T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

SIKIŞTIRILAMAYAN, İZOTERMAL OLMAYAN AKIŞ PROBLEMLERİ İÇİN DOĞRUSAL OLMAYAN FİLTRE BAZLI ZAMAN DÜZENLEMESİ MODELİNİN SAYISAL ANALİZİ

BUSE İNGENÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. MİNE AKBAŞ

DÜZCE, 2022

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

SIKIŞTIRILAMAYAN, İZOTERMAL OLMAYAN AKIŞ PROBLEMLERİ İÇİN DOĞRUSAL OLMAYAN FİLTRE BAZLI ZAMAN DÜZENLEMESİ MODELİNİN SAYISAL ANALİZİ

Buse İNGENÇ tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Mine AKBAŞ
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Mine AKBAŞ
Düzce Üniversitesi _____

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi _____

Dr. Öğretim Üyesi Nazlım Deniz ARAL
Bitlis Eren Üniversitesi _____

Tez Savunma Tarihi: 29/06/2022

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

29/06/2022

Buse İNGENÇ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Mine Akbaş'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

29/06/2022 **Buse İNGENÇ**

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ vi
ÇİZELGE LİSTESİ vii
ÖZET viii
ABSTRACT ix
1. GİRİŞ 1
2. MATEMATİKSEL ÖN HAZIRLIKLAR 4
2.1. FONKSİYON UZAYLARI VE İLGİLİ NORMLAR 4
2.1.1. Vektör Değerli Fonksiyon Uzayları 8
2.2. EŞİTSİZLİKLER 8
2.3. OPERATÖRLER 10
2.4. SONLU ELEMANLAR ANALİZİ İÇİN GEREKLİ İNTEGRAL HESAPLAMALARI 11
3. DOĞAL KONVEKSİYONEL AKIŞLAR 13
3.1. ZAYIF FORMULASYON 13
4. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ 15
4.1. KARARLILIK ANALİZİ 16
4.2. HATA ANALİZİ 19
5. SAYISAL DENEYLER 33
5.1. YAKINSAKLIK ORAN TESTİ 33
5.2. LUİGİ FERDİNANDO MARSİGLİNİN YERÇEKİMİ KARARLI, İKİ KATMANLI AKIŞIN FİZİKSEL MODELİ 34
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 38
7. KAYNAKLAR 39
ÖZGEÇMİŞ 41

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 5.1. Marsigli Sayısal Deney Şeması. 35

Şekil 5.2. İnce ağ üzerinde DSS, aynı kaba ağ üzerinde DSS ve a_{D_0}, a_{D_1} gösterge fonksiyonları ile Algoritma 4.1'nin sıcaklık eğrileri. 36

Şekil 5.3. İnce ağ üzerinde DSS, aynı kaba ağ üzerinde DSS ve a_{D_0}, a_{D_1} gösterge fonksiyonları ile Algoritma 4.1'nin sıcaklık eğrileri. 36

Şekil 5.4. İnce ağ üzerinde DSS, aynı kaba ağ üzerinde DSS ve a_{D_0}, a_{D_1} gösterge fonksiyonları ile Algoritma 4.1'nin sıcaklık eğrileri. 37

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa No

Çizelge 5.1. Uzaya göre hız-sıcaklık hataları ve yakınsaklık oranları. 34
Çizelge 5.2. Zamana göre hız-sıcaklık hataları ve yakınsaklık oranları. 34

ÖZET

SIKIŞTIRILAMAYAN, İZOTERMAL OLMAYAN AKIŞ PROBLEMLERİ İÇİN DOĞRUSAL OLMAYAN FİLTRE BAZLI ZAMAN DÜZENLEMESİ MODELİNİN SAYISAL ANALİZİ

Buse İNGENÇ
Düzce Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Mine AKBAŞ
Haziran 2022, 40 sayfa

Bu tezde, sıkıştırılamaz izotermal olmayan akışkanlar için bir modüler, doğrusal olmayan filtre kullanan modelin bir zaman rahatlaması çalışılmıştır. Önerilen modelin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde zamana göre geri fark Euler yöntemi ve uzaya göre ise sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Önerilen nümerik algoritmanın çözümlerinin sonlu zaman aralığı üzerinde zaman adımı üzerinde bir koşul olmaksızın kararlı olduğu gösterilmiştir. Buna ek olarak, çözümlerin hem zamana hem de uzaya göre optimal yakınsaklık oranlarına sahip oldukları gösterilmiştir. Matematiksel hata analizinden elde edilen yakınsaklık oranları, gerçek çözümü bilinen bir sayısal test üzerinde doğrulanmıştır. Son olarak algoritmanın etkinliğini göz önüne sermek için Marsigli deneyi kullanılmıştır. Bu deneyde, önce sıkıştırılamaz izotermal olmayan akışın doğrudan sayısal simülasyonu ince bir ağ üzerinde elde edilmiştir. Daha sonra ise daha kalın bir ağ üzerinde algoritmanın ve üzerinde çalışılan akışkanın doğrudan sayısal simülasyonları elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar karşılaştırıldığında algoritmanın, üzerinde çalışılan akışkanın sonuçlarına göre daha iyi bir sonuç verdiği görülmüştür.

Anahtar sözcükler: Doğrusal olmayan zaman filtresi, İzotermal olmayan akışlar, Sonlu elemanlar yöntemi.

ABSTRACT

NUMERICAL ANALYSIS OF AN ADAPTIVE NON-LINEAR FILTER BASED TIME REGULARIZATION MODEL FOR THE INCOMPRESSIBLE, NON-ISOTHERMAL FLUID FLOWS

Buse İNGENÇ
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mine AKBAŞ
June 2022, 40 pages

In this thesis, a time relaxation of the model using a modular, nonlinear filter is studied for incompressible non-isothermal fluids. In obtaining the approximate solutions of the proposed model, the differential Euler method according to time and the finite element method according to space are used. It is shown that the solutions of the proposed numerical algorithm are stable over a finite time interval without any condition on the time step. In addition, it has been shown that the solutions have optimal convergence rates with respect to both time and space. The convergence rates obtained from the mathematical error analysis were verified on a numerical test whose true solutions are known. Finally, the Marsigli experiment was used to demonstrate the effectiveness of the algorithm. In this experiment, a direct numerical simulation of incompressible non-isothermal flow is first obtained on a fine mesh. Then, direct numerical simulations of the algorithm and the working fluid on a thicker mesh were obtained. When these results are compared, it is seen that the algorithm gives a better result than the results of the fluid studied.

Keywords: Finite element method, Non-isothermal flows, Non-linear time filter.

1. GİRİŞ

Uygulamalı matematik ve mühendislikte karşılaşılan birçok fiziksel problem onları tanımlayan ısı ve kütle transferi, elektromanyetizma gibi birden fazla fiziksel olay ile tanımlanabilmektedir. Bu problemler literatürde çoklu fizik problemleri olarak da adlandırılır. Matematik açısından bakıldığında, bu çoklu fizik problemleri birlikte çözülmesi gereken birden fazla kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilirler ki bu durum problemin analitik çözümün bulunmasında önemli bir sorun olarak ortaya çıkar. Bunun yanı sıra, bu çoklu fizik problemlerinin Navier-Stokes denklemlerini içermesi durumunda ise bu analitik çözümlerin bulunması özellikle 3 boyutlu uzayda imkansız hale gelmektedir. Bunun sebebi, matematiksel analizdeki boşluğun yanı sıra yüksek Reynolds sayısında akışkan akışının karmaşıklığıdır. Bu nedenlerden dolayı sıklıkla bu problemlerin çözümünde sayısal yöntemlerden yararlanılır.

Çoklu fizik problemlerinin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında literatürde kullanılan yöntemlerden biri parçalama yöntemidir. Bu yöntemde amaç, çoklu fizik problemini her bir zaman adımında çözülmesi daha kolay olan alt problemlere ayırmaktır. Bu ayırmanın tipik bir örneği ise her bir zaman adımında fiziksel değişkenlerin önceki zaman adımlarındaki değerlerini kullanmakla ortaya çıkar. Ancak, bu ayırma işlemi dikkatli bir şekilde yapılmadığında çözümlerin sayısal kararsızlığı ortaya çıkmaktadır.

Yaygın bir şekilde kullanılan ayrıştırma yöntemlerinden biri sonlu elemanlar yöntemidir. Sonlu elemanlar yönteminin yaygın kullanım alanına sahip olması sadece sağlam bir matematiksel temel üzerine inşa edilmesinden değil aynı zamanda yöntemin birçok karmaşık bölge üzerinde de uygulanmasından kaynaklanır ki bu durum özellikle günümüz birçok mühendislik probleminde oldukça yaygındır.

Bu tezde çoklu fizik problemlerinden biri olan sıkıştırılamaz, izotermal olmayan akışkan

akışları üzerinde çalışılmıştır [9]. Bu akışların boyutsuz formu aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - Re^{-1}\Delta\mathbf{u} + \nabla p - RiT\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{f}, & (0,T]\times\Omega \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, & (0,T]\times\Omega \\ T_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T - (RePr)^{-1}\Delta T = \gamma. & (0,T]\times\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

Bu sistemde Re, Ri, Pr sırasıyla Reynolds sayısı, Richardson sayısı, Prandtl sayısını gösterir, $\hat{\mathbf{k}}$ ise yer çekim yönündeki birim vektörü temsil eder.

Yukarıdan da görüleceği gibi (1.1) sistemi Navier-Stokes denklemleri ve ısı denkleminden oluşur. Burada temel problem yüksek Reynolds sayısında, hız girdaplarının boyut aralığının sayısal simülasyonlarda oldukça geniş olmasıdır. Kolmogrov teorisine dayanarak [7], söz konusu tüm kalıcı girdapları yakalayabilmek için sayısal simülasyonlar çok ince bir ağ üzerinde yapılmalıdır. Ancak bu durum günümüzdeki mevcut bilgisayar kapasitelerini bazen aşmakta bazen ise zorlamaktadır. Bu nedenle sayısal düzenleme ve hesaplamalı stabilizasyon yöntemleri kullanılır.

Yakın zamanda [10]'te sıkıştırılamaz, Navier-Stokes denklemleri için bir sayısal düzenleme modeli üzerinde çalışılmıştır. Esasında bu model ilk kez [14, 15, 16, 17]'de sıkıştırabilir, Stokes denklemlerine uygulanan sayısal düzenleme yöntemine dayanmaktadır.

Monica ve arkadaşlarının çalışmasında önerilen bu model, Navier-Stokes denklemlerine doğrusal olmayan bir filtre kullanan zaman gevşeme terimi ekler. Amaç çözülemeyen ölçekleri bu terim sayesinde üstel hızda sıfıra ölçeklemektir. Bu düşünceden hareketle (1.1) sistemini çözmek yerine aşağıda verilen model problem üzerinde çalışılsın:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - Re^{-1}\Delta\mathbf{u} + \nabla p - \chi(\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}}) - RiT\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{f}, \tag{1.2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{1.3}$$

$$T_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T - (RePr)^{-1}\Delta T = \gamma, \tag{1.4}$$

$$-\alpha^2\nabla\cdot(a(\mathbf{u})\nabla\overline{\mathbf{u}}) + \overline{\mathbf{u}} + \nabla\lambda = \mathbf{u}, \tag{1.5}$$

$$\nabla\cdot\overline{\mathbf{u}} = 0. \tag{1.6}$$

Burada $\alpha > 0$ olmak üzere uzay filtre yarıçapı ve $a(\cdot)(x)$ ise $0 < a(\cdot)(x) \leq 1$ ve

$$\mathbf{u}\text{'nun düzenlemeye ihtiyaç duymadığı bölgelerde,} \quad a(\cdot)(x) \approx 0 \tag{1.7}$$

$$\mathbf{u}\text{'nun düzenlemeye ihtiyaç duyduğu bölgelerde,} \quad a(\cdot)(x) \approx 1 \tag{1.8}$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyondur. (1.2)-(1.6) sisteminde kullanılan ve (1.1)-(1.8) ile belirtilen özellikleri sağlayan bu fonksiyonlar gösterge fonksiyonları olarak adlandırılırlar. Bu tezde kullanılan gösterge fonksiyonları [8]'deki gibi alınmıştır ve aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$a_{D_N}(\mathbf{u}) := |\mathbf{u} - D_N^h \widetilde{\mathbf{u}}^h|, \tag{1.9}$$

burada D_N^h, N. mertebeden ayrık, lineer Helmholtz filtresini kullanan van Cittert ters dürülme operatörü ve $\widetilde{\mathbf{u}}^h$ ise $\mathbf{u}$'nun ayrık Helmholtz filtresidir. Sürekli durumda, $\mathbf{u}$'nun düzenlemeye ihtiyaç duyulmadığı bölgelerde $D_N(\widetilde{\mathbf{u}}) \approx \mathbf{u}$ ve böylece (1.9) de tanımlı a_{D_N} (1.8) özelliğini sağlar.

2. MATEMATİKSEL ÖN HAZIRLIKLAR

Bu bölümde, tez boyunca kullanılan temel notasyonlardan, fonksiyon uzaylarından, eşitsizliklerden ve teoremlerden bahsedilmiştir. Vektör değerli fonksiyonlar ve bu fonksiyonların uzayları için koyu harfler kullanılmıştır. Bunların yanı sıra fonksiyonlar için kullanılan yeterince düzgün kavramı ile uygulanan değerlendirmeler, teoremler ve hesaplamalar için bu fonksiyonların gerekli koşulları sağladığı anlaşılacaktır. Bu bölümde $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2,3$ bölgesi sınırlı bir bölge olarak kabul edilsin.

