings and related fixed point theorems", *The 2nd Regional Conference on Mathematics Applied PNU*, ss. 373–376, 2014.
- [44] X.L. Liu, A.H. Ansari, S. Chandok, ve S. Radenovic, "On some results in metric spaces using auxiliary simulation functions via new functions", *Journal of Computational Analysis and Applications*, c. 24, sayı 6, 2018.
- [45] A. F. Roldán-López-de-Hierro, E. Karapinar, C. Roldán-López-de-Hierro, ve J. Martínez-Moreno, "Coincidence point theorems on metric spaces via simulation function", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 275, ss. 345–355, 2015.

7. ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Reyhan Özçelik
Doğum Tarihi ve Yeri : 16.07.1986 Adapazarı
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : rsozcelik1@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik.	Düzce Üniversitesi	2019
Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2017

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler:

R. Özçelik, E.E. Kara, “Coincidence Point Theorems on b -Metric Spaces via C_F -Simulation Functions,” *Communications in Advanced Mathematical Sciences* (Kabul edildi).

R. Özçelik, M. İlhan, E.E. Kara, “Fixed Points of $(\alpha - \phi)$ -Meir-Keeler Contractive Mappings in Generalized Rectangular b -Metric Spaces,” *Advances and Applications in Mathematical Sciences* (Kabul edildi).

R. Özçelik, E.E. Kara, M. İlhan, “Fixed Point Results on $\mathcal{F}$ -Metric Spaces via α -admissible Mappings,” *Analysis in Theory and Applications* (Hakem sürecinde)

B. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler:

R. Özçelik, M. İlhan, E.E. Kara, “Some Contraction Mappings on Branciari b -Metric Spaces,” *International Conference on Mathematics (ICOM-2018)*, İstanbul, Türkiye, 2018