2.1. FONKSİYON UZAYLARI VE İLGİLİ NORMLAR

Tanım 2.1. (Lebesgue Uzayı $L_p(\Omega)$): Lebesgue anlamında ölçülebilir ve p. kuvvetten integrallenebilen fonksiyonların sınıfı;

$$L^p(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ölçülebilir} : \int_\Omega |u(x)|^p d\Omega < \infty,\ 1 \leq p < \infty\},$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzay;

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p d\Omega\right)^{1/p};\ u \in L^p(\Omega),$$

ile bir normlu uzaydır. $p = \infty$ durumunda $L^\infty(\Omega)$ uzayı ve üzerindeki norm sırasıyla;

$$L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ölçülebilir};\ ess\sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty\},$$

ve

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := ess\sup_{x\in\Omega} |u(x)|,$$

şeklinde tanımlanır [3].

Not

1) $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, uzayları Banach uzaylarıdır ve bu uzaylar denklik sınıflarından oluşur.

2) $p = 2$ durumunda $L^2(\Omega)$ uzayı Hilbert uzayıdır ve üzerindeki iç çarpım fonksiyonu ve

bu iç çarpımın ürettiği norm sırasıyla;

$$(u,v)_{L^2} := \int_\Omega u(x)v(x)d\Omega,$$
$$\|u\|_{L^2} := \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

şeklinde tanımlanır [3].

3) Tez boyunca $L^2(\Omega)$ uzayı üzerindeki iç çarpımı ve ürettiği norm için sırasıyla $(\cdot,\cdot)$ ve $\|\cdot\|$ notasyonlarını, $L^p(\Omega)$ üzerindeki norm için ise $\|\cdot\|_{L^p}$ notasyonu kullanılmıştır.

Tanım 2.2. (Kompakt Destekli Fonksiyon Alanları): u fonksiyonu kompakt bir desteğe sahiptir;

$$\text{supp}(u) := \{\overline{x : u(x) \neq 0}\} \subset \Omega.$$

Bu ifade u'nun Ω sınırında kaybolduğu anlamına gelir. Kompakt desteği olan fonksiyonların uzayları 0 alt indisi ile gösterilir. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı;

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u : u \in C^\infty(\Omega) \quad \text{ve } u \text{ kompakt desteğe sahiptir}\},$$

şeklindedir. Sobolev uzayları $W_0^{k,p}(\Omega)$, $W^{k,p}(\Omega)$ normunda $C_0^\infty(\Omega)$'nin kapanışı ile tanımlanır.

Uyarı: $p = 2, k = 1$ için

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega) := \{u : u \in H^1(\Omega) \quad \text{ve} \quad u|_{\partial\Omega} = 0\},$$

şeklindedir.

Tanım 2.3. (Sobolev Uzayı $W^{k,p}(\Omega)$): k pozitif bir tam sayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Sobolev uzayı $W^{k,p}(\Omega)$ tüm integrallenebilir fonksiyonlardan oluşur. $u : \Omega \to \mathbb{R}$ her bir çoklu indeks α için $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ türevi zayıf anlamda bulunur ve $L^p(\Omega)$ 'ya aittir [2].

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

$W^{k,p}(\Omega)$ üzerindeki norm;

$$\|u\|_{W^{k,p}} := \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & p \in [1,\infty) \quad \text{ise} \\ \sum\limits_{|\alpha|\leq k} ess\sup\limits_{x\in\Omega} |u(x)| & p = \infty \quad \text{ise} \end{cases}$$

dir.

Uyarı

1) $k = 0$ için $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$' dır.

2) $p = 2$ için $W^{k,2}(\Omega)$ uzayları Hilbert uzaylardır ve bu uzaylar;

$$W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega),$$

şeklinde gösterilir. $H^k(\Omega)$ üzerindeki norm ve yarınorm sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{H^k} = \|u\|_k = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^2 \right)^{1/2} = \left[\int_\Omega u(x)^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ |\alpha|=j}} \left(\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$|u|_{H^k} = |u|_k = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2} = \left[\int_\Omega \sum_{\substack{j=1 \\ |\alpha|=j}}^{k} \left(\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Tanım 2.4. (Dual Norm): $H^1_0(\Omega)$ uzayının dual uzayı $H^{-1}(\Omega)$ ile gösterilir ve $f \in H^{-1}(\Omega)$ için;

$$\|f\|_{-1} := \sup_{v\in H^1_0(\Omega)} \frac{< f, v >}{\|\nabla v\|},$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.5. (Sobolev Gömme Teoremi): $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ yerel olarak Lipschitz sınırına sahip sınırlı bir etki alanı olsun. j ve k negatif olmayan tam sayılar ve $1 \leq p < \infty$ sağlasın. $kp = d$ için,

$$W^{k,p}(\Omega) \to L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty$$

dir [2].

Teorem 2.6. (Divergence Teoremi): $\partial\Omega$ bir Lipschitz fonksiyonunun grafiği olacak kadar düzgünse, $\hat{n}$ onun dışa doğru normal birimidir ve $\overrightarrow{q}, u, v$ yeterince düzgünse bu durumda;

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\cdot\overrightarrow{q}\,d\Omega &= \int_{\partial\Omega}\overrightarrow{q}\cdot\hat{n}ds,\\ \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}d\Omega &= \int_{\partial\Omega} un_i d\Omega,\\ \int_\Omega \nabla\cdot(\nabla uv) &= \int_{\partial\Omega} v\nabla u\cdot\hat{n}ds = \int_\Omega (\Delta u)v+\nabla u\cdot\nabla v d\Omega,\end{aligned}$$

dir [1].

Teorem 2.7. (Lax-Milgram Teoremi): H bir Hilbert uzayı, $a(\cdot,\cdot): H\times H\to\mathbb{R}$ tanımlı bilineer formu aşağıdakileri sağlasın:
i) $a(\cdot,\cdot)$ sınırlıdır: $\exists M>0$ vardır öyle ki $\forall u,v\in H$ için;

$$|a(u,v)|\le M\|u\|_H\|v\|_H.$$

ii) $a(\cdot,\cdot)$ V eliptiktir (coercive): $\exists\alpha>0$ vardır öyle ki $\forall u\in H$ için;

$$|a(u,u)|\ge\alpha\|u\|_H^2.$$

Bu durumda her bir sınırlı lineer fonksiyoneli $f\in H'$ için;

$$a(u,v)=f(v)\ \forall v\in H,$$

denkleminin bir tek $u\in H$ çözümü vardır [3].

Tanım 2.8. (Uzay-Zaman Fonksiyonlarının Uzayları): $(0,T)$ zaman aralığında tanımlanan $u(x,t)$ fonksiyonları için, uzay-zaman fonksiyonunun uzayı;

$$L^p(0,T;H^k):=\left\{u(x,t):\int_\Omega\|u(\cdot,t)\|_k^p d\Omega<\infty\right\},\quad p\in[1,\infty),$$

olarak tanımlanır. Normu;

$$\|u\|_{p,k}=\left(\int_\Omega\|u(\cdot,t)\|_k^p d\Omega\right)^{1/p},\quad p\in[1,\infty),$$

dir. Ayrıca $p=\infty$ olduğunda norm;

$$\|u\|_{\infty,k} = ess \sup_{t\in[0,T]} \|u(\cdot,t)\|_k,$$

şekilde gösterilir.

2.1.1. Vektör Değerli Fonksiyon Uzayları

Bölümün başında da belirtildiği gibi vektör değerli fonksiyon ve fonksiyon uzayları için kalın harf notasyonu kullanılmıştır. Bu bölümde tez boyunca kullanılan ve W_0 değerli fonksiyon uzayları verilmiştir.

$$\mathbf{L}^2(\Omega) := \mathbf{L}^2(\Omega)^d = \{\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^d : \mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_d), v_i \in \mathbf{L}^2(\Omega), i = 1,2,...,d\},$$

ve ilgili normu;

$$\|\mathbf{v}\| := \left(\sum_{i=1}^{d} \|v_i\|^2 \right)^{1/2},$$

şeklinde tanımlanır.

2.2. EŞİTSİZLİKLER

Teorem 2.9. (Young Eşitsizliği): a, b negatif olmayan reel sayılar ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$ ve $q > 1$ olmak üzere herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{\varepsilon^{-q/p}}{q} b^q,$$

eşitsizliği geçerli olup bu eşitsizlik Young eşitsizliği olarak bilinir. $p = q = 2$ olması durumunda Young eşitsizliği, ki bu özel durum tez boyunca sıklıkla kullanılmıştır,

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

şeklini alır [3].

Lemma 2.1. (Ayrık Gronwall Eşitsizliği): $n \geq 0$ tam sayıları için $\Delta t, B, a_n, b_n, c_n, d_n$ tüm $N \geq 1$ için negatif olmayan sayılar olsun. Eğer;

$$a_N + \Delta t \sum_{n=0}^{N} b_n \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} d_n a_n + \Delta t \sum_{n=0}^{N} c_n + B \;\; \forall N \geq 0.$$

$\forall \Delta t > 0$ için;

$$a_N + \Delta t \sum_{n=0}^{N} b_n \leq \exp\left(\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} d_n\right)\left(\Delta t \sum_{n=0}^{N} c_n + B\right) \;\; \forall N \geq 0,$$

dir [1].

Teorem 2.10. (Cauchy-Schwarz ve Hölder Eşitsizliği): $p, q \in [1, \infty]$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ olsun. Bu durumda $fg \in L'(\Omega)$ olup;

$$\|fg\|_{L'} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q},$$

Hölder eşitsizliği sağlanır. $p = 2 = q$ olması durumunda Hölder eşitsizliği Cauchy-Schwarz eşitsizliği olarak bilinir ve

$$\|fg\|_{L'} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2},$$

şeklini alır [4].

Teorem 2.11. (Poincare-Friedrich Eşitsizliği): $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$ olsun. Bu durumda;

$$\|u\|_{L^p} \leq \left(\frac{|\Omega|}{V_\Omega}\right) \|\nabla u\|_{L^p} := C_{PF} \|\nabla u\|_{L^2},$$

eşitsizliği sağlanır. Burada V_Ω, Ω bölgesinin hacmidir [3].

Not:

1) Γ, Ω bölgesinin sınırı, $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ve $|\Gamma_0| > 0$ olsun. Eğer $u \in H^1(\Omega)$ ve $u|_{\Gamma_0} = 0$ ise bu durumda Poincare-Friedrich eşitsizliği sağlanır.

2) Poincare-Friedrich eşitsizliği vektör değerli fonksiyonlar için de geçerlidir. Ω bölgesinin sınırı Lipschitz koşulunu sağlasın. Buna ek olarak eğer,

$$\mathbf{u} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega),\ 1 \leq q < \infty,\ \text{ve } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0,$$

ise Poincare-Friedrich eşitsizliği sağlanır.

2.3. OPERATÖRLER

Tanım 2.12. $w : \Omega \to \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonlara skaler fonksiyon, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_d)$ olmak üzere $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ tanımlı fonksiyonlara ise vektör değerli fonksiyon denir.

Tanım 2.13. w skaler değerli; $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ise vektörel değerli yeterince düzgün fonksiyonlar olsunlar.

1) Laplace Operatörü:

$$\Delta w := \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 w}{\partial x_d^2},$$
$$\Delta \mathbf{v} := (\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_d);\ \Delta \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d.$$

2) Gradient Operatörü:

$$\nabla w := \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial x_d} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \mathbf{v} := \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial v_d}{\partial x_1} & \frac{\partial v_d}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_d}{\partial x_d} \end{bmatrix}$$

3) Divergence Operatörü:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_d}{\partial x_d}.$$

4) Tensör Çarpımı:

$$\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

5) Dot Çarpımı:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots u_d v_d.$$

2.4. SONLU ELEMANLAR ANALİZİ İÇİN GEREKLİ İNTEGRAL HESAPLAMALARI

Bu kısımda sonlu elemanlar analizi için gerekli integral hesaplamaları verilir. Bu hesaplamalar, kısmi integrasyon yöntemiyle birlikte Green Teoremine ihtiyaç duyar. Kolaylık olması açısından bu hesaplamalar iki boyutlu uzayda verilir; üç boyutlu uzayda ise benzer şekilde yapılabilir.

Yapılacak bu hesaplamalarda kullanılan fonksiyonlar aşağıda verilenleri sağlasın.

i) $\mathbf{u} = (u_1(x,y), u_2(x,y)), \mathbf{v} = (v_1(x,y), v_2(x,y))$ vektörel değerli fonksiyonları $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde yeterince düzgün ve homojen Dirichlet sınır koşulunu sağlarlar.

ii) $p = p(x,y)$ fonksiyonu Ω bölgesinde yeterince düzgün bir fonksiyondur.

1. $-\int_\Omega \Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\Omega = \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}d\Omega$. Laplace operatörünün tanımı göz önüne alınırsa, $\Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ terimi,

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (\Delta u_1, \Delta u_2)\cdot(v_1, v_2) = \Delta u_1 v_1 + \Delta u_2 v_2 \\ &= \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right)v_1 + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right)v_2 \\ &= \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}v_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}v_1\right) + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}v_2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}v_2\right) \qquad (2.1)\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. (2.1) eşitliğinin sağ tarafındaki her bir terim için;

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}v_i\right) &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}v_i + \frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial x},\ i = 1,2 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}v_i\right) &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}v_i + \frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial y},\ i = 1,2\end{aligned}$$

eşitlikleri dikkate alınır ve (2.1)'de yerine yazılarak bölge üzerinde integre edilir, Green Teoremi ile birlikte homojen dirichlet sınır koşulu kullanılırsa;

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\Omega &= -\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}v_1\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}v_1\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}v_2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}v_2\right)\right]d\Omega \\ &\quad + \int_\Omega \left[\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial v_2}{\partial y}\right]d\Omega \\ &= -\int_\Omega (\nabla\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}d\Omega + \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}d\Omega \\ &= -\int_{\partial\Omega} (\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{v}ds + \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}d\Omega\end{aligned}$$

$$= \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\Omega,$$

elde edilir.

2. $\int_\Omega (\nabla p \cdot \mathbf{v}) d\Omega = -\int_\Omega p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega$. Bir öncekine benzer şekilde $\nabla p \cdot \mathbf{v}$ terimi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\nabla p \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial p}{\partial x} v_1 + \frac{\partial p}{\partial y} v_2 \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(p v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(p v_2) - p\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) \\
&= \nabla \cdot (p\mathbf{v}) - p \nabla \cdot \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Bu eşitliğin her iki tarafı Ω üzerinde integre edilerek Green Teoremi ile birlikte homojen dirichlet sınır koşulları kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v} d\Omega &= \int_\Omega [\nabla \cdot (p\mathbf{v}) - p \nabla \cdot \mathbf{v}] d\Omega \\
&= \int_\Omega \nabla \cdot (p\mathbf{v}) - \int_\Omega p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega \\
&= \int_{\partial\Omega} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds - \int_\Omega p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega \\
&= -\int_\Omega p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega \\
&= -(p, \nabla \cdot \mathbf{v})
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. DOĞAL KONVEKSİYONEL AKIŞLAR

Boyutsuz doğal konveksiyonel akışkanlar, $(0,T]\times\Omega$ üzerinde,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - Re^{-1}\Delta\mathbf{u} + \nabla p - RiT\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{f}, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \\ T_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T - (RePr)^{-1}\Delta T = \gamma, \end{cases} \tag{3.1}$$

denklemleri ile verilir. Burada $\nu := Re^{-1}$, Re'nin Reynolds sayısını gösterdiği boyutsuz kinematik viskozite, $Ri := Gr/Re^2$ sıvının yerçekimi kuvvetini ve termal genleşmesini açıklayan Richardson sayısı, moleküler termal difüzyonun moleküler momentum yayılımının oranı Prandtl sayısını gösterir, $\hat{\mathbf{k}}$ ise yer çekim yönündeki birim vektördür.
Yukarıdaki denklem sistemi yerine aşağıda verilen model problemi göz önüne alınacaktır:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - Re^{-1}\Delta\mathbf{u} + \nabla p - \chi(\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}}) - RiT\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{f}, \tag{3.2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{3.3}$$

$$T_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T - (RePr)^{-1}\Delta T = \gamma, \tag{3.4}$$

$$-\alpha^2\nabla\cdot(a(\mathbf{u})\nabla\bar{\mathbf{u}}) + \bar{\mathbf{u}} + \nabla\lambda = \mathbf{u}, \tag{3.5}$$

$$\nabla\cdot\overline{\mathbf{u}} = 0. \tag{3.6}$$

3.1. ZAYIF FORMULASYON

Bu bölümde (3.2)-(3.6) modeli için zayıf formulasyonu verilir. Bunun için (3.2) denklemini $\mathbf{v}\in\mathbf{X}$, (3.3) denklemini $q\in Q$, (3.4) denklemini $s\in Y$, (3.5) denklemini $\mathbf{w}\in\mathbf{X}$ ve (3.6) denklemini $r\in Q$ fonksiyonu ile çarpıp Ω bölgesi üzerinde integre eder ve kısmi integrasyon, Green Teoremi ve homojen dirichlet sınır koşulu kullanılırsa;

$$\int_\Omega \mathbf{u}_t\cdot\mathbf{v}d\Omega + \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\Omega + Re^{-1}\int_\Omega \nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v}d\Omega - \int_\Omega p\nabla\cdot\mathbf{v}d\Omega$$
$$+\chi\int_\Omega(\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}})\cdot\mathbf{v}d\Omega - Ri\int_\Omega T\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{v}d\Omega = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}d\Omega,$$
$$\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{u}\,q\,d\Omega = 0,$$

$$\int_\Omega T_t \cdot s d\Omega + \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla T \cdot s d\Omega + (RePr)^{-1} \int_\Omega \nabla T \cdot \nabla s d\Omega = \int_\Omega \gamma \cdot s d\Omega,$$
$$\int_\Omega \alpha^2 \nabla (a(\mathbf{u})\bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{w} d\Omega + \int_\Omega \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} d\Omega - \int_\Omega \lambda \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} d\Omega,$$
$$\int_\Omega \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}\, r\, d\Omega = 0,$$

denklemleri elde edilir. Böylece (3.2)-(3.6) sisteminin zayıf formulasyonu $\forall(\mathbf{v}, q, s, \mathbf{w}, r) \in \mathbf{X} \times Q \times Y \times \mathbf{X} \times Q$ için,

$$(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (Re)^{-1} (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})$$
$$+\chi\big((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}), \mathbf{v}\big) - Ri\left(T\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{v}\right) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \tag{3.7}$$
$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, q) = 0, \tag{3.8}$$
$$(T_t, s) + b^*(\mathbf{u}, T, s) + (RePr)^{-1} (\nabla T, \nabla s) = (\gamma, s), \tag{3.9}$$
$$\alpha^2 (\nabla (a(\mathbf{u})\bar{\mathbf{u}}), \nabla \mathbf{w}) + (\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) - (\lambda, \nabla \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}), \tag{3.10}$$
$$(r, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) = 0, \tag{3.11}$$

şeklinde elde edilir. Burada:

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}), \;\; b^*(\mathbf{u}, T, s) = (\mathbf{u} \cdot \nabla T, s).$$

4. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

Bu bölüm (3.7)-(3.11) modeli için tamamen ayrık, sonlu elemanlar yöntemini sunmaktadır. Önerilen algoritmanın çözümlerinin kararlı olduğunu ve hem uzaya hem de zamana göre optimal yakınsaklık oranlarına sahip olduğu gösterilecektir [13].

$\mathbf{X}_h \subset \mathbf{X}$, $Q_h \subset Q$, $Y_h \subset Y$ sonlu elemanlar uzaylarıdır öyle ki $(\mathbf{X}_h, Q_h)$ aşağıda verilen ayrık inf-sup koşulunu sağlar:

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{(q_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)}{||\nabla \mathbf{v}_h|| \, ||q_h||} \geq \beta > 0.$$

$\mathbf{V}_h \subset \mathbf{X}_h$ ayrık div-free alt uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathbf{V}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h : \ (\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h) = 0, \ \forall q_h \in Q_h\}.$$

Burada ayrık inf-sup şartının aşağıda verilen sonucu kullanılsın:

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\| \leq \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|.$$

Ayrıca

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\| + h\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|\} \leq Ch^{k+1}\|\mathbf{u}\|_{k+1},$$

$$\inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\| \leq Ch^k \|p\|_k,$$

$$\inf_{T_h \in W_h} \{\|T - T_h\| + h\|\nabla(T - T_h)\|\} \leq Ch^{k+1}\|T\|_{k+1},$$

yaklaşım özelliklerinin sağlandığı kabul edilsin.

Algoritma 4.1. $\mathbf{f}, \gamma$ kuvvetleri, $\mathbf{u}_h^0$, T_h^0 başlangıç koşulları ve $\alpha \leq \mathcal{O}(h)$ olacak şekilde süzme yarıçapları verilsin. $t^* = N\Delta t$ olacak şekilde bir $t^* > 0$ bitiş zamanı ve Δt zaman adımı seçilsin. Bu durumda her bir $n = 0, 1, ..., N-1$ için aşağıda verilen adımları sağlayan $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}, T_h^{n+1}) \in (\mathbf{X}_h, Q_h, Y_h)$ yaklaşık çözümleri bulunsun.

1. Adım: $\mathbf{u}_h^n$ verildiğinde $\forall(\boldsymbol{\chi}_h, r_h) \in \mathbf{X}_h \times Q_h$ için aşağıdaki denklemi sağlayan $\overline{\boldsymbol{u}_h^n}$

bulunsun:

$$\alpha^2(\nabla(a(\mathbf{u}_h^n)\overline{\mathbf{u}_h^n},\nabla\chi_h)+(\overline{\mathbf{u}_h^n},\boldsymbol{\chi}_h)-(\lambda_h^{n+1},\nabla\cdot\boldsymbol{\chi}_h)=(\mathbf{u}_h^n,\boldsymbol{\chi}_h),$$
$$(\nabla\cdot\overline{\mathbf{u}_h^n},r_h)=0.$$

2. Adım: $\overline{\boldsymbol{u}_h^n}$ kullanılarak $\forall(\mathbf{v}_h,q_h,s_h)\in\mathbf{X}_h\times Q_h\times Y_h$ için aşağıda verilen denklemleri sağlayan $(\mathbf{u}_h^{n+1},p_h^{n+1},T_h^{n+1})$ bulunsun:

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}_h^{n+1}-\mathbf{u}_h^n,\mathbf{v}_h)+b\left(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^{n+1},\mathbf{v}_h\right)+Re^{-1}(\nabla\mathbf{u}_h^{n+1},\nabla\mathbf{v}_h)-(p_h^{n+1},\nabla\cdot\mathbf{v}_h)$$
$$+\chi(\mathbf{u}_h^{n+1}-\overline{\mathbf{u}_h^n},\mathbf{v}_h)=Ri(T_h^n\hat{\mathbf{k}},\mathbf{v}_h)+(\mathbf{f}^{n+1},\mathbf{v}_h),\qquad(4.1)$$
$$(\nabla\cdot\mathbf{u}_h^{n+1},q_h)=0,\qquad(4.2)$$
$$\frac{1}{\Delta t}(T_h^{n+1}-T_h^n,s_h)+b^*\left(\mathbf{u}_h^n,T_h^{n+1},s_h\right)+(RePr)^{-1}(\nabla T_h^{n+1},\nabla s_h)=(\gamma^{n+1},s_h).\qquad(4.3)$$

4.1. KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölüm, sayısal şemanın kararlılığını ispatlamaya ayrılmıştır.

Lemma 4.1. $\mathbf{f}\in L^\infty(0,t^*;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$, $\gamma\in L^\infty(0,t^*;H^{-1}(\Omega))$ ve $\mathbf{u}_h^0$, T_h^0 ise sırasıyla $\mathbf{u}^0$ ve T^0'ın lineer interpolantı olsun. Bu durumda yaklaşık çözümler aşağıdaki değerlendirmeyi sağlar: $\forall\Delta t>0$ için,

$$(1+\chi)\|\mathbf{u}_h^N\|^2+\|T_h^N\|^2+\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\left((Re)^{-1}\|\nabla\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2+(PrRe)^{-1}\|\nabla T_h^{n+1}\|^2\right)$$
$$\leq(1+\chi)\|\mathbf{u}_h^0\|^2+\|T_h^0\|^2+2Re\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\mathbf{f}^{n+1}\|_{-1}^2$$
$$+2\widetilde{C}\,t^*\left(\|T_h^0\|^2+\Delta t\alpha\|\nabla T_h^0\|^2+(PrRe)\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\gamma^{n+1}\|_{-1}^2\right),$$

şeklindedir. Burada $\widetilde{C}=CReRi^2$'dir.

İspat. Sırasıyla (4.1) denkleminde $\mathbf{v}_h=\mathbf{u}_h^{n+1}$, (4.2) denkleminde $q_h=p_h^{n+1}$, (4.3) denkleminde $s_h=T_h^{n+1}$ alınırsa lineer olmayan terimler ve basınç terimi kaybolur;

$$b(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^{n+1},\mathbf{u}_h^{n+1})=0,\ \ b^*(\mathbf{u}_h^n,T_h^{n+1},T_h^{n+1})=0,\ \ (\nabla\cdot\mathbf{v}_h^{n+1},p_h^{n+1})=0,$$

ve

$$(a-b,a)=\frac{1}{2}[a^2-b^2+(a-b)^2],$$

eşitliği uygulanırsa (4.1)-(4.3) denklemleri;

$$\frac{1}{2\Delta t}\left[\|\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2-\|\mathbf{u}_h^n\|^2+\|\mathbf{u}_h^{n+1}-\mathbf{u}_h^n\|^2\right]+Re^{-1}\|\nabla\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2$$
$$+\chi\|\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2=Ri(T_h^n\hat{\mathbf{k}},\mathbf{u}_h^{n+1})+\chi(\overline{\mathbf{u}_h^n},\mathbf{u}_h^{n+1})+(\mathbf{f}^{n+1},\mathbf{u}_h^{n+1}), \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{2\Delta t}\left[\|T_h^{n+1}\|^2-\|T_h^n\|^2+\|T_h^{n+1}-T_h^n\|^2\right]+(PrRe)^{-1}\|\nabla T_h^{n+1}\|^2=(\gamma^{n+1},T_h^{n+1}), \tag{4.5}$$

şeklini alır. Sıcaklık çözümünü üstten değerlendirmek için (4.5) denkleminin sağ tarafındaki terime Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}(\gamma^{n+1},T_h^{n+1}) &\le \|\gamma^{n+1}\|_{-1}\|\nabla T_h^{n+1}\| \\ &\le \frac{PrRe}{2}\|\gamma^{n+1}\|_{-1}^2+\frac{(PrRe)^{-1}}{2}\|\nabla T_h^{n+1}\|^2,\end{aligned}$$

elde edilir. Bu değerlendirme (4.5) eşitliğinin sağ tarafında dikkate alınır ve terimler yeniden düzenlenirse,

$$\frac{1}{2\Delta t}\left[\|T_h^{n+1}\|^2-\|T_h^n\|^2+\|T_h^{n+1}-T_h^n\|^2\right]+\frac{(PrRe)^{-1}}{2}\|\nabla T_h^{n+1}\|^2\le\frac{PrRe}{2}\|\gamma^{n+1}\|_{-1}^2,$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlik $2\Delta t$ ile çarpılıp sol taraftaki 3. terim göz ardı edilir ve $n=0,1,2,...,N-1$ zaman adımları üzerinde toplanırsa

$$\|T_h^N\|^2+(PrRe)^{-1}\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla T_h^{n+1}\|^2\le\|T_h^0\|^2+(PrRe)\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\gamma^{n+1}\|_{-1}^2=:C_T, \tag{4.6}$$

elde edilir. Dikkat edelim ki (4.6) eşitsizliğinden

$$\|T_h^N\|^2\le\|T_h^0\|^2+(PrRe)\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\gamma^{n+1}\|_{-1}^2:=C_T, \tag{4.7}$$

elde edilebilmektedir.

Algoritma (4.1)'in hız çözümünü üstten değerlendirebilmek için (4.4) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim için Cauchy-Schwarz, Poincare-Friedrich ve Young eşitsizliklerini uygulayıp, ikinci terim için Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleri ile birlikte $\|\overline{\mathbf{u}_h^n}\|\le\|\mathbf{u}_h^n\|$ olduğunu kullanır, üçüncü terim için Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleri

kullanılırsa,

$$\begin{aligned} Ri(T_h^n\hat{\mathbf{k}},\mathbf{u}_h^{n+1}) &\leq Ri\|T_h^n\|\|\mathbf{u}_h^{n+1}\| \leq Ri\|T_h^n\|C_P\|\nabla\mathbf{u}_h^{n+1}\| \\ &\leq Ri^2ReC_P{}^2\|T_h^n\|^2+\tfrac{Re^{-1}}{4}\|\nabla\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2, \end{aligned}$$

$$\chi(\overline{\mathbf{u}_h^n},\mathbf{u}_h^{n+1}) \leq \chi\|\overline{\mathbf{u}_h^n}\|\|\mathbf{u}_h^{n+1}\| \leq \chi\|\mathbf{u}_h^n\|\|\mathbf{u}_h^{n+1}\| \leq \frac{\chi}{2}\|\mathbf{u}_h^n\|^2+\frac{\chi}{2}\|\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2,$$

$$(\mathbf{f}^{n+1},\mathbf{u}_h^{n+1}) \leq \|\mathbf{f}^{n+1}\|_{-1}\|\nabla\mathbf{u}_h^{n+1}\| \leq \frac{Re}{2}\|\mathbf{f}^{n+1}\|_{-1}^2+\frac{Re^{-1}}{2}\|\nabla\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2,$$

değerlendirmeleri elde edilir. Bu değerlendirmeleri (4.4)'te dikkate alınarak gerekli sadeleştirmeleri yapıp terimler düzenlenirse (4.4) eşitliği;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t}\left(\|\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2-\|\mathbf{u}_h^n\|^2+\|\mathbf{u}_h^{n+1}-\mathbf{u}_h^n\|^2\right)+\frac{Re^{-1}}{4}\|\nabla\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2+\frac{\chi}{2}\left(\|\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2-\|\mathbf{u}_h^n\|^2\right) \\ \leq Ri^2ReC_P^2\|T_h^n\|^2+\frac{Re}{2}\|\mathbf{f}^{n+1}\|_{-1}^2, \end{aligned}$$

şeklini alır. Bu son eşitsizliği $2\Delta t$ ile çarpıp sol taraftaki üçüncü terimi göz ardı edilerek zaman adımları üzerinden toplanırsa,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^N\|^2+\chi\Delta t\|\mathbf{u}_h^N\|^2+\frac{Re^{-1}}{2}\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2 \leq \|\mathbf{u}_h^0\|^2+\chi\Delta t\|\mathbf{u}_h^0\|^2 \\ +2\Delta t\,C_P^2Ri^2Re\sum_{n=0}^{N-1}\|T_h^n\|^2+Re\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\mathbf{f}^{n+1}\|_{-1}^2, \quad (4.8) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte (4.7) değerlendirilmesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^N\|^2+\chi\Delta t\|\mathbf{u}_h^N\|^2+\frac{Re^{-1}}{2}\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2 \leq \|\mathbf{u}_h^0\|^2+\chi\Delta t\|\mathbf{u}_h^0\|^2 \\ +2\Delta t\,C_P^2Ri^2\,ReC_T\,t^*+Re\Delta t\|\mathbf{f}\|^2_{L^\infty(H^{-1}(\Omega))}, \quad (4.9) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.9) ile (4.7)'in taraf tarafa toplanılması Lemma (4.1)'in ispatını tamamlar.

4.2. HATA ANALİZİ

Yakınsaklık analizi için gerçek çözümlerinin $(\mathbf{u}(x,t), p(x,t), T(x,t))$,

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in L^{\infty}(0,\, t^{*}; H^{k+1}(\Omega)), \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{tt} \in L^{\infty}(0,\, t^{*}; L^{2}(\Omega)), \\ T \in L^{\infty}(0,\, t^{*}; H^{k+1}(\Omega)), T_t, T_{tt} \in L^{\infty}(0,\, t^{*}; L^{2}(\Omega)), \\ p \in L^{\infty}(0,\, t^{*}; H^{k}(\Omega)), \end{cases} \tag{4.10}$$

koşullarını sağladığı varsayılsın. Gerçek çözümlerin $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ adımındaki değerleri;

$$\mathbf{u}(t^{n+1}) := \mathbf{u}^{n+1},\ p(t^{n+1}) := p^{n+1},\ T(t^{n+1}) := T^{n+1},$$

ile gösterilsin. Bu durumda $\mathbf{u}, p, T$ çözümleri t^{n+1} de,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^{n}}{\Delta t}, \mathbf{v}_h\right) + b\left(\mathbf{u}^{n}, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}_h\right) + Re^{-1}(\nabla \mathbf{u}^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) - (p^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) \\ &\quad + \chi(\mathbf{u}^{n+1} - \overline{\mathbf{u}^{n}}, \mathbf{v}_h) = Ri(T^{n}\hat{\boldsymbol{k}}, \mathbf{v}_h) + (\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_h) + Ri((T^{n+1}-T^{n})\hat{\boldsymbol{k}}, \mathbf{v}_h) \\ &+ \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^{n}}{\Delta t} - \mathbf{u}_t^{n+1}, \mathbf{v}_h\right) - b\left(\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^{n}, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}_h\right) + \chi(\mathbf{u}^{n+1} - \overline{\mathbf{u}^{n}}, \mathbf{v}_h), \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}, q_h) = 0, \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{T^{n+1}-T^{n}}{\Delta t}, s_h\right) + b^{*}\left(\mathbf{u}^{n}, T^{n+1}, s_h\right) + (PrRe)^{-1}(\nabla T^{n+1}, \nabla s_h) \\ &= (\gamma^{n+1}, s_h) + \left(\frac{T^{n+1}-T^{n}}{\Delta t} - T_t^{n+1}, s_h\right) - b^{*}\left(\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^{n}, T^{n+1}, s_h\right), \end{aligned} \tag{4.13}$$

denklemlerini sağlar.

Teorem 4.2. Herhangi bir n, $, n = 0, 1, ..., N-1$, için $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}, T_h^{n+1})$, sonlu elemanlar çözümleri $(\mathbf{u}(t^{n+1}), p(t^{n+1}), T(t^{n+1}))$ ise (4.10) koşullarını sağlayan analitik çözümler olsun. $(\mathbf{P}_k, P_{k-1}, P_k)$ (veya $(\mathbf{P}_k, P_{k-1}^{disc}, P_k)$) sonlu elemanları kullanılırsa hata denklemleri aşağıdaki değerlendirmeyi sağlar: $\forall \Delta t > 0$ için

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}(t^{*}) - \mathbf{u}_h^{N}\| + \|T(t^{*}) - T_h^{N}\| + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left(Re^{-1}\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}\| + (PrRe)^{-1}\|T^{n+1} - T_h^{n+1}\|\right) \\ &\qquad = \mathcal{O}(\Delta t + h^{2}). \end{aligned}$$

İspat. Gerçek çözümler ile yaklaşık çözümler arasındaki fark yani hata,

$$\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n+1} := \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}, \;\; e_T^{n+1} := T^{n+1} - T_h^{n+1}, \;\; n = 0,1,...,N-1 \tag{4.14}$$

ile gösterilsin. (4.1)-(4.3) denklemleri (4.11)-(4.13) denklemlerinden çıkarılıp (4.14) kullanılırsa; $\forall(\mathbf{v}_h, q_h, s_h) \in (X_h \times Q_h \times Y_h)$ için,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n}}{\Delta t}, \mathbf{v}_h\right) + b\left(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}_h\right) - b\left(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h\right) + Re^{-1}(\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) \\
&-(p^{n+1} - q_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) + \chi(\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n+1} - \overline{\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n}}, \mathbf{v}_h) = Ri(e_T^n \hat{\boldsymbol{k}}, \mathbf{v}_h) + Ri((T^{n+1} - T^n)\hat{\boldsymbol{k}}, \mathbf{v}_h) \\
&+\left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \mathbf{u}_t^{n+1}, \mathbf{v}_h\right) - b\left(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}_h\right) + \chi(\mathbf{u}^{n+1} - \overline{\mathbf{u}^n}, \mathbf{v}_h),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}, q_h) = 0, \tag{4.16}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{e_T^{n+1} - e_T^n}{\Delta t}, s_h\right) + b^*\left(\mathbf{u}^n, T^{n+1}, s_h\right) - b^*\left(\mathbf{u}_h^n, T_h^{n+1}, s_h\right) + (PrRe)^{-1}(\nabla e_T^{n+1}, \nabla s_h) \\
&\qquad = \left(\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} - T_t^{n+1}, s_h\right) - b^*\left(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n, T^{n+1}, s_h\right),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir.

Uygun terimler eklenip çıkarılarak skew-symmetric formlar aşağıdaki şekilde yeniden yazılsın:

$$\begin{aligned}
&b\left(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}_h\right) - b\left(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h\right) - b\left(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}_h\right) + b\left(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}_h\right) \\
&\qquad = b\left(\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}_h\right) + b\left(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{v}_h\right),
\end{aligned} \tag{4.18}$$

ve

$$\begin{aligned}
&b^*\left(\mathbf{u}^n, T^{n+1}, s_h\right) - b^*\left(\mathbf{u}_h^n, T_h^{n+1}, s_h\right) - b^*\left(\mathbf{u}_h^n, T^{n+1}, s_h\right) + b^*\left(\mathbf{u}_h^n, T^{n+1}, s_h\right) \\
&\qquad = b^*\left(\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^n, T^{n+1}, s_h\right) + b^*\left(\mathbf{u}_h^n, e_T^{n+1}, s_h\right).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

(4.18) ve (4.19) sırasıyla (4.15) ve (4.17) denklemlerinde kullanılırsa,

$$\left(\frac{\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n}}{\Delta t}, \mathbf{v}_h\right) + b\left(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}_h\right) - b\left(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h\right) + Re^{-1}(\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h)$$

$$-(p^{n+1},\nabla\cdot\mathbf{v}_h)+\chi(\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}-\overline{\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n}},\mathbf{v}_h)=Ri(e_T^n\hat{\boldsymbol{k}},\mathbf{v}_h)+Ri((T^{n+1}-T^n)\hat{\boldsymbol{k}},\mathbf{v}_h)$$
$$+\left(\frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n}{\Delta t}-\mathbf{u}_t^{n+1},\mathbf{v}_h\right)-b\left(\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^{n+1},\mathbf{v}_h\right)+\chi(\mathbf{u}^{n+1}-\overline{\mathbf{u}^n},\mathbf{v}_h), \tag{4.20}$$

ve

$$(\nabla\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n+1},q_h)=0, \tag{4.21}$$
$$\left(\frac{e_T^{n+1}-e_T^n}{\Delta t},s_h\right)+b^*\left(\mathbf{u}^n,T^{n+1},s_h\right)-b^*\left(\mathbf{u}_h^n,T_h^{n+1},s_h\right)+(PrRe)^{-1}(\nabla e_T^{n+1},\nabla s_h)$$
$$=\left(\frac{T^{n+1}-T^n}{\Delta t}-T_t^{n+1},s_h\right)-b^*\left(\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n,T^{n+1},s_h\right), \tag{4.22}$$

elde edilir. Hatanın,

$$\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}:=(\mathbf{u}^{n+1}-I_h(\mathbf{u}^{n+1}))-(\mathbf{u}_h^{n+1}-I_h(\mathbf{u}^{n+1}))=:\eta_{\mathbf{u}}^{n+1}-\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1},$$
$$e_T^{n+1}:=(T^{n+1}-I_h(T^{n+1}))-(T_h^{n+1}-I_h(T^{n+1}))=:\eta_T^{n+1}-\psi_h^{n+1},$$

ayrışımını (4.20) ve (4.22) denklemlerinde kullanılır, $\mathbf{v}_h=\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}$ ve $s_h=\psi_h^{n+1}$ olarak seçilir ve

$$(a-b,a)=\frac{1}{2}\left[a^2-b^2+(a-b)^2\right],$$

eşitliği türev yaklaşımlarında kullanılırsa (4.20) ve (4.22) denklemleri sırasıyla,

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2-\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|^2+\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}-\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|^2\right)+Re^{-1}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2+\chi\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2$$
$$=Re^{-1}(\nabla\eta_{\mathbf{u}}^{n+1},\nabla\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1})+b(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^{n+1},\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1})-b(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{u}_h^{n+1},\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1})$$
$$-(p^{n+1}-q_h,\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1})+\chi(\eta_{\mathbf{u}}^{n+1}-\overline{\eta_{\mathbf{u}}^n},\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1})-\chi(\overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n},\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1})-Ri(\eta_T^n\hat{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1})$$
$$+Ri(\psi_h^n\hat{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1})-Ri((T^{n+1}-T^n)\hat{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1})+\left(\mathbf{u}_t^{n+1}-\frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n}{\Delta t},\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\right)$$
$$+b\left(\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^{n+1},\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\right)-\chi(\mathbf{u}^{n+1}-\overline{\mathbf{u}^n},\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}), \tag{4.23}$$

ve

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(\|\psi_h^{n+1}\|^2-\|\psi_h^n\|^2+\|\psi_h^{n+1}-\psi_h^n\|^2\right)+(PrRe)^{-1}\|\nabla\psi_h^{n+1}\|^2$$
$$=(PrRe)^{-1}(\nabla\eta_T^{n+1},\nabla\psi_h^{n+1})+b^*(\mathbf{u}^n,T^{n+1},\psi_h^{n+1})-b^*(\mathbf{u}_h^n,T_h^{n+1},\psi_h^{n+1})$$

$$+\left(T_t^{n+1}-\frac{T^{n+1}-T^n}{\Delta t},\psi_h^{n+1}\right)+b^*\left(\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n,T^{n+1},\psi_h^{n+1}\right), \qquad (4.24)$$

şeklini alır. (4.24) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terim için Cauchy-Schwarz ile birlikte Young eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}(PrRe)^{-1}(\nabla\eta_T^{n+1},\nabla\psi_h^{n+1}) &\leq (PrRe)^{-1}\|\nabla\eta_T^{n+1}\|\|\nabla\psi_h^{n+1}\| \\ &\leq 4(PrRe)^{-1}\|\nabla\eta_T^{n+1}\|^2+\frac{1}{16}(PrRe)^{-1}\|\nabla\psi_h^{n+1}\|^2,\end{aligned}$$

elde edilir. Skew simetrik terimler için uygun terimler eklenip çıkartılarak aşağıdaki şekilde yeniden yazılır.

$$\begin{aligned}&b^*(\mathbf{u}^n,T^{n+1},\psi_h^{n+1})-b^*(\mathbf{u}_h^n,T_h^{n+1},\psi_h^{n+1}) \\ &=b^*(\mathbf{u}^n,T^{n+1},\psi_h^{n+1})-b^*(\mathbf{u}_h^n,T_h^{n+1},\psi_h^{n+1})-b^*(\mathbf{u}_h^n,T^{n+1},\psi_h^{n+1})+b^*(\mathbf{u}_h^n,T^{n+1},\psi_h^{n+1}) \\ &=b^*(\mathbf{e}_\mathbf{u}^n,T^{n+1},\psi_h^{n+1})+b^*(\mathbf{u}_h^n,\mathbf{e}_T^{n+1},\psi_h^{n+1}) \\ &=b^*(\eta_\mathbf{u}^n,T^{n+1},\psi_h^{n+1})-b^*(\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n,T^{n+1},\psi_h^{n+1})+b^*(\mathbf{u}_h^n,\eta_T^{n+1},\psi_h^{n+1}).\end{aligned}$$

Birinci ve ikinci terimler için önce skew simetrik operatörün tanımı, daha sonra genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği, Poincare ve Young eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}&b^*(\eta_\mathbf{u}^n,T^{n+1},\psi_h^{n+1}) \\ &\leq\frac{1}{2}\left[|(\eta_\mathbf{u}^n\cdot\nabla T^{n+1},\psi_h^{n+1})|+|(\eta_\mathbf{u}^n\cdot\nabla\psi_h^{n+1},T^{n+1})|\right] \\ &\leq C\frac{1}{2}\|\eta_\mathbf{u}^n\|\|\nabla T^{n+1}\|_{L^\infty}C_p\|\nabla\psi_h^{n+1}\|+C\frac{1}{2}\|\eta_\mathbf{u}^n\|\|\nabla\psi_h^{n+1}\|\|T^{n+1}\|_{L^\infty} \\ &\leq 2CC_p^2(PrRe)\|\eta_\mathbf{u}^n\|^2\|\nabla T^{n+1}\|_{L^\infty}^2+2C(PrRe)\|\eta_\mathbf{u}^n\|^2\|T^{n+1}\|_{L^\infty}^2+\frac{1}{8}(PrRe)^{-1}\|\nabla\psi_h^{n+1}\|^2, \\ &b^*(\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n,T^{n+1},\psi_h^{n+1}) \\ &\leq\frac{1}{2}\left[|(\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\cdot\nabla T^{n+1},\psi_h^{n+1})|+|(\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\cdot\nabla\psi_h^{n+1},T^{n+1})|\right] \\ &\leq C\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|\|\nabla T^{n+1}\|_{L^\infty}C_p\|\nabla\psi_h^{n+1}\|+C\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|\|\nabla\psi_h^{n+1}\|\|T^{n+1}\|_{L^\infty} \\ &\leq 2CC_p^2(PrRe)\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|^2\|\nabla T^{n+1}\|_{L^\infty}^2+2C(PrRe)\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|^2\|T^{n+1}\|_{L^\infty}^2+\frac{1}{8}(PrRe)^{-1}\|\nabla\psi_h^{n+1}\|^2,\end{aligned}$$

üçüncü terim için Lemma (4.1) ile birlikte Young eşitsizliği kullanılırsa,

$$b^*(\mathbf{u}_h^n,\eta_T^{n+1},\psi_h^{n+1})\leq C\|\nabla\mathbf{u}_h^n\|\|\nabla\eta_T^{n+1}\|\|\nabla\psi_h^{n+1}\|$$

$$\leq 4C(PrRe)\|\nabla \mathbf{u}_h^n\|^2\|\nabla \eta_T^{n+1}\|^2 + \frac{1}{16}(PrRe)^{-1}\|\nabla \psi_h^{n+1}\|^2,$$

üstten değerlendirmesi elde edilir. Dördüncü terim için Taylor teoremi, Cauchy-Schwarz, Poincare-Friedrich ve Young eşitsizlikleri, beşinci terim için ise Taylor teoremi ile birlikte Lemma (4.1) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left(T_t^{n+1} - \frac{T^{n+1}-T^n}{\Delta t}, \psi_h^{n+1}\right) &= \left(\frac{\Delta t}{2}T_{tt}(\zeta^*), \psi_h^{n+1}\right)\\ &\leq \frac{\Delta t}{2}\|T_{tt}(\zeta^*)\|C_p\|\nabla \psi_h^{n+1}\|\\ &\leq C_p^2(\Delta t)^2(PrRe)\|T_{tt}(\zeta^*)\|^2 + \frac{1}{16}(PrRe)^{-1}\|\nabla \psi_h^{n+1}\|^2,\end{aligned}$$

ve

$$b^*\left(\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n, T^{n+1}, \psi_h^{n+1}\right) \leq C\Delta t\|\nabla \mathbf{u}_t(\zeta^{**})\|\|\nabla T^{n+1}\|\|\nabla \psi_h^{n+1}\|$$
$$\leq 4C(PrRe)(\Delta t)^2\|\nabla \mathbf{u}_t(\zeta^{**})\|^2\|\nabla T^{n+1}\|^2 + \frac{1}{16}(PrRe)^{-1}\|\nabla \psi_h^{n+1}\|^2,$$

elde edilir. Burada $\zeta^*, \zeta^{**} \in (t^n,\, t^{n+1})$'dir. Bu değerlendirmeler (4.24) denkleminin sağ tarafında kullanılır ve terimler yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\Delta t}\left(\|\psi_h^{n+1}\|^2 - \|\psi_h^n\|^2 + \|\psi_h^{n+1}-\psi_h^n\|^2\right) + \frac{(PrRe)^{-1}}{2}\|\nabla \psi_h^{n+1}\|^2\\ &\leq 4(PrRe)^{-1}\|\nabla \eta_T^{n+1}\|^2 + 2CC_p^2(PrRe)\left[\|\nabla T^{n+1}\|_{L^\infty}^2 + \|T^{n+1}\|_{L^\infty}^2\right]\|\eta_{\mathbf{u}}^n\|^2\\ &+ 2CC_p^2(PrRe)\left[\|\nabla T^{n+1}\|_{L^\infty}^2 + \|T^{n+1}\|_{L^\infty}^2\right]\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|^2 + 4C(PrRe)\|\nabla \mathbf{u}_h^n\|^2\|\nabla \eta_T^{n+1}\|^2\\ &+ C_p^2(PrRe)(\Delta t)^2\|T_{tt}(\zeta^*)\|^2 + 4C(PrRe)(\Delta t)^2\|\nabla T^{n+1}\|^2\|\nabla \mathbf{u}_t(\zeta^{**})\|^2,\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik $2\Delta t$ ile çarpılıp, sol taraftaki üçüncü terim göz ardı edilir ve $n = 0, 1, 2, ..., N-1$ zaman adımları üzerinde toplanırsa,

$$\begin{aligned}&\|\psi_h^N\|^2 - \|\psi_h^0\|^2 + (PrRe)^{-1}\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla \psi_h^{n+1}\|^2\\ &\leq 8(PrRe)^{-1}\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla \eta_T^{n+1}\|^2 + 4CC_p^2(PrRe)\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\left[\|\nabla T^{n+1}\|_{L^\infty}^2 + \|T^{n+1}\|_{L^\infty}^2\right]\|\eta_{\mathbf{u}}^n\|^2\\ &+ 4CC_p^2(PrRe)\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\left[\|\nabla T^{n+1}\|_{L^\infty}^2 + \|T^{n+1}\|_{L^\infty}^2\right]\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|^2\end{aligned}$$

$$+8C(PrRe)\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla \mathbf{u}_h^n\|^2\|\nabla \eta_T^{n+1}\|^2+2C_p^2(PrRe)(\Delta t)^2\left(\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|T_{tt}(\zeta^*)\|^2\right)$$
$$+8C(PrRe)(\Delta t)^2\left(\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla T^{n+1}\|^2\|\nabla \mathbf{u}_t(\zeta^{**})\|^2\right), \tag{4.25}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.25) eşitsizliğinin sağ tarafındaki birinci terim için;

$$\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla \eta_T^{n+1}\|^2 \le \Delta t\sum_{n=0}^{N-1} ch^{2k}|T^{n+1}|_{k+1}^2$$
$$\le ch^{2k}\|T\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}\Delta tN = ch^{2k}\|T\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}\,t^*,$$

ikinci terim için;

$$\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}(\|\nabla T^{n+1}\|^2_{L^\infty}+\|T^{n+1}\|^2_{L^\infty})\|\eta_{\mathbf{u}}^n\|^2$$
$$\le \Delta t\sum_{n=0}^{N-1}(\|\nabla T^{n+1}\|^2_{L^\infty}+\|T^{n+1}\|^2_{L^\infty})ch^{2k+2}|\mathbf{u}(t^n)|^2_{k+1}$$
$$\le ch^{2k+2}\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}(\|\nabla T^{n+1}\|^2_{L^\infty}+\|T^{n+1}\|^2_{L^\infty})$$
$$\le ch^{2k+2}(\|\nabla T\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^\infty)}+\|T\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^\infty)})\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}\,t^*,$$

dördüncü terim için;

$$\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla \mathbf{u}_h^n\|^2\|\nabla \eta_T^{n+1}\|^2 \le \Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla \mathbf{u}_h^n\|^2 ch^{2k}|T(t^{n+1})|^2_{k+1}$$
$$\le ch^{2k}\|T\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla \mathbf{u}_h^n\|^2,$$

beşinci terim için;

$$\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|T_{tt}(\zeta^*)\|^2_{L^\infty(t^n,t^{n+1},L^2)} \le \Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|T_{tt}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)} = \|T_{tt}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}\,t^*,$$

altıncı terim için;

$$\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla T^{n+1}\|^2\|\nabla \mathbf{u}_t(\zeta^{**})\|^2$$
$$\le \Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla T\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^\infty)}\|\nabla \mathbf{u}_t\|^2_{L^\infty(t^n,t^{n+1};L^2)} \le \|\nabla T\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^\infty)}\|\nabla \mathbf{u}_t\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}\,t^*,$$

şeklindedir. Yukarıdaki değerlendirmeler (4.25) eşitsizliğinde dikkate alınırsa bu eşitsizlik;

$$
\begin{aligned}
&\|\psi_h^N\|^2 + (PrRe)^{-1}\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla \psi_h^{n+1}\|^2 \leq \|\psi_h^0\|^2 \\
&+ 4CC_p^2(PrRe)\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left(\|\nabla T^{n+1}\|_{L^\infty}^2 + \|T^{n+1}\|_{L^\infty}^2\right)\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|^2 + 8(PrRe)^{-1}ch^{2k}\|T\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}\,t^* \\
&+ 4CC_p^2(PrRe)ch^{2k+2}\left(\|\nabla T\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^\infty)} + \|T\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^\infty)}\right)\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}\,t^* \\
&+ 8C(PrRe)ch^{2k}\|T\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla \mathbf{u}_h^n\|^2 + 2C_p^2(PrRe)(\Delta t)^2\|T_{tt}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}\,t^* \\
&+ 8C(PrRe)(\Delta t)^2\|\nabla T\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^\infty)}\|\nabla \mathbf{u}_t\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}\,t^*, \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

şeklini alır. (4.23) eşitliğinin sağ tarafındaki terimler de benzer şekilde değerlendirilir. Sağ taraftaki ilk terim için Cauchy-Schwarz ile birlikte Young eşitsizliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
Re^{-1}(\nabla \eta_{\mathbf{u}}^{n+1}, \nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) &\leq Re^{-1}\|\nabla \eta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| \\
&\leq \frac{15}{2}Re^{-1}\|\nabla \eta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + \frac{1}{30}Re^{-1}\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2,
\end{aligned}
$$

elde edilir. İkinci ve üçüncü terimler için ise önce uygun terimler eklenip çıkarılarak

$$
\begin{aligned}
&b(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) - b(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) \\
&= b(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}_h) - b(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) - b(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}_h) \\
&= b(\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) + b(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) \\
&= b(\eta_{\mathbf{u}}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) - b(\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n, \mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) + b(\mathbf{u}_h^n, \eta_{\mathbf{u}}^{n+1}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1})
\end{aligned}
$$

şeklinde yeniden yazılır. Birinci ve ikinci skew-simetrik terimler için önce operatörünün tanımı, daha sonra genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği, Poincare ve Young eşitsizliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
b(\eta_{\mathbf{u}}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) &\leq \frac{1}{2}\left[|(\eta_{\mathbf{u}}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1})| + |(\eta_{\mathbf{u}}^n \cdot \nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})|\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\|\eta_{\mathbf{u}}^n\|\|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}C_p\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| + \frac{1}{2}\|\eta_{\mathbf{u}}^n\|\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty} \\
&\leq \frac{15}{8}Re\left[C_p^2\|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2 + \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2\right]\|\eta_{\mathbf{u}}^n\|^2 + \frac{1}{15}Re^{-1}\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2,
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
b(\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n, \mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) &\leq \frac{1}{2}\left[|(\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1})| + |(\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n \cdot \nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})|\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|\|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty} C_p \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty} \\
&\leq \frac{15}{8} Re\left[C_p^2 \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2 + \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2\right]\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|^2 + \frac{1}{15} Re^{-1}\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2,
\end{aligned}
$$

değerlendirmeleri elde edilir. Son terime Lemma (4.1) ile Young eşitsizliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
b(\mathbf{u}_h^n, \eta_{\mathbf{u}}^{n+1}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) &\leq C\|\nabla \mathbf{u}_h^n\|\|\nabla \eta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| \\
&\leq \frac{15}{2} CRe\|\nabla \mathbf{u}_h^n\|^2\|\nabla \eta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + \frac{1}{30} Re^{-1}\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2,
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.23) eşitliğinin sağ tarafındaki dördüncü terim için Cauchy-Schwarz eşitsizliği ile birlikte

$$
\|\nabla \cdot \mathbf{v}\| \leq \sqrt{d}\|\nabla \mathbf{v}\|, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X} = \mathbf{H}_0^1(\Omega),
$$

değerlendirmesi ve Young eşitsizliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
(p^{n+1} - q_h, \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) &\leq \|p^{n+1} - q_h\|\|\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| \leq \|p^{n+1} - q_h\|\sqrt{d}\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| \\
&\leq \frac{15}{2} dRe\|p^{n+1} - q_h\|^2 + \frac{1}{30} Re^{-1}\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2,
\end{aligned}
$$

elde edilir. Beşinci terime uygun terimler eklenip çıkarılarak önce üçgen eşitsizliği, daha sonra ise Cauchy-Schwarz, Poincare, Young eşitsizlikleri ile birlikte [10]'daki değerlendirme, altıncı terime ise Cauchy-Schwarz, Young eşitsizlikleri ile birlikte $\|\overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n}\| \leq \|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|$ olduğu kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\chi(\eta_{\mathbf{u}}^{n+1} - \overline{\eta_{\mathbf{u}}^n}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) \\
&= \chi\left(\eta_{\mathbf{u}}^{n+1} - \eta_{\mathbf{u}}^n + (\eta_{\mathbf{u}}^n - \overline{\eta_{\mathbf{u}}^n}), \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\right) \\
&\leq \chi\left[|(\eta_{\mathbf{u}}^{n+1} - \eta_{\mathbf{u}}^n, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1})| + |(\eta_{\mathbf{u}}^n - \overline{\eta_{\mathbf{u}}^n}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1})|\right] \\
&\leq \chi\|\eta_{\mathbf{u}}^{n+1} - \eta_{\mathbf{u}}^n\| C_p \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| + \chi\|\eta_{\mathbf{u}}^n - \overline{\eta_{\mathbf{u}}^n}\| C_p \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| \\
&\leq \frac{15}{2}\chi^2 C_p^2 Re\left[\|\eta_{\mathbf{u}}^{n+1} - \eta_{\mathbf{u}}^n\|^2 + ch^{2k}\alpha^2\|\mathbf{u}_t\|_{L^2(t^n, t^{n+1}; L^2)}^2\right] + \frac{1}{15} Re^{-1}\|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2,
\end{aligned}
$$

ve

$$\chi(\overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) \leq \chi \|\overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n}\| \|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| \leq \chi \|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\| \|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| \leq \frac{\chi}{2}\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|^2 + \frac{\chi}{2}\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2,$$

elde edilir. Yedinci ve sekizinci terimlere Cauchy-Schwarz, Poincare-Friedrich ve Young eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned} Ri(\eta_T^n \hat{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) &\leq Ri \|\eta_T^n\| C_p \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| \\ &\leq \frac{15}{2} Ri^2 C_p^2 Re \|\eta_T^n\|^2 + \frac{1}{30} Re^{-1} \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2, \end{aligned}$$

ve

$$Ri(\psi_h^n \hat{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) \leq Ri \|\psi_h^n\| C_p \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| \leq \frac{15}{2} Ri^2 C_P^2 Re \|\psi_h^n\|^2 + \frac{1}{30} Re^{-1} \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2,$$

elde edilir. (4.23)'ün sağ tarafında kalan terimler Taylor teoremi ile birlikte standart eşitsizlikler uygulanarak üstten aşağıdaki şekilde değerlendirilir:

$$\begin{aligned} Ri((T^{n+1} - T^n)\hat{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) &= Ri(\Delta t T_t(\zeta^*), \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) \\ &\leq Ri \Delta t \|T_t(\zeta^*)\| C_p \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| \\ &\leq \frac{15}{2} C_p^2 Ri^2 Re (\Delta t)^2 \|T_t(\zeta^*)\|^2 + \frac{1}{30} Re^{-1} \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2, \\ \left(\mathbf{u}_t^{n+1} - \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\right) &\leq \frac{\Delta t}{2} \|\mathbf{u}_{tt}(\zeta^{**})\| C_p \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| \\ &\leq \frac{15}{8} C_p^2 (\Delta t)^2 Re \|\mathbf{u}_{tt}(\zeta^{**})\|^2 + \frac{1}{30} Re^{-1} \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2, \\ \chi(\mathbf{u}^{n+1} - \overline{\mathbf{u}^n}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) &= \chi\left(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n + (\mathbf{u}^n - \overline{\mathbf{u}^n}), \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\right) \\ &= \chi(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) + \chi(\mathbf{u}^n - \overline{\mathbf{u}^n}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}) \\ &\leq \chi \Delta t \|\mathbf{u}_t(\,\zeta^*)\| C_p \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| + \chi \|\mathbf{u}^n - \overline{\mathbf{u}^n}\| C_p \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\| \\ &\leq \frac{15}{2} \chi^2 C_p^2 Re \big[(\Delta t)^2 \|\mathbf{u}_t\|^2_{L^\infty(t^n, t^{n+1}; L^2)} \\ &\quad + h^{2k} \alpha^2 \|\mathbf{u}(t^n)\|^2_{k+1}\big] + \frac{1}{15} Re^{-1} \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Bu değerlendirmeler (4.23) denkleminin sağ tarafında dikkate alınır benzer terimler düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta t}\left(\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2-\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n}\|^2+\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}-\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n}\|^2\right)+\frac{Re^{-1}}{2}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2+\frac{\chi}{2}(\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2-\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n}\|^2)\\
&\leq\frac{15}{2}Re^{-1}\|\nabla\eta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2+\frac{15}{8}Re\left[C_p^2\|\nabla\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2+\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2\right]\|\eta_{\mathbf{u}}^{n}\|^2\\
&+\frac{15}{8}Re\left[C_p^2\|\nabla\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2+\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2\right]\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n}\|^2+\frac{15}{2}CRe\|\nabla\mathbf{u}_h^{n}\|^2\|\nabla\eta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2\\
&+\frac{15}{2}dRe\|p^{n+1}-q_h\|^2+\frac{15}{2}\chi^2C_p^2Re\left[\|\eta_{\mathbf{u}}^{n+1}-\eta_{\mathbf{u}}^{n}\|^2+ch^{2k}\alpha^2\|\mathbf{u}_t\|_{L^\infty(t^n,t^{n+1};L^2)}^2\right]\\
&+\frac{15}{2}Ri^2C_p^2Re\|\eta_T^{n}\|^2+\frac{15}{2}Ri^2C_P^2Re\|\psi_h^{n}\|^2+\frac{15}{2}C_p^2Ri^2Re(\Delta t)^2\|T_t\|^2\\
&+\frac{15}{8}C_p^2Re(\Delta t)^2\|\mathbf{u}_{tt}\|^2+\frac{15}{2}\chi^2C_p^2Re(\Delta t)^2\|\mathbf{u}_t\|_{L^\infty(t^n,t^{n+1};L^2)}^2+\frac{15}{2}\chi^2C_p^2Reh^{2k}\alpha^2\|\mathbf{u}(t^n)\|_{k+1}^2,
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlik $2\Delta t$ ile çarpılıp, sol taraftaki üçüncü terim göz ardı edilir ve $n=0,1,2,...,N-1$ zaman adımları üzerinde toplanırsa,

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{N}\|^2+\chi\Delta t\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{N}\|^2+Re^{-1}\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2\leq\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{0}\|^2+\chi\Delta t\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{0}\|^2\\
&+15Re^{-1}\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla\eta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2+\frac{15}{4}Re\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\left[C_P^2\|\nabla\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2+\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2\right)\|\eta_{\mathbf{u}}^{n}\|^2\\
&+\frac{15}{4}Re\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\left[C_P^2\|\nabla\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2+\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2\right]\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n}\|^2+15CRe\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla\mathbf{u}_h^{n}\|^2\|\nabla\eta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2\\
&+15dRe\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|p^{n+1}-q_h\|^2+15\chi^2C_p^2Re\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\left[\|\eta_{\mathbf{u}}^{n+1}-\eta_{\mathbf{u}}^{n}\|^2+ch^{2k}\alpha^2\|\mathbf{u}_t\|_{L^\infty(t^n,t^{n+1};L^2)}^2\right]\\
&+15Ri^2C_p^2Re\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\eta_T^{n}\|^2+15Ri^2C_p^2Re\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\psi_h^{n}\|^2+15C_p^2Ri^2Re(\Delta t)^2\left(\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|T_t\|^2\right)\\
&+\frac{15}{4}C_p^2Re(\Delta t)^2\left(\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\mathbf{u}_{tt}\|_{L^\infty(t^n,t^{n+1};L^2)}^2\right)+15\chi^2C_p^2Re(\Delta t)^2\left(\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\mathbf{u}_t\|_{L^\infty(t^n,t^{n+1};L^2)}^2\right)\\
&+15\chi^2C_p^2Reh^{2k}\alpha^2\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\mathbf{u}(t^n)\|_{k+1}^2,
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

eşitsizliği elde edilir. Dikkat edelim ki (4.27) eşitsizliğinin sağ tarafındaki üçüncü terimi için;

$$
\begin{aligned}
\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla\eta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2&\leq\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}ch^{2k}|\mathbf{u}(t^{n+1})|_{k+1}^2\\
&\leq ch^{2k}\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2\Delta tN=ch^{2k}\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2\,t^*,
\end{aligned}
$$

dördüncü terimi için;

$$\begin{aligned}
&\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left(C_p^2 \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2 + \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2\right) \|\eta_{\mathbf{u}}^n\|^2 \\
&\leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left(C_p^2 \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2 + \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2\right) ch^{2k+2} |\mathbf{u}(t^n)|_{k+1}^2 \\
&\leq ch^{2k+2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2 \left(C_p^2 \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty(0,\,t^*,L^\infty)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,\,t^*,L^\infty)}^2\right) t^*,
\end{aligned}$$

altıncı terimi için;

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla \mathbf{u}_h^n\|^2 \|\nabla \eta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 &\leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} ch^{2k} |\mathbf{u}(t^n)|_{k+1}^2 \|\nabla \mathbf{u}_h^n\|^2 \\
&\leq ch^{2k} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2 \, \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla \mathbf{u}_h^n\|^2,
\end{aligned}$$

yedinci terimi için;

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|p^{n+1} - q_h\|^2 &\leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} ch^{2k} |p(t^{n+1})|_{k+1}^2 \\
&\leq ch^{2k} \|p\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2 \Delta t N = ch^{2k} \|p\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2 \, t^*,
\end{aligned}$$

sekizinci terimi için

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\eta_{\mathbf{u}}^{n+1} - \eta_{\mathbf{u}}^n\|^2 &\leq 2\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left[\|\eta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + \|\eta_{\mathbf{u}}^n\|^2\right] \\
&\leq 2\, c\, h^{2k+2}\, \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left[|\mathbf{u}(t^{n+1})|_{k+1}^2 + |\mathbf{u}(t^n)|_{k+1}^2\right] \\
&\leq 4\, c\, h^{2k+2}\, \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{u}(t^{n+1})|_{k+1}^2 = 4c\, h^{2k+2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,t^*;H^{k+1})}^2 \, t^*
\end{aligned}$$

dokuzuncu terimi için;

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\eta_T^n\|^2 &\leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} ch^{2k+2} |T(t^n)|_{k+1}^2 \\
&\leq ch^{2k+2} \|T_t\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2 \Delta t N = ch^{2k+2} \|T_t\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2 \, t^*,
\end{aligned}$$

on birinci terimi için;

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|T_t\|^2 \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|T_t\|^2_{L^\infty(t^n,t^{n+1};L^2)} \leq \Delta t \|T_t\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)} N = \|T_t\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}\, t^*,$$

on ikinci terimi için;

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{u}_{tt}\|^2_{L^\infty(t^n,t^{n+1};L^2)} \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{u}_{tt}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)} = \|\mathbf{u}_{tt}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}\, t^*,$$

on üçüncü terimi için;

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{u}_{t}\|^2_{L^\infty(t^n,t^{n+1};L^2)} \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{u}_{t}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)} = \|\mathbf{u}_{t}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}\, t^*,$$

on dördüncü terimi için;

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{u}(t^n)\|^2_{k+1} \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})} = \|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}\, t^*,$$

şeklindedir. O halde (4.27) eşitsizliği;

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^N\|^2 + \chi\Delta t\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^N\|^2 + Re^{-1}\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla \boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2 \leq \|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^0\|^2 + \chi\Delta t\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^0\|^2 \\
&+ \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} Re\big[15Ri^2C_p^2\|\psi_h^n\|^2 + \frac{15}{4}\big(C_p^2\|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|^2_{L^\infty} + \|\mathbf{u}^{n+1}\|^2_{L^\infty}\big)\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|^2\big] \\
&+ 15\chi^2C_p^2Re(4\; ch^{2k+2}\;\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})} + ch^{2k}\alpha^2\|\mathbf{u}_t\|^2_{L^\infty(t^n,t^{n+1};L^2)})\; t^* \\
&+ 15Re^{-1}ch^{2k}\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}\; t^* + \frac{15}{4}Re\; ch^{2k+2}\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}(C_p^2\|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^\infty)} \\
&+ \|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^\infty)})\; t^* + 15\,C\,Re\; ch^{2k}\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla \mathbf{u}_h^n\|^2 \\
&+ 15d\; Re\; ch^{2k}\|p\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}\; t^* + 15\,Ri^2C_p^2\,Re\; ch^{2k+2}\|T_t\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}\; t^* \\
&+ 15C_p^2Ri^2Re\;(\Delta t)^2\|T_t\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}t^* + \frac{15}{4}C_p^2Re(\Delta t)^2\|\mathbf{u}_{tt}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}\; t^* \\
&+ 15\chi^2C_p^2Re(\Delta t)^2\|\mathbf{u}_t\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}\; t^* + 15\chi^2C_p^2Re\; h^{2k}\alpha^2\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}t^*, \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^0\| = 0$ ve $\|\psi_h^0\| = 0$ olduğu kullanılarak (4.26) ve (4.28) eşitsizlikleri toplanılsın.

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^N\|^2 + \|\psi_h^N\|^2 + \chi\Delta t\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^N\|^2 + \Delta t\sum_{n=0}^{N-1}(Re^{-1}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2 + (PrRe)^{-1}\|\nabla\psi_h^{n+1}\|^2)\\
&\leq \Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\Bigg[15Ri^2C_p^2Re\,\|\psi_h^n\|^2 + \frac{15}{4}Re\,(C_p^2\|\nabla\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2 + \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty}^2)\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h\|^2\\
&+4CC_p^2(PrRe)(\|\nabla T^{n+1}\|_{L^\infty}^2 + \|T^{n+1}\|_{L^\infty}^2)\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^n\|^2\Bigg] + 15\,\chi^2C_p^2Re\,(4\,c\,h^{2k+2}\,\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2\\
&+c\,h^{2k}\,\alpha^2\|\mathbf{u}_t\|_{L^\infty(t^n,t^{n+1};L^2)}^2)\,t^* + c\,h^{2k}(15\,Re^{-1}\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2 + 8(PrRe)^{-1}\|T\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2)\,t^*\\
&+c\,h^{2k+2}\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2\Bigg[\frac{15}{4}Re(C_p^2\|\nabla\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^\infty(0,\,t^*;L^\infty)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,\,t^*;L^\infty)}^2)\\
&+4CC_p^2(PrRe)(\|\nabla T\|_{L^\infty(0,\,t^*;L^\infty)}^2 + \|T\|_{L^\infty(0,\,t^*;L^\infty)}^2)\Bigg]\,t^* + ch^{2k}(15\,CRe\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2\\
&+8\,C\,(PrRe)\|T\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2)\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla\mathbf{u}_h^n\|^2 + 15\,d\,Re\;ch^{2k}\|p\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2\,t^*\\
&+15\,Ri^2C_p^2Re\;ch^{2k+2}\|T_t\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2t^* + 15\,C_p^2Ri^2\,Re(\Delta t)^2\|T_t\|_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}^2)\,t^*\\
&+C_p^2(\Delta t)^2\left(\frac{15}{4}Re\|\mathbf{u}_{tt}\|_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}^2 + 2(PrRe)\|T_{tt}\|_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}^2\right)t^*\\
&+15\chi^2C_p^2Re(\Delta t)^2\|\mathbf{u}_t\|_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}^2\,t^* + 15\chi^2C_p^2Re\,h^{2k}\alpha^2\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,\,t^*;H^{k+1})}^2)t^*\\
&+8C(PrRe)(\Delta t)^2\|\nabla T\|_{L^\infty(0,\,t^*;L^\infty)}^2\|\nabla\mathbf{u}_t\|_{L^\infty(0,\,t^*;L^2)}^2\,t^*. \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

(4.29) denkleminin sol tarafındaki 3. terim göz ardı edilir, Ayrık Gronwall Lemma uygulanır ve kararlılık analizinden elde edilen sonuç kullanılsın. Son eşitsizlikte, kararlılık analizinden elde edilen üstten değerlendirmeler sağ taraftaki birinci terim için dikkate alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^N\|^2 + \|\psi_h^N\|^2 + \Delta t\sum_{n=0}^{N-1}&(Re^{-1}\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^{n+1}\|^2 + (PrRe)^{-1}\|\nabla\psi_h^{n+1}\|^2)\\
&+\chi\Delta t\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_h^N\|^2 \leq C(h^4 + \Delta t^2), \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada C genel sabit olup h ve Δt'den bağımsızdır. Son olarak üçgen eşitsizliğinin uygulanmasıyla,

$$
\|\mathbf{e}_\mathbf{u}^N\|^2 + \|e_T^N\|^2 + \Delta t\sum_{n=0}^{N-1}(Re^{-1}\|\nabla\mathbf{e}_\mathbf{u}^{n+1}\|^2 + (PrRe)^{-1}\|\nabla e_T^{n+1}\|^2)
$$

$$+\chi\Delta t\|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}^{N}\|^{2} \leq 2(\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_{h}^{N}\|^{2}+\|\eta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^{2})+2(\|\psi_{h}^{N}\|^{2}+\|\eta_{T}^{n+1}\|^{2})$$
$$+2\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\Bigg[Re^{-1}\left(\|\nabla\boldsymbol{\mathcal{S}}_{h}^{n+1}\|^{2}+\|\nabla\eta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^{2}\right)$$
$$+(PrRe)^{-1}\left(\|\nabla\psi_{h}^{n+1}\|^{2}+\|\nabla\eta_{T}^{n+1}\|^{2}\right)\Bigg], \tag{4.31}$$

ve sağ tarafta (4.30) değerlendirmesi göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

5. SAYISAL DENEYLER

Bu bölüm teorik matamatiksel analizden elde edilen yakınsaklık oranlarını ve önerilen şemayı test etmek için iki sayısal deney sunmaktadır. İlk önce yakınsaklık oranlarını test edilecek, daha sonra ise algoritmanın etkinliği Marsigli deneyinde test edilecektir. Bu bölümde elde edilen sayısal deneylerin sonuçları *International Conference on Mathematics and Its Applications in Science and Engineering (ICMASE), 9-10 June, 2020* konferansında tam metin olarak sunulmuştur [13].

5.1. YAKINSAKLIK ORAN TESTİ

Bu bölümde yakınsaklık analizinden elde eldilen zamana ve uzaya göre yakınsaklık oranlarını test edilmiştir. Bunun için iki boyutlu uzayda $(0,1)\times(0,1)$ bölgesi üzerinde çalışılmış, gerçek hız, basınç ve sıcaklık değişkenleri ise

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi(y-t)) \\ \sin(\pi(x+t)) \end{pmatrix} \exp(t),$$
$$p(\mathbf{x},t) = \sin(x+y)(1+t^2),\ \ T(\mathbf{x},t) = \sin(\pi x) + y\exp(t),$$

şeklinde alınmıştır. Bu analitik çözümler (1.1) sisteminde göz önüne alınarak $\mathbf{f}$ ve γ kuvvet fonksiyonları hesaplanmıştır. Bunun yanı sıra, boyutsuz akışkan parametreleri, filtre yarıçapı ve rahatlatma parametresi $(Re)^{-1} = (PrRe)^{-1} = Ri = 1,\ \alpha = \mathcal{O}(h), \chi = \mathcal{O}(\Delta t)$ şeklinde seçilmiş, sınır koşulları olarak da gerçek çözümlerin sınırda sağladıkları değerler alınmıştır.

Önce uzaydaki yakınsaklık oranlarını doğrulanmıştır. Bunun için son zaman $t^* = 0.001$ ve zaman adımı $\Delta t = 0.0001$ olarak sabitlenmiş, daha sonra ise uzaydaki zaman adımını her bir hesaplamada 2'ye bölünerek Teorem (4.2)'de elde edilen hatalar $H^1(\Omega)$ normunda hesaplanmıştır. Bu hesaplamalardan elde edilen sonuçlar Çizelge (5.1)'de sunulmuştur ki bu sonuçlar Teorem (4.2)'de elde edilen teorik sonuçlarla uyumludur.

Benzer şekilde zamana göre yakınsaklık oranlarının test edilebilmesi için uzay adımını $h = 1/64$'e sabitleyip son zamanı $t^* = 1$ alarak ve her bir adımda zaman adımını 2'ye bölerek hatalar ve yakınsaklık oranları yine $H^1(\Omega)$ normunda hesaplanmıştır. Bu hesaplamalardan

Çizelge 5.1. Uzaya göre hız-sıcaklık hataları ve yakınsaklık oranları.

h	$\|\|\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|\|\|_{2,1}$	Oran	$\|\|\|T-T_h\|\|\|_{2,1}$	Oran
$1/4$	2.2701e-3	- - -	1.6005e-3	- - -
$1/8$	5.7243e-4	1.9876	4.02747e-4	1.9905
$1/16$	1.4299e-4	2.0012	1.0087e-4	1.9974
$1/32$	3.5717e-5	2.0012	2.5229e-5	1.9993
$1/64$	8.9283e-6	2.0002	6.3080e-6	2.0015

elde edilen sonuçlar Çizelge (5.2)'de sunulmuştur.

Çizelge 5.2. Zamana göre hız-sıcaklık hataları ve yakınsaklık oranları.

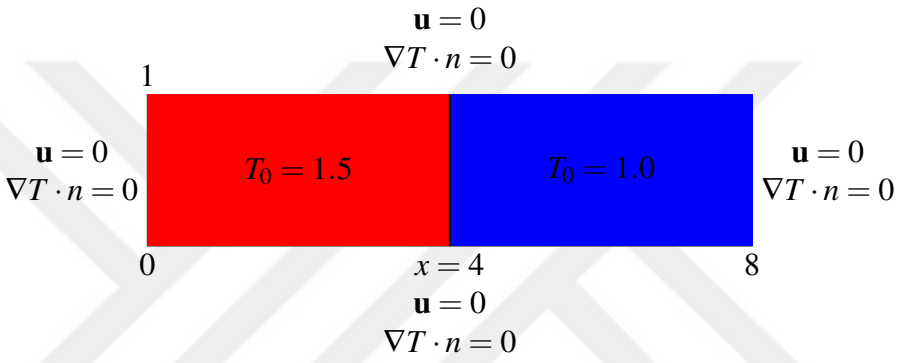
Δt	$\|\|\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|\|\|_{2,1}$	Oran	$\|\|\|T-T_h\|\|\|_{2,1}$	Oran
$1/4$	2.3992e-1	- - -	2.2850e-2	- - -
$1/8$	1.3877e-1	0.7900	1.14507e-2	0.9967
$1/16$	7.2666e-2	0.9333	5.7067e-3	1.0046
$1/32$	3.6915e-2	0.9771	2.84988e-3	1.0018
$1/64$	1.8579e-2	0.9905	1.4329e-3	0.9920

5.2. LUİGİ FERDİNANDO MARSİGLİNİN YERÇEKİMİ KARARLI, İKİ KATMANLI AKIŞIN FİZİKSEL MODELİ

Karadeniz ile İstanbul Boğazı arasında akan İstanbul Boğazı'ndaki alt akıntı, yerçekimi kaynaklı akıntıların örneklerinden biridir. 1679'da Marsigli, bu akımın yoğunluk farklılıklarından kaynaklandığını ortaya çıkardı. Bir laboratuvar deneyi yaptı: bir kap başlangıçta bir bölmeye bölündü. Sol tarafta Boğaz'daki alt akıntıdan alınan boyalı su, sağ tarafta ise Karadeniz'deki yüzey suyu yoğunluğunda su bulunuyordu. Ortaya çıkan akışı gözlemlemek için bölmeye iki delik yerleştirildi. Alt delikten geçen akış, Boğaz'da alt akıntı yönünde, üst delikten geçen akış ise yüzey akış yönünde olmuştur [5].

Bu sayısal testte amaç, 1679'da Marsigli tarafından açıklanan bu fiziksel durumun simülasyonunu yapmaktır. Problemin kurulumunda, H. Johnston ve çalışma arkadaşları tarafından yazılan, [6] makale takip edilmiştir.
Problemin kurulumu şu şekilde verilmiştir [6]:

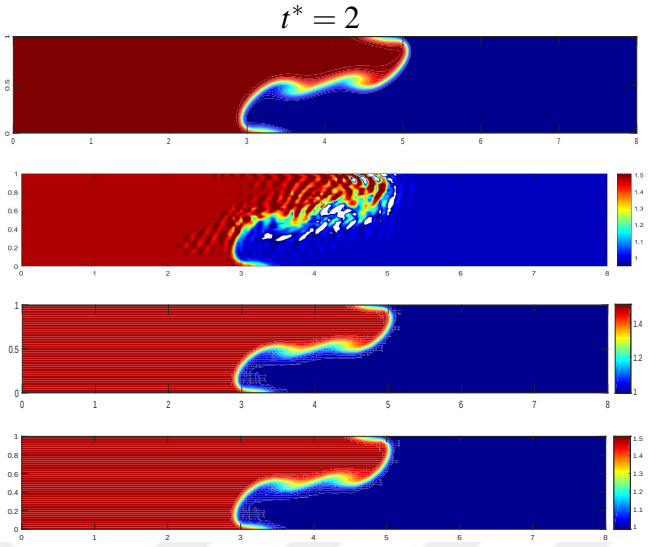
- Üzerinde çalışılan bölge $\Omega = [0,8] \times [0,1]$'dir ve $x = 4$'te bir ayraç ile ikiye bölünmüştür.
- Bölgenin sınırı üzerinde $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$'dır.
- Bölgenin alt ve üst sınırları üzerinde sıcaklık alışverişi yoktur. Bu nedenle, bu sınırlar üzerinde homojen Neumann sınır koşulları uygulanmıştır: $\nabla T \cdot n = 0$.
- $t = 0$ anında akışkan hareketsizdir. Bu nedenle $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0 = 0$'dır.
- $t = 0$'da kutunun sol yarısındaki akışkanın sıcaklığı $T_0 = 1.5$ $(x \leq 4)$ ve sağ yarsındaki akışkan için ise $T_0 = 1.0$ $(x > 4)$ şeklinde seçilmiştir.
- Boyutsuz akış parametreleri $Re = 1.000$, $Ri = 4$, $Pr = 1$ olarak alınmıştır.



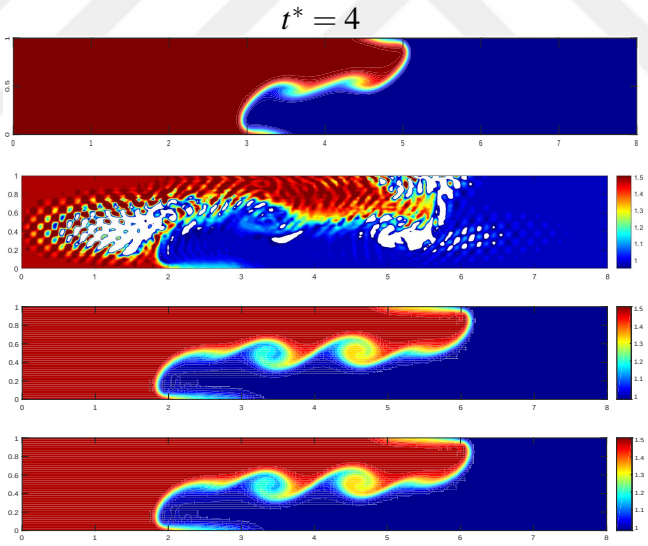
Şekil 5.1. Marsigli Sayısal Deney Şeması.

Önce (1.1) sisteminin doğrudan sayısal simülasyonu, ki bu (DSS) olarak adlandırılır, yapılmıştır. Bunun için hız-basınç-sıcaklık sonlu elemanlar uzayı (P_2, P_1, P_2), zaman adımı ise $\Delta t = 0.01$ olarak seçilmiştir. Bu simülasyonda 541.743 sonlu eleman kullanılmıştır. Daha sonra ise hem (1.1) sisteminin hem de tezde önerilen algoritmanın çözümleri zaman adımı $\Delta t = 0.005$ alınarak aynı ağ üzerinde 57.174 sonlu eleman kullanılarak hesaplanmıştır. Algoritmanın çözümlerinin hesaplanmasında ihtiyaç duyulan parametreler $\chi = \Delta t$, $\alpha = \mathcal{O}(h)$ şeklinde alınmıştır. Karşılaştırma için $t^* = 2,\ 4,\ 8$'de elde edilen sonuçlar kullanılmıştır. Bu hesaplamalardan elde edilen sonuçlar Şekil 5.2- Şekil 5.4'te sunulmuştur. Bu şekillerdeki ilk resimler (1.1) siteminin doğrudan simülasyonun ince bir ağ üzerinde, ikinci resimler ise kaba ağ üzerinde elde edilen sonuçlarını göstermektedir. Aynı şekillerde verilen son iki resimler ise önerilen algoritmanın a_{D_0} ve a_{D_1} gösterge fonksiyonları kullanılarak elde edilmiştir. Bu sonuçlardan da görüleceği gibi $t^* = 2,\ 4,\ 8$ zamanlarında önerilen algoritmanın daha kaba bir ağ üzerinde, çok daha ince bir ağ üzerinde elde edilen DSS'in akış düzenini ve sıcaklık dağılımını çok iyi yakaladığı açıkça

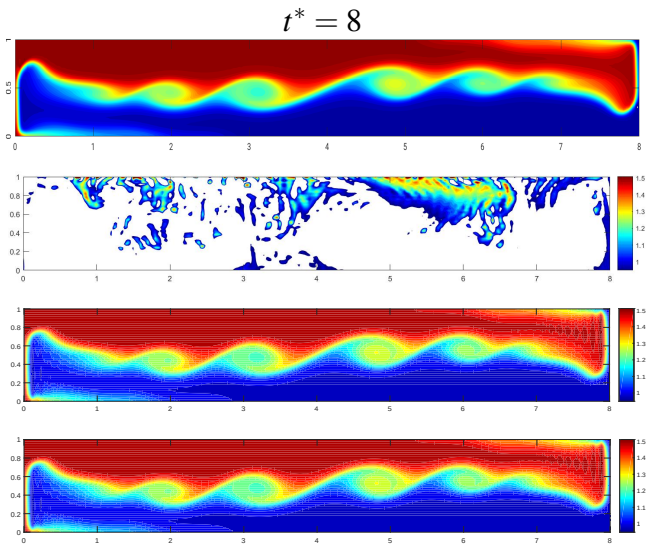
görülmektedir. Diğer taraftan kaba ağdaki DSS sonuçları zaman ilerledikçe çok zayıf sıcaklık çözümler oluşturur ve bu çözümlerin önemli salınımlar yaptığı görülmektedir.



Şekil 5.2. İnce ağ üzerinde DSS, aynı kaba ağ üzerinde DSS ve a_{D_0}, a_{D_1} gösterge fonksiyonları ile Algoritma 4.1'nin sıcaklık eğrileri.



Şekil 5.3. İnce ağ üzerinde DSS, aynı kaba ağ üzerinde DSS ve a_{D_0}, a_{D_1} gösterge fonksiyonları ile Algoritma 4.1'nin sıcaklık eğrileri.



Şekil 5.4. İnce ağ üzerinde DSS, aynı kaba ağ üzerinde DSS ve a_{D_0}, a_{D_1} gösterge fonksiyonları ile Algoritma 4.1'nin sıcaklık eğrileri.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, çoklu fizik problemlerinden biri olan sıkıştırılamaz, izotermal olamayan akışkanların bir modellemesi üzerinde çalışılmış ve bu modelin zamana göre geri fark Euler, uzaya göre ise sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yaklaşık çözümleri hesaplanmıştır. Önerilen algoritma her bir zaman adımında Navier-Stokes denklemlerini ısı denklemlerinden ayırarak çözmüştür. Önerilen algoritmanın sonlu zaman aralığı üzerinde sayısal analizi yapılmıştır. Bu aralık üzerinde yaklaşık çözümlerin zaman adımı üzerinde bir koşul olmaksızın kararlı olduğu gösterilmiş, buna ek olarak $h \to 0$ ve $\Delta t \to 0$ için bu yaklaşık çözümlerin gerçek çözümlere optimal yakınsaklık hızlarında yakınsak olduğu gösterilmiştir. Teorik analizden elde edilen yakınsaklık oranları sayısal bir test üzerinde doğrulanmış ve algoritmanın etkinliği Marsigli deneyi üzerinde gösterilmiştir.

7. KAYNAKLAR

[1] W. Layton, *Introduction to the Numerical Analysis of Incompressible Viscous Flows,* Berlin, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.

[2] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, New York: Academic Press, 2003.

[3] V. John, *Finite Element Methods for Incompressible Flow Problems,* Berlin: Springer Verlag, 2016.

[4] H. Kızmaz, *Fonksiyonel Analize Giriş,* Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 1993.

[5] B. Soffientino, M. E. Q. Pilson, "The bosporus strait: A special place in the history of oceanography", *Oceanography*, *c. 18, sayı 2*, ss. 1-8, 2005.

[6] J.-G. Liu, C. Wang ve H. Johnston, "A fourth order scheme for incompressible boussinesq equations", *Journal of Scientific Computing*, *c. 18*, ss. 253-285, Nisan, 2003.

[7] A. V. Kolmogorov, "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers", *Doklady Akademii Nauk*, *sayı 30*, ss. 9-13, 1941.

[8] A. Bowers, L. Rebholz, "Numerical study of a regularization model for incompressible flow with deconvolution-based adaptive nonlinear filtering", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *c. 258*, ss. 1-12, 2013.

[9] M. Akbaş, L. G. Rebholz, "Modular grad-div stabilization for the incompressible non-isothermal fluid flows", *Applied Mathematics and Computation*, *c. 393*, 2021.

[10] A. Takhirov, M. Neda ve J. Waters, "Modular non-linear filter based time relaxation scheme for high reynolds number flows", *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, *c. 15, sayı 4-5*, ss. 699-714, 2018.

[11] J. Qin, "On the convergence of some low order mixed finite elements for incompressible fluids", Pennsylvania State University: State College, PA 16801, United States of America, 1994.

[12] D. N. Arnold, J. Qin, "Quadratic velocity/linear pressure stokes elements", Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations VII, Penn State University, Üniversite Park, PA 16802, ss. 28-34, Haziran, 1992.

[13] M. Akbaş, B. İngenç, "Numerical analysis of an adaptive non-linear filter based time regularization model for the incompressible non-isothermal fluid flows", International Conference on Mathematics and Its Applications in Science and Engineering, ss. 131-136, Temmuz, 2020.

[14] N. A. Adams, S. Stolz, "Deconvolution methods for subgrid-scale approximation in large-eddy simulation", Modern Simulation Strategies for Turbulent Flow, R.T. Edwards, 2001.

[15] N. A. Adams, S. Stolz, "A subgrid-scale deconvolution approach for shock capturing", Journal of Computational Physics, c. 178, sayı 2, ss. 391-426, 2002.

[16] N. A. Adams, S. Stolz ve L. Kleiser, "The approximate deconvolution model for large-eddy simulations of compressible flows and its application to shock-turbulent-boundary-layer interaction", Physics of Fluids, c. 13, sayı 10, ss. 2985-3001, 2001.

[17] N. A. Adams, S. Stolz ve L. Kleiser, "An approximate deconvolution model for large-eddy simulation with application to incompressible wall-bounded flows", Physics of Fluids, c. 13, sayı 4, ss. 997-1015, 2001.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Buse İNGENÇ

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Matematik	Gazi Üniversitesi	2019
Lise		Akçakoca Anadolu Lisesi	2015